TOTAL k-DEFISIENSI TITIK PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m,n}$

SKRIPSI

OLEH
ARIS ARDIANSYAH
NIM. 08610013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

TOTAL k-DEFISIENSI TITIK PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m,n}$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains Dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
ARIS ARDIANSYAH
NIM. 08610013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

TOTAL k-DEFISIENSI TITIK PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m,n}$

SKRIPSI

Oleh
Aris Ardiansyah
NIM. 08610013

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 26 Juni 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
H. Wahyu H Irawan, M.Pd	Abdul Aziz M.Si
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TOTAL k-DEFISIENSI TITIK PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT ($K_{m,n}$)

SKRIPSI

Oleh
ARIS ARDIANSYAH
NIM. 08610013

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 2 Juli 2015

Penguji Utama	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	……………………….
Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	……………………….
Sekertaris Penguji	:	H. Wahyu H Irawan, M.Pd	……………………….
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	……………………….

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Aris Ardiansyah
NIM	: 08610013
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Total k-Defisiensi Titik Pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Juni 2015
Yang membuat pernyataan,

Aris Ardiansyah
NIM. 08610013

MOTO

"Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya." (Qs. Ath-Thalaq/65:4)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua tercinta yang telah memberikan semangat, kasih sayang yang tak terhingga dan do'a yang tiada henti dalam setiap sujudnya.

Saudara penulis yang selalu memberikan nasihat dan motivas

KATA PENGANTAR

Assalamu'alikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. Atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga bagi penulis.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang juga telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika, yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih atas segala kenangan selama ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Ardiansyah, Aris. 2015. *Total k-Defisiensi Titik Pada Graf Bipartisi Komplit*. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu Hengky Irawan, M.Pd; (II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Graf Bipartisi Komplit, Pohon merentang, k-Defisiensi titik pada graf

Graf *G* adalah pasangan himpunan (*V*, *E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut sebagai sisi. Dalam ilmu matematika begitu banyak jenis-jenis graf. Salah satu jenis graf yaitu graf bipartisi komplit dengan $m = 1, 2, 3, \dots \infty$ dan $n = 1, 2, 3, \dots \infty$. Dalam penelitian ini graf bipartisi komplit tersebut akan dianalisis terlebih dahulu terkait dengan defisiensi titik dari pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit yang proses penyelesaiannya mengimplementasikan nilai-nilai derajat di setiap titik dari bentuk graf bipartisi komplit itu sendiri dan nilai-nilai derajat di setiap titik graf pohon merentang maksimum dari graf bipartisi komplit tersebut.

Berdasarkan nilai-nilai defisiensi titik dari pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit maka nilai total k defisiensi titik dari pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit tersebut dapat diketahui dengan menjumlahkan nilai-nilai defisiensi titik dari pohon merentang maksimum di setiap graf bipartisi komplit.

ABSTRACT

Ardiansyah, Aris. 2015. *Total Vertex k-deficiency In Complete Bipartite Graph*. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) H.Wahyu Hengky Irawan, M.Pd (II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: Graf Bipartisi Complete, spanning tree, k-Deficiency point on the graph

Graph G is the set of pairs (V, E) with V is a non-empty set of objects that is called a vertex and E is the set of (possibly empty) unordered pairs of different vertices in V are referred to as edge. In mathematics there are many types of graphs. One type of graph is complete bipartite graph with m = 1, 2, 3, ... ∞ and n = 1, 2, 3, ... ∞. In this study, the complete bipartite graph is analyzed first regarded to with the vertex deficiency of maximum spanning tree on bipartisi complete graph in which the process implements values of degrees at any vertex of the graph form complete bipartite itself and the values of degree at every vertex of maximum spanning tree graph form of the graph bipartisi complete.

Based on the values of vertex deficiency of maximum spanning tree in a graph bipartisi complete the total value of vertex k-deficiency of maximum spanning tree on bipartisi complete graph can be known by summing the values of deficiency point of maximum spanning tree in each bipartisi complete graph.

ملخص

اردينشاه,أريس.٢٠١٥. مجموع رأس ك نقص في استكمال الرسم البياني الثنائية. أطروحة. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (I)الحاجي وحيو هنغ إروان،ماجستير (II) عبد العزيز، ماجستير

كلمات البحث: غراف ثنائيه كاملة، والتي تمتد شجرة، وأشر ك نقص في الرسم البياني

الرسم البياني G هو مجموعة من أزواج (V، E) مع V عبارة عن مجموعة غير فارغة من الكائنات التي تسمى قمة الرأس وE هو مجموعة من (ربما فارغة) أزواج غير مرتبة من القمم المختلفة في V يشار إلى الحافة. في الرياضيات هناك أنواع كثيرة من الرسوم البيانية. نوع واحد من الرسم البياني الرسم البياني الثنائي الكامل مع م = ١ ،٣،٢.. , ن= ١ ،٣،٢...j في هذه الدراسة، وتحليلها يعتبر الرسم البياني الثنائي الكامل أولا لمع نقص الرأس من أقصى الشجرة الممتدة على ثنائيه الرسم البياني الكامل التي تتم فيها عملية تنفذ قيم درجة في أي قمة من شكل الرسم البياني ذو قسمين الكامل نفسها وقيم درجة في كل قمة الرأس من أقصى شكل الرسم البياني الشجرة الممتدة من الرسم البياني ثنائيه كاملة.

استنادا إلى قيم نقص قمة القصوى الشجرة الممتدة في الرسم البياني الثنائي إكمال القيمة الإجمالية للقمة ك نقص القصوى الشجرة الممتدة على الثنائي الرسم البياني الكامل يمكن أن يعرف عن طريق جمع قيم نقطة نقص القصوى الشجرة الممتدة في كل الثنائي كاملة رسم بيان

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang dibutuhkan oleh masyarakat untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi banyak orang yang memandang matematika sebagai ilmu yang sulit, abstrak, teoritis, penuh dengan lambang-lambang, rumus-rumus yang sulit dan membingungkan. Bagi mereka matematika tidak ada hubungannya dengan dunia nyata dan manusia. Padahal sudah dijelaskan bahwa ilmu pengetahuan Allah SWT meliputi segala sesuatu semua yang ada di bumi dan di langit. Dimana matematika juga ilmu pengetahuan Allah yang telah ditemukan oleh manusia. Keberadaannya tidak lain adalah untuk memenuhi kebutuhan manusia dalam menjalani kehidupan dunia. Sesungguhnya Allah telah mengajarkan semua yang dibutuhkan manusia dan telah terangkum dalam Al-Qur’an dan Al-Hadist. Oleh karenanya Allah selalu memerintahkan kita untuk belajar dari apa-apa yang ada pada diri dan sekitar kita. Sebagaimana telah diterangkan pada Al-Qur’an surat Ar-Ruum ayat 8:

أَوَلَمْ يَتَفَكَّرُوا۟ فِىٓ أَنفُسِهِم ۗ مَّا خَلَقَ ٱللَّهُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ وَأَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ وَإِنَّ كَثِيرًا مِّنَ ٱلنَّاسِ بِلِقَآئِ رَبِّهِمْ لَكَٰفِرُونَ ﴿٨﴾

Artinya: *“dan mengapa mereka tidak memikirkan tentang (kejadian) diri mereka? Allah tidak menjadikan langit dan bumi dan apa yang ada diantara keduanya melainkan dengan (tujuan) yang benar dan waktu yang ditentukan. dan Sesungguhnya kebanyakan di antara*

> *manusia benar-benar ingkar akan Pertemuan dengan Tuhannya''*(QS: Ar-Ruum: 8).

Graf adalah himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dengan setiap garis yang menghubungkan dua titik. Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan bantuan graf. Pada awalnya teori graf hanya digunakan untuk mencari jalur terpendek dari suatu rute yang digunakan oleh tukang pos Cina untuk mengantar surat-surat dan untuk pewarnaan suatu peta. Selanjutnya muncul penerapan pada Ilmu Komputer, Kimia, Riset Operasi Teknik Listrik dan terus berkembang pada ilmu-ilmu lainnya. Representasi visual dari graf adalah dengan menyimbolkan obyek yang digunakan dengan simbol titik, sedangkan hubungan antara obyek disimbolkan dengan garis.

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Di dalam graf G terdapat Suatu pohon yang dapat dibentuk dari graf terhubung. Graf *G* dikatakan *terhubung* jika untuk setiap dua titik *u* dan *v* pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang memuat *u* dan *v* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Pohon-pohon yang dibentuk dari graf tersebut disebut pohon merentang dan pada Suatu titik v dari suatu pohon merentang T pada graf G disebut k-defisiensi jika derajat dari titik tersebut memenuhi persamaan $der_G v - der_T v = k$, bilangan k diatas disebut defisiensi V. Misal G adalah graf, suatu pohon merentang adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon (Yuni Dwi Astuti, 2006:2).

Nilai k-defisiensi titik bias saja bernilai nol jika pohon merentangnya adalah dirinya sendiri. Jika suatu graf tidak memiliki pohon merentang, maka jika dihitung dengan persamaan $der_G v - der_T v = k$ juga akan menghasilkan nilai nol, tetapi itu bukan nilai k-defisiensi titik karena tidak memiliki pohon merentang meskipun sama-sama bernilai nol dengan graf yang pohon merentangnya adalah dirinya sendiri, penjumlahan nilai-nilai k-defisiensi titik suatu graf disebut total k-defisiensi titik atau jumlah k-defisiensi titik.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mempresentasikan suatu pohon merentang pada suatu graf. Sehingga dalam skripsi ini, penulis mengambil judul "*total k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit* $K_{m,n}$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah: bagaimana total k-defisiensi titik dari graf bipartisi komplit?

1.3 Tujuan

Dari rumusan masalah di atas maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menentukan total k-defisiensi pada graf bipartisi komplit.

1.4 Batasan Masalah

Graf yang digunakan dalam penulisan ini adalah graf bipartisi komplit $K_{m,n}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan ini adalah:

1. Jurusan Matematika

   Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya teori graf di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Peneliti

   Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mensosialisasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3. Pengembangan ilmu pengetahuan

   Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika tentang bilangan tutup titik dan tutup sisi pada teori graf, dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya. (Mardalis, 1989: 28)

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf yang akan digunakan dan menentukan derajat titik.
2. Mencari pohon merentang (mencari semua kemungkinan pohon merentang).
3. Menentukan derajat titik dari pohon merentang.
4. Menentukan k-defisiensi titik.
5. Menentukan pola rumus jumlah k-defisiensi titik.
6. Membuktikan pola rumus jumlah k-defisiensi titik.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan disini terdiri dari empat bab dan masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab kedua menguraikan kajian teori yang berkaitan dengan pembahasan, antara lain pengertian graf, jenis jenis graf, pohon merentang dari suatu graf dan kajian agama.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi tentang total k-defisiensi dari suatu pohon merentang maksimum pada graf komplit bipartisi $K_{m.n}$ disertai dengan pembuktian dari konjektur yang diperoleh.

BAB IV PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

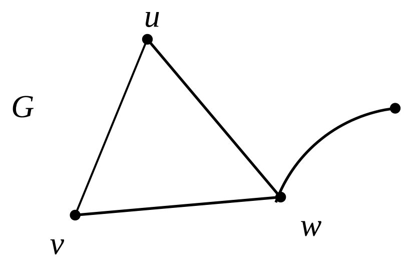
Untuk dapat membahas permasalahan total k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit dibutuhkan beberapa teori dasar, diantaranya:

2.1 Graf

Definisi 1

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$), dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga, yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan tak berurut dari elemen-elemen $V(G)$ yang berbeda, yang disebut sisi (*edge*). Berdasarkan definisi ini, $V(G)$ disebut himpunan titik dan $E(G)$ disebut himpunan sisi. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran (*size)* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Untuk lebih memahami Definisi 1 diberikan contoh seperti berikut. Misalkan diberikan $V(G) = \{u,v,w,z\}$ dan $E(G)$ terdiri dari pasangan-pasangan(u,v), (v,w), (u,w), *dan* (w,z), atau $E(G) = \{(u,v),(v,w), (u,w), (w,z)\}$. Maka gambar graf dari G seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G

Telah di definisikan bahwa graf terdiri dari himpunan titik *V(G)* dan himpunan sisi *E*(*G*). Masing-masing pasangan *E*= (*u*,*v*) dalam *E(G)* adalah rusuk

dari *G*. Banyaknya titik simpul dari *G* dinyatakan denga *p* , dan banyaknya rusuk dari *G* dinyatakan dengan *q*.

Suatu graf *G* dengan *p* titik simpul, disebut graf berlabel orde p, bilamana masing-masing titiknya mempunyai nama yang berlainan, katakanlah $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_p$ atau diberi satu bilangan bulat positif yang berbeda dari himpunan {1, 2, 3, … *p*}. Untuk memperlancar uraian tentang graf, hubungan antara dua titik, antara dua sisi, dan antara titik dan simpul diberi nama tertentu. Hubungan-hubungan itu didefinisikan sebagai berikut.

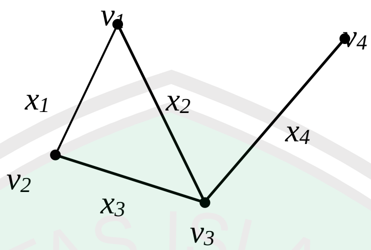
Definisi 2

Misalkan *G* adalah suatu graf. Titik $v_i, v_j \in V(G)$ dan sisi $x \in E(G)$.

Jika $x = v_iv_j$, maka dikatakan bahwa:

1. Titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j.
2. sisi *x* terkait (*incident*) dengan titikl v_i . Demikian pula untuk titik v_j.

Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah rusuk dari suatu graf G dan v adalah titik simpulnya. Jika x_1, x_2, dan x_3 terkait dengan simpul v, maka rusuk x_1, x_2, dan x_3 dikatakan bertetangga (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).



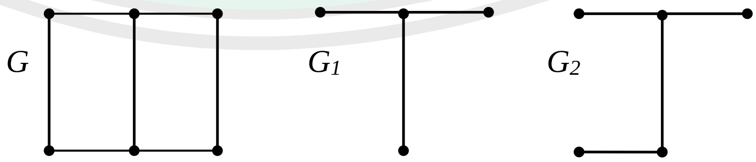
Gambar 2.2 Graf G

Simpul v_1, v_2, dan v_3 adalah simpul yang bertetangga. Sedangkan v_1 dan v_4 adalah simpul yang tidak bertetangga. Rusuk-rusuk yang bertetangga adalah rusuk x_3, x_2, dan x_4, dan terkait dengan simpul v_3.

Definisi 3

Dua graf H = (V(H),E(H)) dan G = (V(G),E(G)). Graf H disebut subgraf dari G, jik V(G) ⊆ V(G) dan E(H) ⊆X(G). Jika V(H) = V(G), maka H dikatakan subgraf perentang dari G (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Untuk lebih memahami definisi 5 diberikan Gambar 3. Graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G.



Gambar 2.3 Subgraf

Subgraf maksimal H dari graf G adalah subgraf yang memenuhi untuk setiap sisi e∈ E(H) dan v∈V(H) berlaku e terkait dengan v di H jika hanya jika e terkait dengan v di G. Subgraf G-e adalah subgraf maksimal dengan himpunan titik

V(G) dan himpunan sisi E(G)-{e}. Sedangkan subgraf G-v adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan titik V(G)-{v} dan himpunan sisi E(G)-{vu: u∈V(G)}. Untuk sembarang himpunan titik simpul S, S ⊆ V(G), subgraf terinduksi G[S] adalah subgraf maksimal dari G dengan himpunan titik S. Karena itu dua titik bertetangga pada G[S] jika hanya jika kedua titik tersebut bertetangga di G. Contoh subgraf terinduksi dari G pada Gambar 3 adalah G_1.

Jalan (walk) pada suatu graf adalah barisan titik simpul dan rusuk: v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_{n-1}, v_n yang dimulai dengan suatu titik simpul dan diakhiri oleh suatu titik simpul pula dengan setiap rusuk terkait dengan titik yang ada di kiri dan kanannya.

2.2 Derajat

Dalam suatu graf terdapat banyak parameter yang berhubungan dengan sebuah graf *G*. Mengetahui nilai-nilai dari parameter-parameter tersebut dapat memberikan informasi mengenai graf *G*.

Definisi 4

Derajat suatu simpul v_i dalam graf *G*, dilambangkan *"*$d(v_i)$*"*, adalah banyaknya rusuk $x \in X(G)$ yang terkait dengan simpul v_i .

Simpul suatu graf yang berderajat nol disebut simpul terasing dan graf yang hanya terdiri dari satu simpul disebut graf trivial. Sedang simpul yang derajatnya satu disebut simpul terminal.

Graf pada Gambar 1, memiliki satu simpul yang berderajat satu yaitu simpul *z*, dan satu simpul yang berderajat tiga yaitu simpul *w*, serta dua simpul berderajat dua yaitu simpul *u* dan *v*.

Teorema 1

Jumlah derajat simpul dalam suatu graf G adalah dua kali banyaknya rusuk atau

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_P\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

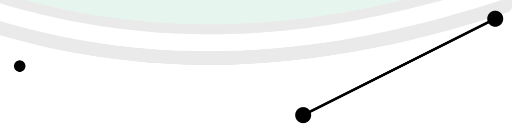
Bukti:

Misalkan graf G terdiri satu rusuk, berarti G memiliki dua simpul yang masing-masing berderajat satu, sehingga jumlah derajat simpul dalam G adalah dua. Karena setiap rusuk menghubungkan dua simpul, maka banyaknya rusuk akan menambah jumlah derajat simpul dalam G adalah dua. Ini berarti jumlah derajat simpul dalam G adalah dua kali jumlah rusuk.

Definisi 5

Graf trivial adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf tak trivial adalah graf yang berorder lebih dari satu (Bondy and Murthy, 1976:3).

Contoh:



G_1: G_2:

Gambar 2.4 G_1 Graf Trivial dan G_2 Graf Non Trivial

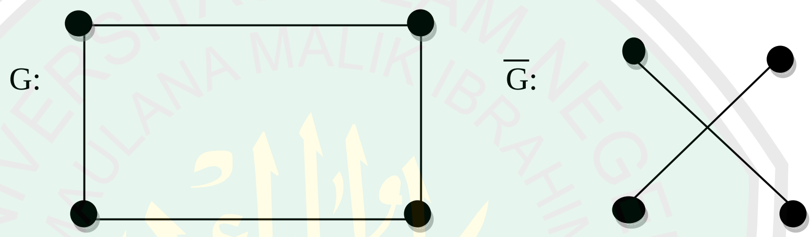
Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf tak trivial karena berorder lebih dari satu.

2.3 Komplemen

Definisi 6

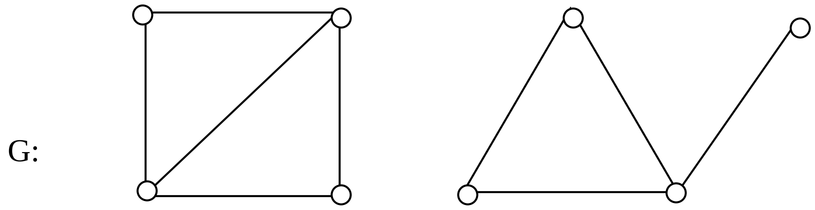
Graf F disebut *komplement* dari graf G bila $V(F)=V(G)$ dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\overline{G}$.

Contoh. Perhatikan graf G dengan 4 titik berikut dengan komplemennya



Gambar 2.5 Graf Komplemen

Jika pada suatu graf terdapat dua titik yang tidak dihubungkan oleh suatu titik, maka graf tersebut disebut graf tak terhubung. Akibatnya graf tersebut memuat subgraf yang terpisahkan satu sama lain. Subgraf *terhubung maksimal* pada graf G disebut *komponen*. Sebagai contoh dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.6 Komponen

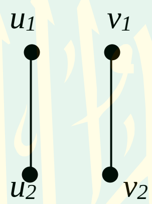
Graf G pada gambar diatas mempunyai dua komponen. Dapat diperiksa bahwa subgraf siklus dengan tiga titik simpul C_3 bukan komponen dari G di atas.

2.4 Operasi pada Graf

Definisi 7

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H, maka dinotasikan dengan $G = nH$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:11).

Contoh:



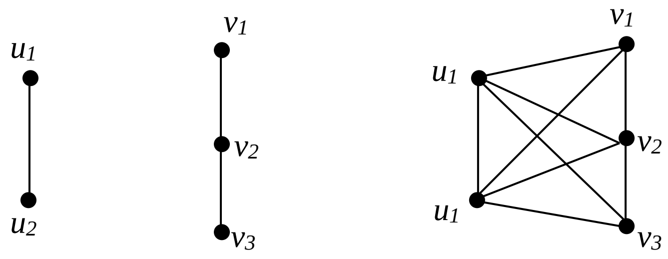
Gambar 2.7 Gabungan Dua Graf Terhubung

Gambar di atas merupakan contoh gabungan graf G_1 dan G_2 yang merupakan graf dengan dua titik dan saling terhubung langsung, yang disebut dengan graf K_2. $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2\}$, $E(G) = \{u_1u_2\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2\}$. Jika $G = G_1 \cup G_2$, maka $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{u_1,u_2\} \cup \{v_1,v_2\} = \{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) = \{u_1u_2\} \cup \{v_1v_2\} = \{u_1u_2, v_1v_2\}$. Karena graf G memuat 2 graf K_2, maka graf tersebut dapat dinotasikan $2K_2$.

Definisi 8

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) dan\ v \in V(G_2)\}$(Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh di bawah ini.



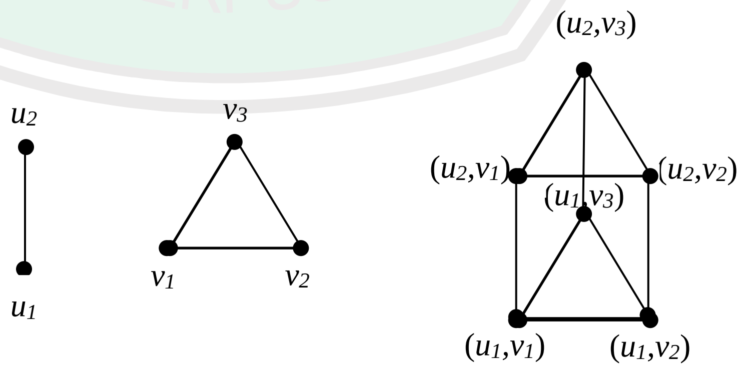
Gambar 2.8 Penjumlahan Graf $G = G_1 + G_2$

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2,v_3\}$, maka $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{u_1,u_2\}\{v_1,v_2,v_3\} = \{u_1,u_2,v_1,v_2,v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\} = \{u_1u_2, v_1v_2, v_2v_3, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\}$.

Definisi 9

Hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$(Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 2.9 Graf Hasil Kali Kartesius

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2,v_3\}$, maka $G = G_1 \times G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = \{(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_1,v_3),(u_2,v_1),(u_2,v_2),(u_2,v_3)\}$.

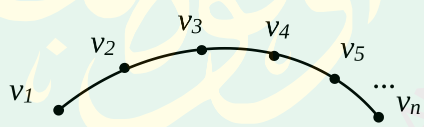
2.5 Jenis Graf

2.5.1 Graf Lintasan

Defenisi 10

Graf lintasan dengan $n \geq 1$ titik adalah graf yang titik-titiknya dapat diurutkan dalam suatu barisan $u_1,u_2,...,u_n$ sedemikian sehingga $E(P)=\{u_i,u_{i+1}: i = 1,...,n-1\}$. Graf lintasan dengan n titik di notasikan dengan P_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

.



Gambar 2.10 Graf Lintasan

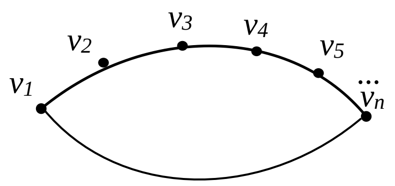
2.5.2 Graf Siklus

Definisi 11

Jika $P_n := v_1,v_2,...,v_n$ adalah suatu graf lintasan berorde n dan $n \geq 3$, maka graf $C_n := P_n + \{v_1,v_2\}$ disebut siklus berorde n. Panjang P_n adalah $n\text{-}1$, yaitu banyaknya sisi pada P_n dan panjang siklus C_n adalah n. Graf siklus untuk n titik dinotasikan dengan C_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

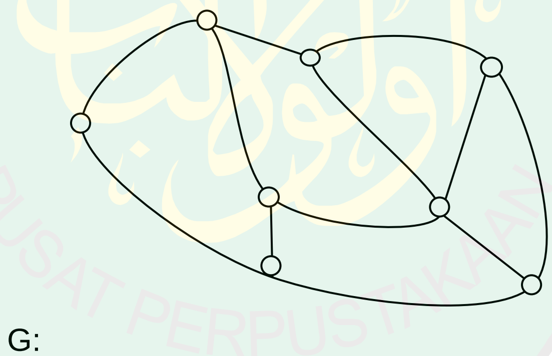
.

.



Gambar 2.11 Graf Siklus

Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang ada pada lintasan tersebut. Pada suatu graf yang memuat siklus tentulah ada yang mempunyai panjang terbesar dan ada yang terkecil. Panjang siklus terkecil disebut girt dan dinyatakan dengan g(G) dan panjang siklus terbesar disebut Keliling (*circumference*) pada graf G dinyatakan dengan c(G).



Gambar 2.12 Graf G

Graf pada Gambar 2.12 Graf G mempunyai g(G)=3 dan c(G)=8

Pada suatu graf terhubung setiap dua titik simpulnya dihubungkan oleh paling sedikit dua lintasan. Karena itu lintsan-lintasan tersebut ada yang pendek dan ada yang panjang. Panjang lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik menunjukkan jarak kedua titik tersebut dan dinyatakan oleh d(u,v). Lebih jelasnya diberikan definisi berikut.

Definisi 12

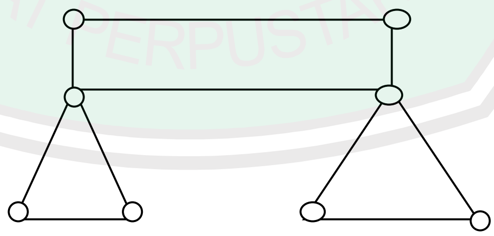
Jarak antara dua titik u,v pada suatu graf G ditulis d(u,v) dengan d(u,v)= 0 jika u=v; d(u,v)= k, jika u≠v dan k adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v. Jika tidak ada lintasan yang menghubungkan titik u, v, maka d(u,v)= ∞ (Chartrand dan Lesniak, 1986:28)..

2.5.3 Graf Pohon

Graf pohon banyak diterapkan untuk berbagai keperluan diantaranya adalah sebagai struktur organisasi suatu perusahaan, silsilah suatu keluarga, skema sistem gugur suatu pertandingan, dan ikatan kimia suatu molekul adalah jenis graf yang tergolong sebagai pohon. Namun sebelum sebelum memahami definisi graf pohon, terlebih dahulu disajikan defenisi terhubung.

Defenisi 13

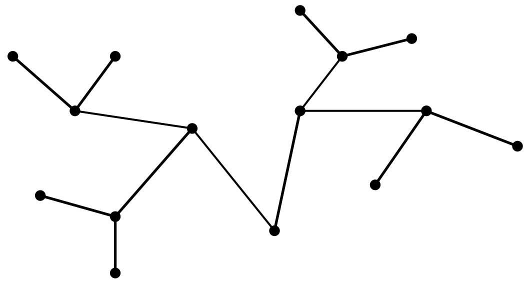
Graf *G* dikatakan *terhubung* jika untuk setiap dua titik *u* dan *v* pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang memuat *u* dan *v* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).



Gambar 2.13 Graf Terhubung

Definisi 14

Misalkan *T* adalah graf terhubung. Jika *T* tidak memiliki siklus, maka *T* disebut graf pohon(Chartrand dan Lesniak, 1986: 68)



Gambar 2.14 Pohon

Graf tak terhubung yang komponen-komponennya pohon disebut *hutan.* Dan graf yang hanya terdiri dari satu titik disebut pohon trivial.

Teorema 2

Jika G adalah graf yang memiliki p titik, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah eqivalen.

a. G adalah pohon.
b. G memiliki p-1 sisi dan tidak memiliki siklus.
c. G adalah graf terhubung dan memiliki p-1 sisi.
d. Setiap dua titik simpul dari G dihubungkan oleh tepat satu lintasan.
e. G tidak memiliki siklus, dan jika pada G ditambahkan satu sisi x yang mengaitkan dua titik di G yang tidak bertetangga, maka G+x memiliki satu siklus.

Akibat 1

Jika G adalah pohon nontrivial, maka G memiliki paling sedikit dua titik berderajat satu.

Akibat II

Jika G adalah hutan yang memiliki p titik simpul dan k komponen, maka G memiliki p-k sisi.

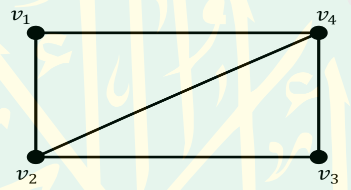
2.5.4 Pohon Merentang

Suatu pohon dapat dibentuk dari graf terhubung. Pohon-pohon yang dibentuk dari graf tersebut disebut pohon merentang. Secara matematis pohon merentang didefinikan sebagai berikut:

Definisi 15

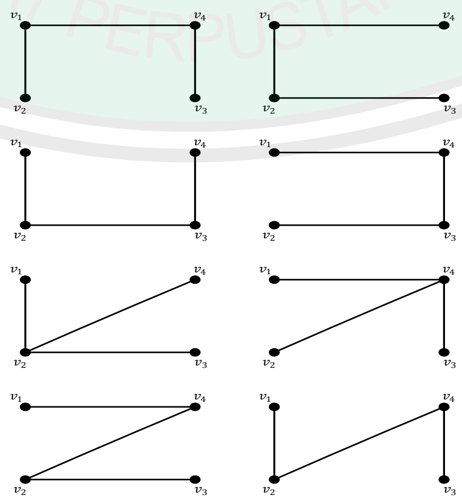
Misal G adalah graf, suatu pohon merentang adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon (Yuni Dwi Astuti, 2006:2).

Contoh:



Gambar 2.24 Graf G

Maka pohon merentang dari graf G adalah:

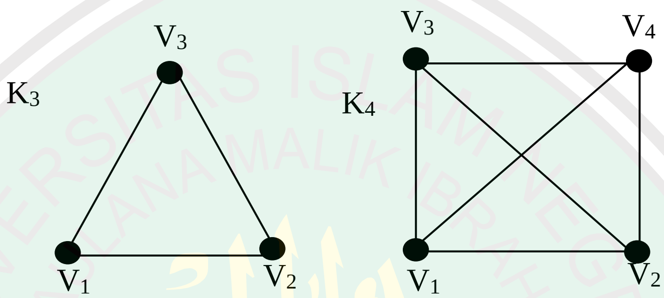


Gambar 2.25 Pohon Merentang dari Graf G

2.5.5 Graf Komplit

Definisi 16

Graf lengkap adalah suatu graf yang terdiri dari n titik simpul dan setiap titik simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n,.



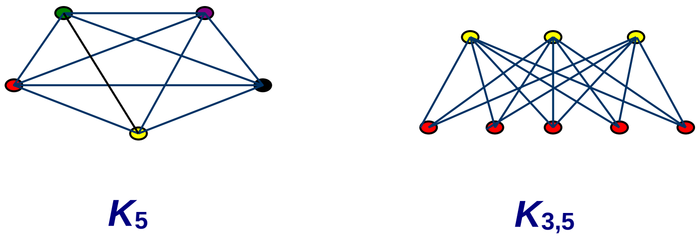
Gambar 2.15 Graf Komplit

2.5.6 Graf Bipartisi

Definisi 17

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y; X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Graf G *bipartit* jika $V(G)$ dapat dipartisi kedalam dua subhimpunan tak kosong V_1 dan V_2, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e=uv \in E(G)$, berlaku $u \in V_1$ dan $v \in V_2$ atau $v \in V_1$ dan u $\in V_2$. Graf G dikatakan graf *bipartit lengkap*, jika $E(G)=\{uv: u \in V_1, v \in V_2$ dan dinotasikan $K_{n,m}$. Berikut ini adalah graf lengkap dengan 5 titik dan graf bipartit lengkap $K_{3,5}$.



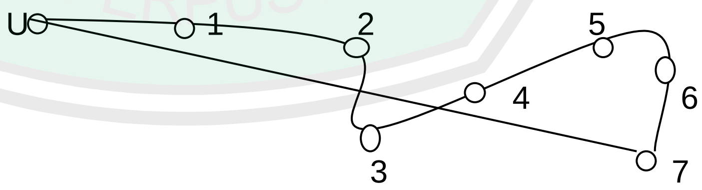
Gambar 2.16 Graf bipartisi

Teorema 3

Graf nontrivial G adalah bipartit jika hanya jika G tidak memuat siklus dengan panjang ganjil

Bukti.

Misalkan G tidak memuat siklus dengan panjang ganjil. Asumsikan G terhubung. Misalkan u adalah sebarang titik di G, dan U adalah himpunan yang memuat titik-titik dengan panjang genap dari u. Misalkan pula W adalah himpunan yang memuat titik dengan panjang ganjil dari u. Dengan demikian {U, W} adalah koleksi partisi dari V(G). Anggaplah bahwa u di U, berarti d(u,u)=0.



Gambar 2.17 Graf G

U :	u	2	4	6
W :	1	3	5	7

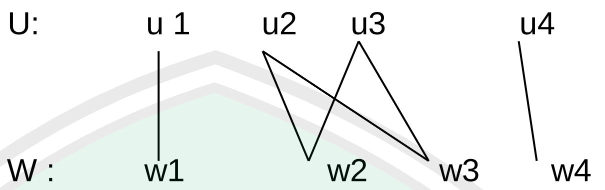
Kita klaim bahwa setiap sisi dari G mengaitkan suatu titik di U dan suatu titik di W. Andaikan itu tidak benar. Berarti terdapat satu sisi di G yang mengaitkan dua titik di U atau dua titik di W, sebut itu ux $\in$E(G) dengan w,x $\in$ W. Karena d(u,w) dan d(u,x) duanya ganjil, maka dapat ditulis d(u,w)=2s+1 dan d(u,x)= 2r+1 untuk suatu bilangan asli s, r. Labeli titik-titik dari u ke w dan dari u ke x sebagai berikut.

U=v_0, v_1, ..., v_{2s+1}=w dan u=x_0, x_1, ..., x_{2r+1}=x. Dua lintasan tersebut tambah sisi wx memebentuk siklus C, dengan

C : u, v1, ..., v_{2s+1}=w, x= x_{2r+1} , ..., x_1, x_0=u.

Siklus C mempunyai panjang 2s+1 + 2r+1 tambah satu sisi wx. Dengan kata lain panjang C adalah (2s+1)+(2r+1)+1= 2(s+r+1)+1. Nilai 2(s+r+1)+1 adalah ganjil. Jadi G memiliki siklus dengan panjang ganjil. Hal ini kontradiksi dengan G tidak memuat siklus ganjil. Jadi, tidak benar bahwa terdapat sisi di G yang mengaitkan dua titik pada partisi yang sama. Dengan kata lain, setiap sisi dari G mengaitkan suatu titik di partisi yang satu dan suatu titik di partisi yang satunya. Menurut definisi G adalah bipartit.

Misalkan G nontrivial dan bipartit. Akan ditunjukkan G tidak memuat siklus ganjil. Partisi himpunan V(G) ke dalam dua subhimpunan sebut U dan W sedemikian sehingga setiap sisi di G mengaitkan suatu titik di U dan suatu titik di W. Misalkan e1=u1w1, e2=u2w2, e3=u3w3, dan e4=u4w4. Jika titik tersebut berbeda semua maka G tidak memuat siklus. Jika masih ada sisi lain misal e di G maka e=uiwj, 1,j=1,2,3,4, dan i≠j, sebut i=2 dan j=3. Dalam hal ini, terdapat lintasan P3: w2, u2, w3, u3 dengan panjang 3. Jika lintasan ini terletak pada suatu siklus C, maka C=E(P3)+{u3,w2} dengan panjang 4. Situasi lain akan selalu serupa. Karenanya dapat disimpulkan bahwa G tidak memuat siklus ganjil.



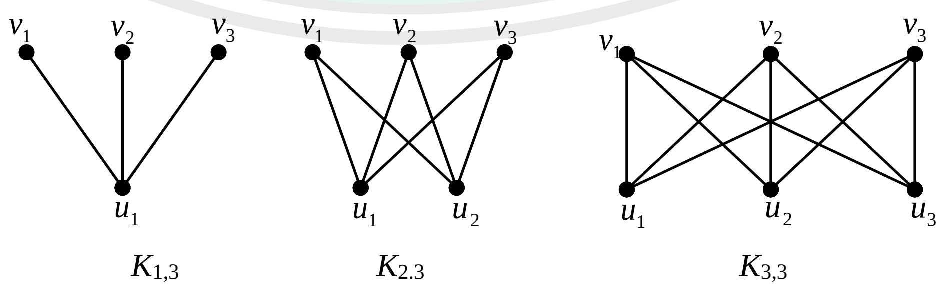
Gambar 2.18 Graf Nontrivial dan bipartisi

2.5.7 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 18

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).

Contoh:



Gambar 2.16 Graf Bipartisi Komplit

Pada Gambar 2.17 akan dijelaskan sebagai berikut:

$K_{1,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$$X = \{u_1\}, \qquad |X| = 1$$

$$Y = \{v_1, v_2, v_3\}, \qquad |Y| = 3$$

$K_{2,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$$X = \{u_1, u_2\}, \qquad |X| = 2$$

$$Y = \{v_1, v_2, v_3\}, \qquad |Y| = 3$$

$K_{3,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$$X = \{u_1, u_2, u_3\}, \qquad |X| = 3$$

$$Y = \{v_1, v_2, v_3\}, \qquad |Y| = 3$$

2.5.8 Graf *n* partisi

Definisi 19

Graf *n* partisi didefinisikan sebagai graf dimana himpunan titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi n himpunan titik, yaitu $V_1(G), V_2(G), \dots, V_n(G)$. Sisi-sisi pada graf *n*-partisi terhubung dari titik-titik pada $Vi(G)$ ke titik-titik pada himpunan titik selain $Vi(G)$ atau $\overline{V\imath(G)}$, dimana $\overline{V\imath(G)}$ adalah komplemen dari $Vi(G)$ (Purwanto, 1998:24).

2.6 k-Defisiensi Titik

Suatu titik v dari suatu pohon merentang T pada graf G disebut k-defisiensi jika derajat dari titik tersebut memenuhi persamaan $der_G v - der_T v = k$, bilangan k diatas disebut defisiensi V. Nilai k-defisiensi titik bias saja bernilai nol jika pohon merentangnya adalah dirinya sendiri. Jika suatu graf tidak memiliki pohon merentang, maka jika dihitung dengan persamaan $der_G v - der_T v = k$ juga akan menghasilkan nilai nol, tetapi itu bukan nilai k-defisiensi titik karena tidak memiliki pohon merentang meskipun sama-sama bernilai nol dengan graf yang pohon merentangnya adalah dirinya sendiri, penjumlahan nilai-nilai k-defisiensi titik suatu graf disebut total k-defisiensi titik atau jumlah k-defisiensi titik.

2.7 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur’an

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika, dalam teori graf terdapat pasangan himpunan yang memuat elemen-elemen titik dan pasangan tak terurut dari titik yang disebut sisi, dimana himpunan titiknya merupakan himpunan tak kosong dan sisinya dapat dimungkinan kosong. Suatu titik dihubungkan dengan titik yang lain dengan penghubungnya merupakan sesuatu sisi maka disebut *adjecent*. Jika setiap titik pada suatu graf terhubung dengan titik lainnya maka graf tersebut dinamakan dengan graf terhubung (*connected graf).*
Dari teori graf tersebut kemudian munculah sebuah hukum-hukum atau rumus yang biasa kita kenal dengan teorema yang kebenarannya tidak dapat diragukan.

Sebenarnya semuanya itu bukan manusia yang menemukan melainkan sudah diciptakan oleh Allah SWT jauh sebelumnya dengan serapi-rapinya dan masih tersebar di alam kehidupan ini. Sehinga jelas bahwa manusia hanya menemukan saja.

Dalam Al-Qur’an surat Al-furqon ayat 2 disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ

كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: ”Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (Q.S. Al-Furqaan: 2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 2007: 80).

Jadi setiap manusia tidak perlu ragu dalam melakukan sebuah penelitian guna mengembangkan ilmu pengetahuan. Kita diharuskan meyakini bahwa semua yang ada dalam alam kehidupan ini sudah diatur oleh Allah SWT dengan sangat rapi. Begitu juga penelitian terhadap bidang matematika, khususnya bidang graf termasuk dalam pencarian teorema mengenai total k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang dari graf komplit, bipartisi komplit dan tripartisi komplit.

Dunia matematika lahir dari rahim kesadaran bahwa alam semesta itu diatur oleh hukum-hukum yang teratur. Hal ini menyiratkan arti bahwa untuk memasuki rahasia pemahaman dari dunia matematika maka pertama-tama harus melakukan lompatan kualitatif dalam alam kesadaran. Alam harus dipandang sebagai sesuatu yang tunduk pada hukum-hukum keteraturan (Alisah & Dharmawan, 2007: 17).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007: 79).

Proses menemukan teorema memang sedemikian rumit. Teorema berasal dari pola-pola yang tersusun dari alam semesta. Pola-pola tersebut diperolah dari berbagai macam eksperimen atau semacam percobaan. Sehingga teorema yang sedemikian ini masih berupa dugaan sementara (*hipotesis).* Dalam bahasa lain dikatakan sebagai konjektur atau *zhan.* Proses penemuan seperti ini dinamakan proses berpikir induktif atau proses penyimpulan. Kesimpulan yang masih bersifat induktif belum bisa diakui kebenarannya. Dan tidak bisa dijadikan dasar bagi pengembangan pengetahuan selanjutnya. Sebagai matematikawan, tidak boleh mengikuti dugaan atau *zhan*, hal yang masih lemah dan diragukan. Hal ini sangat tepat sebagai wujud aplikasi QS An-Najm ayat 28.

وَمَا لَهُم بِهِۦ مِنۡ عِلۡمٍۖ إِن يَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّۖ وَإِنَّ ٱلظَّنَّ لَا يُغۡنِي مِنَ ٱلۡحَقِّ شَيۡـٔٗا ٢٨

Artinya: "*dan mereka tidak mempunyai sesuatu pengetahuanpun tentang itu. mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan sedang Sesungguhnya persangkaan itu tiada berfaedah sedikitpun terhadap kebenaran"*(QS: An-Najm : 28).

Matematika adalah proses berpikir deduktif. Teorema juga harus diperoleh dari proses deduktif. Untuk itu dugaan atau *zhan* harus dibuktikan kebenarannya. Jika zhan sudah terbukti kebenarannya maka dapat terima menjadi sebuah teorema. Hal inilah yang harus dijadikan tujuan dari semua penelitian. Membuktian semua dugaan (*zhan)* sampai lahir menjadi menjadi teorema, yang kebenarannya dapat kita ikuti bersama. Sebagaimana pembinaan sikap yang diajarkan dalam Al-Qur’an surat An-Naml ayat 64.

أَمَّن يَبۡدَؤُاْ ٱلۡخَلۡقَ ثُمَّ يُعِيدُهُۥ وَمَن يَرۡزُقُكُم مِّنَ ٱلسَّمَآءِ وَٱلۡأَرۡضِۗ أَءِلَٰهٞ مَّعَ ٱللَّهِۚ

قُلۡ هَاتُواْ بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ٦٤

Artinya: “*atau siapakah yang menciptakan (manusia dari permulaannya), kemudian mengulanginya (lagi), dan siapa (pula) yang memberikan rezki kepadamu dari langit dan bumi? Apakah disamping Allah ada Tuhan (yang lain)?. Katakanlah: "Unjukkanlah bukti kebenaranmu, jika kamu memang orang-orang yang benar"* (QS. An-Naml: 64).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Pengertian Graf dan Graf Komplit

Graf adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran (*size)* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q. Dalam kitab al-qur'an juga dijelaskan mengenai hubungan yang dijelaskan pada Al-Quran surat Adz-Dzariat ayat 56 sebagai berikut:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

Artinya: Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku.

Dalam surat Al- Qur'an diatas dijelaskan bahwa terdapat hubungan antara Tuhan dengan makhluknya seperti pengertian graf yaitu setiap pasang titik yang dihubungkan oleh sisi.

Gambar 3.1 Graf G

Dalam ilmu matematika khususnya dalam ilmu graf terdapat begitu banyak jenis graf. Salah satu jenisnya adalah graf komplit. Graf komplit adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan langsung oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n. Menurut Purwanto seorang pengarang buku matematika dalam ilmu graf, graf komplit terbagi menjadi beberapa jenis yaitu graf komplit bipartisi dan graf komplit tri partisi, namun dalam penelitian kali ini akan dibahas tentang graf komplit bipartisi. Berdasarkan derajat yang terdapat pada graf komplit bipartisi tersebut maka dapat menghitung jumlah total k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit. Adapaun langkah-langkah untuk menentukan k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dengan $m = m_i$dengan $i = 1, 2, 3,4, 5,6 \dots s$ dan $n = n_j$dengan $j = 1, 2, 3,4, 5, 6 \dots t$
2. Membuat graf pohon merentang maksimum dari garf bipartisi komplit $K_{m,n}$
3. Menentukan jumlah derajat pada setiap titik dari graf bipartisi komplit $K_{m,n}$dan menentukan jmlah derajat pada setiap titik dalam graf pohon merentang maksimum dari graf bipartisi komplit $K_{m,n}$

4. Menghitung k-defisiensi titik pada suatu graf pohon merentang maksimum dari graf bipartisi komplit dengan rumus
5. Menghitung jumlah total k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit$K_{m,n}$

Dalam Al-Quran juga dijelaskan mengenai pasangan antara laki-laki dan perempuan yang terdapat pada surat Al-Hujuraat ayat 13 sebagai berikut:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ

لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artimya: Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling takwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal(QS. Al-Hujuraat: 13).

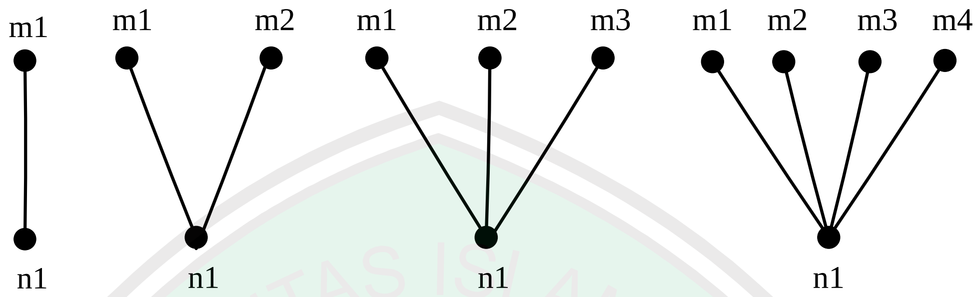
3.2 Pengertian Graf Bipartisi Komplit

Graf bipartisi komplit adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$.

Berdasarkan langkah-langkah di atas maka akan dianalisis pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$dengan$m = m_i$ dengan $i = 1, 2, 3,4\ 5, 6 \dots s$ dan $n = n_j$dengan $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots t$.

3.2.1 Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots i$ dan $n = 1$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 1,2,3,4 \ldots i$ dan $n = 1$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.2 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{m,1}$)

Berdasarkan gambar 3.1 yaitu graf bipartisi komplit $K_{m,1}$, maka dapat diketahui bahwa pada graf bipartisi komplit $K_{m,1}$ pohon merentangnya adalah dirinya sendiri.

Pada graf bipartisi komplit $K_{m,1}$ dapat diketahui nilai k- defisiensinya sebagai berikut:

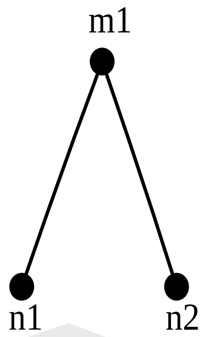
pada titik m_1 nilai $k = 1 - 1 = 0$

pada titik n_2 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit $K_{m,1}$ adalah $0 + 0 = 0$. Dan itu berlaku pada graf yang mempunyai pohon merentang adalah dirinya sendiri.

3.2.2 Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots i$ dan $n = 2$

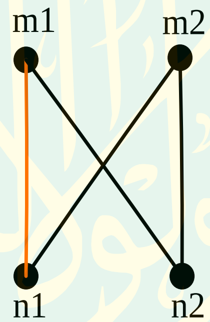
Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 1$ dan $n = 2$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.3 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{1,2}$)

Berdasarkan gambar 3.2 yaitu graf G diatas, maka dapat diketahui bahwa pohon merentangnya adalah dirinya sendiri maka nilai k-defisiensinya adalah 0

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 2$ dan $n = 2$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



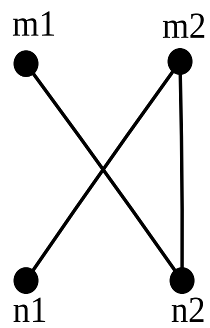
Gambar 3.4 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{2,2}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{2,2}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 2$ $degG(n_1) = 1$

$degG(m_2) = 2$ $degG(n_2) = 2$

Dikarnakan pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ memiliki beberapa pohon merentang dengan jumlah derajat yang sama maka penulis mengambil satu gambar dari pohon merentang bipartisi komplit $K_{2,2}$ sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 2$

sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,2}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik n_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

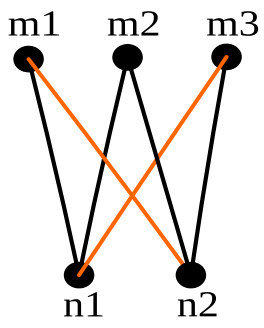
Pada titik n_2 nilai $k = 2 - 2 = 1$

Dari nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,2}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{2,2}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensititik = k(m_1) + k(m_2) + k(n_2) + k(n_2)$$

$$= 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 3$ dan $n = 2$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.6 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{3,2}$)

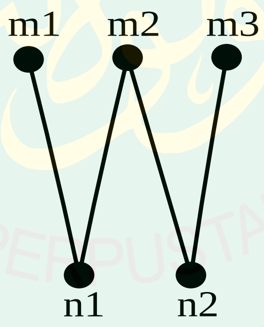
Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{3,2}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 2$ $\qquad$ $degG(n_1) = 3$

$degG(m_2) = 2$ $\qquad$ $degG(n_2) = 3$

$degG(m_3) = 2$

Graf komplit $K_{3,2}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T graf merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $\qquad$ $degT(n_1) = 2$

$degT(m_2) = 2$ $\qquad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 1$

sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,2}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik m_3 nilai $k = 2 - 1 = 1$

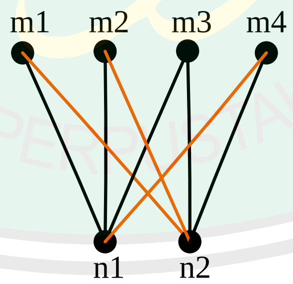
Pada titik n_1 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik n_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,2}$ maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{3,2}$ adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensititik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(n_1) + k(n_2)$$
$$= 1 + 0 + 1 + 1 = 1 = 4$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 4$ dan $n = 2$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.8 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{4,2}$)

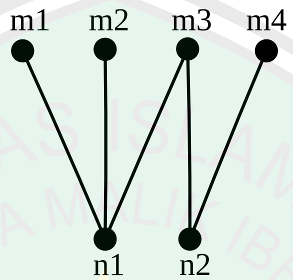
Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{4,2}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 2$ $\qquad$ $degG(n_1) = 2$

$degG(m_2) = 2$ $\qquad$ $degG(n_1) = 4$

$degG(m_3) = 2$ $\qquad$ $degG(n_2) = 4$

Graf komplit $K_{4,2}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $\qquad$ $degT(n_1) = 3$

$degT(m_2) = 1$ $\qquad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$

$degT(m_4) = 1$

sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,2}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik m_3 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik m_4 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik n_1 nilai $k = 4 - 3 = 1$

Pada titik n_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$

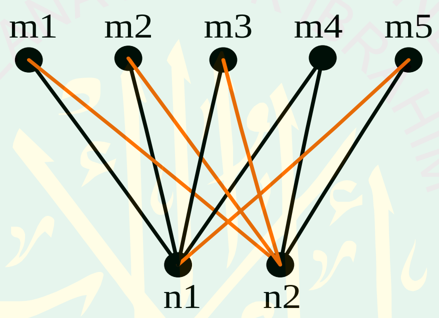
Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,2}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{4,2}$ adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3)$$

$$+k(m_4) + k(n_2) + k(n_2)$$

$$= 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 2 = 6$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$,dengan $m = 5$ dan $n = 2$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.10 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{5,2}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{5,2}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

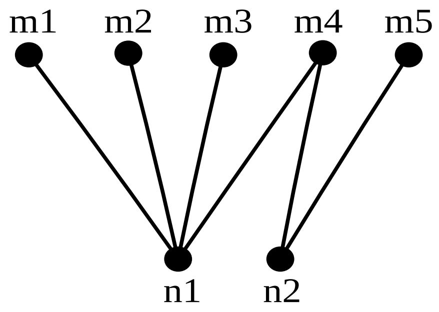
$degG(m_1) = 2$ $degG(m_5) = 2$

$degG(m_2) = 2$ $degG(n_1) = 5$

$degG(m_3) = 2$ $degG(n_2) = 5$

$degG(m_4) = 2$

Graf komplit $K_{5,2}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $degT(m_5) = 1$

$degT(m_2) = 1$ $degT(n_1) = 4$

$degT(m_3) = 1$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_4) = 2$

sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,2}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$ Pada titik n_1 nilai $k = 5 - 4 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 2 - 1 = 1$ Pada titik n_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik m_3 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik m_4 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik m_5 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,2}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{5,2}$adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4)$$

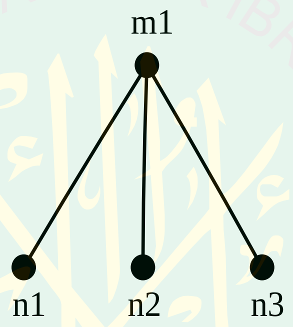
$$+k(m_5) + k(n_2) + k(n_2)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 8$$

Berdasarkan dari total k-defisiensi titik untuk $K_{1,2}$, $K_{2,2}$, $K_{3,2}$, $K_{4,2}$ dan $K_{5,2}$ adalah 0, 2, 4, 6, dan 8 maka dapat diketahui bahwa total k-defisiensi dari $K_{m,2}$ atau $K_{2,n}$ adalah $2(m-1)$ atau $2(n-1)$.

3.2.3 Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $\boldsymbol{m = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots i\ dan\ n = 3}$

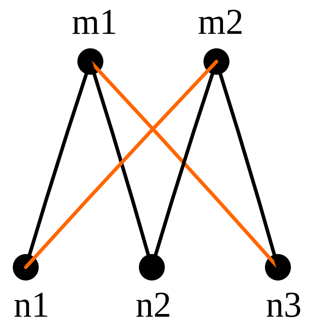
Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$,dengan $m = 1$ dan $n = 3$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.12 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{1,3}$)

Berdasarkan gambar 3.11 yaitu graf bipartisi komplit $K_{1,3}$, maka dapat diketahui bahwa pada graf bipartisi komplit $K_{1,3}$ pohon merentangnya adalah dirinya sendiri maka nilai k-defisiensinya adalah 0

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$,dengan $m = 2$ dan $n = 3$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.13 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{2,3}$)

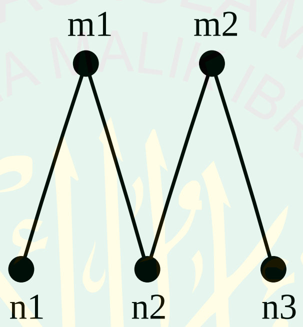
Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{2,3}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 3$ $\quad$ $degT(n_1) = 3$

$degT(m_2) = 3$ $\quad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(n_3) = 3$

Graf komplit $K_{2,3}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$deg\ T\ (m_1) = 2$ $\quad$ $deg\ T\ (n_1) = 1$

$deg\ T\ (m_2) = 2$ $\quad$ $deg\ T\ (n_2) = 2$

$deg\ T\ (n_3) = 1$

sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,3}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik n_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik n_2 nilai $k = 2 - 2 = 0$

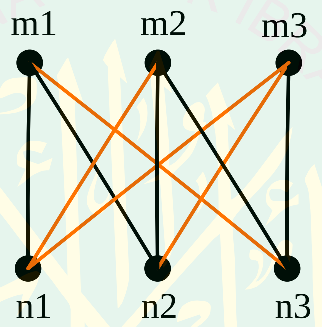
Pada titik n_3 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,3}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{2,3}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(n_1) + k(n_3) + k(n_3)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 3$ dan $n = 3$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.15 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{3,3}$)

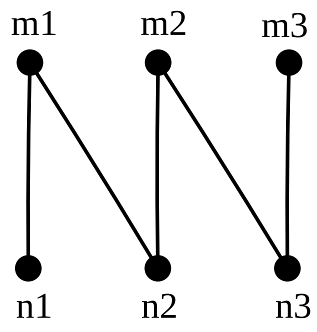
Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{3,3}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 3$ $\qquad$ $degG(n_1) = 3$

$degG(m_2) = 3$ $\qquad$ $degG(n_2) = 3$

$degG(m_3) = 3$ $\qquad$ $degG(n_3) = 3$

Graf komplit $K_{3,3}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.16 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 2$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 1$ $\quad$ $degT(n_3) = 2$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,3}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_3 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik n_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik n_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik n_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

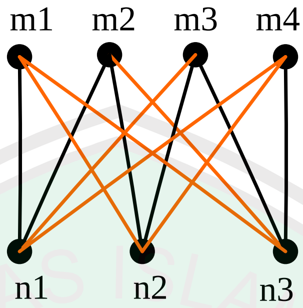
Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,3}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi $K_{3,3}$ adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik$$

$$= k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(n_1) + k(n_2) + k(n_3)$$

$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 4$ dan $n = 3$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.17 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{4,3}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{4,3}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

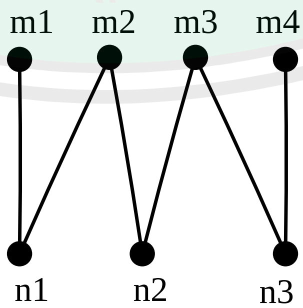
$degG(m_1) = 1$ $\qquad$ $degG(n_1) = 2$

$degG(m_2) = 2$ $\qquad$ $degG(n_2) = 2$

$degG(m_3) = 2$ $\qquad$ $degG(n_3) = 2$

$degG(m_4) = 1$

Graf komplit $K_{4,3}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.18 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $degT(n_1) = 2$

$degT(m_2) = 2$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$ $degT(n_3) = 2$

$degT(m_4) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,3}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik m_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_4 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik n_1 nilai $k = 4 - 2 = 2$

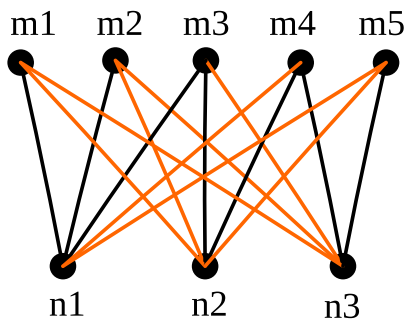
Pada titik n_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,3}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{4,3}$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Total\ k - defisiensi\ titik &= k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4) \\ &\quad + k(n_1) + k(n_2) + k(n_3) \\ &= 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 \end{aligned}$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 5$ dan $n = 3$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.19 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{5,3}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{5,3}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 3$ $\quad$ $degG(n_1) = 5$

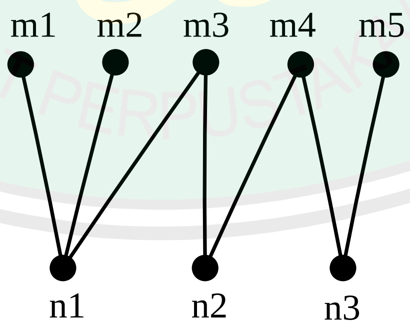
$degG(m_2) = 3$ $\quad$ $degG(n_2) = 5$

$degG(m_3) = 3$ $\quad$ $degG(n_3) = 5$

$degG(m_4) = 3$

$degG(m_5) = 3$

Graf komplit $K_{5,3}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.20 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $\quad$ $degT(n_1) = 3$

$degT(m_2) = 1$ $\quad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$ $degT(n_3) = 2$

$degT(m_4) = 2$

$degT(m_5) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,3}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik m_2 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik m_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_4 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik m_5 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik n_1 nilai $k = 5 - 3 = 2$

Pada titik n_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik n_3 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,3}$, maka dapat diperoleh total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{5,3}$, adalah sebagai berikut:

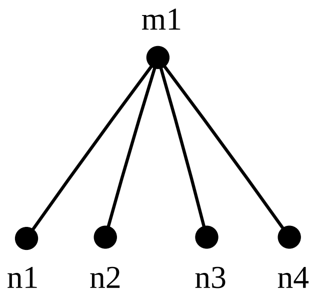
$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4) + k(m_5) + k(n_1) + k(n_2) + k(n_3)$$

$$= 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 16$$

Berdasarkan dari total k-defisiensi titik untuk $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{4,3}$ dan $K_{5,3}$ adalah 0, 4, 8, 12, dan 16 maka dapat diketahui bahwa total k-defisiensi dari $K_{m,3}$ atau $K_{3,n}$ adalah $4(m-1)$ atau $4(n-1)$.

3.2.4 Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots i\ dan\ n = 4$

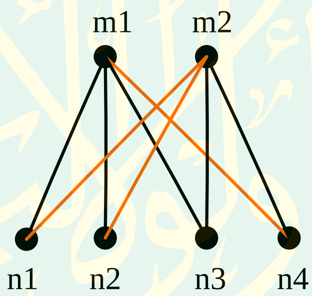
Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 1$ dan $n = 4$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.21 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{1,4}$)

Berdasarkan gambar 3.20 yaitu graf bipartisi komplit $K_{1,4}$, maka dapat diketahui bahwa pada graf bipartisi komplit $K_{1,4}$ pohon merentangnya adalah dirinya sendiri maka nilai k-defisiensinya adalah 0

Untuk graf bipartisi komplit $K_{2,4}$ $m = m_i$ dengan $i = 2$ dan $n = n_j$ dengan $j = 4$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.22 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{2,4}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{2,4}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

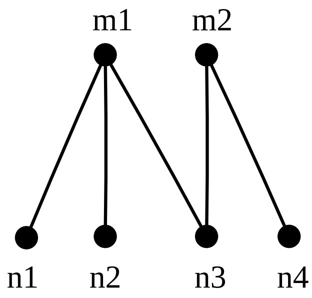
$degG(m_1) = 4$ $\qquad$ $degG(n_1) = 2$

$degG(m_2) = 4$ $\qquad$ $degG(n_2) = 2$

$degG(n_3) = 2$

$degG(n_4) = 2$

Graf komplit $K_{2,4}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.23 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 3$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 1$

$degT(n_3) = 2$

$degT(n_4) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,4}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 4 - 3 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik n_2 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik n_3 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik n_4 nilai $k = 2 - 1 = 1$

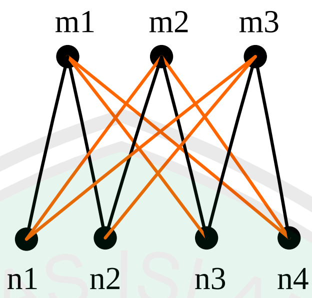
Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,4}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{2,4}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(n_1) + k(n_2)$$

$$+k(n_3) + Def(n_4)$$

$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 0 + 1 = 6$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 3$ dan $n = 4$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.24 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{3,4}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{3,4}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

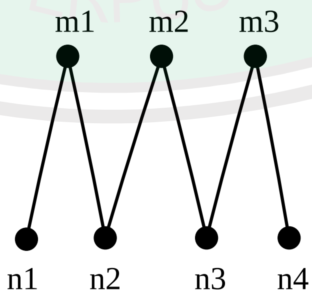
$degG(m_1) = 4$ $\qquad$ $degG(n_1) = 3$

$degG(m_2) = 4$ $\qquad$ $degG(n_2) = 3$

$degG(m_3) = 4$ $\qquad$ $degG(n_3) = 3$

$degG(n_4) = 3$

Graf komplit $K_{3,4}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.25 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 2$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$ $\quad$ $degT(n_3) = 2$

$degT(n_4) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,4}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik m_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik m_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik n_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

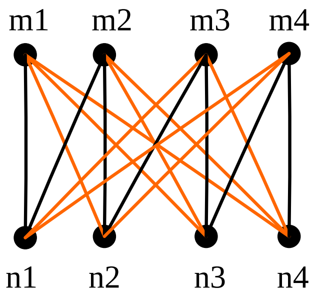
Pada titik n_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik n_4 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,4}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{3,4}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(n_1)$$
$$+k(n_2) + k(n_3) + k(n_4)$$
$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 12$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 4$ dan $n = 4$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.26 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{4,4}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{4,4}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

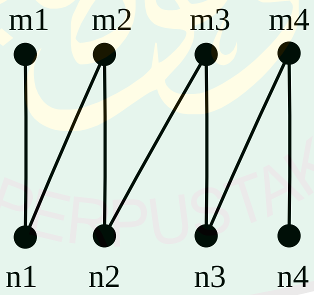
$degG(m_1) = 4$ $degG(n_1) = 4$

$degG(m_2) = 4$ $degG(n_2) = 4$

$degG(m_3) = 4$ $degG(n_3) = 4$

$degG(m_4) = 4$ $degG(n_4) = 4$

Graf komplit $K_{4,4}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.27 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $degT(n_1) = 2$

$degT(m_2) = 2$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$ $degT(n_3) = 2$

$degT(m_4) = 2$ $degT(n_4) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,4}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik m_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik m_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik m_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_1 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_4 nilai $k = 4 - 1 = 3$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,4}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{4,4}$, adalah sebagai berikut:

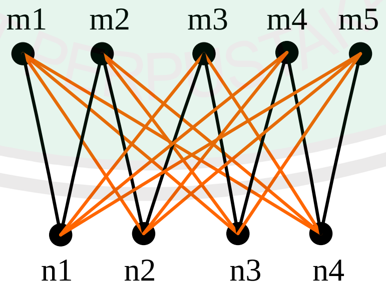
$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4)$$

$$+k(n_1) + k(n_2) + k(n_3) + k(n_4)$$

$$= 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 =$$

18

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 5$ dan $n = 4$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.28 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{5,4}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{4,4}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 4$

$degG(m_2) = 4$

$degG(n_1) = 5$

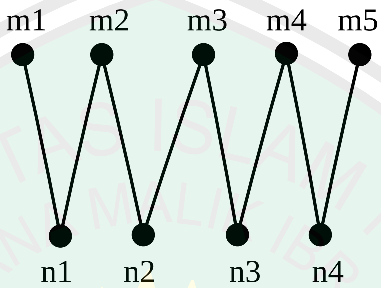
$degG(n_2) = 5$

$degG(m_3) = 4$ $degG(n_3) = 5$

$degG(m_4) = 4$ $degG(n_4) = 5$

$degG(m_5) = 4$

Graf komplit $K_{5,4}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.29 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 1$ $degT(n_1) = 2$

$degT(m_2) = 2$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$ $degT(n_3) = 2$

$degT(m_4) = 2$ $degT(n_4) = 2$

$degT(m_5) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,4}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 4 - 1 = 3$ Pada titik n_1 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik m_2 nilai $k = 4 - 2 = 2$ Pada titik n_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik m_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik m_4 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik m_5 nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik n_3 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik n_4 nilai $k = 5 - 2 = 3$

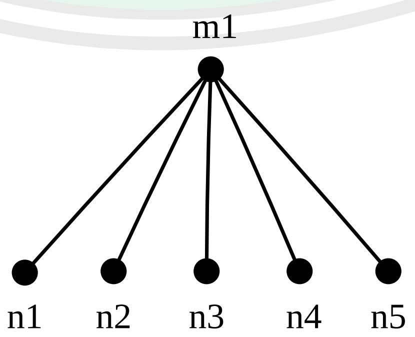
Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,4}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{5,4}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4) + k(m_5)$$
$$+k(n_1) + k(n_2) + k(n_3) + k(n_4)$$
$$= 3 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$$

Berdasarkan dari total k-defisiensi titik untuk $K_{1,4}$, $K_{2,4}$, $K_{3,4}$, $K_{4,4}$ dan $K_{5,4}$ adalah 0, 6, 12, 18, dan 24 maka dapat diketahui bahwa total k-defisiensi dari $K_{m,4}$ atau $K_{4,n}$ adalah $6(m-1)$ atau $6(n-1)$.

3.2.5 Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $\boldsymbol{m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots i\ dan\ n = 5}$

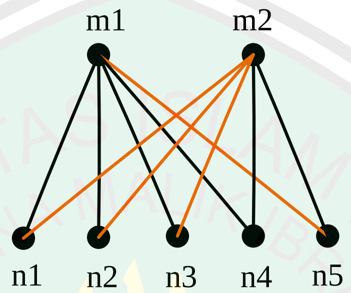
Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 1$ dan $n = 5$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.30 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{1,5}$)

Berdasarkan gambar 3.29 yaitu graf bipartisi komplit $K_{1,5}$, maka dapat diketahui bahwa pada graf bipartisi komplit $K_{1,4}$ pohon merentangnya adalah dirinya sendiri maka nilai k-defisiensinya adalah 0

Untuk graf bipartisi komplit $K_{2,5}, m = m_i$ dengan $i = 2$ dan $n = n_j$ dengan $j = 5$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.31 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{2,5}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{2,5}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 4$

$degG(m_2) = 2$

$degG(n_1) = 1$

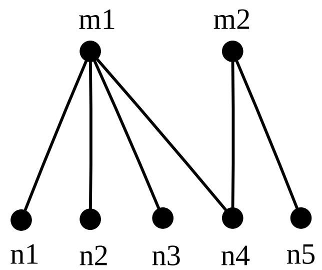
$degG(n_2) = 1$

$degG(n_3) = 1$

$degG(n_4) = 2$

$degG(n_5) = 1$

Graf komplit $K_{2,5}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.32 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 4$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 1$

$degT(n_3) = 1$

$degT(n_4) = 2$

$degT(n_5) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,5}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 5 - 4 = 1$ $\quad$ Pada titik n_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik m_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\quad$ Pada titik n_2 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik n_3 nilai $k = 2 - 1 = 1$

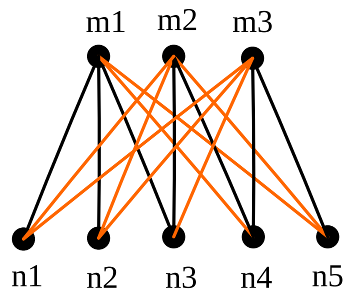
Pada titik n_4 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik n_5 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{2,5}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{2,5}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(n_1) + k(n_2) + k(n_3)$$
$$+k(n_4) + k(n_5)$$
$$= 1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 8$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 3$ dan $n = 5$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.33 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{3,5}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{3,5}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 5$ $\quad$ $degG(n_1) = 3$

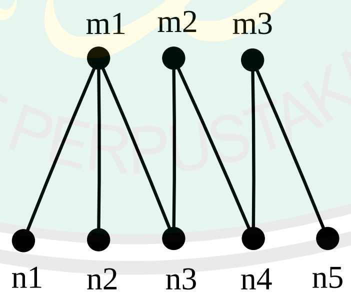
$degG(m_2) = 5$ $\quad$ $degG(n_2) = 3$

$degG(m_3) = 5$ $\quad$ $degG(n_3) = 3$

$degG(n_4) = 3$

$degG(n_5) = 3$

Graf komplit $K_{3,5}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.34 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 3$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 1$

$degT(m_3) = 2$ $\qquad$ $degT(n_3) = 2$

$degT(n_4) = 2$

$degT(n_5) = 1$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,5}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 5 - 3 = 2$ $\qquad$ Pada titik n_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik m_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ Pada titik n_2 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik m_3 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ Pada titik n_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

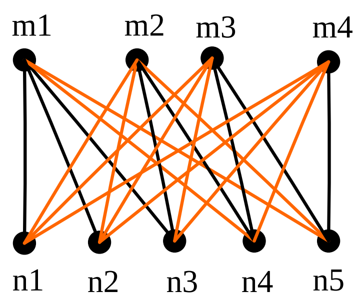
Pada titik n_4 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik n_5 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{3,5}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{3,5}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(n_1)$$
$$+k(n_2) + k(n_3) + k(n_4) + k(n_5)$$
$$= 2 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 16$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, $m = 4$ dan $n = 5$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.35 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{4,5}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{4,5}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 5$ $\quad$ $degG(n_1) = 4$

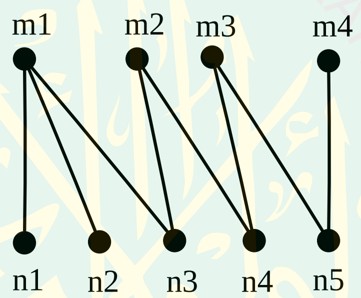
$degG(m_2) = 5$ $\quad$ $degG(n_2) = 4$

$degG(m_3) = 5$ $\quad$ $degG(n_3) = 4$

$degG(m_4) = 5$ $\quad$ $degG(n_4) = 4$

$degG(n_5) = 4$

Graf komplit $K_{4,5}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.36 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 3$ $\quad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\quad$ $degT(n_2) = 1$

$degT(m_3) = 2$ $\quad$ $degT(n_3) = 2$

$degT(m_4) = 1$ $\quad$ $degT(n_4) = 2$

$degT(n_5) = 2$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,5}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 5 - 3 = 2$ $\quad$ Pada titik n_1 nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik m_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$ Pada titik n_2 nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik m_3 nilai $k = 5 - 2 = 3$ Pada titik n_3 nilai $k = 4 - 2 = 2$

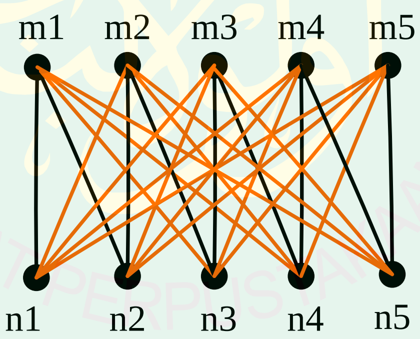
Pada titik m_4 nilai $k = 5 - 1 = 4$ Pada titik n_4 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik n_5 nilai $k = 4 - 2 = 2$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{4,5}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{4,5}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4) + k(n_1)$$
$$+k(n_2) + k(n_3) + k(n_4) + k(n_5)$$
$$= 2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 24$$

Untuk graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 5$ dan $n = 5$ dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.37 Graf G (graf bipartisi komplit $K_{5,5}$)

Berdasarkan gambar graf bipartisi komplit $K_{4,5}$ maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degG(m_1) = 5$ $degG(n_1) = 5$

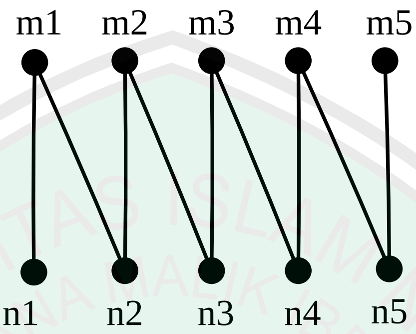
$degG(m_2) = 5$ $degG(n_2) = 5$

$degG(m_3) = 5$ $degG(n_3) = 5$

$degG(m_4) = 5$ $\qquad$ $degG(n_4) = 5$

$degG(m_5) = 5$ $\qquad$ $degG(n_5) = 5$

Graf komplit $K_{5,5}$ memiliki pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.38 Graf T (graf pohon T merentang maksimum dari graf G)

Berdasarkan bentuk graf pohon T merentang maksimum dari graf G maka dapat diketahui nilai-nilai derajat pada setiap titiknya adalah sebagai berikut:

$degT(m_1) = 2$ $\qquad$ $degT(n_1) = 1$

$degT(m_2) = 2$ $\qquad$ $degT(n_2) = 2$

$degT(m_3) = 2$ $\qquad$ $degT(n_3) = 2$

$degT(m_4) = 2$ $\qquad$ $degT(n_4) = 2$

$degT(m_5) = 1$ $\qquad$ $degT(n_5) = 2$

Sehingga diperoleh nilai k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,5}$ sebagai berikut:

Pada titik m_1 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ Pada titik n_1 nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik m_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ Pada titik n_2 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik m_3 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ Pada titik n_3 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik m_4 nilai $k = 5 - 2 = 3$ $\qquad$ Pada titik n_4 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik m_5 nilai $k = 5 - 1 = 4$ $\qquad$ Pada titik n_5 nilai $k = 5 - 2 = 3$

Dari nilai defisiensi titik pada graf bipartisi komplit $K_{5,5}$, maka dapat diketahui total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{5,5}$, adalah sebagai berikut:

$$Total\ k - defisiensi\ titik = k(m_1) + k(m_2) + k(m_3) + k(m_4) + k(m_5)$$
$$+k(n_1) + k(n_2) + k(n_3) + k(n_4) + k(n_5)$$
$$= 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 32$$

Berdasarkan dari total k-defisiensi titik untuk $K_{1,5}$, $K_{2,5}$, $K_{3,5}$, $K_{4,5}$ dan $K_{5,5}$ adalah 0, 8, 16, 24, dan 32 maka dapat diketahui bahwa total k-defisiensi dari $K_{m,5}$ atau $K_{5,n}$ adalah $8(m-1)$ atau $8(n-1)$.

Maka nilai-nilai total k-defisiensi titik pada graf tersebut diakumulasikan dalam sebuah bentuk tabel berikut:

Jumlah Total k-Defisiensi Titik Pohon Merentang Maksimum Pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$							
	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	…	m
n = 1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		$0(m-1)$
n = 2	*0*	*2*	*4*	*6*	*8*		$2(m-1)$
n = 3	*0*	*4*	*8*	*12*	*16*		$4(m-1)$
n = 4	*0*	*6*	*12*	*18*	*24*		$6(m-1)$
n = 5	*0*	*8*	*16*	*24*	*32*		$8(m-1)$
							⋮
							(2(n-1))(m-1)

Tabel 3.1 Total k-Defisiensi Titik Pohon Merentang Maksimum Pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan dan nilai-nilai jumlah total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ yang terdapat pada tabel 3.1 di atas maka diperoleh persamaan umum untuk mencari jumlah total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots i$ dan $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots j$ yaitu sebagai berikut:

$$Jumlah\ Total\ k - defisiensi\ dari\ graf\ bipartisi\ komplit\ K(m, n)$$
$$= \big(2(n-1)\big)(m-1)$$

Teorema

Graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ memiliki jumlah k-defisiensi titik yaitu
$$= \big(2(n-1)\big)(m-1)$$

Bukti:

Jika Graf bipartisi komplit$(K_{m,n})$, $m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots i$ dan $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots j$ dengan $b = 2(n-1)$

1. Akan dibuktikan $K_{m,1} = 0(m-1)$

   Maka $K_{m,1} = b(m-1)$

   $= (2(n-1))(m-1)$

   $= (2(1-1))(m-1)$

   $= (2(0))(m-1)$

   $= 0(m-1)$ terbukti

2. Akan dibuktikan $K_{m,2} = 2(m-1)$

   Maka $K_{m,2} = b(m-1)$

   $= (2(n-1))(m-1)$

   $= (2(2-1))(m-1)$

$= (2(1))(m-1)$

$= 2(m-1)$ terbukti

3. Akan dibuktikan $K_{m,3} = 4(m-1)$

   Maka $K_{m,3} = b(m-1)$

   $= (2(n-1))(m-1)$

   $= (2(3-1))(m-1)$

   $= (2(2))(m-1)$

   $= 4(m-1)$ terbukti

4. Akan dibuktikan $K_{m,4} = 6(m-1)$

   Maka $K_{m,4} = b(m-1)$

   $= (2(n-1))(m-1)$

   $= (2(4-1))(m-1)$

   $= (2(3))(m-1)$

   $= 6(m-1)$ terbukti

5. Akan dibuktikan $K_{m,5} = 2(m-1)$

   Maka $K_{m,5} = b(m-1)$

   $= (2(n-1))(m-1)$

   $= (2(5-1))(m-1)$

   $= (2(4))(m-1)$

   $= 8(m-1)$ terbukti

Maka untuk $K_{m,n=} = (2(n-1))(m-1)$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan dan nilai-nilai jumlah total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ maka diperoleh persamaan umum untuk mencari jumlah total k-defisiensi titik pohon merentang maksimum pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, dengan $m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots i$ dan $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots j$ yaitu sebagai berikut:

$$Jumlah\ Total\ k - defisiensi\ dari\ graf\ bipartisi\ komplit\ K(m, n)$$

$$= \big(2(n-1)\big)(m-1)$$

Maka pola untuk total k-defisiensi titik pada graf bipartisi komplit

$$K(m, n) = \big(2(n-1)\big)(m-1)$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis memfokuskan pada permasalahan Total *k*-Defisiensi titik pada graf bipartisi komplit. Untuk itu penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah dalam graf lain. Selain itu juga pembaca dapat mengembangkan graf dengan partisi *n*.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-syafi'i.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Angraeni, Puspita Dyan. 2011. *Total k-Defisiensi Titik dari Pohon Merentang Suatu Graf Terhubung* . UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Bondy, J.A, and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press,

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Harary, Frank. 1969. *Graph Theory.* Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, inc.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani