AUTOMORFISME GRAF PIRAMIDA DAN GRAF BERLIAN

SKRIPSI

OLEH
IMROATUL MUKARROMAH
NIM. 09610117

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

AUTOMORFISME GRAF PIRAMIDA DAN GRAF BERLIAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Imroatul Mukarromah
NIM. 09610117

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

AUTOMORFISME GRAF PIRAMIDA DAN GRAF BERLIAN

SKRIPSI

Oleh
IMROATUL MUKARROMAH
NIM. 09610117

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 7 Oktober 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP.19751006200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

AUTOMORFISME GRAF PIRAMIDA DAN GRAF BERLIAN

SKRIPSI

Oleh
IMROATUL MUKARROMAH
NIM. 09610117

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Oktober 2015

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	…………………..
Ketua Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	…………………..
Sekretaris Penguji	: Drs. H. Turmudi, M.Si	…………………..
Anggota Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	…………………..

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Imroatul Mukarromah
NIM	: 09610117
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Automorfisme Graf Piramida dan Graf Berlian.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 Oktober 2015
Yang membuat pernyataan,

Imroatul Mukarromah
NIM. 09610117

MOTO

“Demi masa. Sesungguhnya manusia itu benar-benar berada dalam kerugian. Kecuali orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal shaleh dan nasihat menasihati supaya mentaati kebenaran dan nasihat menasihati supaya menetapi kesabaran” (QS. Al ‘Ashr/103:1-3).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk

orang-orang yang telah memberikan arti bagi hidup penulis.

Teruntuk suami tercinta Ahmad Muhlishin yang secara batiniyyah selalu mendukung penulis dalam segala hal termasuk dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

orang tua penulis, ibunda Masluchah dan ayahanda Maliki Thohir yang paling berjasa dan selalu menjadi motivator serta penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil.

Adik tersayang Muhammad Fauzan Abdurrohman sebagai motivasi agar lebih semangat untuk menuntut ilmu.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayahnya-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. H. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta pembimbing II, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'* atas kesabaran dalam membimbing penulis.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku pembimbing I penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan kesabarannya, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Suami tercinta yang dengan sabar membimbing penulis. Ayah dan ibu yang selalu memberikan doa yang tiada henti, senantiasa memberi motivasi dan mencukupi materi penulis sampai saat ini. Adik tercinta yang menjadi penyemangat bagi penulis.
7. KH. Marzuki Mustamar, Ibu Nyai Umi Saidah selaku pengasuh penulis di Ponpes Sabilurrosyad yang senantiasa mendukung penulis untuk segera menyelesaikan studi.
8. Sahabat-sahabat penulis dan seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2009 yang telah berjuang bersama untuk mencapai kesuksesan.
9. Choiriyatun Hanifah, Ika Zulfa, Kafila A.H, Santi T.M, Ayu M.Z, Kholishotus S, Ana N., Ida I., Fellicia L., Hermi I., Ni'matul Ula., Wahdatun H., Syifaur R dan teman- teman pondok Sabilurrosyad yang telah memberikan banyak dukungan.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiil.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Oktober 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Mukarromah, Imroatul. 2015. **Automorfisme Graf Piramida dan Graf Berlian**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: automorfisme graf, graf piramida (Pr_n), graf berlian (Dn_n).

Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain, automorfisme graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau sisi-sisi dari graf $G, E(G)$ yang menghasilkan graf yang isomorfik dengan dirinya sendiri. Untuk mencari automorfisme pada suatu graf dilakukan dengan menentukan semua kemungkinan fungsi yang 1-1, onto, dan isomorfisme dari himpunan titik pada graf tersebut.

Permasalahan yang diangkat dalam penulisan ini adalah bagaimanakah automorfisme dari graf piramida dan graf berlian. Metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka *(library research)*, dengan langkah-langkah sebagai berikut: (1) merumuskan masalah; (2) nggambarkan graf piramida dan graf berlian; (3) memberikan label pada setiap titik dari masing-masing graf; (4) menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto; (5) memilah fungsi yang automorfisme; (6) Menyelidiki automorfisme dari graf piramida dan graf berlian.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh sebanyak 6 fungsi yang automorfisme dari graf piramida (Pr_n) pada dirinya sendiri yaitu $\beta : V(Pr_n) \to V(Pr_n)$ yang di definisikan dengan $\beta\,(u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Pr_n)$. Grup automorfisme pada graf piramida (Pr_n) isomorfik dengan grup dihedral berorder 6 (D_3). Sebanyak 4 fungsi yang automorfisme dari graf berlian (Dn_1) pada dirinya sendiri yaitu $\gamma : V(Dn_1) \to V(Dn_1)$ yang diidefinisikan dengan $\gamma\,(u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Dn_1)$. Dan sebanyak 2 fungsi yang automorfisme dari graf berlian $(Dn_n)\,\forall n \geq 2$, pada dirinya sendiri yaitu $\gamma : V(Dn_n) \to V(Dn_n)$ yang di definisikan dengan $\gamma\,(u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Dn_n)$ yang memuat pemetaan fungsi identitas dan refleksi graf pada sumbu yang melalui titik 1.

ABSTRACT

Mukarromah, Imroatul. 2015. **Automorphism of Pyramid and Diamond Graph. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and** Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keyword: graph automorphism, pyramid graph (Pr_n), diamond graph (Dn_n).

An automorphism on one particular graph G is an isomorphism of graph$G$ to itself. In another word, graph automorphism on graph$G$ represents a permutation of vertices set $V(G)$ or edges set $E(G)$ of graph $G$to itself. To determine automorphism at one particular graph in circuit, is usually conducted by determining all possibility of function which is 1-1, onto, and isomorphism of vertices set at graph.

The problem in this thesis is how to determine the automorphism from pyramid and diamond graph. The research method that is used in this thesis is library research with the following research steps: (1) formulating problem ; (2) drawing a pyramid and diamond graph; (3) giving vertex label of each vertices at each graph; (4) determining all of possibility of 1-1 and onto function for each graph; (5) classifying the automorphic function; (6) identifying the automorphic function from pyramid and diamod graph.

Based on result of solution it can be concluded that there are six automorphic functions of pyramid graph $(Pr_n)\beta : V(Pr_n) \to V(Pr_n)$ which is defined by $\beta(u,v) = (\beta(u), \beta(v))$, $\forall(u,v) \in E(Pr_n)$, and the automorphism from pyramid graph is isomorphic with the dihedral group (Dn_3). There are four automorphic functions of diamond graph $(Dn_1)\gamma : V(Dn_1) \to V(Dn_1)$ which is defined by $\gamma(u,v) = (\gamma(u), \gamma(v))$, $\forall(u,v) \in E(Dn_1)$. And there are two automorphic functions of diamond graph $(Dn_n)\,\gamma : V(Dn_n) \to V(Dn_n)$,$\forall n \geq 2$ which is defined by $\gamma(u,v) = (\gamma(u), \gamma(v))$, $\forall(u,v) \in E(Dn_n)$ which contains mapping identity function and reflection graph on an vertices from the one.

ملخص

المكرمة، امرأة. ٢٠١٥. **أوتومورفيسم من المخطط الهرم والماس**. البحث الجامعي. الشعبة الرِيَاضِيَّات، كلية العلوم و تِكْنُوْلُوجِيَا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) ترمذي الماجستر (٢) عبد الشاكر الماجستر.

الكلمة المفتاحية:أوتومورفيسم المخطط ، مخطط لهرم($\mathrm{Pr_n}$)، مخطط الماس($\mathrm{Dn_n}$)

أوتواموروفيسم المخطط معين G في إيسواموارفيسم المخطط G لنفسها. في معنى الأخر، أوتواموروفيسم المخطط في تبديل لمجموعة الرؤوس $V(G)$ أو مجموعة الأضلاع $E(G)$ من المخطط G إلى نفسه. إما لطلب أوتواموروفيسم في المخطط نقوم بتحديد كل ممكين لدالة التي كانت ١-١، اونتوا، و إيسواموارفيسم من جموعة الرؤوس المخطط.

المشكلة في هذه الاطرحة هو التحديد من أوتومورفيسم من المخطط الهرم والماس.
إستعملت الباحثة لهذا البحث بمنهج "الدراسة المكتبية" *(Library Research)*،أما خطوات هذا البحث هي: (١) صياغةالمشكلة، (٢) تصوير مخطط الهرم والماس، (٣) إعطاء تسمية قمة لكل الرؤوس في كل مخطط، (٤) تحديد كل ممكين الدالة ١–١ وأونتوا، (٥) احتار الفوغسي الأوتواموروفيسم، (٦) التفتيش لأوتواموروفيسم من المخطط الهرم والماس.

بتحصل البحث، نال أوتواموروفيسم من من المخطط الهرم (Pr_n) لنفسه هو $\beta : V(Pr_n) \to V(Pr_n)$ الذي نال بتعريف $\beta\,(u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$ ، $\forall (u,v) \in$ $E(Pr_n)$ حول ٦ فوغسي, و أوتواموروفيسم المخطط الهرم هي إيسواموارفيك مع مجمعة تنائي السطح . أما أوتواموروفيسم من المخطط لماس(Dn_n) لنفسه هو $\gamma : V(Dn_1) \to V(Dn_1)$الذي نال بتعريف $\big(\gamma(u), \gamma(v)\big) = \gamma\,(u,v)$ ، $\forall (u,v) \in E(Dn_1)$ حول ٤ فوغسي. وأوتواموروفيسم من من المخطط الهرم والماس(Dn_n) هو $\forall n \geq 2$ (Dn_n)، أما لنفسة هو $\gamma : V(Dn_n) \to V(Dn_n)$ الذي نال بتعريف $\gamma\,(u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, ، $\forall (u,v) \in E(Dn_n)$ حول ٢ فوغسي. الدي يحتوي على الهواية وظيفة مخطط الخرائط وانعكاس المخطط على القمم من واحد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi modern, memajukan daya pikir serta analisa manusia. Banyak informasi yang disampaikan orang dalam bahasa matematika seperti, tabel, grafik, diagram, persamaan dan lain-lain. Matematika digunakan di seluruh dunia sebagai alat penting di berbagai bidang, termasuk ilmu alam, teknik, kedokteran atau medis, ilmu sosial seperti ekonomi, dan psikologi. Dengan demikian, pendidikan matematika mampu menyiapkan Sumber Daya Manusia (SDM) yang berkualitas yang ditandai memiliki kemampuan memperoleh, mengelola, dan memanfaatkan informasi sesuai dengan tuntutan kebutuhan.

Alam semesta ini memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi.

Firman Allah dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49 yang berbunyi:

⬂⌀⌀⬀ ⍝❻⍓⑨⬧☽⍱⍩ ⬅❍◷☐✡⬂☽■⬛⍓⌘ ⛬⬈⬄⌀⌧★

☐⍣⬈⍫ ⍨❉☼⍱☽

“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.”

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada perhitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:79-80).

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan erat kaitannya dengan kehidupan sehari-hari, karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori graf. Lalu pada tahun 1859, Sir W.R. Hamilton (1805-1865) berhasil menemukan suatu permainan berbentuk *dodecahedron* beraturan yang terbuat dari kayu, yakni berupa *polihedron* dengan 12 muka dan 20 pojok. Namun terdapat permasalahan dalam permainan ini adalah mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari *dodecahedron* sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Sehingga kurang lebih setengah abad setelah masa Hamilton, aktivitas dalam bidang teori graf dapat dikatakan relatif kecil. Pada tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig, konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graf termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang diterbitkan pada tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graf (Sutarno, dkk, 2005:65).

Dalam bidang matematika, graf G didefinisikan sebagai pasangan (V(G), E(G)) dengan V(G) adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut sisi. Banyaknya unsur di V(G) disebut order dari G dan dilambangkan dengan p(G), dan banyaknya undur di E(G) disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan q(G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p,q) (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Graf piramida merupakan salah satu contoh graf. Misalkan terdapat suatu pengubinan pada bidang menggunakan segitiga sama sisi. Dua segitiga dikatakan terhubung jika ia bersekutu pada satu sisi. Jika adalah kumpulan segitiga-segitiga yang terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan sikel terpendek 3 dan masing-masing segitiga bersekutu pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut triomino. Jadi T disebut n-triomino jika T adalah pengubinan dari segitiga yang terhubung. Sama halnya dengan graf piramida, graf berlian juga salah satu contoh graf yang merupakan graf piramida pr_{n+2} yang kedua titik sudutnya dihilangkan atau dihapus (Afandi, 2009:18).

Mengacu pada penelitian terdahulu di antaranya adalah automorfisme graf roda (W_n) dan graf tangga (L_n) oleh Any Tsalasatul Fitriyah tahun 2011 dan automorfisme graf bintang $\left(K_{1,n}\right)$ dan graf lintasan (P_n) oleh Reni Tri Damayanti tahun 2011, penulis meneliti automorfisme pada graf yang berbeda yakni pada graf piramida (Pr_n) dan graf berlian (Dn_n) yang selama ini belum pernah dilakukan penelitian mengenai kedua graf tersebut. Sehingga berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis merumuskan judul skripsi ini dengan *"Automorfisme Graf Piramida dan Graf Berlian".*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimanakah automorfisme dari graf piramida?
2. Bagaimanakah automorfisme dari graf berlian?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Mengetahui bagaimana automorfisme dari graf piramida
2. Mengetahui bagaimana automorfisme dari berlian

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi objek kajian ini hanya pada graf piramida dan graf berlian. Graf piramida dibatasi mulai dengan piramida Pr_1 sampai piramida Pr_3, dengan transformasi rotasi dan refleksi. Sedangkan pada graf berlian dibatasi mulai dengan berlian Dn_1 sampai berlian Dn_2 dengan transformasi rotasi dan refleksi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan skripsi ini adalah:

1. Lembaga
   a. Sebagai tambahan rujukan untuk bahan pengembangan ilmu matematika tentang automorfisme graf piramida dan graf berlian.
   b. Sebagai tambahan rujukan penelitian selanjutnya mengenai automorfisme graf piramida dan graf berlian.
2. Penulis
   a. Sebagai tambahan penguasaan materi automorfisme graf piramida dan graf berlian serta untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima selama perkuliahan.
   b. Sebagai tambahan wawasan dalam penelitian dalam bidang matematika murni, khususnya tentang graf piramida dan graf berlian.
3. Pembaca
   a. Sebagai bahan rujukan dalam perkuliahan
   b. Menambah pengetahuan pembaca tentang automorfisme graf piramida dan graf berlian.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penulisan skripsi ini, jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kajian pustaka *(library research),* yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi, serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan masalah

   Penulis merumuskan dalam bentuk kalimat pertanyaan

2. Mengumpulkan sumber-sumber dari informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan graf piramida dan graf berlian serta automorfisme pada graf

3. Analisis data

   Menganalisa permasalahan yang telah diperoleh dengan mendekripsikan permasalahan, selanjutnya mendapatkan teorema yang dibuktikan.

   Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

   a. Menggambarkan graf piramida dan berlian.
   b. Memberi label pada setiap titik dari masing-masing graf yang telah digambarkan.
   c. Menentukan semua kemungkinan fungsi satu-satu dan onto dari setiap graf pada dirinya sendiri.
   d. Memilih fungsi yang automorfisme dari semua kemungkinan fungsi yang telah dituliskan.
   e. Menyelidiki automorfisme dari graf piramida dan graf berlian.

4. Membuat Kesimpulan

   Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis teorema yang telah dibuktikan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab Pendahuluan ini meliputi latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas teori tentang definisi fungsi, definisi grup, definisi graf, adjacent dan incident, derajat titik, graf piramida, graf berlian, isomorfisme graf dan automorfisme graf, serta kajian automorfisme dalam al-quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang automorfisme graf piramida dan graf berlian.

Bab IV Penutup

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

2.1.1 Definisi Fungsi

Konsep "fungsi" merupakan hal yang penting dalam berbagai cabang matematika. Pengertian fungsi dalam matematika berbeda dengan pengertian dalam kehidupan sehari-hari. Dalam pengertian sehari-hari, "fungsi" adalah guna atau manfaat. Kata fungsi dalam matematika sebagaimana diperkenalkan oleh Leibniz (1646-1716) digunakan untuk menyatakan suatu hubungan atau kaitan yang khas antara dua himpunan, sehingga fungsi dapat dikatakan merupakan hal yang istimewa dari suatu relasi antara dua himpunan (Markaban, 2004:1).

Definisi 1

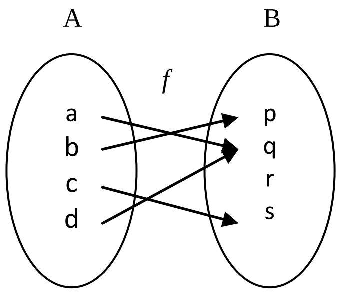
Misalkan A dan B himpunan. Fungsi f dari A ke B adalah subset dari $A \times B$ yang memenuhi sifat berikut:

1. Untuk masing-masing $a \in A$, ada $b \in B$ sehingga $(a, b) \in f$
2. Jika $(a, b), (a, c) \in f$, maka $b = c$.

Himpunan A disebut **domain** dari f ditulis dengan D_f. **Range** dari f ditulis R_f, didefinisikan dengan $R_f = \{b \in B | (a, b) \in f, untuk\ suatu\ a \ \in A\}$ (Abdussakir, 2006:7).

Contoh

Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{p, q, r, s\}$. Fungsi $f: A \to B$ ditentukan oleh diagram berikut:



Gambar 2.1 Fungsi *f*

Pada gambar, f merupakan suatu fungsi dari A ke B dan $R_f = \{p, q, s\}$

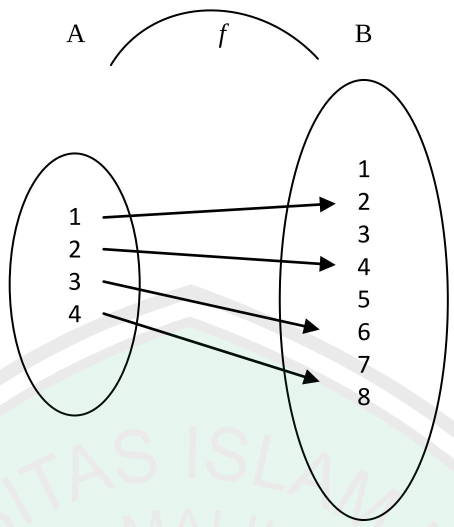
Definisi 2

a. Misal f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah 1-1 jika untuk setiap x, $y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi 1-1 sering juga disebut fungsi **injektif** (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

b. Misal A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi onto jika $R(f) = B$. Jadi, $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi onto jika $\forall\, y \in B$ maka ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. fungsi onto sering disebut juga fungsi **surjektif** atau fungsi **pada** (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

c. Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi **bijektif** (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

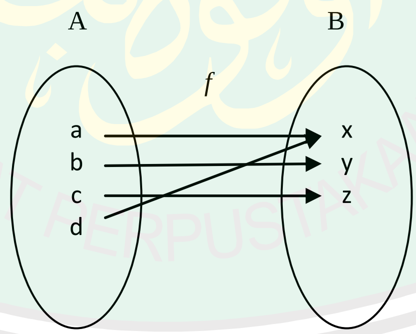
Contoh



Gambar 2.2 Fungsi 1-1 (*injektif*)

Adapun fungsi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan dengan *f(x)* =*2x* adalah fungsi satu-satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

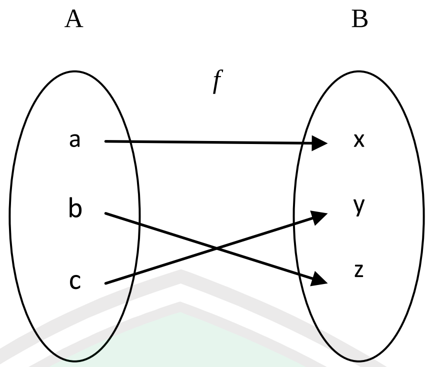
Contoh



Gambar 2.3 Fungsi onto (*surjektif*)

Misal *A* = *{a*, *b*, *c*, *d}* dan *B* = *{x*, *y*, *z}* dan fungsi *f*: A →B di atas adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil *f* adalah sama dengan kodomain dari *f* (himpunan B).

Contoh



Gambar 2.4 Fungsi 1-1 dan onto (bijektif)

Relasi dari himpunan $A = \{a, b, c\}$ ke himpunan $B = \{x, y, z\}$ yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

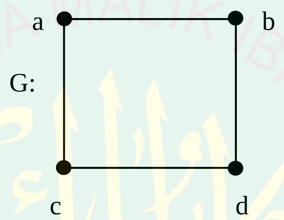
Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Graf menggambarkan struktur tersebut dalam beberapa obyek yang dinyatakan dengan noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh



Gambar 2.5 Graf G Berorder 4

Pada Gambar 2.5 Graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$ yaitu

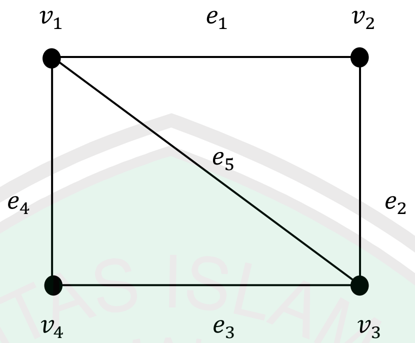
$V(G)=\{a,b,c,d\}$

$E(G)=\{(a,b),(b,d),(d,c),(c,a)\}$

Graf G mempunyai 4 titik sehingga *order* G adalah $p=4$ dan mempunyai 4 sisi sehingga *size* G adalah $q=4$

2.2.2 *Adjacent* (Terhubung Langsung) dan *Incident* (Terkait Langsung)

Sisi $e=(u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e=(u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut **terhubung langsung (*adjacent*)**, sedangkan u dan e disebut **terkait langsung (*incident*)**, sebagaimana v dan e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut **terhubung langsung (*adjacent*)**, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:6).



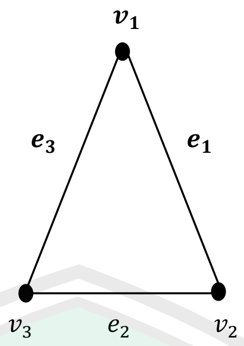
Gambar 2.6 Graf G (4,5)

Dari gambar 2.6 titik-titik *adjecent* (terhubung langsung) adalah $v_1 dan\ v_2$, $v_2 dan\ v_3$, $v_3 dan\ v_4$, $v_4 dan\ v_1$, serta $v_1 dan\ v_3$. Sedangkan sisi e_1 *incident* (terkait langsung) dengan $v_1 dan\ v_2$, e_2 *incident* (terkait langsung) dengan $v_2 dan\ v_3$, e_3 *incident* (terkait langsung) dengan $v_3 dan\ v_4$, e_4 *incident* (terkait langsung) dengan $v_4 dan\ v_1$, e_5 *incident* (terkait langsung) dengan $v_1 dan\ v_3$.

2.2.3 Derajat (*degree*) Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut **lingkungan dari *v*** dan ditulis $N_G(v)$. **Derajat dari titik *v*** di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat suatu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi, $deg(v) = |N(v)|$ (Abdussakir, dkk, 2009:9).

Contoh



Gambar 2.7 Graf G dengan derajat titik

Berdasarkan graf G pada Gambar 2.7 , diperoleh bahwa derajat masing-masing titiknya dapat dituliskan sebagai berikut:

$deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 2$,$deg(v_3) = 2$

Selanjutnya, hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q akan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$. Maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q$$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan dihitung 2 kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G (Abdussakir, dkk 2009: 11).

Teorema 2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.

Bukti

Misalkan G graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka,

$$\sum_{v \in v(G)} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q$$

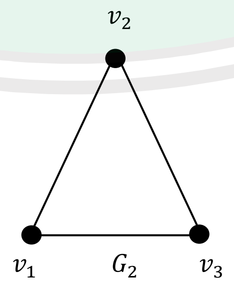
Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena 2q adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap. Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil (Abdussakir, dkk 2009:12).

2.2.4 Graf Beraturan –r

Definisi 4

Graf beraturan-r adalah graf yang semua titiknya berderajat r, $degv = r$. $\forall r \in G$ (Chartrand dan lesniak, 1986:9).

Contoh



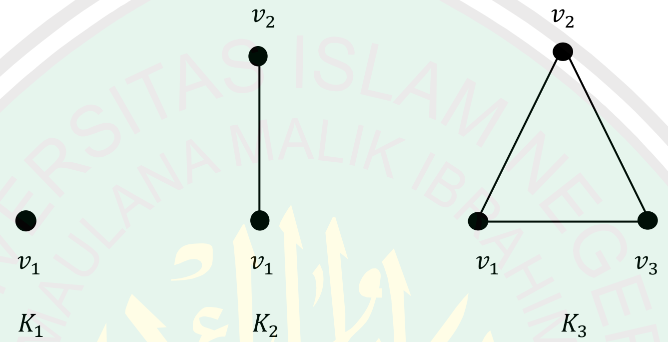
Gambar 2.8 Graf Komplit beraturan

2.2.5 Graf Beraturan Komplit

Definisi 5

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf yang dua titiknya saling berdekatan atau terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan lesniak, 1986:9).

Contoh



Gambar 2. 9 Graf Komplit

2.2.6 Graf Terhubung

Definisi 6

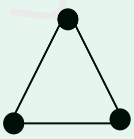
Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap pasangan titik *u* dan *v* di G ada lintasan (*u*,*v*) di G. Graf dikatakan tidak terhubung (*disconnected*), jika ada titik *u* dan *v* di G, tetapi tidak ada lintasan (*u*,*v*) di G. Komponen dari graf G adalah bagian maksimal dari graf G dan terhubung. Graf terhubung terdiri dari satu komponen. Suatu komponen dikatakan graf genap/ganjil jika banyak titiknya genap/ganjil (Purwanto, 1998:8-9)

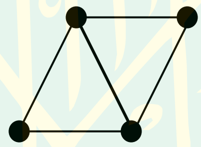
2.2.7 Graf Piramida

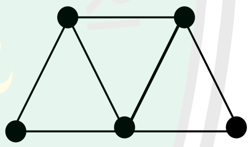
Definisi 7

Misalkan terdapat suatu pengubinan pada bidang menggunakan segitiga sama sisi. Dua segitiga dikatakan terhubung jika ia bersekutu pada satu sisi. Misal T adalah kumpulan segitiga-segitiga yang terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan sikel terpendek 3 dan masing-masing segitiga bersekutu pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut triomino. Jadi T disebut n-triomino jika T adalah pengubinan dari segitiga yang terhubung (Afandi, 2009:18).

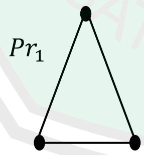
Graf ular dengan panjang n adalah 1-triomino, dengan menempatkan n segitiga sama sisi dengan cara berikut:


Ular panjang 1

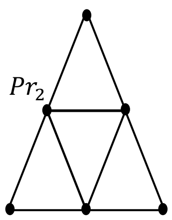

Ular panjang 2


Ular panjang 3

Graf piramida dengan tinggi n, ditulis pr_n, adalah 1-triomino, yang dibentuk dengan menempatkan ular n dengan cara berikut:

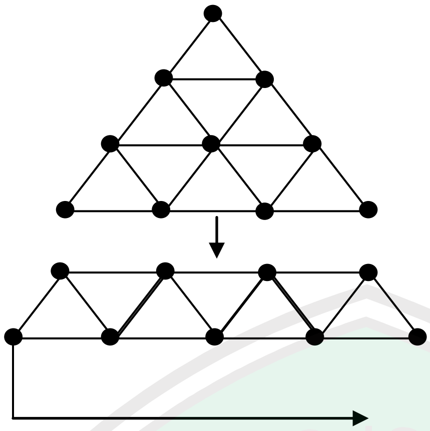


Pr_1 adalah ular panjang 1



Pr_2 adalah ular panjang 1 dan ular panjang 3 yang ditumpuk (Low, dkk 2004).

Secara umum Pr_n dapat diketahui sebagai berikut:



...Ular panjang 1

...Ular panjang 3

...Ular panjang 5

...Ular panjang (2n-1)

$$v_n = \frac{1}{2} u (u + 1), n = u - 1, u \geq 2$$

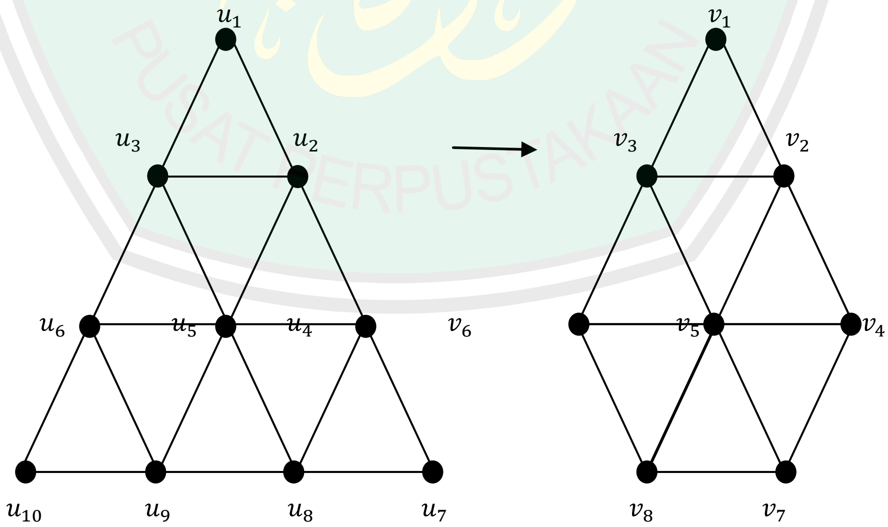
Gambar 2.10 Graf Piramida

2.2.8 Graf Berlian (Diamond)

Definisi 8

Graf berlian (Diamond) Dn_n adalah graf piramida pr_{n+2} yang kedua titik sudutnya dihilangkan atau dihapus.

Contoh



Pr_3 Dn_1

$$Pr_3 - \{u_7 \; dan \; u_{10}\} = Dn_1$$

Gambar 2.11 Graf Berlian (Diamond)

Diketahui $v_n = \frac{1}{2} u (u+1), n = u - 1\ dan\ u \geq 2$

Maka $Dn_y = Pr_x - \{U_{(c-x)}, U_c\}$

Untuk $c = v_n, v_n \geq 10$

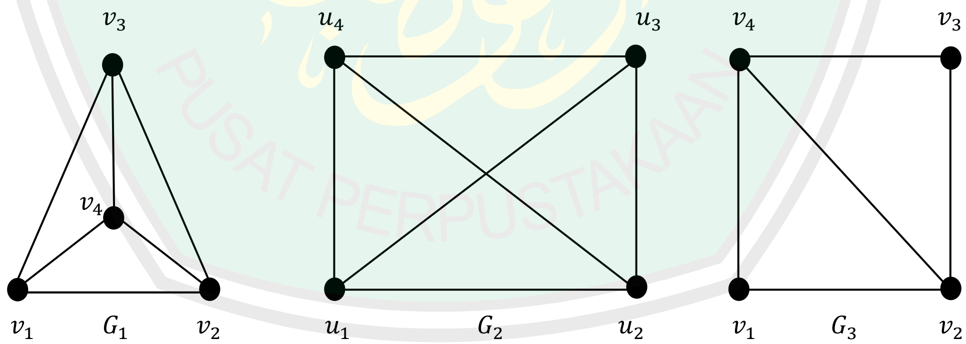
$y \geq 1\ dan\ x \geq 3$

2.2.9 Isomorfisme Graf

Definisi 9

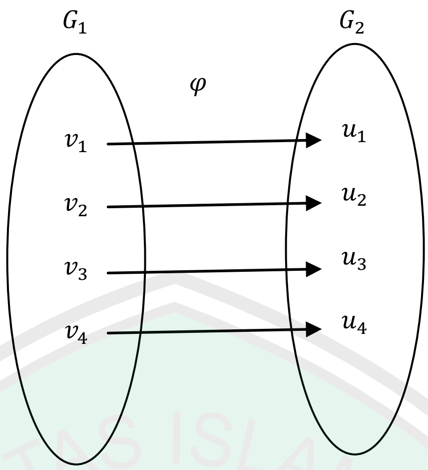
Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu $\boldsymbol{\varphi}$ antara $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ sedemikian hingga $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(u)\varphi(v)) \in E(G_2)$. Jika G_1 isomorfik terhadap G_2 dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:5).

Contoh



Gambar 2.12 G_1 isomorfik dengan G_2 tetapi tidak isomorfik dengan G_3

Pemetaan $\varphi: V(G_1) \to V(G_2)$ didefinisikan oleh:



Gambar 2.13 Pemetaan Satu-satu

$\varphi(v_1) = u_1$ $\varphi(v_2) = u_2$ $\varphi(v_3) = u_3$ $\varphi(v_4) = u_4$

Akan dibuktikan bahwa (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), $(v_3, v_4) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$, $(\varphi(v_1), \varphi(v_3))$, $(\varphi(v_1), \varphi(v_4))$, $(\varphi(v_2), \varphi(v_3))$, $(\varphi(v_2), \varphi(v_4))$, $(\varphi(v_3), \varphi(v_4)) \in E(G_2)$.

$(v_1, v_2) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = (u_1, u_2) \in E(G_2)$

$(v_1, v_3) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_1), \varphi(v_3)) = (u_1, u_3) \in E(G_2)$

$(v_1, v_4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_1), \varphi(v_4)) = (u_1, u_4) \in E(G_2)$

$(v_2, v_3) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_2), \varphi(v_3)) = (u_2, u_3) \in E(G_2)$

$(v_2, v_4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_2), \varphi(v_4)) = (u_2, u_4) \in E(G_2)$

$(v_3, v_4) \in E(G_1)$ dan $(\varphi(v_3), \varphi(v_4)) = (u_3, u_4) \in E(G_2)$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $G_1 \cong G_2$.

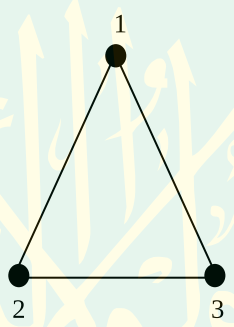
2.2.10 Automorfisme Graf

Definisi 10

Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme dari graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik V (G) atau sisi-sisi dari graf G, E (G). Jika ϕ adalah suatu automorfisme dari G dan v ∈ V (G) maka $deg\varphi(v) = \deg(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:250).

Contoh

Misal diberikan graf G seperti di bawah ini :



Gambar 2.14 Graf G

Automorfisme yang mungkin terjadi pada graf G adalah:

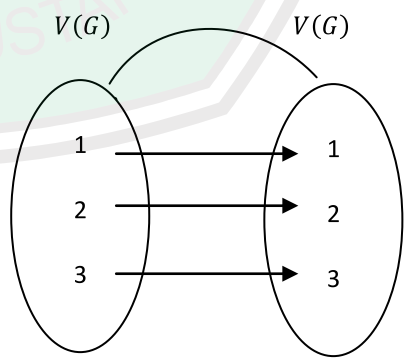
1. $\varphi(1) = 1$

   $\varphi(2) = 2$

   $\varphi(3) = 3$

   Atau dapat ditulis:

   $\varphi = (1)(2)(3)$



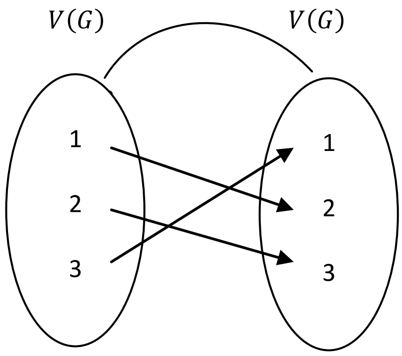
2. $\varphi(1) = 2$

   $\varphi(2) = 3$

   $\varphi(3) = 1$

   Atau dapat ditulis:

   $\varphi = (1\ 2\ 3)$



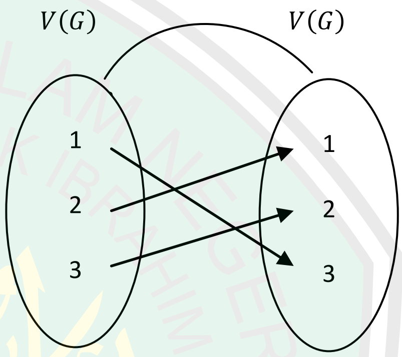
3. $\varphi(1) = 3$

   $\varphi(2) = 1$

   $\varphi(3) = 2$

   Atau dapat ditulis:

   $\varphi = (1\ 3\ 2)$



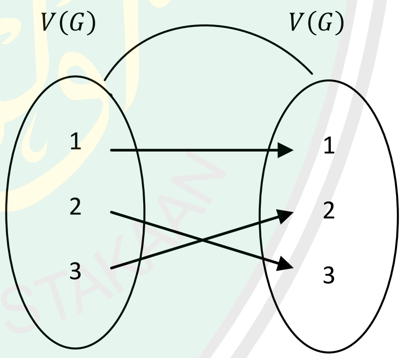
4. $\varphi(1) = 1$

   $\varphi(2) = 3$

   $\varphi(3) = 2$

   Atau dapat ditulis:

   $\varphi = (1)(2\ 3)$



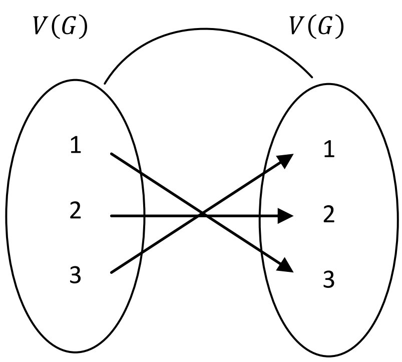
5. $\varphi(1) = 3$

   $\varphi(2) = 2$

   $\varphi(3) = 1$

   Atau dapat ditulis:

   $\varphi = (2)(1\ 3)$



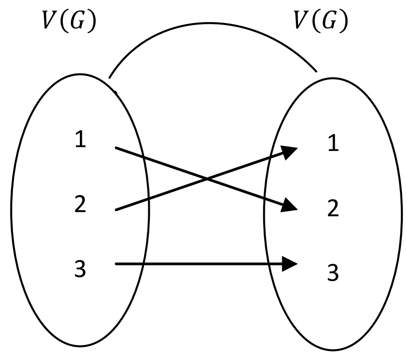
6. $\varphi(1) = 2$

   $\varphi(2) = 1$

   $\varphi(3) = 3$

   Atau dapat ditulis:

   $\varphi = (3)(1\ 2)$



2.3 Grup

Misal G suatu himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner $*$. sistem matematika $(G,\ *)$ disebut grup (*group*), jika memenuhi sifat berikut:

1. $\forall$ a, b $\in$ G, berlaku $a * b \in$ G.

   (sifat tertutup pada G terhadap operasi $*$)

2. $\forall$ a, b, c $\in$ G, berlaku $a * (b * c) = (a * b\ ) * c$.

   (sifat asosiatif operasi $*$ pada unsur-unsur G)

3. Terdapat unsur e di G sedemikian sehingga: $g * c = e\ * g = g, \forall\ g\ \in\ G$. (keberadaan unsur identitas di G)

4. $\forall$ a $\in$ G terdapat b $\in$ G sedemikian sehingga: $a * b = b\ * a = a$, dengan e unsur identitas di G. (Adanya invers untuk setiap unsur d)

Keempat sifat tersebut dinamakan aksioma-aksioma grup. Jika himpunan G dengan suatu operasi $*$ memenuhi aksioma-aksioma grup, maka dikatakan G dengan operasi $*$ merupakan suatu grup. Sedangkan jika himpunan G dengan suatu operasi $*$ tersebut membentuk grup, maka grup ini dinyatakan dengan notasi $*$ (G, $*$) (Kusaeri, 2002:1 - 2).

Contoh

Misal $\mathbb{Z}$ = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} operasi $*$ didefinisikan sebagai operasi penjumlahan bilangan bulat. Apakah $(\mathbb{Z}, +)$ membentuk grup?

Jawab:

1. $\mathbb{Z}$ tertutup, karena jumlah dua bilangan bulat tentu juga bilangan bulat. Jika 1, 2 $\in$ $\mathbb{Z}$ maka tentu 1 + 2 $\in$ $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}$ berlaku sifat asosiatif, yakni jika 1, 2, 3 $\in$ $\mathbb{Z}$ maka tentu $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$.
3. Ada unsur identitas di $\mathbb{Z}$, yakni 0 karena $\forall$ 1 $\in$ $\mathbb{Z}$ berlaku 1 + 0 = 0 + 1 = 1.
4. Ambil sebarang unsur 1$\in$ $\mathbb{Z}$, maka ada -1$\in$ $\mathbb{Z}$ sebagai invers dari 1 karena 1 + (-1) = (-1) + 1 = 0.

Karena $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi keempat aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.

2.3.1 Grup Dihedral

Definisi 11

Grup Dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi *n* beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap *n* adalah anggota bilangan bulat positif, ≥ 3 (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Definisi 12

Suatu grup dari semua simetri (rotasi dan refleksi) dari segi-n beraturan desebut grup dihedral-2 (D_{2n}) (Wahyudin, 1989:80).

Diketahui himpunan semua rotasi dan refleksi dari segi-n beraturan, D_{2n} yang terdiri dari n rotasi yaitu identitas dinotasikan dengan angka 1, r = rotasi $\frac{360^{\circ}}{n}$,

$r \circ r = r^2 = rotasi\ 2\frac{360^\circ}{n}$, ..., r^{n-1}, dan n refleksi pada n sumbu simetri. Jika s adalah salah satu dari refleksi-refleksi tersebut, maka

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1},\ s, rs, \dots, r^{n-1}s\}.$$

Grup dihedral ini akan digunakan pada seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n, n \in$ N
2. $|s| = 2$
3. $s \neq r^i$ untuk sebarang $i, \forall i \in$ Z$^+$
4. $sr^i \neq sr^i$, untuk semua $0 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $s \neq j$, sehingga

   $$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, \qquad s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$$

   yaitu. tiap-tiap elemen dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk beberapa $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n - 1, \forall i, j, k \in$ Z$^+$
5. $sr = r^{-1}s$

   Hal ini menunjukkan bahwa r dan s tidak saling komutataif, sehingga D_{2n} bukan grup abelian.
6. $sr^i = r^{-1}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$

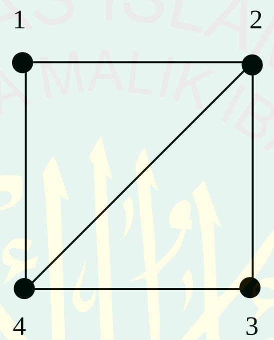
   Hal ini menunjukkan bagaimana s komutatatif dengan perpangkatan dari r (Dummit and Foote, 1991:25-26).

2.3.2 Grup Automorfisme dari Graf Sederhana

Grup automorfisme dari graf G adalah grup permutasi dari semua automorfisme graf G yang dinotasikan dengan Aut (G). Automorfisme dari V_G dinotasikan dengan Aut_V (G) dan untuk E_G dinotasikan dengan Aut_E (G).

Contoh :

Misal diberikan graf *G* seperti di bawah ini :



Gambar 2.15 Graf *G*

Automorfisme yang mungkin dari graf di atas berdasarkan contoh automorfisme dari graf G pada 2.1.8 adalah

1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4) = (1)$ identitas

2. $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(3)(2\ 4) = (2\ 4)$

3. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2)(4) = (1\ 3)$

4. $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$

Misal himpunan $G = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, maka himpunan G bersama-sama dengan operasi biner ∘ atau ditulis (G, ∘) adalah suatu grup bila memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi ∘ bersifat tertutup

(ii) Operasi ° bersifat assosiatif

(iii) G memuat elemen identitas.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Maka akan dibuktikan bahwa automorfisme dari graf di atas merupakan suatu grup.

1. $\beta \circ \beta = (2\ 4)^{\circ}(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4) =$

   $(1) = \alpha$

2. $\beta \circ \gamma = (2\ 4)^{\circ}(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4) = \delta$

3. $\gamma \circ \beta = (1\ 3)^{\circ}(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4) = \delta$

4. $\delta \circ \gamma = (1\ 3)(2\ 4)^{\circ}(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 4) = \beta$

5. $\delta \circ \delta = (1\ 3)(2\ 4)^{\circ}(1\ 3)(2\ 4) = (1) = \alpha$

Dan seterusnya, sehingga diperoleh bentuk table cayley berikut ini :

Tabel 2.1 Tabel Cayley (G, °)

$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

Berdasarkan uraian di atas dapat dilihat bahwa himpunan dari graf G tersebut memenuhi sifat-sifat grup, yaitu:

(i) Operasi ° bersifat tertutup

(ii) Operasi ° bersifat assosiatif

Misal $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$

$$\alpha \circ \delta = \beta \circ \gamma$$

$$\delta = \delta$$

(iii) G memuat elemen identitas, yaitu $\alpha = (1)(2)(3)(4)$

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Misal

$$\beta = (1)(3)(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka invers dari β atau β^{-1} merupakan kebalikan dari permutasi β

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Karena kebalikan dari β adalah β itu sendiri maka invers dari β adalah β itu sendiri.

2.4 Kajian Automorfisme Graf dalam Al-Quran

Kedudukan manusia yang pertama dimuka bumi ini adalah sebagai hamba Allah. Sebagai hamba Allah maka manusia harus mentaati semua perintah Allah, Jika manusia melanggarnya maka akan mendapatkan balasan yang berat. Untuk pedoman hidup manusia Allah Swt menurunkan Al Quran agar supaya manusia bisa mengemban amanah yang diberikan oleh Allah Swt, disamping itu juga kita juga wajib untuk melaksanakan pedoman hidup dan cara beribadah dan bermuamalah berdasarkan Sunnah Rasullullah SAW, serta ijtihad para ulama dan tabiin yang berdasarkan pada Al-Quran dan Al-Hadits. Manusia memang seorang budak di hadapan Allah Swt, namun dengan inilah manusia menjadi mulia, mempunyai harga diri, mempunyai jiwa, mempunyai hati, dan mempunyai harapan cerah yang akan diberikan Allah Swt, karena ketaatan itu. Sesuai dengan firman Allawt dalam QS. Adz-Dzariat ayat 56 yang berbunyi:

⭘♊⬁♑⬂💻🙰✁ →💣⬂☽■🖫🗠⌘ 🙰♦✌◆❒

·♦♐☽ “▪☼💣“🙰✁◆❒

⬀♐♎⇗ ⇗♌❒←⑨🡰🖮⬃➔◆⓿♎♑

“Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka menyembah-Ku”

Keberadaan jin dan manusia tercermin pada tugas. Barang siapa yang melaksanakan dan menunaikan tugas itu, berarti dia telah merealisasi tujuan keberadaannya. barang siapa yang menyepelekan tugas tersebut berarti dia telah menghancurkan tugas tersebut dengan kata lain dia hidup tanpa tujuan. Tugas yang mengikat jin dan manusia dengan hukum alam nyata ialah beribadah kepada Allah. Atau penghambaan kepada Allah yang memastikan bahwa di sana ada abdi dan Rabb, ada hamba yang beribadah dan Rabb yang disembah (Quthb, 2000:48-50).

Firman Allah Swt QS. Al-Imron ayat 190-191 yang berbunyi:

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka”.

Ini merupakan awal ayat-ayat penutup surat Al-Imran, dimana pada ayat ini Allah Swt memerintahkan manusia untuk melihat, merenung, dan mengambil kesimpulan pada tanda-tanda ke-Tuhanan. Karena tanda-tanda tersebut tidak mungkin ada kecuali diciptakan oleh Yang Hidup, Yang Mengurusinya, Yang Suci, Yang Menyelamatkan, Yang Maha Kaya dan tidak membutuhkan apapun yang ada di alam semesta ini. Dengan meyakini hal tersebut maka keimanan manusia bersandar atas keyakinan yang benar, dan bukan hanya sekedar ikut-ikutan. Salah satu fungsi akal yang diberikan kepada seluruh manusia yaitu agar mereka menggunakan akal tersebut untuk merenung tanda-tanda yang diberikan oleh Allah Swt.

Penguasaan ilmu pengetahuan dan teknologi sebenarnya adalah suatu hikmah, yaitu kemampuan memahami dan mendalami ajaran dan petunjuk dari Allah Sang Maha Penguasa alam semesta yang telah diberikan kepada manusia yang mau menggunakan akalnya (Wardana, 2006:49).

Dalam matematika terdapat suatu cabang ilmu yaitu teori graf. Sesuai dengan definisi yang menyatakan bahwa graf merupakan pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Hal ini terkait dalam firman Allah Swt QS. Al-Imron ayat 110 yang berbunyi:

"Kamu adalah umat yang terbaik yang dilahirkan untuk manusia, menyuruh kepada yang ma'ruf, dan mencegah dari yang munkar, dan beriman kepada Allah.

sekiranya ahli Kitab beriman, tentulah itu lebih baik bagi mereka, di antara mereka ada yang beriman, dan kebanyakan mereka adalah orang-orang yang fasik".

Salah satu kajian yang dapat dibahas dalam teori adalah automorfisme graf. Pembahasan automorfisme graf ini diawali dengan penggambaran graf secara umum, yakni graf piramida dan graf berlian. Setelah itu pemberian label pada titik-titiknya serta menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto pada graf tersebut. Unsur pada himpunan *domain* adalah titik-titik yang terdapat pada graf tersebut, begitu pula unsur pada *kodomain*. Jadi, fungsi satu-satu dan onto tersebut memetakan graf awalnya kepada dirinya sendiri. Setelah diberikan perlakuan fungsi onto dan satu-satu ini, selanjutnya yaitu memilah-milah fungsi yang isomorfisme dan yang bukan isomorfisme. Fungsi yang isomorfisme terhadap dirinya sendiri ini disebut automorfisme.

Jika diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, automorfisme sama halnya dengan perilaku manusia dalam kehidupan sehari-hari yang sudah dijelaskan dalam firman Allah Swt QS. Hud ayat 3 yang berbunyi:

"Dan hendaklah kamu memohon ampunan kepada Tuhanmu dan bertaubatlah kepada-Nya, niscaya Dia akan memberi kenikmatan yang baik kepadamu sampai waktu yang telah ditentukan. Dan Dia akan memberikan karunia-Nya kepada setiap orang yang berbuat baik. Dan jika kamu berpaling, maka sungguh, aku takut kamu akan ditimpa azab pada hari yang besar (kiamat)".

Ayat di atas menunjukkan bahwa tingkah laku manusia itu selalu ada timbal baliknya. Pada orang yang mempunyai perilaku yang baik, niscaya Allah akan memberikan kebaikan (pahala) pula padanya, nikmat Allah Swt sangatlah nyata dan apabila kita sebagai manusia selalu bersyukur atas segala nikmat-Nya maka Allah akan menambah dengan kebaikan-kebaikan yang lebih banyak. Tetapi jika manusia lalai akan tujuan awalnya, yakni untuk beribadah kepada Allah Swt, niscaya Allah Swt akan memberikan azab yang akan merugikan manusia itu sendiri.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai automorfisme pada suatu graf yakni graf piramida dan graf berlian. Dalam menentukan bentuk umum automorfisme pada graf piramida dan berlian, maka pada pembahasan bab ini dimulai dari:

1. Penggambaran graf piramida dan graf berlian secara umum.
2. Pemberian label pada titik-titiknya.
3. Menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu dan onto.
4. Memilah fungsi yang automorfisme,
5. Menyelidiki automorfisme dari graf piramida dan graf berlian.

3.1 Automorfisme dari Graf Piramida

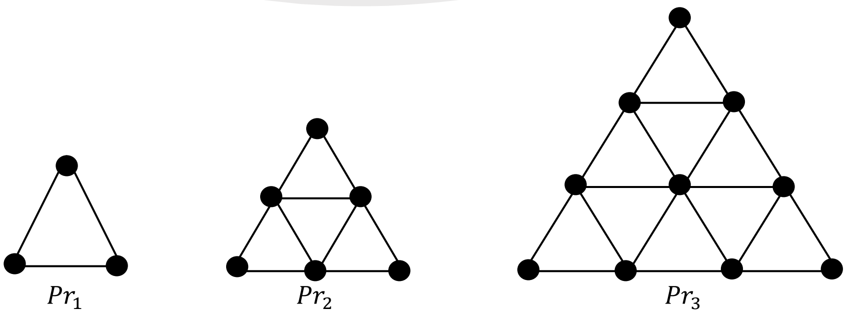
Misal graf piramida Pr_n dengan himpunan titik

$$V(Pr_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

dan himpunan sisi

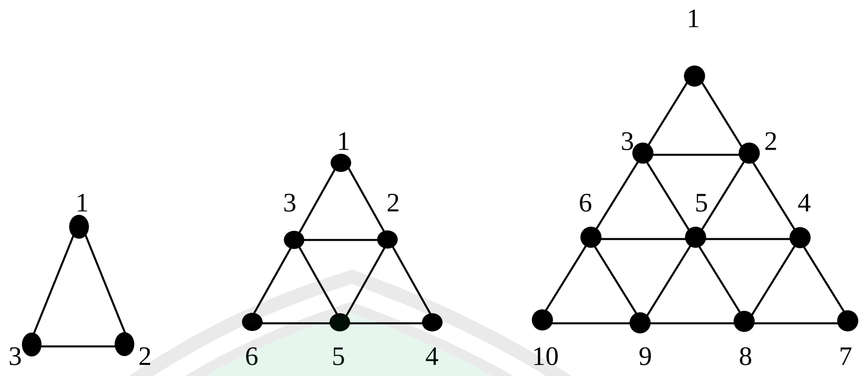
$$E(Pr_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

diberikan beberapa graf piramida sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Piramida 1, Graf Piramida 2, Graf Piramida 3

Selanjutnya pemberian label pada tiap-tiap graf piramida sebagai berikut

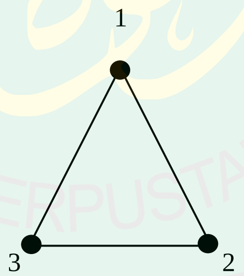


Gambar 3.2 Graf Piramida 1, Graf Piramida 2, Graf Piramida 3 dengan Label Titik A

Kemudian akan ditentukan automorfisme yang dapat dibuat pada masing-masing graf. Pada langkah ini akan dimulai dari graf piramida-1 sebagai berikut:

3.1.1 Graf Piramida-1 (Pr_1)

Graf piramida-1 (Pr_1) yang sudah diberikan label pada titik-titiknya ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Piramida-1 (Pr_1)

Misal himpunan titik pada graf piramida-1 (Pr_1) adalah $V(Pr_n) = \{1, 2, 3\}$. Lalu diberikan suatu fungsi dari graf piramida-1 (Pr_1) pada dirinya sendiri yaitu $\beta : V(Pr_1) \to V(Pr_1)$. Graf piramida ($Pr_1$) terdiri dari 3 simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin

pada graf tersebut adalah:

1. $\beta_1 = (1)(2)(3)$

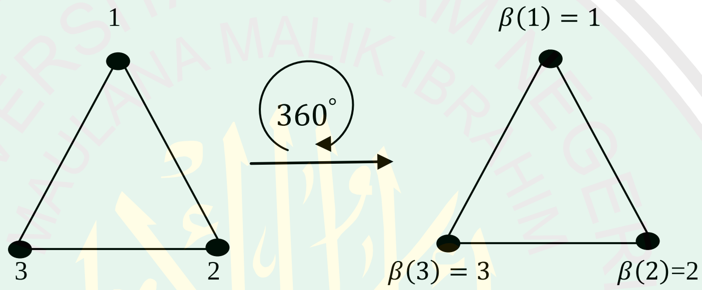
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$, $\beta_1(2) = 2$, $\beta_1(3) = 3$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan:

Tabel 3.1 Tabel Fungsi $\beta_1 = (1)(2)(3)$

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	1	2	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Piramida-1 (Pr_1) dengan Rotasi 360°

Fungsi $\beta_1 = (1)\ (2)\ (3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-1 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_1 : V(Pr_1) \to V(Pr_1)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall(u, v) \in E(Pr_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_1$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (1,2) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(1,3) \in Pr_1$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (1,3) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(2,3) \in Pr_1$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (2,3) \in\ E(Pr_1)$

Karena β_1 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β adalah automorfisme.

2. $\beta_2 = (1\ 2\ 3)$

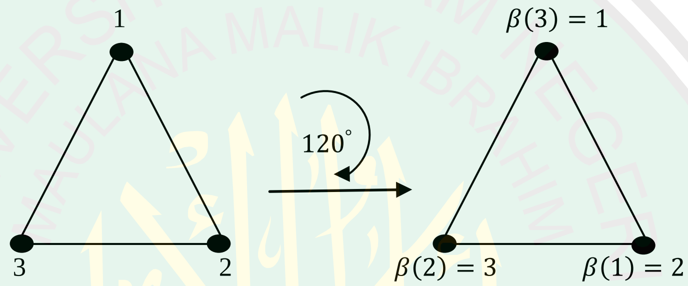
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 2$, $\beta_2(2) = 3$, $\beta_2(3) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.2 Tabel fungsi $\beta_2 = (1\ 2\ 3)$

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	2	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Piramida-1 (Pr_1) dengan Rotasi 120°

Fungsi $\beta_2 = (1\ 2\ 3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_2 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-1 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_2 : V(Pr_1) \to V(Pr_1)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall (u, v) \in E(Pr_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_1$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (2,3) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(1,3) \in Pr_1$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (1,2) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(2,3) \in Pr_1$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (1,3) \in\ E(Pr_1)$

Karena β_2 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_2 adalah automorfisme.

3. $\beta_3 = (1\ 3\ 2)$

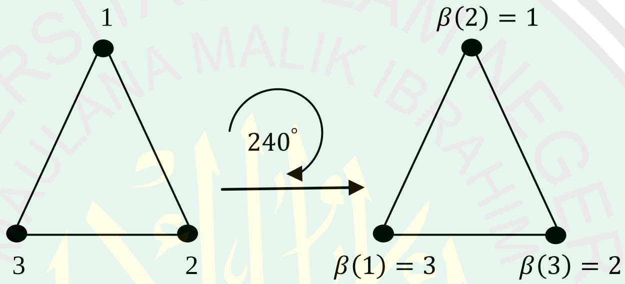
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 3$, $\beta_3(2) = 1$, $\beta_3(3) = 2$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.3 Tabel Fungsi $\beta_3 = (1\ 3\ 2)$

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	3	1	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Piramida-1 (Pr_1) dengan Rotasi 240°

Fungsi $\beta_3 = (1\ 3\ 2)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_3 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-1 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_3 : V(Pr_1) \to V(Pr_1)$.

Didefinisikan $\beta\ (u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall (u,v) \in E(Pr_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_1$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (3,1) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(1,3) \in Pr_1$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (3,2) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(2,3) \in Pr_1$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (1,2) \in\ E(Pr_1)$

Karena β_3 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_3 adalah automorfisme.

4. $\beta_4 = (1)(2\ 3)$

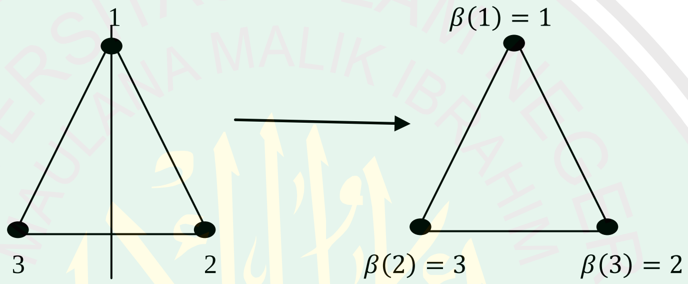
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_4(1) = 1$, $\beta_4(2) = 3$, $\beta_4(3) = 2$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.4 Tabel Fungsi $\beta_4 = (1)(2\ 3)$

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	1	3	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Piramida-1 (Pr_1) dengan Refleksi terhadap simpul 1

Fungsi $\beta_4 = (1)(2\ 3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa bahwa fungsi β_4 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-1 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_4 : V(Pr_1) \rightarrow V(Pr_1)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = (\beta(u), \beta(v))$, $\forall (u, v) \in E(Pr_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_1$ maka $\beta(1,2) = (\beta(1), \beta(2)) = (1,3) \in E(Pr_1)$

sisi $E(1,3) \in Pr_1$ maka $\beta(1,3) = (\beta(1), \beta(3)) = (1,2) \in E(Pr_1)$

sisi $E(2,3) \in Pr_1$ maka $\beta(2,3) = (\beta(2), \beta(3)) = (3,2) \in E(Pr_1)$

Karena β_4 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_4 adalah automorfisme.

5. $\beta_5 = (2)(1\ 3)$

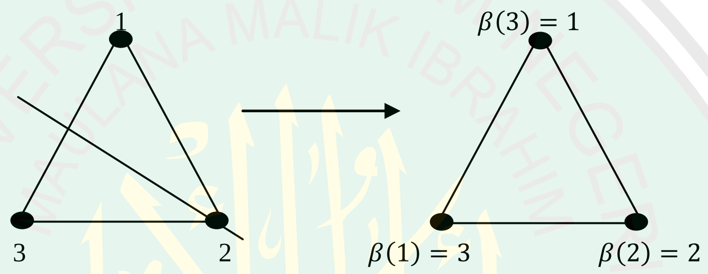
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_5(1) = 3$, $\beta_5(2) = 2$, $\beta_5(3) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.5 Tabel Fungsi $\beta_5 = (2)(1\ 3)$

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf Piramida-1 (Pr_1) dengan Refleksi terhadap simpul 2

Fungsi $\beta_5 = (2)(1\ 3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa bahwa fungsi β_5 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-1 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_5 : V(Pr_1) \to V(Pr_1)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall (u, v) \in E(Pr_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_1$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (3,2) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(1,3) \in Pr_1$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (3,1) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(2,3) \in Pr_1$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (2,1) \in\ E(Pr_1)$

Karena β_5 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_5 adalah automorfisme.

6. $\beta_6 = (3)(1\ 2)$

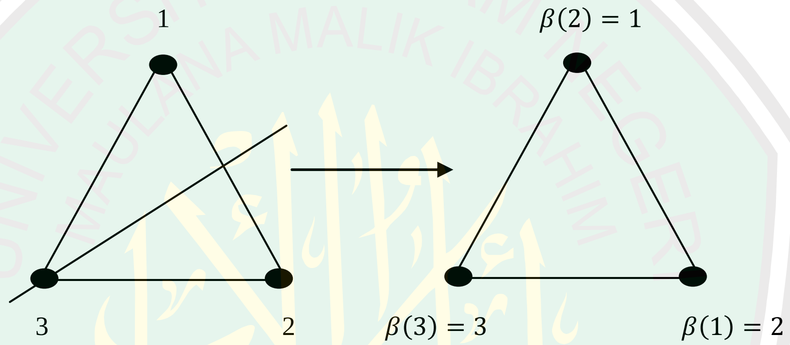
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_6(1) = 2$, $\beta_6(2) = 1$, $\beta_6(3) = 3$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.6 Tabel Fungsi $\beta_6 = (3)(1\ 2)$

v_i	1	2	3
$\beta(v_i)$	2	1	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf Piramida-1 (Pr_1) dengan Refleksi terhadap simpul 3

Fungsi $\beta_6 = (3)(1\ 2)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa bahwa fungsi β_6 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-1 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_6 : V(Pr_1) \to V(Pr_1)$.

Didefinisikan $\beta_6\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u, v) \in E(Pr_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_1$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (2,1) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(1,3) \in Pr_1$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (2,3) \in\ E(Pr_1)$

sisi $E(2,3) \in Pr_1$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (1,3) \in\ E(Pr_1)$

Karena β_6 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_6 adalah automorfisme.

Sehingga banyaknya fungsi dengan operasi rotasi dan refleksi yang automorfisme dari graf piramida-1 (Pr_1) ke dirinya sendiri adalah sebanyak 6 fungsi yaitu:

Rotasi : 1. $\beta_1 = (1)(2)(3)$ automorfisme identitas

2. $\beta_2 = (1\ 2\ 3)$

3. $\beta_3 = (1\ 3\ 2)$

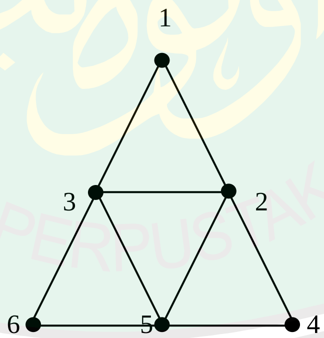
Refleksi : 1. $\beta_4 = (1)(2\ 3)$

2. $\beta_5 = (1\ 3)(2)$

3. $\beta_6 = (1\ 2)(3)$

3.1.2 Graf Piramida-2 (Pr_2)

Graf piramida-2 (Pr_2) yang sudah diberikan label pada titik-titiknya ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf Piramida-2 (Pr_2)

Misal himpunan titik pada graf piramida-2 (Pr_2) adalah $V(Pr_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Lalu diberikan suatu fungsi dari graf piramida-2 (Pr_2) pada dirinya sendiri yaitu $\beta : V(Pr_n) \rightarrow V(Pr_n)$. Graf piramida (Pr_2) terdiri dari 9 simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\beta_1 = (1)(2)(3)\,(4)\,(5)\,(6)$

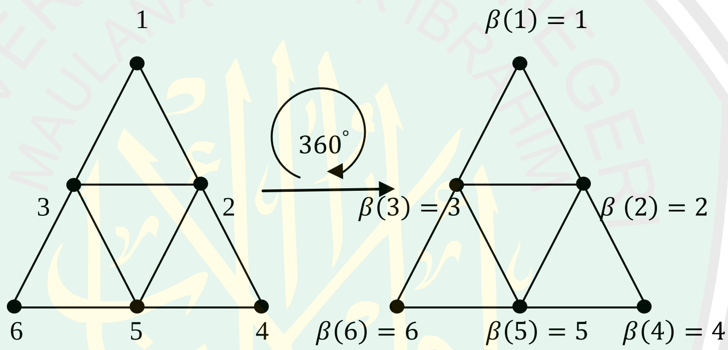
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$, $\beta_1(2) = 2$, $1(3) = 3$, $\beta_1(4) = 4$, $\beta_1(5) = 5$, $\beta_1(6) = 6$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan:

Tabel 3.7 Tabel Fungsi $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	1	2	3	4	5	6

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Rotasi 360°

Fungsi $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-2 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_1 : V(Pr_2) \rightarrow V(Pr_2)$.

Didefinisikan $\beta\,(u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall (u,v) \in E(Pr_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_2$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (1,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(1,3) \in Pr_2$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (1,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,3) \in Pr_2$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (2,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,4) \in Pr_2$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (2,4) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,5) \in Pr_2$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (2,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(4,5) \in Pr_2$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (4,5) \in E(Pr_2)$

sisi $E(3,5) \in Pr_2$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (3,5) \in E(Pr_2)$

sisi $E(3,6) \in Pr_2$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (3,6) \in E(Pr_2)$

sisi $E(5,6) \in Pr_2$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (5,6) \in E(Pr_2)$

Karena β_1 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_1 adalah automorfisme.

2. $\beta_2 = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)$

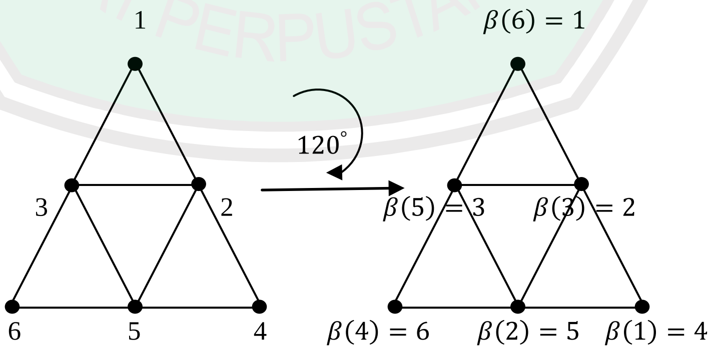
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 4$, $\beta_2(2) = 5$, $\beta_2(3) = 2$, $\beta_2(4) = 6$, $\beta_2(5) = 3$, $\beta_2(6) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan:

Tabel 3.8 Tabel Fungsi $\beta_2 = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)$

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	4	5	2	6	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Rotasi 120°

Fungsi $\beta_2 = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_2 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-2 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_2 : V(Pr_2) \rightarrow V(Pr_2)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u, v) \in E(Pr_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_2$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (4,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(1,3) \in Pr_2$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (4,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,3) \in Pr_2$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (5,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,4) \in Pr_2$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (5,6) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,5) \in Pr_2$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (5,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(4,5) \in Pr_2$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (6,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(3,5) \in Pr_2$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (2,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(3,6) \in Pr_2$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (2,1) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(5,6) \in Pr_2$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (3,1) \in\ E(Pr_2)$

Karena β_2 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_2 adalah automorfisme.

3. $\beta_3 = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$

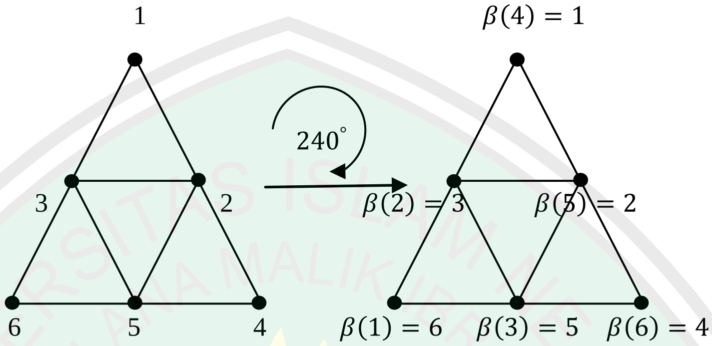
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 6$, $\beta_3(2) = 3$, $\beta_3(3) = 5$, $\beta_3(4) = 1$, $\beta_3(5) = 2$, $\beta_3(6) = 4$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan:

Tabel 3.9 Tabel Fungsi $\beta_3 = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	6	3	5	1	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Rotasi 240°

Fungsi $\beta_3 = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_3 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-2 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_3 : V(Pr_2) \to V(Pr_2)$.

Didefinisikan $\beta\ (u,v) = (\beta(u), \beta(v))$, $\forall(u,v) \in E(Pr_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_2$ maka $\beta(1,2) = (\beta(1), \beta(2)) = (6,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(1,3) \in Pr_2$ maka $\beta(1,3) = (\beta(1), \beta(3)) = (6,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,3) \in Pr_2$ maka $\beta(2,3) = (\beta(2), \beta(3)) = (3,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,4) \in Pr_2$ maka $\beta(2,4) = (\beta(2), \beta(4)) = (3,1) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,5) \in Pr_2$ maka $\beta(2,5) = (\beta(2), \beta(5)) = (3,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(4,5) \in Pr_2$ maka $\beta(4,5) = (\beta(4), \beta(5)) = (1,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(3,5) \in Pr_2$ maka $\beta(3,5) = (\beta(3), \beta(5)) = (5,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(3,6) \in Pr_2$ maka $\beta(3,6) = (\beta(3), \beta(6)) = (5,4) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(5,6) \in Pr_2$ maka $\beta(5,6) = (\beta(5), \beta(6)) = (2,4) \in\ E(Pr_2)$

Karena β_3 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_3 adalah automorfisme.

4. $\beta_4 = (1)(4\ 6)(5)(2\ 3)$

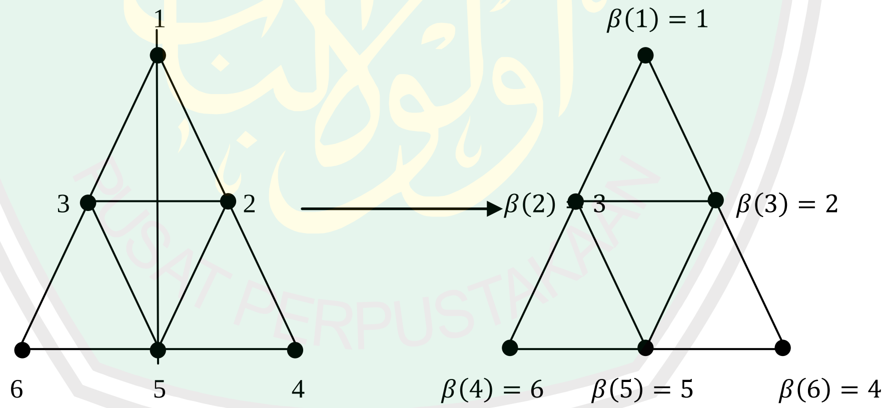
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_4(1) = 1$, $\beta_4(2) = 3$, $\beta_4(3) = 2$, $\beta_4(4) = 6$, $\beta_4(5) = 5$, $\beta_4(6) = 4$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.10 Tabel Fungsi $\beta_4 = (1)(4\ 6)(5)(2\ 3)$

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	1	3	2	6	5	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Refleksi terhadap simpul 1 dan simpul 5

Fungsi $\beta_4 = (1)(4\ 6)(5)(2\ 3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_4 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-2 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_4 : V(Pr_2) \to V(Pr_2)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall (u, v) \in E(Pr_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_2$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (1,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(1,3) \in Pr_2$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (1,2) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(2,3) \in Pr_2$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (3,2) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(2,4) \in Pr_2$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (3,6) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(2,5) \in Pr_2$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (3,5) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(4,5) \in Pr_2$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (6,5) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(3,5) \in Pr_2$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (2,5) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(3,6) \in Pr_2$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (2,4) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(5,6) \in Pr_2$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (5,4) \in \ E(Pr_2)$

Karena β_4 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_4 adalah automorfisme.

5. $\beta_5 = (4)(1\ 6)(3)(2\ 5)$

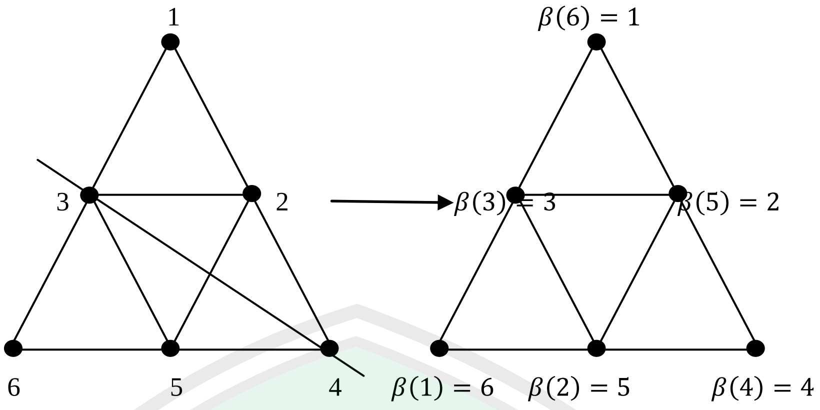
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_5(1) = 6$, $\beta_5(2) = 5$, $\beta_5(3) = 3$, $\beta_5(4) = 4$, $\beta_5(5) = 2$, $\beta_5(6) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.11 Tabel Fungsi $\beta_5 = (4)(1\ 6)(3)(2\ 5)$

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	6	5	3	4	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.15 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Refleksi terhadap simpul 4 dan simpul 3

Fungsi $\beta_5 = (4)(1\ 6)(3)(2\ 5)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_5 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-2 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_5 : V(Pr_2) \to V(Pr_2)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u, v) \in E(Pr_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_2$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (6,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(1,3) \in Pr_2$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (6,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,3) \in Pr_2$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (5,3) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,4) \in Pr_2$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (5,4) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,5) \in Pr_2$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (5,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(4,5) \in Pr_2$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (4,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(3,5) \in Pr_2$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (3,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(3,6) \in Pr_2$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (3,1) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(5,6) \in Pr_2$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (2,1) \in\ E(Pr_2)$

Karena β_5 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_5 adalah automorfisme.

6. $\beta_6 = (6)(1\ 4)(2)(3\ 5)$

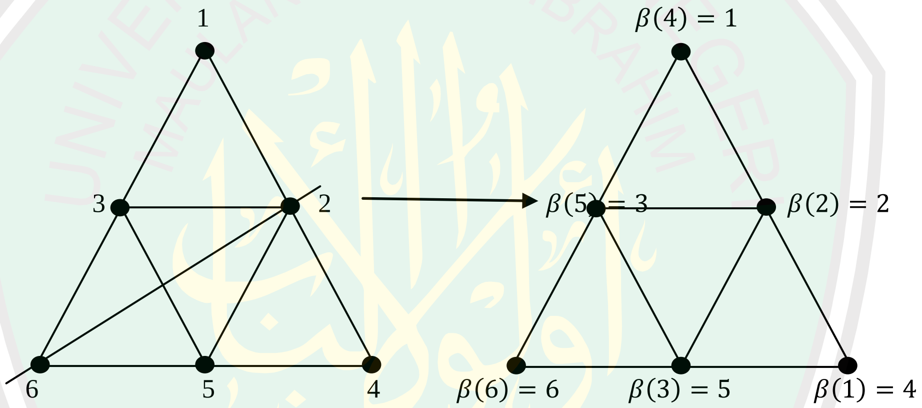
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_6(1) = 4$, $\beta_6(2) = 2$, $\beta_6(3) = 5$, $\beta_6(4) = 1$, $\beta_6(5) = 3$, $\beta_6(6) = 6$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.12 Tabel Fungsi $\beta_6 = (6)(1\ 4)(2)(3\ 5)$

v_i	1	2	3	4	5	6
$\beta(v_i)$	4	2	5	1	3	6

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.16 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Refleksi terhadap simpul 6 dan 2

Fungsi $\beta_6 = (6)(1\ 4)(2)(3\ 5)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_6 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-2 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_6 : V(Pr_2) \rightarrow V(Pr_2)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall(u, v) \in E(Pr_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in Pr_2$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (4,2) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(1,3) \in Pr_2$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (4,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,3) \in Pr_2$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (2,5) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,4) \in Pr_2$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (2,1) \in\ E(Pr_2)$

sisi $E(2,5) \in Pr_2$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (2,3) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(4,5) \in Pr_2$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (1,3) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(3,5) \in Pr_2$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (5,3) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(3,6) \in Pr_2$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (5,6) \in \ E(Pr_2)$

sisi $E(5,6) \in Pr_2$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (3,6) \in \ E(Pr_2)$

Karena β_6 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_6 adalah automorfisme.

Sehingga banyaknya fungsi dengan operasi rotasi dan refleksi yang automorfisme dari graf piramida-1 (Pr_1) ke dirinya sendiri adalah sebanyak 6 fungsi yaitu:

Rotasi : 1. $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ automorfisme identitas

2. $\beta_2 = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)$

3. $\beta_3 = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$

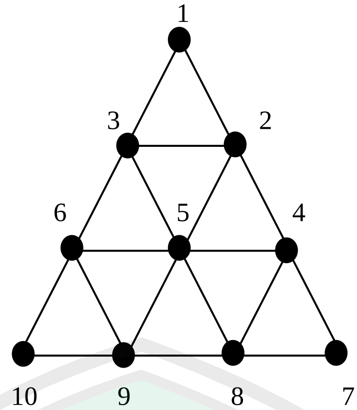
Refleksi : 1. $\beta_4 = (1)(4\ 6)(5)(2\ 3)$

2. $\beta_5 = (4)(1\ 6)(3)(2\ 5)$

3. $\beta_6 = (6)(1\ 4)(2)(3\ 5)$

3.1.3 Graf Piramida-3 (Pr_3)

Graf piramida-3 (Pr_3) yang sudah diberikan label pada titik-titiknya ditunjukkan sebagai berikut



Gambar 3.17 Graf Piramida-3 (Pr_3)

Misal himpunan titik pada graf piramida-3 (Pr_3) adalah $V(Pr_n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Lalu diberikan suatu fungsi dari graf piramida-3 (Pr_3) pada dirinya sendiri yaitu $\beta : V(Pr_3) \to V(Pr_3)$. Graf piramida ($Pr_3$) terdiri dari 18 simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$

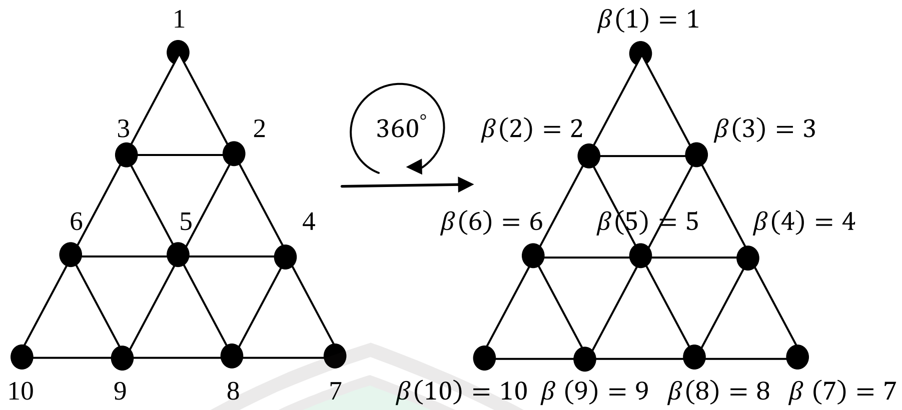
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_1(1) = 1$, $\beta_1(2) = 2$, $\beta_1(3) = 3$, $\beta_1(4) = 4$, $\beta_1(5) = 5$, $\beta_1(6) = 6$, $\beta(7) = 7$, $\beta_1(8) = 8$, $\beta_1(9) = 9$, $\beta_1(10) = 10$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.13 Tabel Fungsi $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(v_i)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.18 Graf Piramida-3 (Pr_3) dengan Rotasi 360°

Fungsi $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_1 : V(Pr_3) \to V(Pr_3)$. Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u, v) \in E(Pr_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (1,2) \in E(Pr_3)$

sisi $E(1,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (1,3) \in E(Pr_3)$

sisi $E(2,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (2,3) \in E(Pr_3)$

sisi $E(2,4) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (2,4) \in E(Pr_3)$

sisi $E(2,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (2,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (4,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(3,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (3,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(3,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (3,6) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (5,6) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,7) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,7) = \big(\beta(4), \beta(7)\big) = (4,7) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,8) = \big(\beta(4), \beta(8)\big) = (4,8) \in E(Pr_3)$

sisi $E(7,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(7,8) = \big(\beta(7), \beta(8)\big) = (7,8) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,8) = (\beta(5), \beta(8)) = (5,8) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,9) = (\beta(5), \beta(9)) = (5,9) \in E(Pr_3)$

sisi $E(8,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(8,9) = (\beta(8), \beta(9)) = (8,9) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,9) = (\beta(6), \beta(9)) = (6,9) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,10) = (\beta(6), \beta(10)) = (6,10) \in E(Pr_3)$

sisi $E(9,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(9,10) = (\beta(9), \beta(10)) = (9,10) \in E(Pr_3)$

Karena β_1 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_1 adalah automorfisme.

2. $\beta_2 = (1\ 7\ 10)(2\ 8\ 6\ )(3\ 4\ 9)(5)$

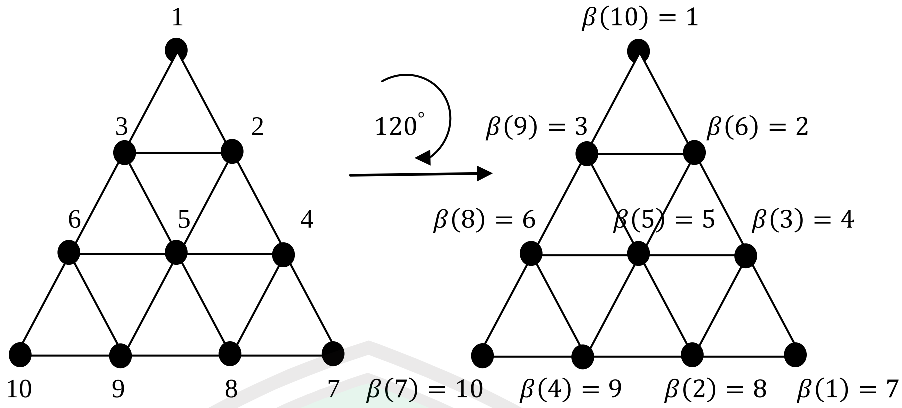
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_2(1) = 7$, $\beta_2(2) = 8$, $\beta_2(3) = 4$, $\beta_2(4) = 9$, $\beta_2(5) = 5$, $\beta_2(6) = 2$, $\beta_2(7) = 10$, $\beta_2(8) = 6$, $\beta_2(9) = 3$, $\beta_2(10) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.14 Tabel Fungsi $\beta_2 = (1\ 7\ 10)(2\ 8\ 6\ )(3\ 4\ 9)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(v_i)$	7	8	4	9	5	2	10	6	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf Piramida-3 (Pr_3) dengan Rotasi 120°

Fungsi $\beta_2 = (1\ 7\ 10)(2\ 8\ 6\ )(3\ 4\ 9)(5)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_2 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_2 : V(Pr_3) \rightarrow V(Pr_3)$.

Didefinisikan $\beta\ (u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u,v) \in E(Pr_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (7,8) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(1,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (7,4) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (8,4) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,4) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (8,9) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (8,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (9,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (4,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (4,2) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (5,2) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,7) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,7) = \big(\beta(4), \beta(7)\big) = (9,10) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,8) = \big(\beta(4), \beta(8)\big) = (9,6) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(7,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(7,8) = \big(\beta(7), \beta(8)\big) = (10,6) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,8) = \big(\beta(5), \beta(8)\big) = (5,6) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,9) = \big(\beta(5), \beta(9)\big) = (5,3) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(8,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(8,9) = \big(\beta(8), \beta(9)\big) = (6,3) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(6,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,9) = \big(\beta(6), \beta(9)\big) = (2,3) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(6,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,10) = \big(\beta(6), \beta(10)\big) = (2,1) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(9,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(9,10) = \big(\beta(9), \beta(10)\big) = (3,1) \in\ E(Pr_3)$

Karena β_2 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_2 adalah automorfisme.

3. $\beta_3 = (1\ 10\ 7)(2\ 6\ 8)(3\ 9\ 4)(5)$

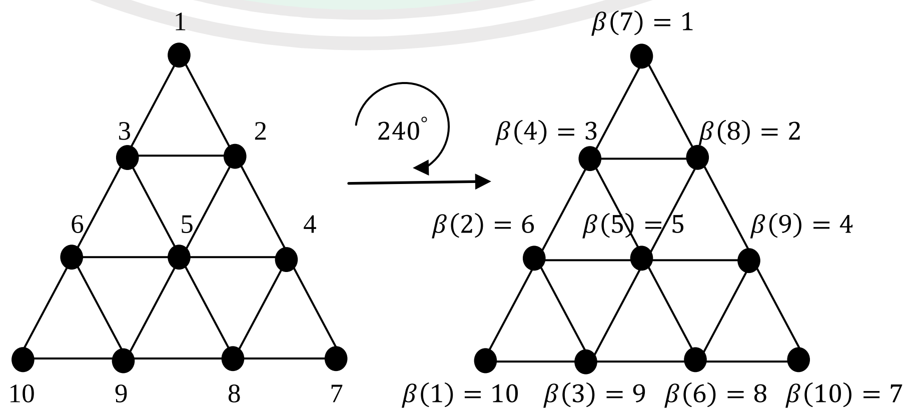
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_3(1) = 10$, $\beta_3(2) = 6$, $\beta_3(3)$ =9, $\beta_{21}(4) =$ 4, $\beta_3(5) = 5$, $\beta_3(6) = 8$, $\beta_3(7) = 1$, $\beta_3(8) = 2$, $\beta_3(9) = 4$, $\beta_3(10) = 7$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.15 Tabel Fungsi $\beta_3 = (1\ 10\ 7)(2\ 6\ 8)(3\ 9\ 4)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(v_i)$	10	6	9	3	5	8	1	2	4	7

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.20 Graf Piramida-3 (Pr_3) dengan Rotasi 240°

Fungsi $\beta_3 = (1\ 10\ 7)(2\ 6\ 8)(3\ 9\ 4)(5)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_3 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_3 : V(Pr_3) \rightarrow V(Pr_3)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall (u, v) \in E(Pr_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (10,6) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(1,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (10,9) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (6,9) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,4) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (6,3) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (6,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (3,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,5) = \big(\beta(3), \beta(5)\big) = (9,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,6) = \big(\beta(3), \beta(6)\big) = (9,8) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,6) = \big(\beta(5), \beta(6)\big) = (5,8) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,7) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,7) = \big(\beta(4), \beta(7)\big) = (3,1) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,8) = \big(\beta(4), \beta(8)\big) = (3,2) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(7,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(7,8) = \big(\beta(7), \beta(8)\big) = (1,2) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,8) = \big(\beta(5), \beta(8)\big) = (5,2) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,9) = \big(\beta(5), \beta(9)\big) = (5,4) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(8,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(8,9) = \big(\beta(8), \beta(9)\big) = (2,4) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(6,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,9) = \big(\beta(6), \beta(9)\big) = (8,4) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(6,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,10) = \big(\beta(6), \beta(10)\big) = (8,7) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(9,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(9,10) = \big(\beta(9), \beta(10)\big) = (4,7) \in\ E(Pr_3)$

Karena β_3 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_3 adalah automorfisme.

4. $\beta_4 = (1)(7\ 10)(5)(2\ 3)(4\ 6)(8\ 9)$

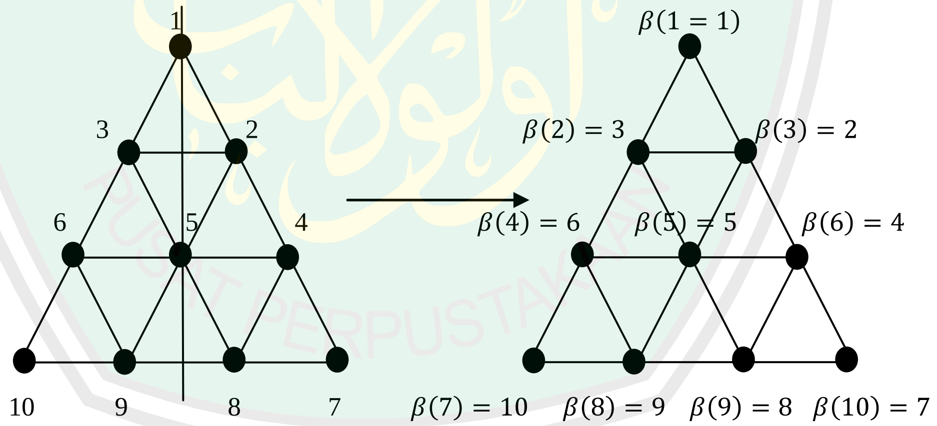
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_4(1) = 1$, $\beta_4(2) = 3$, $\beta_4(3) = 2$, $\beta_4(4) = 6$, $\beta_4(5) = 5$, $\beta_4(6) = 4$, $\beta_4(7) = 10$, $\beta_4(8) = 9$, $\beta_4(9) = 8$, $\beta_{49}(10) = 7$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.16 Tabel Fungsi $\beta_4 = (1)(7\ 10)(5)(2\ 3)(4\ 6)(8\ 9)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(v_i)$	1	3	2	6	5	4	10	9	8	7

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.21 Graf Piramida-2 (Pr_2) dengan Refleksi terhadap simpul 1, simpul 5, serta terhadap Sumbu yang Diambil Diantara Simpul 2 dan simpul 3, simpul 8 dan simpul 9

Fungsi $\beta_4 = (1)(7\ 10)(5)(2\ 3)(4\ 6)(8\ 9)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_4 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_4 : V(Pr_3) \to V(Pr_3)$. Didefinisikan $\beta\ (u, v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u, v) \in E(Pr_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (1,3) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(1,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,3) = (\beta(1), \beta(3)) = (1,2) \in E(Pr_3)$

sisi $E(2,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,3) = (\beta(2), \beta(3)) = (3,2) \in E(Pr_3)$

sisi $E(2,4) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,4) = (\beta(2), \beta(4)) = (3,6) \in E(Pr_3)$

sisi $E(2,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,5) = (\beta(2), \beta(5)) = (3,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,5) = (\beta(4), \beta(5)) = (6,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(3,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,5) = (\beta(3), \beta(5)) = (2,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(3,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,6) = (\beta(3), \beta(6)) = (2,4) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,6) = (\beta(5), \beta(6)) = (5,4) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,7) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,7) = (\beta(4), \beta(7)) = (6,10) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,8) = (\beta(4), \beta(8)) = (6,9) \in E(Pr_3)$

sisi $E(7,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(7,8) = (\beta(7), \beta(8)) = (10,9) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,8) = (\beta(5), \beta(8)) = (5,9) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,9) = (\beta(5), \beta(9)) = (5,8) \in E(Pr_3)$

sisi $E(8,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(8,9) = (\beta(8), \beta(9)) = (9,8) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,9) = (\beta(6), \beta(9)) = (4,8) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,10) = (\beta(6), \beta(10)) = (4,7) \in E(Pr_3)$

sisi $E(9,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(9,10) = (\beta(9), \beta(10)) = (8,7) \in E(Pr_3)$

Karena β_4 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_4 adalah automorfisme.

5. $\beta_5 = (7)(1\ 10)(5)(4\ 8)(2\ 9)(3\ 6)$

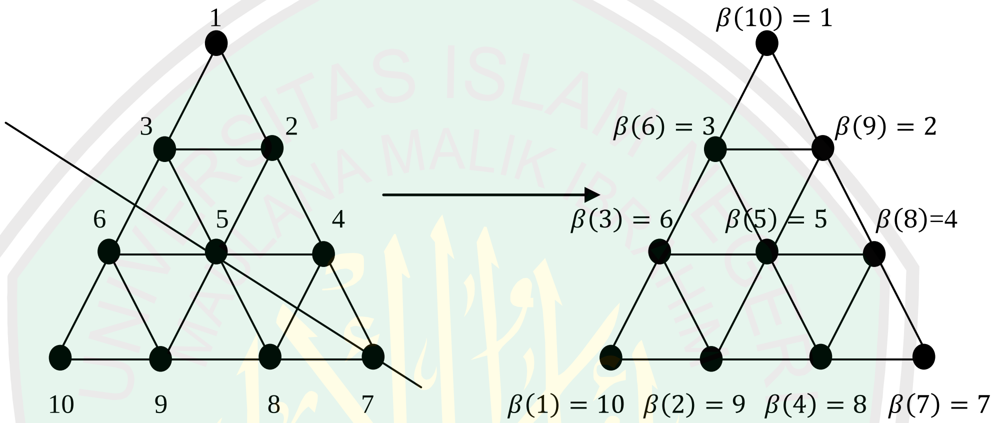
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_5(1) = 10$, $\beta_5(2) = 9$, $\beta_5(3) = 6$, $\beta_5(4) = 8$, $\beta_5(5) = 5$, $\beta_5(6) = 3$, $\beta_5(7) = 7$, $\beta_5(8) = 4$, $\beta_5(9) = 2$, $\beta_5(10) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.17 Tabel Fungsi $\beta_5 = (7)(1\ 10)(5)(4\ 8)(2\ 9)(3\ 6)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(v_i)$	10	9	6	8	5	3	7	4	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.22 Graf Piramida-3 (Pr_3) dengan Refleksi terhadap simpul 7, simpul 5, serta terhadap Sumbu yang Diambil Diantara Simpul 4 dan simpul 8, simpul 3 dan simpul 6

Fugsi $\beta_5 = (7)(1\ 10)(5)(4\ 8)(2\ 9)(3\ 6)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_5 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_5 : V(Pr_3) \rightarrow V(Pr_3)$. Didefinisikan $\beta\ (u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big), \forall(u,v) \in E(Pr_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,2) = \big(\beta(1), \beta(2)\big) = (10,9) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(1,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,3) = \big(\beta(1), \beta(3)\big) = (10,6) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,3) = \big(\beta(2), \beta(3)\big) = (9,6) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,4) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,4) = \big(\beta(2), \beta(4)\big) = (9,8) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,5) = \big(\beta(2), \beta(5)\big) = (9,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,5) = \big(\beta(4), \beta(5)\big) = (8,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,5) = (\beta(3), \beta(5)) = (6,5) \in E(Pr_3)$

sisi $E(3,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,6) = (\beta(3), \beta(6)) = (6,3) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,6) = (\beta(5), \beta(6)) = (5,3) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,7) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,7) = (\beta(4), \beta(7)) = (8,7) \in E(Pr_3)$

sisi $E(4,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,8) = (\beta(4), \beta(8)) = (8,4) \in E(Pr_3)$

sisi $E(7,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(7,8) = (\beta(7), \beta(8)) = (7,4) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,8) = (\beta(5), \beta(8)) = (5,4) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,9) = (\beta(5), \beta(9)) = (5,2) \in E(Pr_3)$

sisi $E(8,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(8,9) = (\beta(8), \beta(9)) = (4,2) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6,9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,9) = (\beta(6), \beta(9)) = (3,2) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6,10) = (\beta(6), \beta(10)) = (3,1) \in E(Pr_3)$

sisi $E(9,10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(9,10) = (\beta(9), \beta(10)) = (2,1) \in E(Pr_3)$

Karena β_5 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_5 adalah automorfisme.

6. $\beta_6 = (10)(1\ 7)(5)(6\ 9)(3\ 8)(2\ 4)$

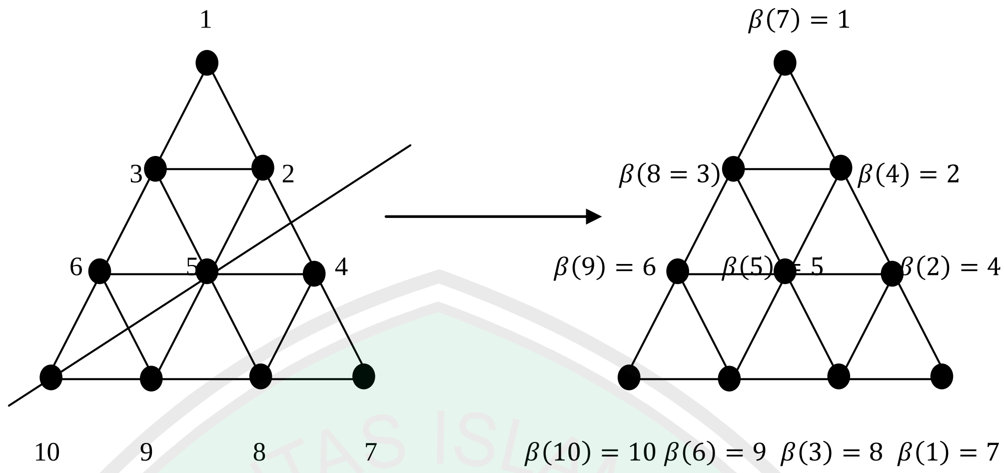
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\beta_6(1) = 7$, $\beta_6(2) = 4$, $\beta_6(3) = 8$, $\beta_{51}(4) = 2$, $\beta_6(5) = 5$, $\beta_6(6) = 9$, $\beta_6(7) = 1$, $\beta_6(8) = 3$, $\beta_6(9) = 6$, $\beta_6(10) = 10$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.18 Tabel Fungsi $\beta_6 = (10)(1\ 7)(5)(6\ 9)(3\ 8)(2\ 4)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(v_i)$	7	4	8	4	5	9	1	3	6	10

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.23 Graf Piramida-3 (Pr_3) dengan Refleksi terhadap simpul 10, simpul 5, serta terhadap Sumbu yang Diambil Diantara Simpul 6 dan simpul 9, simpul 4 dan simpul 2

Fungsi $\beta_6 = (10)(1\ 7)(5)(6\ 9)(3\ 8)(2\ 4)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi β_6 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari piramida-3 pada dirinya sendiri yaitu $\beta_6 : V(Pr_3) \rightarrow V(Pr_3)$.

Didefinisikan $\beta\ (u, v) = (\beta(u), \beta(v)), \forall(u, v) \in E(Pr_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,2) = (\beta(1), \beta(2)) = (7,4) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(1,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(1,3) = (\beta(1), \beta(3)) = (7,8) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,3) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,3) = (\beta(2), \beta(3)) = (4,8) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,4) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,4) = (\beta(2), \beta(4)) = (4,2) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(2,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(2,5) = (\beta(2), \beta(5)) = (4,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,5) = (\beta(4), \beta(5)) = (2,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,5) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,5) = (\beta(3), \beta(5)) = (8,5) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(3,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(3,6) = (\beta(3), \beta(6)) = (8,9) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(5,6) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5,6) = (\beta(5), \beta(6)) = (5,9) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,7) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,7) = (\beta(4), \beta(7)) = (2,1) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(4,8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(4,8) = (\beta(4), \beta(8)) = (2,3) \in\ E(Pr_3)$

sisi $E(7{,}8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(7{,}8) = \big(\beta(7), \beta(8)\big) = (1{,}3) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5{,}8) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5{,}8) = \big(\beta(5), \beta(8)\big) = (5{,}3) \in E(Pr_3)$

sisi $E(5{,}9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(5{,}9) = \big(\beta(5), \beta(9)\big) = (5{,}6) \in E(Pr_3)$

sisi $E(8{,}9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(8{,}9) = \big(\beta(8), \beta(9)\big) = (3{,}6) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6{,}9) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6{,}9) = \big(\beta(6), \beta(9)\big) = (9{,}6) \in E(Pr_3)$

sisi $E(6{,}10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(6{,}10) = \big(\beta(6), \beta(10)\big) = (9{,}10) \in E(Pr_3)$

sisi $E(9{,}10) \in (Pr_3)$ maka $\beta(9{,}10) = \big(\beta(9), \beta(10)\big) = (6{,}10) \in E(Pr_3)$

Karena β_6 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi β_6 adalah automorfisme.

Sehingga banyaknya fungsi dengan operasi rotasi dan refleksi yang automorfisme dari graf piramida-3 (Pr_3) ke dirinya sendiri adalah sebanyak 6 fungsi yaitu:

Rotasi : 1. $\beta_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)\ (7)(8)(9)(10)$

2. $\beta_2 = (1\ 7\ 10)(2\ 8\ 6)(3\ 4\ 9)(5)$

3. $\beta_3 = (1\ 10\ 7)(2\ 6\ 8)(3\ 9\ 4)(5)$

Refleksi : 1. $\beta_4 = (1)(7\ 10)(5)(2\ 3)(4\ 6)(8\ 9)$

2. $\beta_5 = (7)(1\ 10)(5)(4\ 8)(2\ 9)(3\ 6)$

3. $\beta_6 = (10)(1\ 7)(5)(6\ 9)(3\ 8)(2\ 4)$

Dari uraian automorfisme graf piramida (Pr_n) di atas dapat dibuat teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Automorfisme pada graf piramida (Pr_n) isomorfik dengan grup dihedral berorder 6 (D_3).

Bukti

Misalkan $G = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$ adalah himpunan yang tak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner.

Akan ditunjukkan bahwa automorfisme dari graf piramida (Pr_n) merupakan grup. Dapat dilihat dari tabel *cayley* berikut:

Tabel 3.19 Tabel Cayle Automorfisme Graf piramida (Pr_n)

$\circ$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
β_1	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
β_2	β_2	β_3	β_1	β_6	β_4	β_5
β_3	β_3	β_1	β_2	β_5	β_6	β_4
β_4	β_4	β_5	6	β_1	β_2	β_3
β_5	β_5	β_6	β_5	β_3	β_1	β_2
β_6	β_6	β_4	β_4	β_2	β_3	β_1

Himpunan G diatas bersama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis $(G, \circ)$ adalah suatu grup. Karena telah memenuhi beberapa aksioma berikut:

1. Operasi $\circ$ bersifat tertutup
2. Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

   Misal: $\beta_4 \circ (\beta_5 \circ \beta_6) = (\beta_4 \circ \beta_5) \circ \beta_6$

   $$\beta_4 \circ \beta_2 = \beta_2 \circ \beta_6$$

   $$\beta_5 = \beta_5$$

3. G memuat elemen identitas yaitu β_1

4. Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula. Invers dari himpunan tersebut adalah dirinya sendiri, sedangkan invers dari β_2 adalah β_3 dan inversa dari β_3 adalah β_2.

Karena graf tersebut memenuhi aksioma aksioma grup, maka terbukti bahwa automorfisme dari graf piramida merupakan grup .

Misalkan $(D_3) \cong (\mathcal{A}(Pr_n), \circ)$

Akan ditunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu dari anggota (D_3) pada $(\mathcal{A}(Pr_n), \circ)$.

Buat pemetaan f dari D_3 ke $\mathcal{A}(Pr_n)$ dengan cara:

Jika $\alpha \in D_3$ dengan $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

Maka $\quad \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$

$$f(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$$

Karena α dan $f(\alpha)$ korespondensinya sama, maka bentuk permutasinya sama.

Misalkan $(D_3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ dan $\mathcal{A}(Pr_n) = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$.

Selanjutnya, anggota D_3 dikorespondenkan satu-satu pada titik-titik dari Pr_n sebagai berikut:

D_3 = 6 elemen dengan $\varphi = \{1,2,3\}$ $\quad$ $\mathcal{A}(Pr_n) = 6$ elemen

$\alpha_1 = (1)(2)(3) \longrightarrow \beta_1 = (1)(2)(3)$

$\alpha_2 = (1\ 2\ 3) \longrightarrow \beta_2 = (1\ 2\ 3)$

$\alpha_3 = (1\ 3\ 2) \longrightarrow \beta_3 = (1\ 3\ 2)$

$\alpha_4 = (1)(2\ 3) \longrightarrow \beta_4 = (1)(2\ 3)$

$\alpha_5 = (1\ 3)(2) \longrightarrow \beta_5 = (1\ 3)(2)$

$\alpha_6 = (1\ 2)(3) \longrightarrow \beta_6 = (1\ 2)(3)$

Dapat ditunjukkan bahwa f bersifat bijektif dan homomorfisme.

Jika $x, y \in D_3$ dan $f(x), f(y) \in \mathcal{A}(Pr_n)$

Maka $x \to\ f(x)\ \ y \to f(y)$

Jadi, $f(xy) = f(x)f(y)$ dengan demikian f adalah isomorfisme

Sehingga $(D_3) \cong\ (\mathcal{A}(Pr_n), \circ)$ terbukti.

3.2 Grup Automorfisme dari Graf Berlian

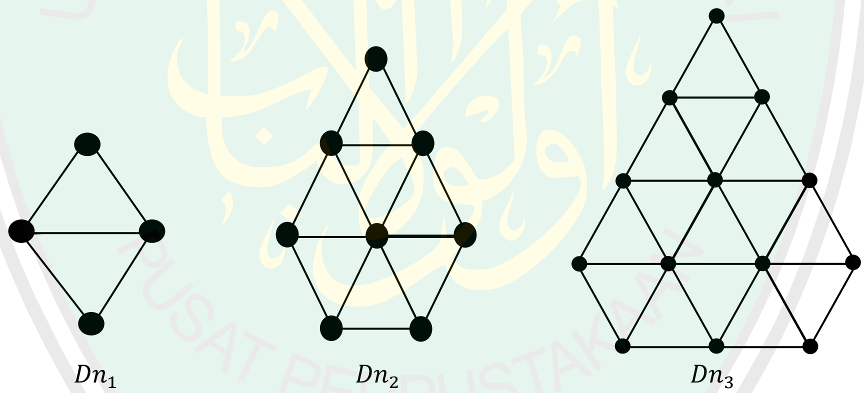
Misal graf berlian Dn_n dengan himpunan titik memuat

$$V(Dn_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

dan himpunan sisi

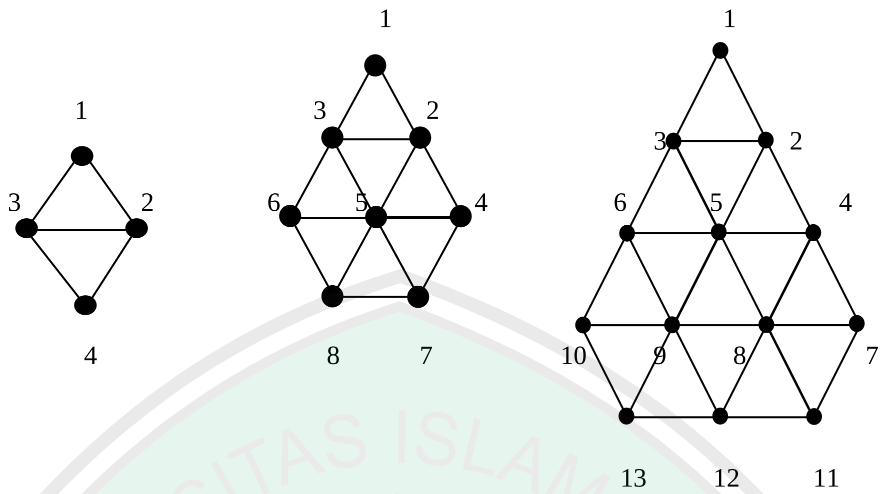
$$E(Dn_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

diberikan beberapa graf berlian sebagai berikut:



Gambar 3.24 Graf Berlian-1, Graf Berlian-2, Graf Berlian-3

Selanjutnya pemberian label pada tiap-tiap graf piramida sebagai berikut

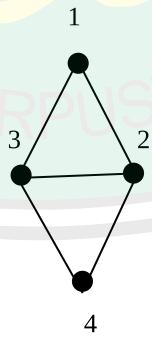


Gambar 3.25 Graf Berlian-1, Graf Berlian-2, Graf Berlian-3 dengan Label Titik

Kemudian akan ditentukan automorfisme yang dapat dibuat pada masing-masing graf. Pada langkah ini akan dimulai dari graf berlian-1 sebagai berikut:

3.2.1 Graf Berlian-1 (Dn_1)

Graf berlian-1 (Dn_1) yang sudah diberikan label pada titik-titiknya ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.26 Graf Berlian-1 (Dn_1)

Misal himpunan titik pada graf berlian-1 (Dn_1) adalah $V(Dn_n) = \{1, 2, 3, 4\}$. Lalu diberikan suatu fungsi dari graf berlian-1 (Dn_1) pada dirinya sendiri yaitu

$\gamma : V(Dn_n) \rightarrow V(Dn_n)$. Graf Berlian (Dn_1) terdiri dari 5 simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)$

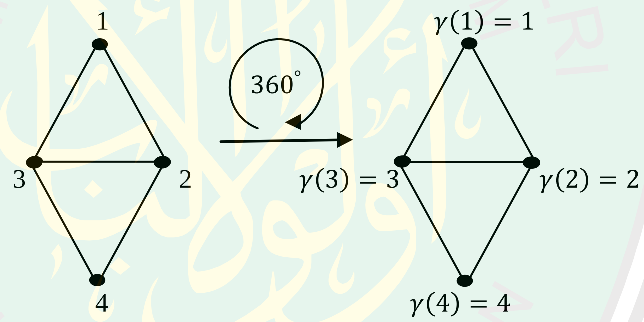
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_1(1) = 1$, $\gamma_1(2) = 2$, $\gamma_1(3) = 3$, $\gamma_1(4) = 4$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.20 Tabel Fungsi $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)$

v_i	1	2	3	4
$\gamma(v_i)$	1	2	3	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.27 Graf berlian-1 (Dn_1) dengan Rotasi 360°

Fungsi $\gamma_1 = (1)\,(2)\,(3)(4)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-1 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_1 : V(Dn_1) \rightarrow \gamma(Dn_1)$.

Didefinisikan $\gamma\,(u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall (u, v) \in E(Dn_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,2) \in E(Dn_1)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,3) \in E(Dn_1)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (2,3) \in E(Dn_1)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (2,4) \in E(Dn_1)$

sisi $E(3,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(3,4) = \big(\gamma(3), \gamma(4)\big) = (3,4) \in\ E(Dn_1)$

Karena γ_1 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_1 adalah automorfisme.

2. $\gamma_2 = (1\ 4)\ (2\ 3)$

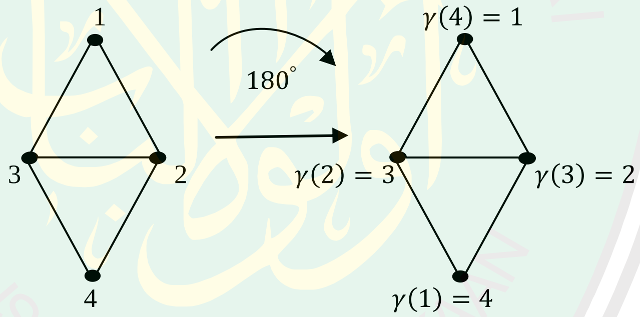
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_2(1) = 4$, $\gamma_2(2) = 3$, $\gamma_2(3) = 2$, $\gamma_2(4) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.21 Tabel Fungsi $\gamma_1 = (1\ 4)(2\ 3)$

$\mathrm{v_i}$	1	2	3	4
$\gamma(\mathrm{v_i})$	4	3	2	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.28 Graf berlian-1 (Dn_1) dengan Rotasi 180°

Fungsi $\gamma_2 = (1\ 4)(2\ 3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-1 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_1 : V(Dn_1) \to \gamma(Dn_1)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u, v) \in E(Dn_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (4,3) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (4,2) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (3,2) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (3,1) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(3,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(3,4) = \big(\gamma(3), \gamma(4)\big) = (2,1) \in\ E(Dn_1)$

Karena γ_2 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_2 adalah automorfisme.

3. $\gamma_3 = (2\ 3)\ (1)(4)$

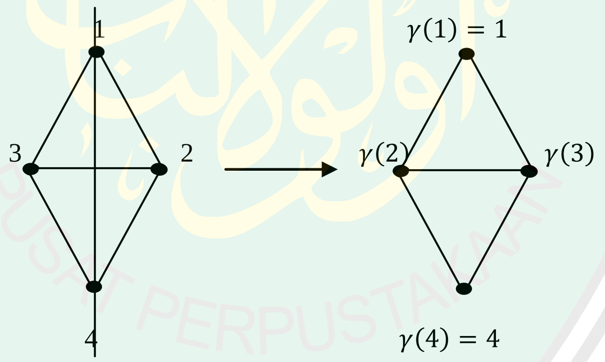
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_3(1) = 1$, $\gamma_3(2) = 3$, $\gamma_3(3) = 2$, $\gamma_3(4) = 4$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.22 Tabel Fungsi $\gamma_3 = (2\ 3)(1)(4)$

v_i	1	2	3	4
$\gamma(v_i)$	1	3	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.29 Graf berlian-1 (Dn_1) dengan Refleksi terhadap simpul 1 dan simpul 4

Fungsi $\gamma_3 = (2\ 3)(1)(4)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_3 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-1 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_3 : V(Dn_1) \to \gamma(Dn_1)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big), \forall (u, v) \in E(Dn_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,3) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,3) = (\gamma(2), \gamma(3)) = (3,2) \in E(Dn_1)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,4) = (\gamma(2), \gamma(4)) = (3,4) \in E(Dn_1)$

sisi $E(3,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(3,4) = (\gamma(3), \gamma(4)) = (2,4) \in E(Dn_1)$

Karena γ_3 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_3 adalah automorfisme.

4. $\gamma_4 = (1\ 4)(2)(3)$

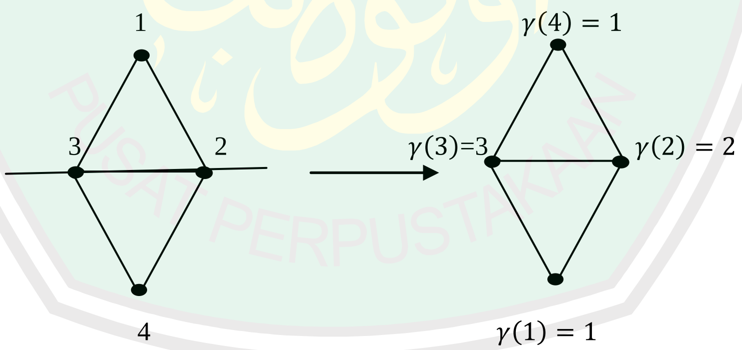
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_4(1) = 4$, $\gamma_4(2) = 2$, $\gamma_4(3) = 3$, $\gamma_4(4) = 1$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.23 Tabel Fungsi $\gamma_4 = (1\ 4)(2)(3)$

v_i	1	2	3	4
$\gamma(v_i)$	4	2	3	1

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.30 Graf berlian-1 (Dn_1) dengan Refleksi terhadap simpul 2 dan simpul 3

Fungsi $\gamma_4 = (1\ 4)(2)(3)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_4 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-1 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_4 : V(Dn_1) \rightarrow \gamma(Dn_1)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = (\gamma(u), \gamma(v))$, $\forall (u, v) \in E(Dn_1)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,2) = (\gamma(1), \gamma(2)) = (4,2) \in E(Dn_1)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (4,3) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (2,3) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (2,1) \in\ E(Dn_1)$

sisi $E(3,4) \in (Dn_1)$ maka $\gamma(3,4) = \big(\gamma(3), \gamma(4)\big) = (3,1) \in\ E(Dn_1)$

Karena γ_4 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_4 adalah automorfisme.

Sehingga banyaknya fungsi dengan operasi rotasi dan refleksi yang automorfisme dari graf berlian-1 (Dn_1) ke dirinya sendiri adalah sebanyak 4 fungsi yaitu:

Rotasi : 1. $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)$

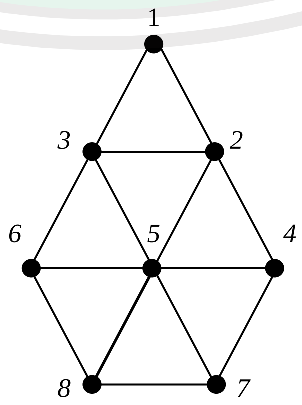
2. $\gamma_2 = (1\ 4)(2\ 3)$

Refleksi : 1. $\gamma_3 = (2\ 3)(1)(4)$

2. $\gamma_4 = (1\ 4)(2)(3)$

3.2.1 Graf Berlian-2 (Dn_2)

Graf berlian-2 (Dn_2) yang sudah diberikan label pada titik-titiknya ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.31 Graf berlian-2 (Dn_2)

Misal himpunan titik pada graf berlian-2 (Dn_2) adalah $V(Dn_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Lalu diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 (Dn_2) pada dirinya sendiri yaitu $\gamma : V(Dn_n) \to V(Dn_n)$. Graf Berlian-2 (Dn_2) terdiri dari 14 simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

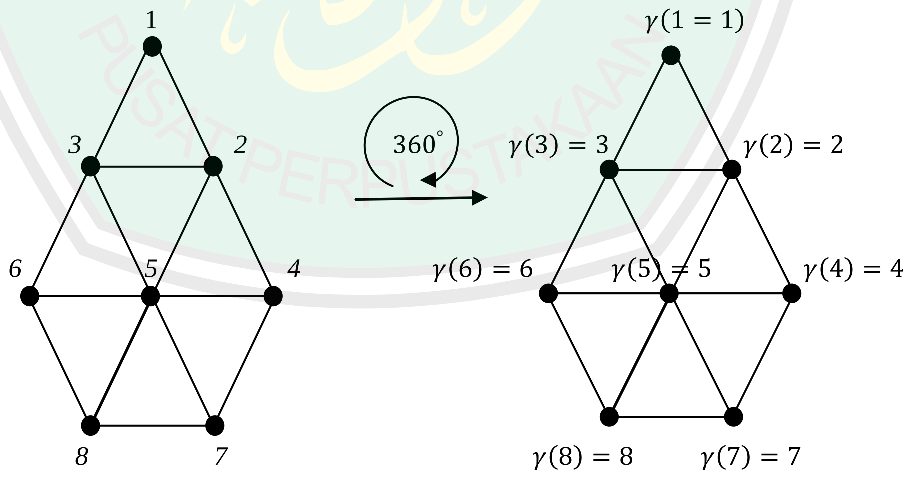
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_1(1) = 1$, $\gamma_1(2) = 2$, $\gamma_1(3) = 3$, $\gamma_1(4) = 4$, $\gamma_1(5) = 51$, $\gamma_1(6) = 6$, $\gamma_1(7) = 7$, $\gamma_1(8) = 8$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

   Tabel 3.24 Tabel Fungsi $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	2	3	4	5	6	7	8

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.32 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi 360°

   Fungsi $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_1 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u),\gamma(v)\big), \forall(u,v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1),\gamma(2)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1),\gamma(3)\big) = (1,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2),\gamma(3)\big) = (2,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2),\gamma(4)\big) = (2,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2),\gamma(5)\big) = (2,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4),\gamma(5)\big) = (4,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3),\gamma(5)\big) = (3,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3),\gamma(6)\big) = (3,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5),\gamma(6)\big) = (5,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4),\gamma(7)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5),\gamma(7)\big) = (5,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5),\gamma(8)\big) = (5,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7),\gamma(8)\big) = (7,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6),\gamma(8)\big) = (6,8) \in\ E(Dn_2)$

Karena γ_1 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_1 adalah automorfisme.

2. $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6)(7)(8)$

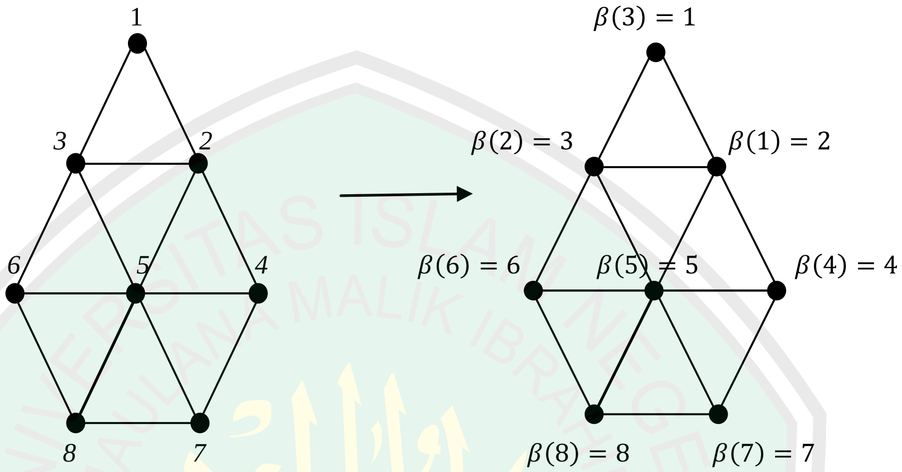
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_2(1) = 2$, $\gamma_2(2) = 3$, $\gamma_2(3) = 1$, $\gamma_2(4) = 4, \gamma_2(5) = 51, \gamma_2(6) = 6, \gamma_2(7) = 7, \gamma_2(8) = 8$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.25Tabel Fungsi $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6)(7)(8)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	2	3	1	4	5	6	7	8

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.33 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6)(7)(8)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_2 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_2 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$. Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u, v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (2,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (2,1) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (3,1) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (3,4) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (2,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (4,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (1,5) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (1,6) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = (\gamma(5), \gamma(6)) = (5,6) \in E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = (\gamma(4), \gamma(7)) = (4,7) \in E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = (\gamma(5), \gamma(7)) = (5,7) \in E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = (\gamma(5), \gamma(8)) = (5,8) \in E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = (\gamma(7), \gamma(8)) = (7,8) \in E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = (\gamma(6), \gamma(8)) = (6,8) \in E(Dn_2)$

Karena γ_2 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_2 adalah automorfisme.

3. $\gamma_3 = (1\ 3\ 2)(4)(5)(6)(7)(8)$

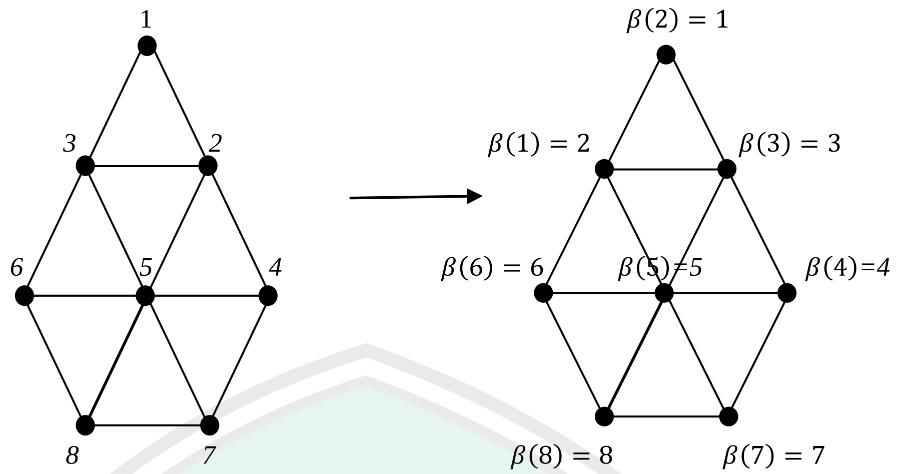
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_3(1) = 3$, $\gamma_3(2) = 1$, $\gamma_3(3) = 2$, $\gamma_3(4) = 4, \gamma_3(5) = 51, \gamma_3(6) = 6, \gamma_3(7) = 7, \gamma_3(8) = 8$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.26 Tabel Fungsi $\gamma_3 = (1\ 3\ 2)(4)(5)(6)(7)(8)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	3	1	2	4	5	6	7	8

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.34 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_3 = (1\ 3\ 2)(4)(5)(6)(7)(8)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_3 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_3 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$. Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big), \forall(u, v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (3,1) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (3,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (1,4) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (1,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (4,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (2,5) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (2,6) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5), \gamma(7)\big) = (5,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (7,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (6,8) \in\ E(Dn_2)$

Karena γ_3 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_3 adalah automorfisme.

4. $\gamma_4 = (3\ 2\ 4\ 7\ 8\ 6)(1)(5)$

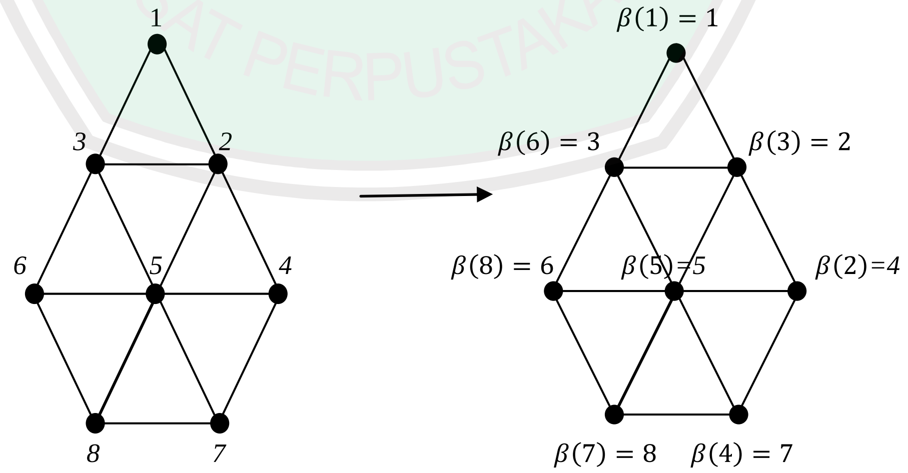
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_4(1) = 1$, $\gamma_4(2) = 4$, $\gamma_4(3) = 2$, $\gamma_4(4) = 7, \gamma_4(5) = 51, \gamma_4(6) = 3, \gamma_4(7) = 8, \gamma_4(8) = 6$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.27 Tabel Fungsi $\gamma_4 = (3\ 2\ 4\ 7\ 8\ 6)(1)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	4	2	7	5	3	8	6

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.35 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_4 = (3\ 2\ 4\ 7\ 8\ 6)(1)(5)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_4 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_4 : V(Dn_2) \rightarrow \gamma(Dn_2)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,4) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (4,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (4,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (7,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (2,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (2,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (7,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5), \gamma(7)\big) = (5,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (8,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (3,6) \in\ E(Dn_2)$

Karena γ_4 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_4 adalah automorfisme.

5. $\gamma_5 = (3\ 4\ 8)(2\ 7\ 6)(1)(5)$

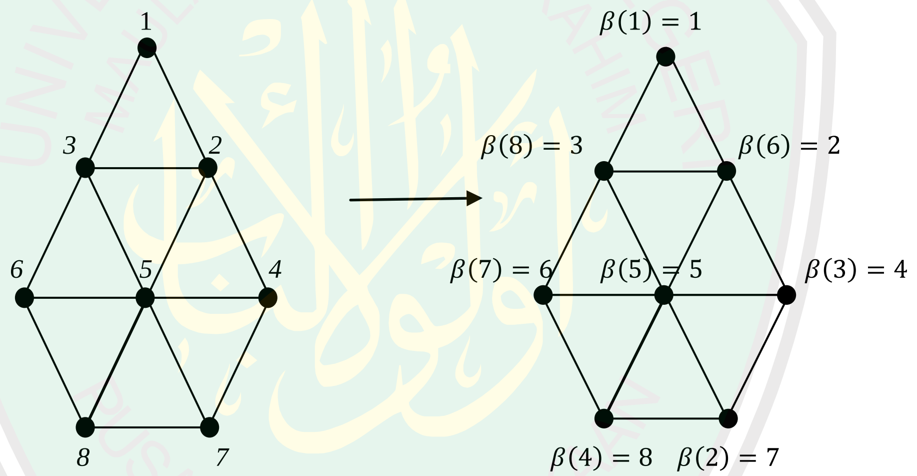
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_5(1) = 1$, $\gamma_5(2) = 8$, $\gamma_5(3) = 4$, $\gamma_5(4) = 8$, $\gamma_5(5) = 5$, $\gamma_5(6) = 2$, $\gamma_5(7) = 6$, $\gamma_5(8) = 3$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.28 Tabel Fungsi $\gamma_5 = (3\ 4\ 8)(2\ 7\ 6)(1)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	7	4	8	5	2	6	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.36 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_5 = (3\ 4\ 8)(2\ 7\ 6)(1)(5)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_5 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_5 : V(Dn_2) \rightarrow \gamma(Dn_2)$. Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u, v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,7) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (3,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (7,8) \in E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (7,5) \in E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (8,5) \in E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (4,5) \in E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (4,2) \in E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,2) \in E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (4,7) \in E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5), \gamma(7)\big) = (8,6) \in E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,4) \in E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (6,3) \in E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (2,3) \in E(Dn_2)$

Karena γ_5 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_5 adalah automorfisme.

6. $\gamma_6 = (3\ 7)(2\ 8)(4\ 6)(1)(5)$

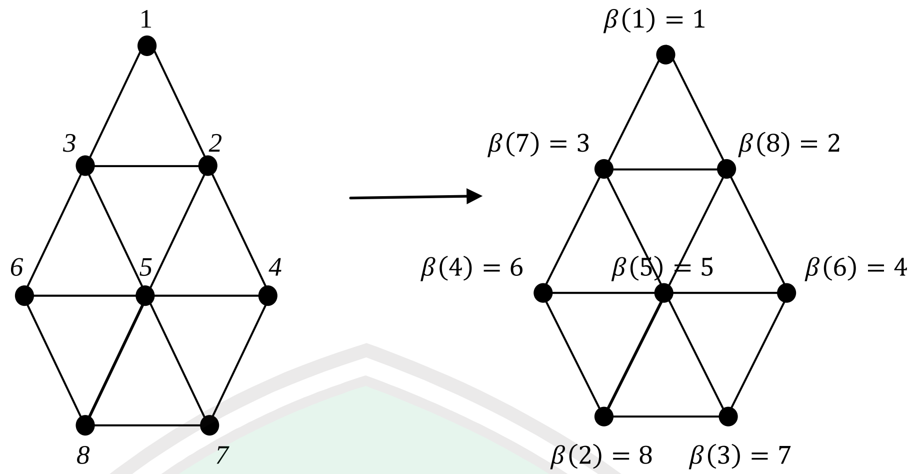
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_6(1) = 1$, $\gamma_6(2) = 8$, $\gamma_6(3) = 7$, $\gamma_6(4) = 6$, $\gamma_6(5) = 5$, $\gamma_6(6) = 4$, $\gamma_6(7) = 3$, $\gamma_6(8) = 2$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.29 Tabel Fungsi $\gamma_6 = (3\ 7)(2\ 8)(4\ 6)(1)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	8	7	6	5	4	3	2

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.37 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_6 = (3\ 7)(2\ 8)(46)(1)(5)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_6 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_6 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$. Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u),\gamma(v)\big), \forall(u,v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1),\gamma(2)\big) = (1,8) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1),\gamma(3)\big) = (1,7) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2),\gamma(3)\big) = (8,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2),\gamma(4)\big) = (8,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2),\gamma(5)\big) = (8,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4),\gamma(5)\big) = (6,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3),\gamma(5)\big) = (7,5) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3),\gamma(6)\big) = (7,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5),\gamma(6)\big) = (5,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4),\gamma(7)\big) = (6,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5),\gamma(7)\big) = (5,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,2) \in E(Dn_2)$

sisi $(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (3,2) \in E(Dn_2)$

sisi $(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (4,2) \in E(Dn_2)$

jadi, fungsi γ adalah bukan automorfisme.

7. $\gamma_7 = (3\ 8\ 4)(2\ 6\ 7)(1)(5)$

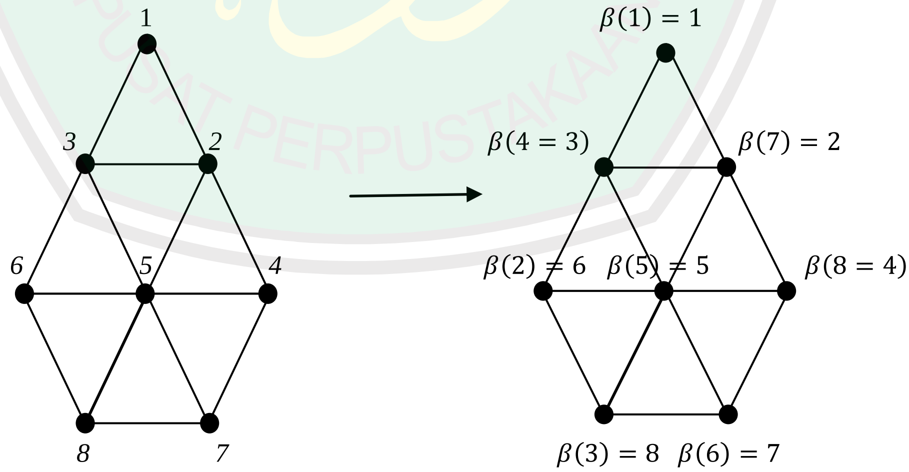
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_7(1) = 1$, $\gamma_7(2) = 6$, $\gamma_7(3) = 8$, $\gamma_7(4) = 3$, $\gamma_7(5) = 5$, $\gamma_7(6) = 7$, $\gamma_7(7) = 2$, $\gamma_7(8) = 4$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.30 Tabel Fungsi $\gamma_7 = (3\ 8\ 4)(2\ 6\ 7)(1)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	6	8	3	5	7	2	4

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.38 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_7 = (3\ 8\ 4)(2\ 6\ 7)(1)(5)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_7 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_7 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall (u,v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,6) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,8) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (6,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (63) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (6,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (3,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (8,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (8,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (3,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5), \gamma(7)\big) = (5,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (2,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (7,4) \in\ E(Dn_2)$

Karena γ_7 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_7 adalah automorfisme.

8. $\gamma_8 = (3\ 6\ 8\ 7\ 4\ 2)(1)(5)$

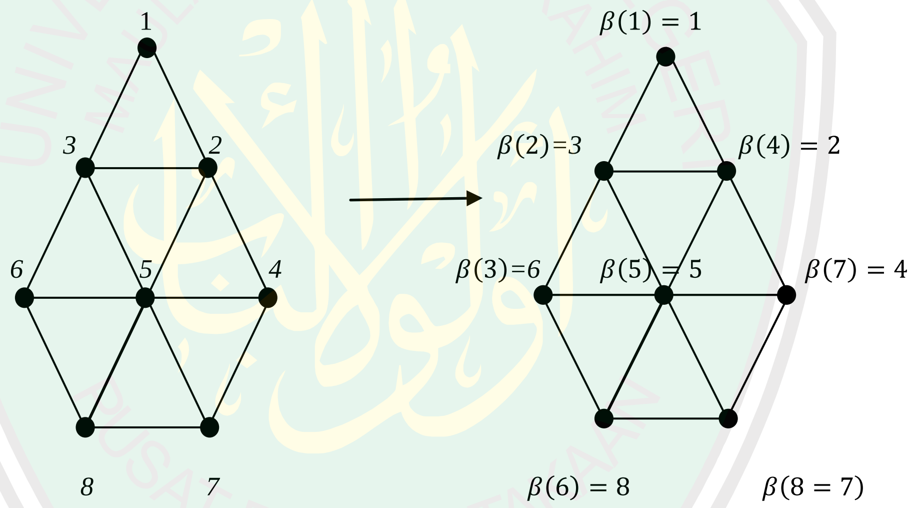
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_8(1) = 1$, $\gamma_8(2) = 3$, $\gamma_8(3) = 6$, $\gamma_8(4) = 2, \gamma_8(5) = 5$, $\gamma_8(6) = 8$, $\gamma_8(7) = 4$, $\gamma_8(8) = 7$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.31 Tabel Fungsi $\gamma_8 = (3\ 6\ 8\ 7\ 4\ 2)(1)(5)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	3	6	2	5	8	4	7

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.39 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_8 = (3\ 6\ 8\ 7\ 4\ 2)(1)(5)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_8 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_8 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$. Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u, v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,6) \notin\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (3,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (3,2) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (3,5) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (2,5) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (6,5) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (6,8) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,8) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (2,4) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = \big(\gamma(5), \gamma(7)\big) = (5,4) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,7) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (4,7) \in \ E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (8,7) \in \ E(Dn_2)$

Karena γ_8 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_8 adalah automorfisme.

9. $\gamma_9 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(7\ 8)$

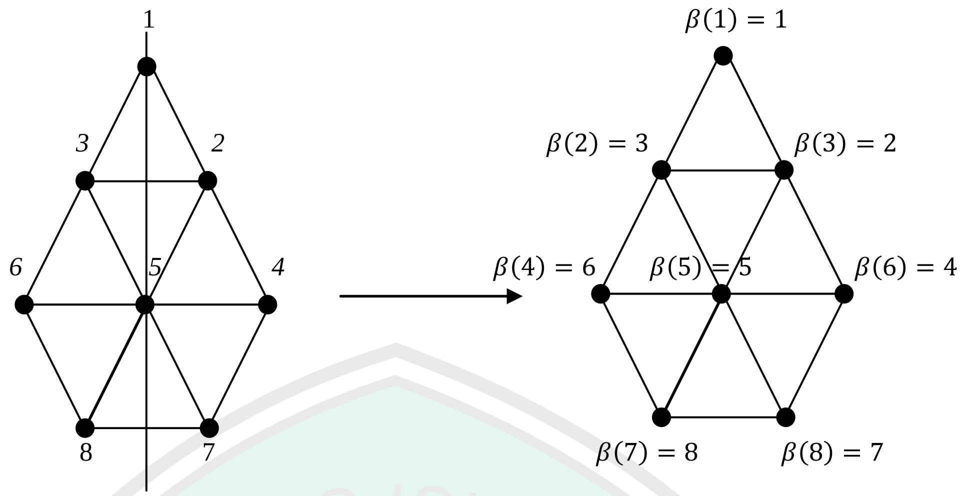
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_2(1) = 1$, $\gamma_2(2) = 3$, $\gamma_2(3) = 2$, $\gamma_2(4) = 6$, $\gamma_2(5) = 5$, $\gamma_2(6) = 4$, $\gamma_2(7) = 8$, $\gamma_2(8) = 7$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.32 Tabel Fungsi $\gamma_2 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(7\ 8)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma(v_i)$	1	3	2	6	5	4	8	7

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.40 Graf berlian-2 (Dn_2) dengan Refleksi terhadap simpul 1 dan simpul 5 serta terhadap sumbu yang diambil diantara simpul 2 dan simpul 3, simpul 4 dan simpul 6, simpul 7 dan simpul 8

Fungsi $\gamma_9 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(7\ 8)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_9 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-2 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_9 : V(Dn_2) \to \gamma(Dn_2)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = (\gamma(u), \gamma(v)), \forall(u, v) \in E(Dn_2)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,2) = (\gamma(1), \gamma(2)) = (1,3) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(1,3) = (\gamma(1), \gamma(3)) = (1,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,3) = (\gamma(2), \gamma(3)) = (3,2) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,4) = (\gamma(2), \gamma(4)) = (3,6) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(2,5) = (\gamma(2), \gamma(5)) = (3,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,5) = (\gamma(4), \gamma(5)) = (6,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,5) = (\gamma(3), \gamma(5)) = (2,5) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(3,6) = (\gamma(3), \gamma(6)) = (2,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,6) = (\gamma(5), \gamma(6)) = (5,4) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(4,7) = (\gamma(4), \gamma(7)) = (6,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,7) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,7) = (\gamma(5), \gamma(7)) = (5,8) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(7,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(7,8) = \big(\gamma(7), \gamma(8)\big) = (8,7) \in\ E(Dn_2)$

sisi $E(6,8) \in (Dn_2)$ maka $\gamma(6,8) = \big(\gamma(6), \gamma(8)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_2)$

Karena γ_9 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_9 adalah automorfisme.

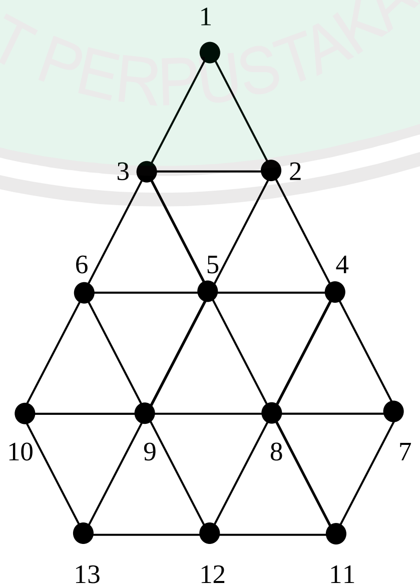
Sehingga banyaknya fungsi dengan operasi rotasi dan refleksi yang automorfisme dari graf berlian-2 (Dn_2) ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi yaitu:

Rotasi : 1. $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

Refleksi : 1. $\gamma_9 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(7\ 8)$

3.2.3 Graf Berlian-3 (Dn_3)

Graf berlian-3 (Dn_3) yang sudah diberikan label pada titik-titiknya ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.41 Graf berlian-3 (Dn_3)

Misal himpunan titik pada graf berlian-3 (Dn_3) adalah $V(Dn_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. Lalu diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 (Dn_3) pada dirinya sendiri yaitu $\gamma : V(Dn_n) \to V(Dn_n)$. Graf Berlian-3 ($Dn_3$) terdiri dari 26 simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$

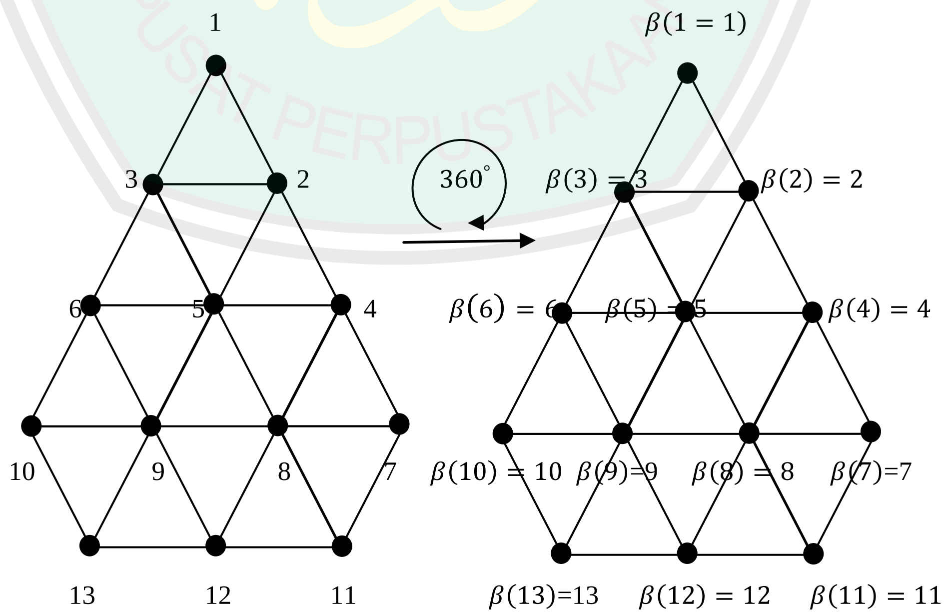
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_1(1) = 1$, $\gamma_1(2) = 2$, $\gamma_1(3) = 3$, $\gamma_1(4) = 4$, $\gamma_1(5) = 5$, $\gamma_1(6) = 6$, $\gamma_1(7) = 7$, $\gamma_1(8) = 8$, $\gamma_1(9) = 9$, $\gamma_1(10) = 10$, $\gamma_1(11) = 11$, $\gamma_1(12) = 12$, $\gamma_1(13) = 13$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

   Tabel 3.33 Tabel Fungsi $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma(v_i)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

   Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.42 Graf berlian-3 (Dn_3) dengan Rotasi 360°

Fungsi $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_1 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_1 : V(Dn_3) \to \gamma(Dn_3)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u),\gamma(v)\big), \forall(u,v) \in E(Dn_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1),\gamma(2)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1),\gamma(3)\big) = (1,3) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2),\gamma(3)\big) = (2,3) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2),\gamma(4)\big) = (2,4) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2),\gamma(5)\big) = (2,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4),\gamma(5)\big) = (4,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi E(3,5) $\in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3),\gamma(5)\big) = (3,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi E(3,6) $\in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3),\gamma(6)\big) = (3,6) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5),\gamma(6)\big) = (5,6) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4),\gamma(7)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,8) = \big(\gamma(4),\gamma(8)\big) = (4,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,7) = \big(\gamma(8),\gamma(7)\big) = (8,7) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5),\gamma(8)\big) = (5,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,9) = \big(\gamma(5),\gamma(9)\big) = (5,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,8) = \big(\gamma(9),\gamma(8)\big) = (9,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(6,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,9) = \big(\gamma(6),\gamma(9)\big) = (6,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(6,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,10) = \big(\gamma(6),\gamma(10)\big) = (6,10) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,10) = \big(\gamma(9), \gamma(10)\big) = (9,10) \in E(Dn_3)$

sisi $E(7,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(7,11) = \big(\gamma(7), \gamma(11)\big) = (7,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,11) = \big(\gamma(8), \gamma(11)\big) = (8,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,12) = \big(\gamma(8), \gamma(12)\big) = (8,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(11,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(11,12) = \big(\gamma(11), \gamma(12)\big) = (11,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,12) = \big(\gamma(9), \gamma(12)\big) = (9,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,13) = \big(\gamma(9), \gamma(13)\big) = (9,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(12,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(12,13) = \big(\gamma(12), \gamma(13)\big) = (12,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(10,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(10,13) = \big(\gamma(10), \gamma(13)\big) = (10,13) \in E(Dn_3)$

Karena γ_1 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_1 adalah automorfisme.

2. $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$

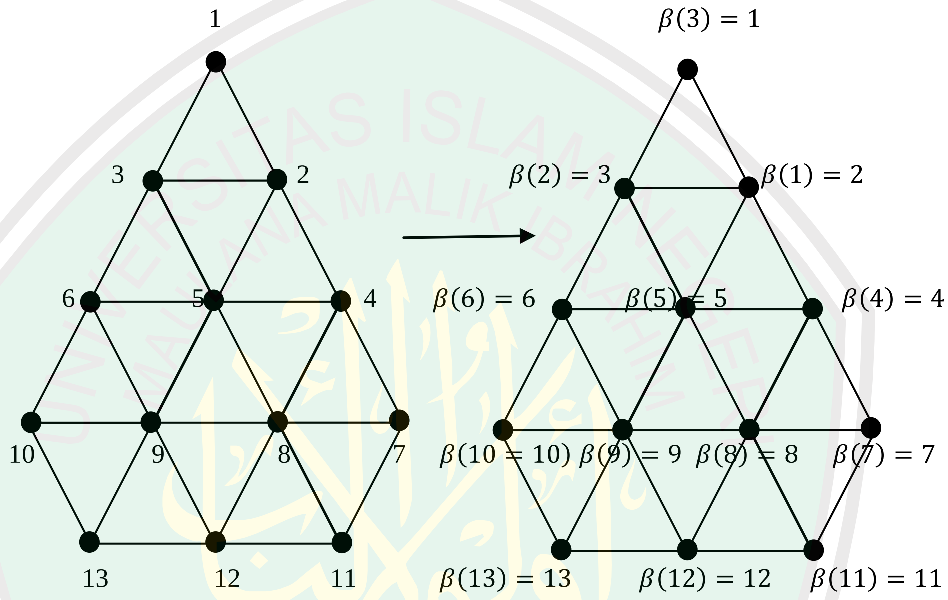
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_2(1) = 2$, $\gamma_2(2) = 3$, $\gamma_2(3) = 1$, $\gamma_2(4) = 4, \gamma_2(5) = 51$, $\gamma_2(6) = 6$, $\gamma_2(7) = 7$, $\gamma_2(8) = 8$, $\gamma_3(9) = 9$, $\gamma_3(10) = 10$, $\gamma_3(11) = 11, \gamma_3(12) = 12, \gamma_3(13) = 13$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.34 Tabel Fungsi $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma(v_i)$	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.43 Graf berlian-3 (Dn_3) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_2 = (1\ 2\ 3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_2 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_2 : V(Dn_3) \rightarrow \gamma(Dn_3)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall (u, v) \in E(Dn_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (2,3) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (2,1) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (3,1) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (3,4) \notin\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (3,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (4,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (1,5) \notin E(Dn_3)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (1,6) \notin E(Dn_3)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,6) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (4,7) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,8) = \big(\gamma(4), \gamma(8)\big) = (4,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,7) = \big(\gamma(8), \gamma(7)\big) = (8,7) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,9) = \big(\gamma(5), \gamma(9)\big) = (5,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,8) = \big(\gamma(9), \gamma(8)\big) = (9,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(6,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,9) = \big(\gamma(6), \gamma(9)\big) = (6,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(6,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,10) = \big(\gamma(6), \gamma(10)\big) = (6,10) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,10) = \big(\gamma(9), \gamma(10)\big) = (9,10) \in E(Dn_3)$

sisi $E(7,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(7,11) = \big(\gamma(7), \gamma(11)\big) = (7,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,11) = \big(\gamma(8), \gamma(11)\big) = (8,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,12) = \big(\gamma(8), \gamma(12)\big) = (8,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(11,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(11,12) = \big(\gamma(11), \gamma(12)\big) = (11,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,12) = \big(\gamma(9), \gamma(12)\big) = (9,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,13) = \big(\gamma(9), \gamma(13)\big) = (9,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(12,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(12,13) = \big(\gamma(12), \gamma(13)\big) = (12,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(10,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(10,13) = \big(\gamma(10), \gamma(13)\big) = (10,13) \in E(Dn_3)$

Karena γ_2 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_2 adalah automorfisme.

3. $\gamma_3 = (1\ 3\ 2)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$

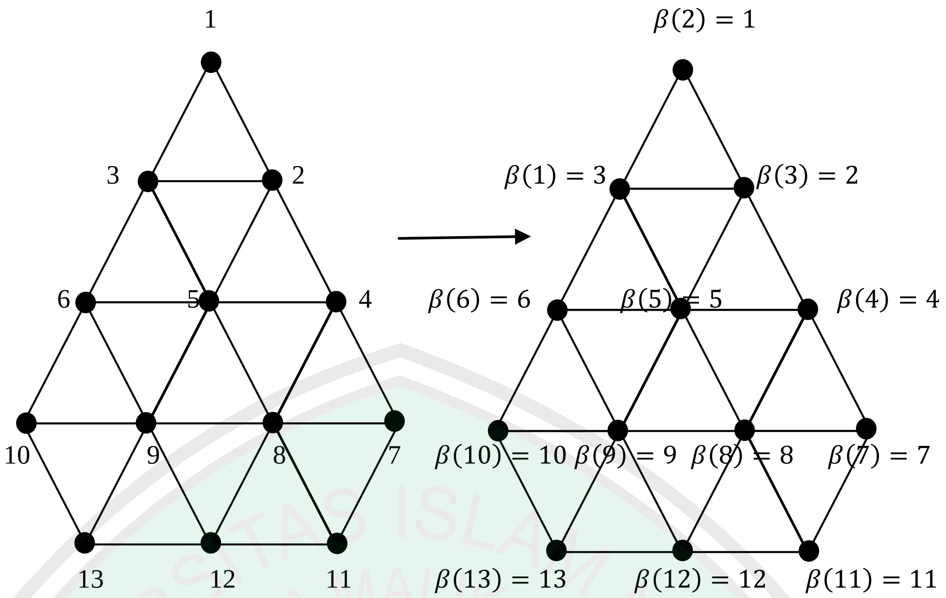
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_3(1) = 3$, $\gamma_3(2) = 1$, $\gamma_3(3) = 2$, $\gamma_3(4) = 4, \gamma_3(5) = 5$, $\gamma_3(6) = 6$, $\gamma_3(7) = 7$, $\gamma_3(8) = 8$, $\gamma_3(9) = 9$, $\gamma_3(10) = 10$, $\gamma_3(11) = 11, \gamma_3(12) = 12, \gamma_3(13) = 13$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.35 Tabel Fungsi $\gamma_3 = (1\ 3\ 2)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma(v_i)$	3	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.44 Graf berlian-3 (Dn_3) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_3 = (1\ 3\ 2)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_3 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_3 : V(Dn_3) \rightarrow \gamma(Dn_3)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big), \forall(u, v) \in E(Dn_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (3,1) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (3,2) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (1,4) \notin\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (1,5) \notin\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (4,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (2,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (2,6) \notin\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (5,6) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,8) = \big(\gamma(4), \gamma(8)\big) = (4,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,7) = \big(\gamma(8), \gamma(7)\big) = (8,7) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (5,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,9) = \big(\gamma(5), \gamma(9)\big) = (5,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,8) = \big(\gamma(9), \gamma(8)\big) = (9,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(6,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,9) = \big(\gamma(6), \gamma(9)\big) = (6,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(6,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,10) = \big(\gamma(6), \gamma(10)\big) = (6,10) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,10) = \big(\gamma(9), \gamma(10)\big) = (9,10) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(7,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(7,11) = \big(\gamma(7), \gamma(11)\big) = (7,11) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,11) = \big(\gamma(8), \gamma(11)\big) = (8,11) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,12) = \big(\gamma(8), \gamma(12)\big) = (8,12) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(11,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(11,12) = \big(\gamma(11), \gamma(12)\big) = (11,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,12) = \big(\gamma(9), \gamma(12)\big) = (9,12) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,13) = \big(\gamma(9), \gamma(13)\big) = (9,13) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(12,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(12,13) = \big(\gamma(12), \gamma(13)\big) = (12,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(10,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(10,13) = \big(\gamma(10), \gamma(13)\big) = (10,13) \in E(Dn_3)$

Karena γ_3 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_3 adalah automorfisme.

4. $\gamma_4 = (1)(6\ 4\ 12)(3\ 7\ 13)(2\ 11\ 10)(5\ 8\ 9)$

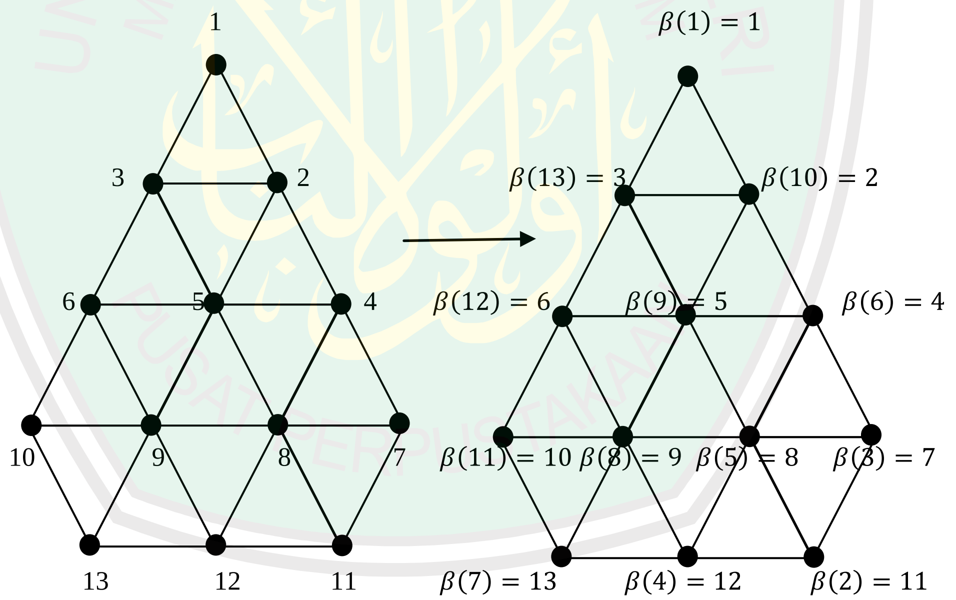
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_4(1) = 1$, $\gamma_4(2) = 11$, $\gamma_4(3) = 7$, $\gamma_4(4) = 12$, $\gamma_4(5) = 8$, $\gamma_4(6) = 4$, $\gamma_4(7) = 13$, $\gamma_4(8) = 9$, $\gamma_4(9) = 5$, $\gamma_4(10) = 2$, $\gamma_4(11) = 10$, $\gamma_4(12) = 6$, $\gamma_4(13) = 3$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.36 Tabel Fungsi $\gamma_4 = (1)(6\ 4\ 12)(3\ 7\ 13)(2\ 11\ 10)(5\ 8\ 9)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma(v_i)$	1	11	7	12	8	4	13	9	5	2	10	6	3

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.45 Graf berlian-3 (Dn_3) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_4 = (1)(6\ 4\ 12)(3\ 7\ 13)(2\ 11\ 10)(5\ 8\ 9)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_4 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_4 : V(Dn_3) \to \gamma(Dn_3)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = (\gamma(u), \gamma(v)), \forall (u,v) \in E(Dn_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,2) = (\gamma(1), \gamma(2)) = (1,11) \notin E(Dn_3)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,3) = (\gamma(1), \gamma(3)) = (1,7) \notin E(Dn_3)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,3) = (\gamma(2), \gamma(3)) = (11,7) \in E(Dn_3)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,4) = (\gamma(2), \gamma(4)) = (11,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,5) = (\gamma(2), \gamma(5)) = (11,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,5) = (\gamma(4), \gamma(5)) = (12,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,5) = (\gamma(3), \gamma(5)) = (7,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,6) = (\gamma(3), \gamma(6)) = (7,4) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,6) = (\gamma(5), \gamma(6)) = (8,4) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,7) = (\gamma(4), \gamma(7)) = (12,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,8) = (\gamma(4), \gamma(8)) = (12,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,7) = (\gamma(8), \gamma(7)) = (9,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,8) = (\gamma(5), \gamma(8)) = (8,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,9) = (\gamma(5), \gamma(9)) = (8,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,8) = (\gamma(9), \gamma(8)) = (5,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(6,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,9) = (\gamma(6), \gamma(9)) = (4,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(6,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,10) = (\gamma(6), \gamma(10)) = (4,2) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,10) = (\gamma(9), \gamma(10)) = (5,2) \in E(Dn_3)$

sisi $E(7,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(7,11) = (\gamma(7), \gamma(11)) = (13,10) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,11) = (\gamma(8), \gamma(11)) = (9,10) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,12) = (\gamma(8), \gamma(12)) = (9,6) \in E(Dn_3)$

sisi $E(11,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(11,12) = \big(\gamma(11), \gamma(12)\big) = (10,6) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,12) = \big(\gamma(9), \gamma(12)\big) = (5,6) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,13) = \big(\gamma(9), \gamma(13)\big) = (5,3) \in E(Dn_3)$

sisi $E(12,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(12,13) = \big(\gamma(12), \gamma(13)\big) = (6,3) \in E(Dn_3)$

sisi $E(10,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(10,13) = \big(\gamma(10), \gamma(13)\big) = (2,3) \in E(Dn_3)$

Karena γ_4 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_4 adalah automorfisme.

5. $\gamma_5 = (1)(6\ 12\ 4)(3\ 13\ 7)(2\ 10\ 11)(5\ 9\ 8)$

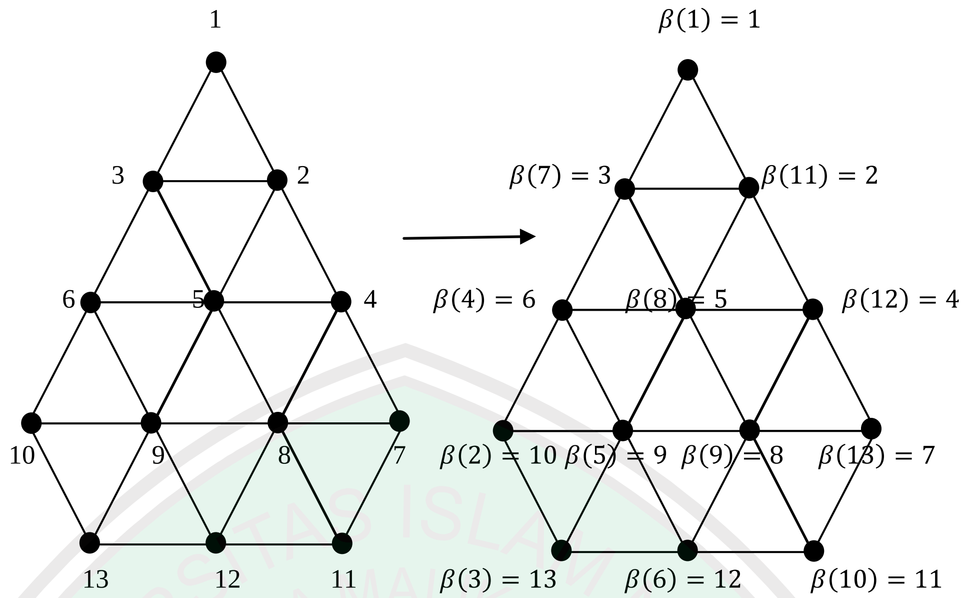
   Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_5(1) = 1$, $\gamma_5(2) = 10$, $\gamma_5(3) = 13$, $\gamma_5(4) = 6, \gamma_5(5) = 9$, $\gamma_5(6) = 12$, $\gamma_5(7) = 3$, $\gamma_5(8) = 5$, $\gamma_5(9) = 8$, $\gamma_5(10) = 11$, $\gamma_5(11) = 2$, $\gamma_5(12) = 4, \gamma_5(13) = 7$

   Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.37 Tabel Fungsi $\gamma_5 = (1)(6\ 12\ 4)(3\ 13\ 7)(2\ 10\ 11)(5\ 9\ 8)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma(v_i)$	1	10	13	6	9	12	3	5	8	11	2	4	7

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.46 Graf berlian-3 (Dn_3) dengan Rotasi

Fungsi $\gamma_5 = (1)(6\ 12\ 4)(3\ 13\ 7)(2\ 10\ 11)(5\ 9\ 8)$ adalah bukan automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_5 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_5 : V(Dn_3) \rightarrow \gamma(Dn_3)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u, v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big), \forall (u, v) \in E(Dn_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1), \gamma(2)\big) = (1,10) \notin E(Dn_3)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1), \gamma(3)\big) = (1,13) \notin E(Dn_3)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2), \gamma(3)\big) = (10,13) \in E(Dn_3)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2), \gamma(4)\big) = (10,6) \in E(Dn_3)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2), \gamma(5)\big) = (10,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4), \gamma(5)\big) = (6,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3), \gamma(5)\big) = (13,9) \in E(Dn_3)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3), \gamma(6)\big) = (13,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5), \gamma(6)\big) = (9,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4), \gamma(7)\big) = (6,3) \in E(Dn_3)$

sisi $E(4,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,8) = \big(\gamma(4), \gamma(8)\big) = (6,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,7) = \big(\gamma(8), \gamma(7)\big) = (5,3) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5), \gamma(8)\big) = (9,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(5,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,9) = \big(\gamma(5), \gamma(9)\big) = (9,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,8) = \big(\gamma(9), \gamma(8)\big) = (8,5) \in E(Dn_3)$

sisi $E(6,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,9) = \big(\gamma(6), \gamma(9)\big) = (12,8) \in E(Dn_3)$

sisi $E(6,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,10) = \big(\gamma(6), \gamma(10)\big) = (12,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,10) = \big(\gamma(9), \gamma(10)\big) = (8,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(7,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(7,11) = \big(\gamma(7), \gamma(11)\big) = (3,2) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,11) = \big(\gamma(8), \gamma(11)\big) = (5,2) \in E(Dn_3)$

sisi $E(8,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,12) = \big(\gamma(8), \gamma(12)\big) = (5,4) \in E(Dn_3)$

sisi $E(11,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(11,12) = \big(\gamma(11), \gamma(12)\big) = (2,4) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,12) = \big(\gamma(9), \gamma(12)\big) = (8,4) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,13) = \big(\gamma(9), \gamma(13)\big) = (8,7) \in E(Dn_3)$

sisi $E(12,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(12,13) = \big(\gamma(12), \gamma(13)\big) = (4,7) \in E(Dn_3)$

sisi $E(10,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(10,13) = \big(\gamma(10), \gamma(13)\big) = (11,7) \in E(Dn_3)$

Karena γ_5 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_6 adalah automorfisme.

6. $\gamma_6 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(8\ 9)(7\ 10)(12)(11\ 13)$

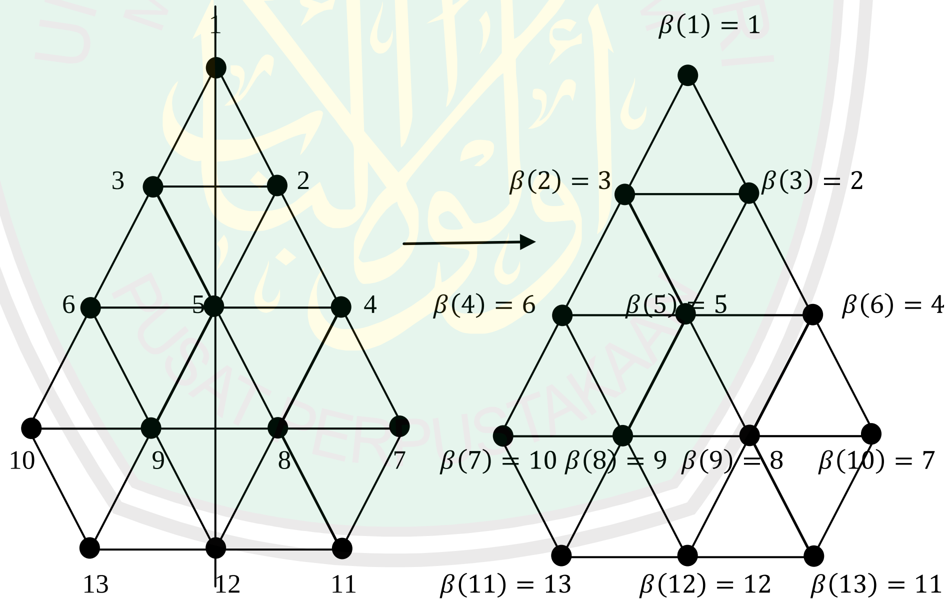
Fungsi ini dapat dijelaskan bahwa $\gamma_6(1) = 1$, $\gamma_6(2) = 3$, $\gamma_6(3) = 2$, $\gamma_6(4) = 6$, $\gamma_6(5) = 5$, $\gamma_6(6) = 4$, $\gamma_6(7) = 10$, $\gamma_6(8) = 9$, $\gamma_6(9) = 8$, $\gamma_6(10) = 7$, $\gamma_6(11) = 3$, $\gamma_6(12) = 12$, $\gamma_6(13) = 11$

Bila menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.38 Tabel Fungsi $\gamma_6 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(8\ 9)(7\ 10)(12)(11\ 13)$

v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\gamma(v_i)$	1	3	2	6	5	4	10	9	8	7	13	12	11

Sehingga graf hasil fungsi dapat digambarkan sebagai berik



Gambar 3.47 Graf berlian-3 (Dn_3) dengan Refleksi terhadap simpul 1, simpul 5 dan simpul 12 serta terhadap sumbu yang diambil diantara simpul 2 dan simpul 3, simpul 8 dan simpul 9

Fungsi $\gamma_6 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(8\ 9)(7\ 10)(12)(11\ 13)$ adalah automofisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi γ_6 1-1 dan onto, diberikan suatu fungsi dari graf berlian-3 pada dirinya sendiri yaitu $\gamma_6 : V(Dn_3) \to \gamma(Dn_3)$.

Didefinisikan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u),\gamma(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Dn_3)$. Sehingga,

sisi $E(1,2) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,2) = \big(\gamma(1),\gamma(2)\big) = (1,3) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(1,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(1,3) = \big(\gamma(1),\gamma(3)\big) = (1,2) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,3) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,3) = \big(\gamma(2),\gamma(3)\big) = (3,2) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,4) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,4) = \big(\gamma(2),\gamma(4)\big) = (3,6) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(2,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(2,5) = \big(\gamma(2),\gamma(5)\big) = (3,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,5) = \big(\gamma(4),\gamma(5)\big) = (6,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(3,5) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,5) = \big(\gamma(3),\gamma(5)\big) = (2,5) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(3,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(3,6) = \big(\gamma(3),\gamma(6)\big) = (2,4) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,6) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,6) = \big(\gamma(5),\gamma(6)\big) = (5,4) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,7) = \big(\gamma(4),\gamma(7)\big) = (6,10) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(4,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(4,8) = \big(\gamma(4),\gamma(8)\big) = (6,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,7) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,7) = \big(\gamma(8),\gamma(7)\big) = (9,10) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,8) = \big(\gamma(5),\gamma(8)\big) = (5,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(5,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(5,9) = \big(\gamma(5),\gamma(9)\big) = (5,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,8) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,8) = \big(\gamma(9),\gamma(8)\big) = (8,9) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(6,9) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,9) = \big(\gamma(6),\gamma(9)\big) = (4,8) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(6,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(6,10) = \big(\gamma(6),\gamma(10)\big) = (4,7) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(9,10) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,10) = \big(\gamma(9),\gamma(10)\big) = (8.7) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(7,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(7,11) = \big(\gamma(7),\gamma(11)\big) = (10,13) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,11) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,11) = \big(\gamma(8),\gamma(11)\big) = (9,13) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(8,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(8,12) = \big(\gamma(8),\gamma(12)\big) = (9,12) \in\ E(Dn_3)$

sisi $E(11,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(11,12) = \big(\gamma(11), \gamma(12)\big) = (13,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,12) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,12) = \big(\gamma(9), \gamma(12)\big) = (8,12) \in E(Dn_3)$

sisi $E(9,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(9,13) = \big(\gamma(9), \gamma(13)\big) = (8,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(12,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(12,13) = \big(\gamma(12), \gamma(13)\big) = (12,11) \in E(Dn_3)$

sisi $E(10,13) \in (Dn_3)$ maka $\gamma(10,13) = \big(\gamma(10), \gamma(13)\big) = (7,11) \in E(Dn_3)$

Karena γ_6 merupakan fungsi 1-1, onto, dan homomorfisme. Jadi, fungsi γ_6 adalah automorfisme.

Sehingga banyaknya fungsi dengan operasi rotasi dan refleksi yang automorfisme dari graf berlian-3 (Dn_3) ke dirinya sendiri adalah sebanyak 2 fungsi yaitu:

Rotasi : 1. $\gamma_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$

Refleksi : 1. $\gamma_6 = (1)(2\ 3)(5)(4\ 6)(8\ 9)(7\ 10)(12)(11\ 13)$

Dari uraian automorfisme graf berlian di atas, dapat disimpulkan bahwa automorfisme pada graf berlian (Dn_n) $\forall n \geq 2$ memuat dua unsur yaitu fungsi identitas dan refleksi pada sumbu melalui titik 1.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada BAB III, maka diperoleh kesimpulan berikut:

1. Automorfisme dari graf piramida (Pr_n) pada dirinya sendiri yaitu $\beta : V(Pr_n) \rightarrow V(Pr_n)$ yang didefinisikan dengan $\beta\ (u,v) = \big(\beta(u), \beta(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Pr_n)$ sebanyak 6 fungsi. Grup automorfisme pada graf piramida (Pr_n) isomorfik dengan grup dihedral berorder 6 (D_3).
2. Automorfisme dari graf berlian (Dn_1) pada dirinya sendiri yaitu $\gamma : V(Dn_1) \rightarrow V(Dn_1)$ yang didefinisikan dengan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Dn_1)$ sebanyak 4 fungsi, sedangkan automorfisme dari graf berlian $(Dn_n)\ \forall n \geq 2$, pada dirinya sendiri yaitu $\gamma : V(Dn_n) \rightarrow V(Dn_n)$ yang di definisikan dengan $\gamma\ (u,v) = \big(\gamma(u), \gamma(v)\big)$, $\forall(u,v) \in E(Dn_n)$ sebanyak 2 fungsi yaitu fungsi identitas dan refleksi pada sumbu melalui titik 1.

4.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis hanya menyelidiki automorfisme dari graf piramida dan graf berlian untuk mencari banyaknya fungsi yang automorfisme. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya dengan menyelidiki automorfisme pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Analisis Real*. Malang: Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN).

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Press

Afandi, Y. 2009. *Pewarnaan Minimal Graf Piramida dan Berlian*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis (third edition)*. New York: John Wiley and Sons, Inc

Chartrand, Gery and Lesniak, L. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition.* California: A Division of Wadsworth, Inc

Damayanti, R.T. 2011. *Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading.

Kusaeri. 2002. *Struktur Aljabar*. Malang: Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Islam Malang (UNISMA).

Low, Richard M and Lee, Sin-Min. *On The Integer-Magic Spectra Of Tesselation Graphs*. Jurnal Matematika v.2.2

Markaban. 2004. *Fungsi, Persamaan, Pertidaksamaan*. Yogyakarta: Widyaiswara PPPG Matematika.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang

Quthb, Syahid Sayyid. 2000. *Tafsir Fi Zhilalil-Qur'an di bawah Naungan Al-Quran jilid 1*. Jakarta: Gema Insani Press

Rosyidah, Himmah. 2010. *Grup Automorfisme dari Graf Lengkap dan Graf Sikel*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wardana, Wisnu Arya. 2006. *Melacak Teori Einstein Dalam Al-Qur'an.* Pustaka Pelajar: Yoyakarta.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Imroatul Mukarromah
NIM : 09610117
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Automorfisme Graf Piramida dan Graf Berlian
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	3 Mei 2014	Konsultasi BAB I	1.
2	5 Mei 2014	Konsultasi BAB I Kajian Agama	2.
3	12 Agustus 2014	Konsultasi BAB II dan BAB III	3
4	13 Agustus 2014	Konsultasi BAB II Kajian Agama	4.
5	13 Mei 2015	ACC seminar proposal skripsi kajian agama	5.
6	17 Mei 2015	ACC seminar proposal skripsi	6.
7	27 Mei 2015	Revisi BAB II dan BAB III	7.
8	16 Juni 2015	Konsultasi BAB III	8.
9	17 Juni 2015	Konsultasi dan ACC BAB II kajian agama	9.
10	17 Juni 2015	Revisi BAB III	10.
11	15 September 2015	Konsultasi BAB III dan IV	11.
12	16 September 2015	ACC BAB III dan IV	12.
13	17 September 2015	ACC kajian agama	13.
14	9 Oktober 2015	ACC keseluruhan	14.

Malang, 25 Oktober 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP

Imroatul mukarromah, lahir di kota Sidoarjo pada tanggal 7 September 1990, biasa dipanggil Iim, tinggal di Desa Kebonsari Rt 1 Rw 2 Kec. Candi Kota Sidoarjo. Anak pertama dari Bapak Maliki Thohir dan Ibu Masluhah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Ma'arif Candi dan lulus pada tahun 2003, setelah itu melanjutkan ke SMPN 3 Sidoarjo dan lulus pada tahun 2006. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMAN 3 Sidoarjo dan lulus pada tahun 2009. Selanjutnya, pada tahun 2009 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika.