PELABELAN TITIK $L(3, 2, 1)$ PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD YUSUF AFANDI
NIM. 14610092

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

PELABELAN TITIK $\boldsymbol{L(3,2,1)}$ PADA GRAF *COMMUTING*
DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhammad Yusuf Afandi
NIM. 14610092

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

PELABELAN TITIK $L(3, 2, 1)$ PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Yusuf Afandi
NIM. 14610092

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 05 Mei 2021

Pembimbing I,

Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Pembimbing II

Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PELABELAN TITIK $L(3, 2, 1)$ PADA GRAF *COMMUTING*
DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Yusuf Afandi
NIM. 14610092

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 05 Mei 2021

Penguji Utama	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muhammad Yusuf Afandi
NIM	: 14610092
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 Mei 2021
Yang membuat pernyataan,

Muhammad Yusuf Afandi
NIM. 14610092

MOTO

Kebahagiaan terbesar adalah

saat kita bisa berbagi kebahagiaan dengan orang lain.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis, Bapak Slamet Nurroziq dan Ibu Agustin Choiriyah,

yang senantiasa mendoakan, mendukung serta memberi semangat.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan ibu tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 (MATH EIGEN) khususnya Matematika-C
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Aamiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 05 Mei 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Afandi, Muhammad Yusuf. 2021. **Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Commuting$ dari Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci : Graf $Commuting$, Grup Dihedral, Pelabelan $L(3,2,1)$.

Pelabelan $L(3,2,1)$ pada sebuah Graf G fungsi f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif yang mana $|f(x) - f(y)| \geq 3$ jika $d(x,y) = 1$, $|f(x) - f(y)| \geq 2$ jika $d(x,y) = 2$ dan $|f(x) - f(y)| \geq 1$ jika $d(x,y) = 3$, dimana $d(x,y)$ diartikan jarak antara titik x dan y. Pelabelan titik terkecil $L(3,2,1)$ disimbolkan $\lambda_{3,2,1}(G)$.

Permasalahan dalam skripsi ini adalah bagaimana mencari label terkecil titik $L(3,2,1)$ pada graf *commuting* dari grup dihedral. Untuk menemukan hasil label terkecil $L(3,2,1)$ pada graf $commuting$ dari grup dihedral terlebih dahulu membuktikan teorema-teorema yang ada. Penelitian ini menghasilkan kesimpulan sebagai berikut

1. D_6 D_8 D_{10} D_{12} D_{14} D_{16}

   $$\underbrace{12 \quad\quad 17}_{5}\ \underbrace{\quad 17 \quad\quad 20}_{3}\ \underbrace{\quad 20 \quad\quad 25}_{5}\ \underbrace{\quad 25 \quad\quad 28}_{3}\ \underbrace{\quad 28 \quad\quad 33}_{5}$$

   $$\lambda_{3,2,1}(G) \begin{cases} D_6 & = 12 \\ D_8 & = 17 \\ D_{10} & = 20 \\ D_{12} & = 25 \\ D_{14} & = 28 \\ D_{16} & = 33 \end{cases}$$

2. Mencari label terkecil dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $commuting$ dari grup dihedral. Untuk mencari label terkecil dari grup dihedral D_{2n} ada 2, yakni:
   - $4n$, untuk n ganjil dengan syarat $n \geq 3$
   - $4n + 1$, untuk genap dengan syarat $n \geq 3$
3. Mencari selisih label terkecil dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $commuting$ dari grup dihedral. Untuk mencari selisih label terkecil dari grup dihedral D_{2n} ada 2, yakni:
   - $X_{Dn+2} - X_{D2n} = 5$, untuk n ganjil dengan syarat $n \geq 3$
   - $X_{Dn+2} - X_{D2n} = 3$, untuk n genap dengan syarat $n \geq 3$

ABSTRACT

Afandi, Muhammad Yusuf. 2021. **Vertex Labeling L(3,2,1) in Graf *Commuting* from Dihedral Group**. Essay. Mathematics Department. Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keywords: Graph Commuting, Dihedral Group, Labeling L(3,2,1).

Labeling L (3,2,1) in a G Graph function f from the set of vertex V (G) to the set of positive integers where $|f(x) - f(y)| \geq 3$ if $d(x, y) = 1$, $|f(x) - f(y)| \geq 2$ if $d(x, y) = 1$ and $|f(x) - f(y)| \geq 1$ if $d(x, y) = 3$, where $d(x, y)$ means the distance between vertex x and y. Labeling the smallest vertex $L(3{,}2{,}1)$ is symbolized as $\lambda_{3,2,1}$ (G).

The problem in this thesis is how to find the smallest label vertex L(3,2,1) on the commuting graph of the dihedral group. To find the smallest label result $L(3{,}2{,}1)$ on the commuting graph of the dihedral group first prove the existing theorems. This research concludes as follows:

1. D_6 D_8 D_{10} D_{12} D_{14} D_{16}

   $$\underbrace{12 \quad 17}_{5} \quad \underbrace{17 \quad 20}_{3} \quad \underbrace{20 \quad 25}_{5} \quad \underbrace{25 \quad 28}_{3} \quad \underbrace{28 \quad 33}_{5}$$

   $$\lambda_{3,2,1}(G) \begin{cases} D_6 & = 12 \\ D_8 & = 17 \\ D_{10} & = 20 \\ D_{12} & = 25 \\ D_{14} & = 28 \\ D_{16} & = 33 \end{cases}$$

2. Look for the smallest label from labeling the vertex $L(3{,}2{,}1)$ on the commuting graph of the dihedral group. To find the smallest label from dihedral D_{2n} there are 2, namely:
   - $4n$, for n odd with condition $n \geq 3$
   - $4n + 1$, even with terms $n \geq 3$
3. Looking for the smallest label difference from labeling the vertex $L(3{,}2{,}1)$ on the commuting graph of the dihedral group. To find the difference in the smallest label value from the Group dihedral D_{2n} there are 2, namely:
   - $X_{Dn+2} - X_{D2n} = 5$, for n odd with terms $n \geq 3$
   - $X_{Dn+2} - X_{D2n} = 3$, for n even with the condition $n \geq 3$

ملخص

أفندي ، محمد يوسف 2021. **وسم النقطة $L(3,2,1)$ الرسم البياني الانتقل فى المجمعة الدهدرل**. البحث العلمي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (I) الدكتور .الحج. وحيو هينكي إراوان الماجستر. (II) الدكتور الإمام سوجروو الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الرسم البياني التنقل ، المجموعة الدهدرل ، وسم $L(3،2،1)$.

التلوين $L(3,2,1)$ لمخطط G هي الدالة f من مجموعة الرؤوس $V(G)$ لمجموعة عدد طبيعية حيث $|f(x)-f(y)| \geq 3$ إن كان $d(x,y)=1$ ، $|f(x)-f(y)| \geq 2$ إن كان $d(x,y)=2$ و $|f(x)-f(y)| \geq 1$ إن كان $d(x,y)=3$ ، حيث كان $d(x,y)$ هو المسافة بين رأس x و y. اللون الأصغر للنقطة $L(3,2,1)$ يرمز برمز $\lambda_{3,2,1}(G)$.

المسألة فى هذا البحث هي كيفية البحث للنقطة L (3,2,1) الرسم البياني الانتقل في المجموعة الدهدرل. لنجد الحصول الوسم الأصغر $L(3,2,1)$ الرسم البياني الانتقل فى المجموعة الدهدرل. نثبت مع النظريات. هذا البحث يخلص على النحو التالي:

1. D_{16} D_{14} D_{12} D_{10} D_8 D_6

$$\underbrace{12 \quad 17}_{5}\;\underbrace{\quad 20}_{3}\;\underbrace{\quad 25}_{5}\;\underbrace{\quad 28}_{3}\;\underbrace{\quad 33}_{5}$$

$$\lambda_{3,2,1}(G)\begin{cases} D_6 &= 12 \\ D_8 &= 17 \\ D_{10} &= 20 \\ D_{12} &= 25 \\ D_{14} &= 28 \\ D_{16} &= 33 \end{cases}$$

2. لبحث الوسم الأصغر للنقطة $L\ (3,2,1)$ الرسم البياني الانتقل فى المجموعة الدهدرل D_{2n} نجد
طرقين هي:

- $4n$, n عدد فردي بالشرط $n \geq 3$
- $4n+1$, n عدد حتي بالشرط $n \geq 3$

3. لبحث الفرق بين النقطين من الوسم للنقطة الأصغر $L(3,2,1)$ الرسم البياني الانتقل فى المجموعة الدهدرل D_{2n} نجد طرقين هي:

- $X_{Dn+2} - X_{D2n} = 5$, n عدد فردي بالشرط $n \geq 3$
- $X_{Dn+2} - X_{D2n} = 3$, n عدد حتي بالشرط $n \geq 3$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur’an telah menjelaskan keutamaan hidup rukun bermasyarakat dalam surat al-Hujurat ayat ke-12, yaitu:

يَاأَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اجْتَنِبُوا كَثِيرًا مِّنَ الظَّنِّ إِنَّ بَعْضَ الظَّنِّ إِثْمٌ ۖ وَلَا تَجَسَّسُوا وَلَا يَغْتَب بَّعْضُكُم بَعْضًا ۚ
أَيُحِبُّ أَحَدُكُمْ أَن يَأْكُلَ لَحْمَ أَخِيهِ مَيْتًا فَكَرِهْتُمُوهُ ۚ وَاتَّقُوا اللَّهَ ۚ إِنَّ اللَّهَ تَوَّابٌ رَّحِيمٌ ١٢

“Hai orang-orang yang beriman, jauhilah kebanyakan purba-sangka (kecurigaan), karena sebagian dari purba-sangka itu dosa. Dan janganlah mencari-cari keburukan orang dan janganlah menggunjingkan satu sama lain. Adakah seorang diantara kamu yang suka memakan daging saudaranya yang sudah mati? Maka tentulah kamu merasa jijik kepadanya. Dan bertakwalah kepada Allah. Sesungguhnya Allah Maha Penerima Taubat lagi Maha Penyayang (QS. Al-Hujurat/49:12).”

Makna dari ayat tersebut adalah kita sebagai sesama makhluk paling mulia di sisi Allah Swt. harus bisa hidup rukun serta damai di muka bumi ini. Menurut penafsiran para ahli, sesungguhnya orang-orang mukmin itu bersaudara tanpa terkecuali. Hal tersebut tak lepas dari dasar hukum persaudaraan sendiri, yakni kesamaan akidah. Jika terjadi sengketa atau peperangan diantara mereka, maka itu sudah bisa disebut penyimpangan.

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang cukup pesat perkembangannya. Seiring perkembangan zaman, matematika digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan. Salah satu contoh penerapan matematika dalam kehidupan sehari-hari adalah permasalahan frekuensi radio sebagai alat bantu untuk menyampaikan kabar berita. Permasalahan optimasi penetapan frekuensi radio dapat diselesaikan menggunakan teori graf. Frekuensi radio adalah sinyal arus tinggi yang melewati konduktor tembaga panjang yang kemudian diradiasikan ke udara melalui antena.

Pertumbuhan komunikasi nirkabel yang sangat pesat membuat frekuensi radio yang tersedia tidak mampu lagi memenuhi banyaknya permintaan penggunaan saluran. Stasiun yang memiliki jarak geografis saling berdekatan cenderung lebih kuat mengalami gangguan. Masalah utama gangguan frekuensi terjadi karena pembagian penetapan frekuensi antara pemancar radio dan televisi. Gangguan frekuensi dapat dicegah dengan pengaturan stasiun yang sesuai (Setyo dkk, 2012). Masalah ini lah yang akan diangkat dalam pelabelan graf. Ditinjau dari pengertiannya, pelabelan graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif (Z^+) pada titik atau sisi yang keduanya memenuhi aturan tertentu (Galian 2007:1).

Pelabelan $L(3,2,1)$ pada sebuah Graf G merupakan suatu fungsi f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in V(G)$ berlaku $|f(x) - f(y)| \geq 3$ jika $d(x,y) = 1$, $|f(x) - f(y)| \geq 2$ jika $d(x,y) = 2$ dan $|f(x) - f(y)| \geq 1$ jika $d(x,y) = 3$, dimana $d(x,y)$ diartikan jarak antara titik x dan y. Banyaknya label paling sedikit yang perlukan untuk melabeli graf G dengan pelabelan $L(3,2,1)$ disimbolkan dengan $\lambda_{3,2,1}(G)$.

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4). Graf *commuting* G merupakan graf sedemikian sehingga dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ terhubung langsung jika dan hanya jika u dan v saling komutatif.

Grup G merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi empat aksioma, yaitu tertutup, asosiatif, invers, dan identitas. Jika salah satu syarat tersebut tidak terpenuhi, maka G tidak bisa disebut sebuah grup. Grup dihedral $D_{2\cdot n}$ merupakan grup yang disusun dari simetri-simetri segi-n beraturan.

Berdasarkan uraian di atas, penulis mengambil judul penelitian "Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana formula label terkecil dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *commuting* dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan formula label terkecil dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *commuting* dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat penelitian ini adalah untuk mempermudah dalam mencari nilai minimal terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $commuting$ dari grup dihedral

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan cara mengumpulkan data-data maupun informasi dengan bantuan berbagai macam material seperti buku, catatan, jurnal, artikel, dan sebagainya yang berkaitan dengan pembahasan. Penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi graf $commuting$ dari grup dihedral (D_{2n}); $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
2. Memberi label pada setiap titik pada graf $commuting$ dari grup dihedral dengan aturan pelabelan $L(3,2,1)$.
3. Membuat konjektur (dugaan awal) berdasarkan pola yang ditemukan pada pelabelan titik pada graf $commuting$ dari grup dihedral dengan aturan pelabelan $L(3,2,1)$.
4. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
5. Menghasilkan teorema tentang pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $commuting$ dari grupdihedral yang dilengkapi dengan bukti.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam proposal skripsi ini dibagi menjadi dua bab dan setiap bab memiliki beberapa subbab sebagai berikut:

Bab 1 Pendahuluan

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, Metode Penelitian, sistematika penulisan, dan menjelaskan tentang kajian graf dalam al-Quran.

Bab 2 Kajian Pustaka

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang konsep-konsep yang berkaitan dengan pembahasan penelitian, yaitu graf, derajat titik, graf terhubung, grup dihedral, graf *commuting*, pelabelan titik $L(3,2,1)$ dan kajian graf dalam perspektif islam.

Bab 3 Pembahasan

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *commuting* dari grup dihedral.

Bab 4 Penutup

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang kesimpulan dari hasil pembahasan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang aplikasinya banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Graf G terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik ($vertex$) atau disimbolkan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi ($edge$) disimbolkan dengan $E(G)$. Simbol $V(G)$ dan $E(G)$ kedepannya terus digunakan dalam pembahasan graf untuk mengganti istilah titik dan sisi.

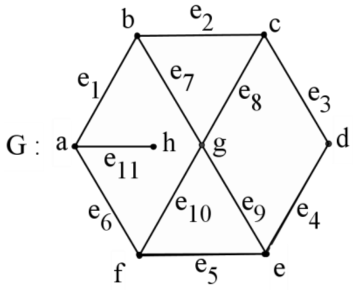
Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Abdussakir, dkk, 2009).

Perhatikan G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ berikut ini.

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$E\ (G) = \{ab, bc, cd, de, ef, fa, ah, bg, cg, eg, fg\}.$$

Graf G mempunyai 8 titik sehingga order G adalah $p = 8$. Graf G mempunyai 11 sisi sehingga ukuran G adalah $q = 11$. Berikut gambar graf G.



Gambar 2.1 Graf ***G***

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung *(adjacent)*, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4 & Abdussakir, dkk, 2009).

Berdasarkan Gambar 2.1 graf G tersebut, maka titik a dan b terhubung langsung, demikian juga dengan a dan f, serta a dan h. Titik a dan g tidak terhubung langsung. sisi e_1 terkait langsung dengan titik a dan b. Sisi e_2 terkait langsung dengan titik b dan c. Perhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik berbeda. Hal ini karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik berbeda. Sisi e_1 dan e_2 terhubung langsung karena terkait langsung pada satu titik yang sama, yaitu titik b. Sisi e_1 dan e_3 tidak terhubung langsung karena tidak terkait langsung pada titik yang sama.

2.2 Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi $deg(v) = |N(v)|$. Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di G dilambangkan $D(G)$ dan derajat titik minimum di G dilambangkan dengan $d(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009: 9).

Perhatikan Gambar 2.1 yang mempunyai $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_{6,} e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh bahwa: $N(a) = \{b, f, h\}$, $N(b) = \{a, c, g\}$, $N(c) = \{b, d, g\}$, $N(d) = \{c, e\}$, $N(g) = \{b, c, f, e\}$ dan sebagainya. Dengan demikian $\deg(a) = 3, \deg(b) = 3, \deg(c) = 3, \deg(d) = 2, \deg(g) = 4$ dan sebagainya. Diperoleh bahwa derajat maksimum di G adalah $D(G) = 4$ dan derajat minimum di G adalah $d(G) = 2$.

Kenyataaannya bahwa jumlah derajat semua titik yang hasilnya sama dengan dua kali banyak sisinya ini berlaku secara umum untuk semua graf. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyaknya sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

disebut sebagai “Teorema Pertama dalam Teori Graf yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Torema 2.2.1

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ maka (Abdussakir, dkk, 2009: 11):

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2p$$

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi meghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung 2 kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat di G sama dengan dua kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2.2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap (Chartrand dan Lesniak, 1986:6 & Abdussakir, dkk, 2009: 12).

Bukti:

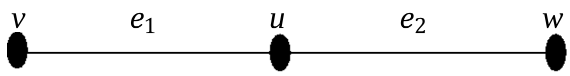
Misalkan G adalah graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap. Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyaknya titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil. Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap.

2.3 Graf Terhubung

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), sebagaimana v dan e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*) jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$, akan ditulis dengan $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:1) pada gambar berikut



Gambar 2.2 Adjacent dan Incident pada graf

diperoleh:

v dan *u*, *u* dan *w* terhubung langsung (*adjacent*)

v dan *u* terkait langsung (*incident*) dengan e_1

u dan *w* terkait langsung (*incident*) dengan e_2

e_1 dan e_2 terhubung langsung (*adjacent*)

2.4 Grup Dihedral

Grup dihedral D_{2n} merupakan grup yang disusun dari simetri-simetri segi-n berarturan untuk suatu $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ terhadap operasi komposisi. Unsur-unsur grup D_{2n} adalah $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semuanya berbeda dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n$,
2. $|s| = 2$, sehingga $s \circ s = 1$,
3. $s \neq r^i$ untuk semua i,
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk setiap $i \neq j$,
5. $rs = sr^{-1}$, dan
6. $r^i s = sr^{-i}$ untuks setiap i. (Dummit dan Foote,1991)

2.5 Graf *Commuting*

Misal G adalah grup berhingga dan X adalah *subset* dari G. Graf *commuting* $C(G, X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di X terhubung langsung jika keduanya adalah elemen yang saling komutatif di G (Nawawi dan Rowley, 2012). Dalam kasus $X = G$, maka $C(G, X)$ akan ditulis (G). Graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} dinotasikan dengan $C(D_{2n})$.

Sebagai contoh, pada grup dihedral *order* 6 yaitu D_6 = {1, r, r^2, s, sr, sr^2} terhadap operasi komposisi fungsi. Misal diambil X = D_6 maka akan ditentukan unsur yang saling komutatif melalui tabel berikut.

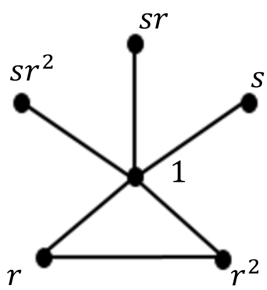
Tabel 2.1 $\boldsymbol{Cayley}$ untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa:

1. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga terhubung langsung di (D_6).
2. Untuk elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di $C(D_6)$.

Secara geometri, graf *commuting* pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut.



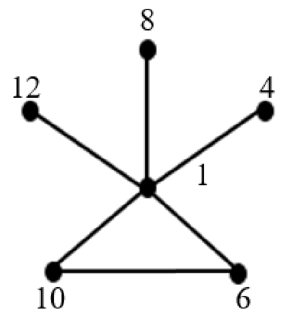
Gambar 2.3 Graf Commuting pada $\boldsymbol{D_6}$

2.6 Pelabelan Titik $\boldsymbol{L(3,2,1)}$

Pelabelan $L(3,2,1)$ pada suatu graf G merupakan fungsi f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif dimana $|f(x) - f(y)| \geq 3$ jika

$d(x,y) = 1$, $|f(x) - f(y)| \geq 2$ jika $d(x,y) = 2$ dan $|f(x) - f(y)| \geq 1$ jika $d(x,y) = 3$, dimana $d(x,y)$ diartikan jarak antara titik x dan y. Banyaknya label paling sedikit yang perlukan untuk melabeli graf G dengan pelabelan $L(3,2,1)$ disimbolkan dengan $\lambda_{3,2,1}(G)$.

Perhatikan contoh berikut:



Gambar 2.4 Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *Commuting* D_6

Teorema 2.6.1 Untuk sebarang graf biparti $K_{m,n}$,

$$\lambda_{3,2,1}(K_{m,n}) = 2(m+n).$$

(Clipperton, Jean, et all)

Teorema 2.6.2 Jika H adalah subgraf dari G, maka

$$\lambda_{3,2,1}(H) \leq \lambda_{3,2,1}(G).$$

(Clipperton, Jean, et all)

2.7 Kajian Graf dalam Perspektif Islam

Dalam agama Islam tidak disebutkan secara detail mengenai pengertian jarak. Menurut pengertian secara umum jarak adalah panjang lintasan suatu titik terhadap titik yang lain. Peneliti ingin mengkaji tentang jarak berdasarkan kandungan dalam Al-Qur'an.

Jarak ditinjau dari segi bobot waktu terdapat pada surat Saba ayat ke-12:

وَلِسُلَيْمَانَ الرِّيحَ غُدُوُّهَا شَهْرٌ وَرَوَاحُهَا شَهْرٌ ۖ وَأَسَلْنَا لَهُ عَيْنَ الْقِطْرِ ۖ وَمِنَ الْجِنِّ مَن يَعْمَلُ بَيْنَ يَدَيْهِ بِإِذْنِ
رَبِّهِ ۖ وَمَن يَزِغْ مِنْهُمْ عَنْ أَمْرِنَا نُذِقْهُ مِنْ عَذَابِ السَّعِيرِ (١٢)

"Dan Kami (tundukkan) angin bagi Sulaiman, yang perjalanannya di waktu pagi sampai dengan perjalan sebulan dan perjalanannya di waktu sore sama dengan perjalanan sebulan (pula) dan Kami alirkan cairan tembaga baginya. Dan sebagian dari jin ada yang bekerja di hadapannya (di bawah kekuasaannya) dengan izin Tuhannya. Dan siapa yang menyimpang di antara merea dari perintah Kami, Kami rasakan kepadanya azab neraka yang apinya menyala-nyala. (QS. Saba'/34: 12)".

Makna dari ayat tersebut adalah ketika Nabi Sulaiman melakukan perjalanan menggunakan angin atas izin Allah Swt. pada waktu pagi sampai siang hari setara dengan jarak perjalanan orang biasa selama satu bulan penuh. Begitu pula saat Nabi Sulaiman berjalan dari waktu siang sampai sore hari.

Jarak ditinjau dari segi bobot panjangnya terdapat pada surat Saba ayat ke-18:

وَجَعَلْنَا بَيْنَهُمْ وَبَيْنَ الْقُرَى الَّتِي بَارَكْنَا فِيهَا قُرًى ظَاهِرَةً وَقَدَّرْنَا فِيهَا السَّيْرَ ۖ سِيرُوا فِيهَا لَيَالِيَ وَأَيَّامًا آمِنِينَ
(١٨)

"Dan Kami jadikan antara mereka dan antara negeri-negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya, beberapa negeri yang berdekatan dan Kami tetapkan antara negeri-negeri itu (jarak-jarak) perjalanan. Berjalanlah kamu di kota-kota itu pada malam hari dan siang hari dengan dengan aman (QS. Saba'/34: 18)"

Makna dari ayat tersebut adalah Allah Swt. telah melimpahkan berkat kepada negara Syam dan sekitarnya. Sehingga masyarakat dapat berjalan dengan aman siang dan malam hari tanpa terpaksa harus berhenti di tengah padang pasir serta aman. Jarak yang berdekatan inilah yang membuat satu negara dengan negara lain ideal untuk melakukan perjalanan.

Berdasarkan ayat-ayat Al-Qur'an di atas terdapat dua istilah jarak yang berbeda. Pada ayat pertama menjelaskan peristiwa perjalanan Nabi Sulaiman, jarak yang dimaksud adalah bobot waktunya. Sedangkan pada ayat selanjutnya yang menjelaskan kesuburan negeri Syam adalah jarak dengan bobot panjang.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pelabelan Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

Pembahasan penelitian ini didahului dengan penentuan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *commuting* grup dihedral $D_6, D_8, \ldots, D_{16}$ dan label minimal pelabelan $L(3,2,1)$ untuk masing-masing graf. Dari pelabelan dan label minimal graf-graf tersebut selanjutnya akan diperoleh dugaan tentang label minimal dari masing-masing graf. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa dugaan tersebut benar sehingga menjadi suatu teorema.

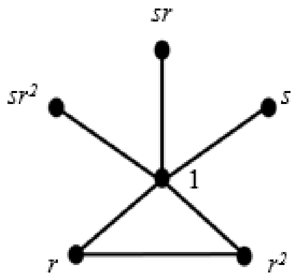
3.1.1 Pelabelan $\boldsymbol{C(D_6)}$

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_6 adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangun tersebut, maka diperoleh tabel *Cayley* dari D_6 sebagai berikut:

Tabel 3.1 $\boldsymbol{Cayley}$ dari $\boldsymbol{D_6}$

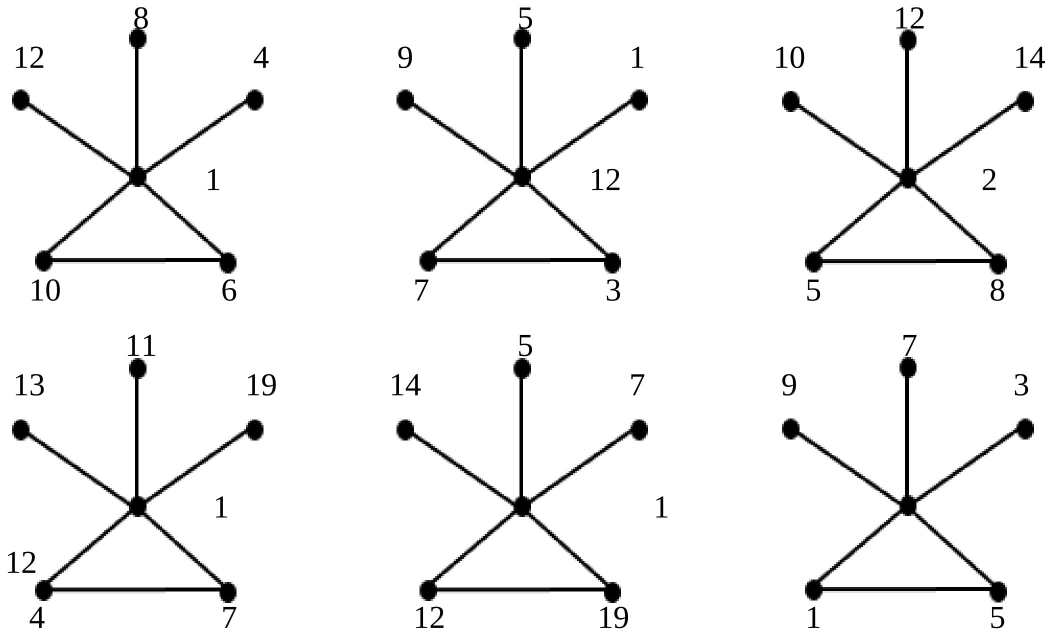
$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan tabel $Cayley$ 3.1 kita dapatkan elemen-elemen komutatif dari D_6 dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_6 ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Hal tersebut bertujuan untuk mempermudah menemukan elemen mana saja yang memenuhi sifat komutatif. Sehingga didapat graf *commuting* D_6 sebagai berikut:



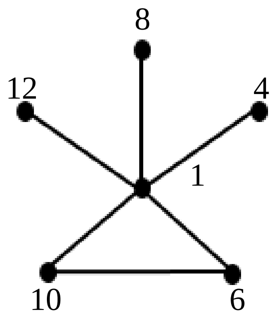
Gambar 3.1 Graf $C(D_6)$

Setelah mendapatkan gambar graf *commuting*, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_6)$. Berikut adalah beberapa percobaan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk $C(D_6)$.



Gambar 3.2 Beberapa pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_6)$

Berdasarkan gambar 3.2, diperoleh $\lambda_{3,2,1}\big(C(D_6)\big) = 12$.



Gambar 3.3 Pelabelan $L(3,2,1)$ dengan label terkecil dari $C(D_6)$.

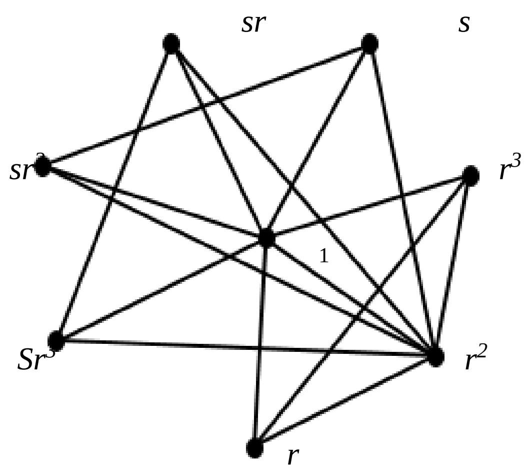
3.1.2 Pelabelan $C(D_8)$

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_8 adalah $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangun tersebut, maka diperoleh tabel $cayley$ dari D_8 sebagai berikut:

Tabel 3.2 $Cayley$ dari D_8

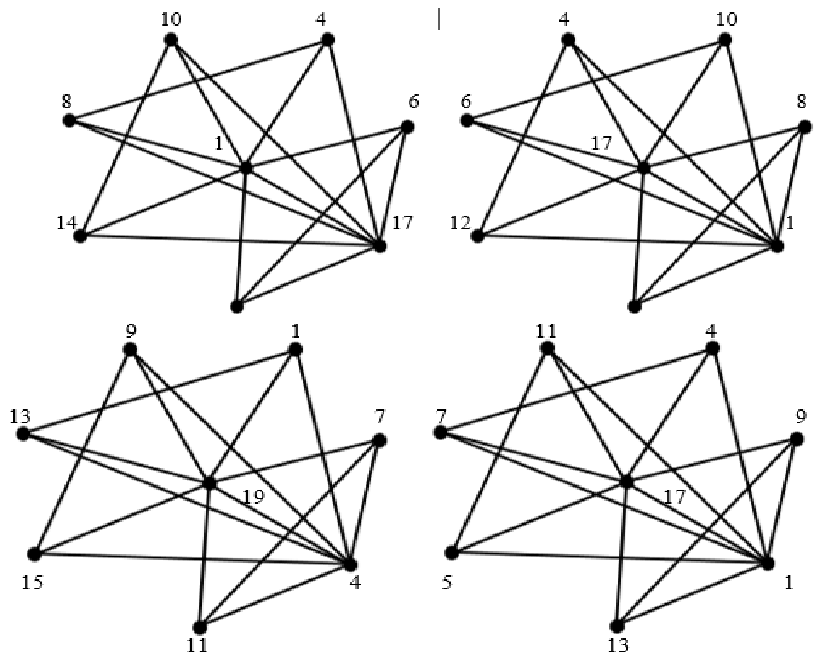
$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel $Cayley$ 3.2 kita dapatkan elemen-elemen komutatif dari D_8 dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi ∘ pada D_8 ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Hal tersebut bertujuan untuk mempermudah menemukan elemen mana saja yang memenuhi sifat komutatif. Sehingga didapat graf *commuting* sebagai berikut:



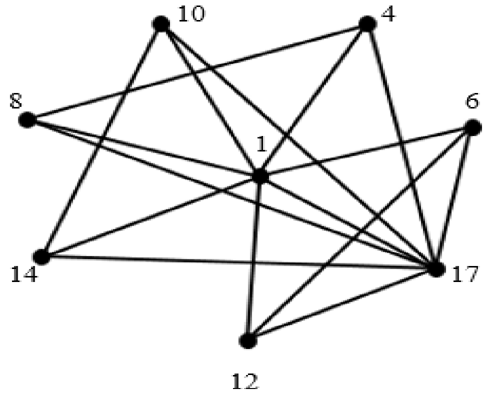
Gambar 3.4 Graf $C(D_8)$

Setelah mendapatkan gambar graf *commuting*, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_8)$. Berikut adalah beberapa percobaan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk $C(D_8)$.



Gambar 3.5 Beberapa Pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_8)$

Berdasarkan gambar 3.5, diperoleh $\lambda_{3,2,1}\big(C(D_8)\big) = 17$.



Gambar 3.6 Pelabelan $L(3,2,1)$ dengan Label Terkecil dari $C(D_6)$

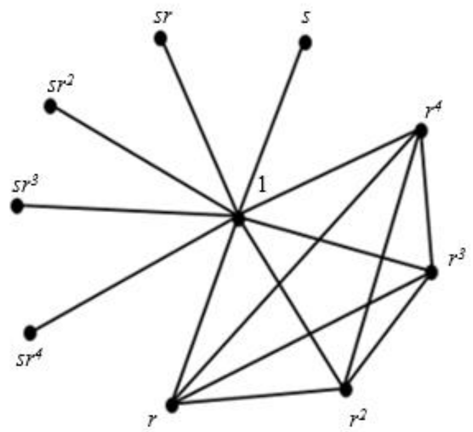
3.1.3 Pelabelan $\boldsymbol{C(D_{10})}$

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{10} adalah {1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4}. Berdasarkan elemen-elemen pembangun tersebut, maka diperoleh tabel *Cayley* dari D_{10} sebagai berikut:

Tabel 3.3 *Cayley* dari D_{10}

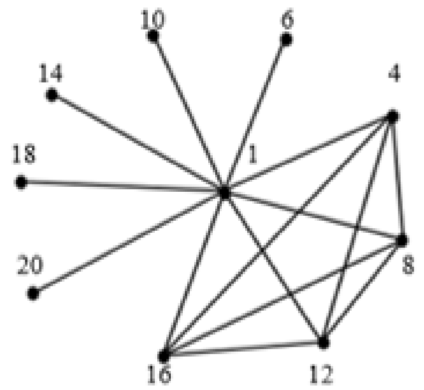
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
R	R	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
S	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

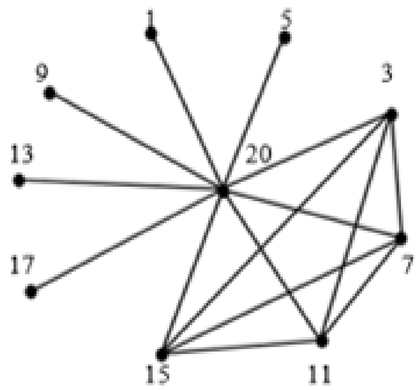
Berdasarkan tabel $Cayley$ 3.3 kita dapatkan elemen-elemen komutatif dari D_{10} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Hal tersebut bertujuan untuk mempermudah menemukan elemen mana saja yang memenuhi sifat komutatif. Sehingga didapat graf *commuting* sebagai berikut:

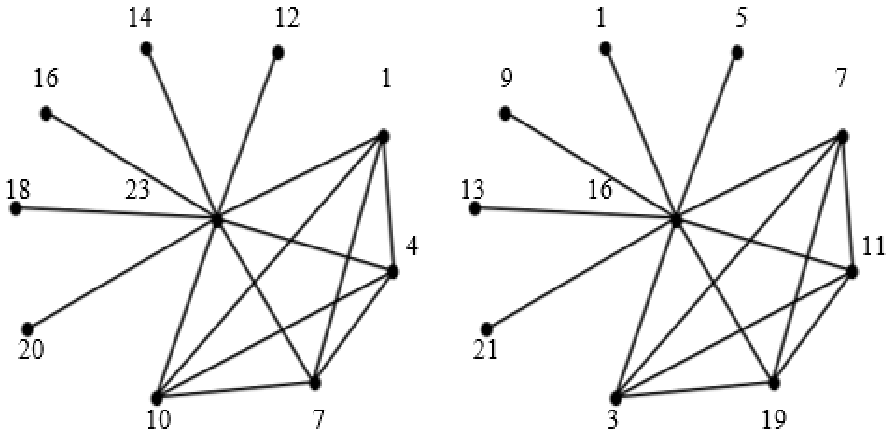


Gambar 3.7 Graf $C(D_{10})$

Setelah mendapatkan gambar graf *commuting*, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{10})$. Berikut adalah beberapa percobaan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk $C(D_{10})$.

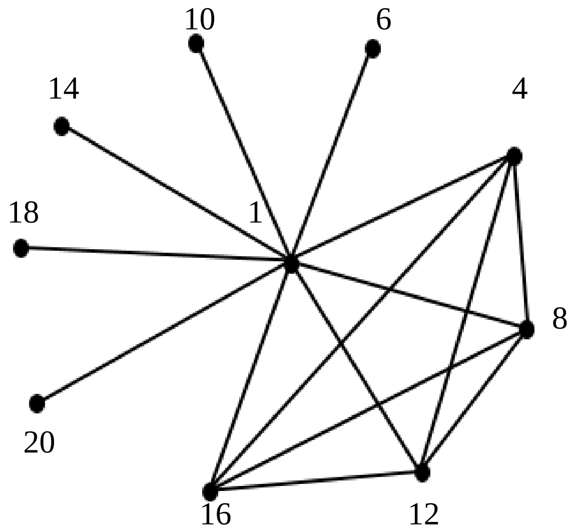






Gambar 3.8 Beberapa Pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{10})$

Berdasarkan gambar 3.8, diperoleh $\lambda_{3,2,1}\big(C(D_{10})\big) = 20.$



Gambar 3.9 Pelabelan $L(3,2,1)$ dengan label terkecil dari $C(D_{10})$

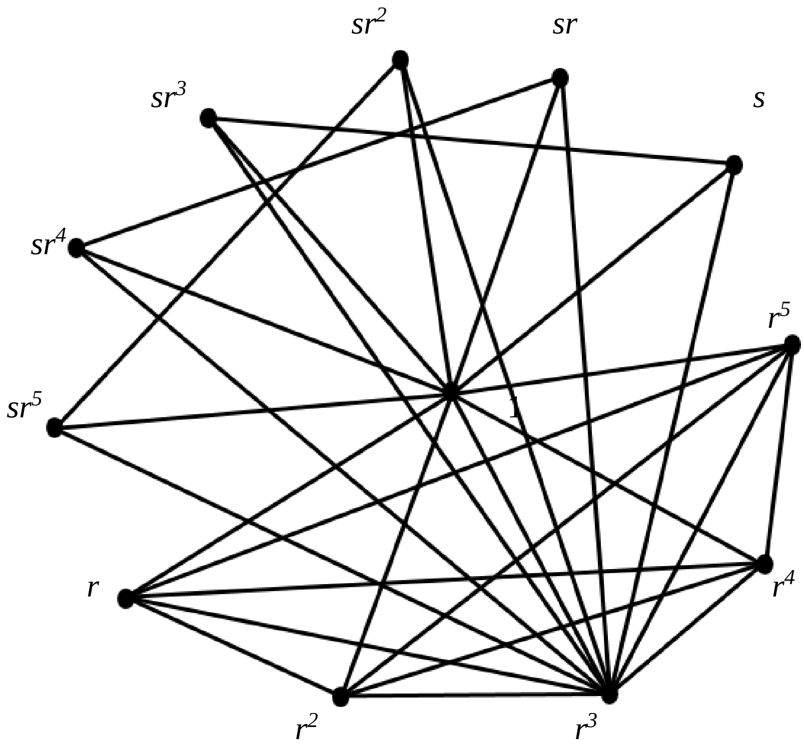
3.1.4 Pelabelan $C(D_{12})$

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{12} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangun tersebut, maka diperoleh tabel $cayley$ dari D_{12} sebagai berikut:

Tabel 3.4 $Cayley$ dari D_{12}

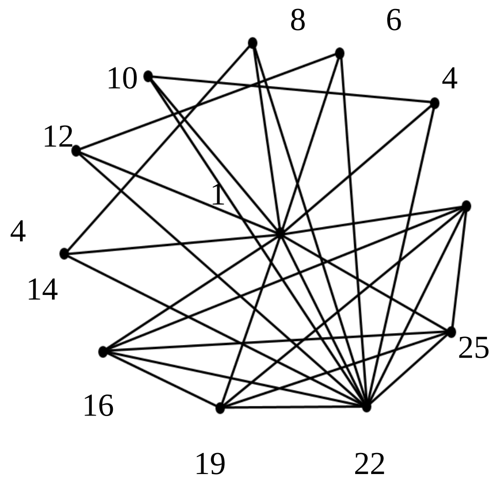
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
R	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
S	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

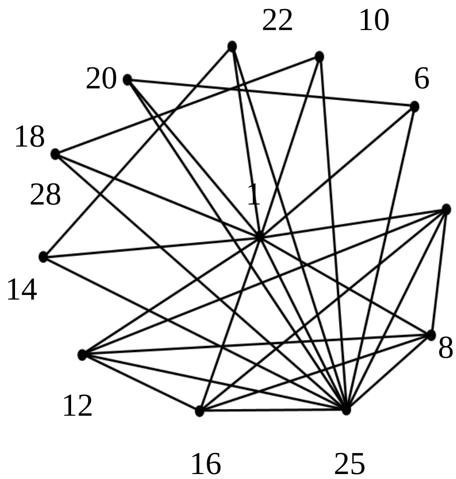
Berdasarkan tabel $Cayley$ 3.4 kita dapatkan elemen-elemen komutatif dari D_{12} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Hal tersebut bertujuan untuk mempermudah menemukan elemen mana saja yang memenuhi sifat komutatif. Sehingga didapat graf *commuting* $C(D_{12})$ sebagai berikut:

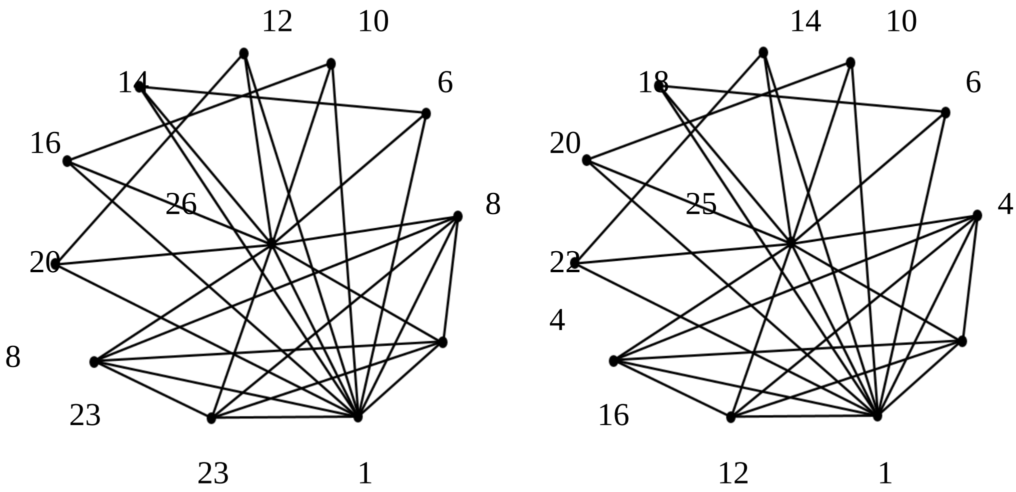


Gambar 3.10 Graf $C(D_{12})$

Setelah mendapatkan gambar graf *commuting*, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{12})$. Berikut adalah beberapa percobaan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk $C(D_{12})$.

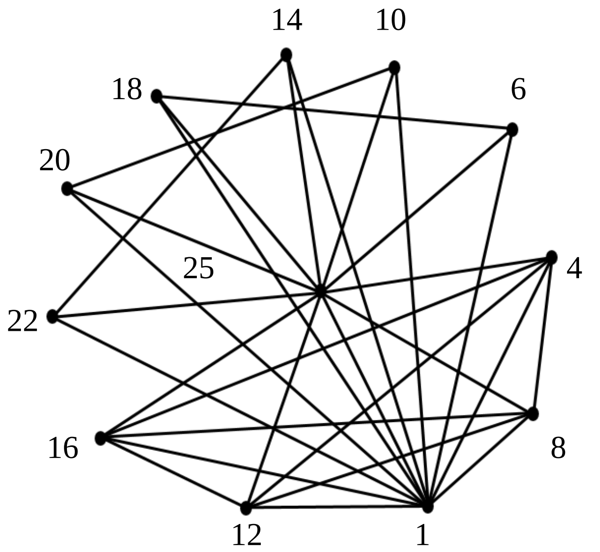






Gambar 3.11 Beberapa Pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{12})$

Berdasarkan gambar 3.11 diperoleh $\lambda_{3,2,1}\big(C(D_{12})\big) = 25$.



Gambar 3.12 Pelabelan $L(3,2,1)$ dengan Label Terkecil dari $C(D_{12})$.

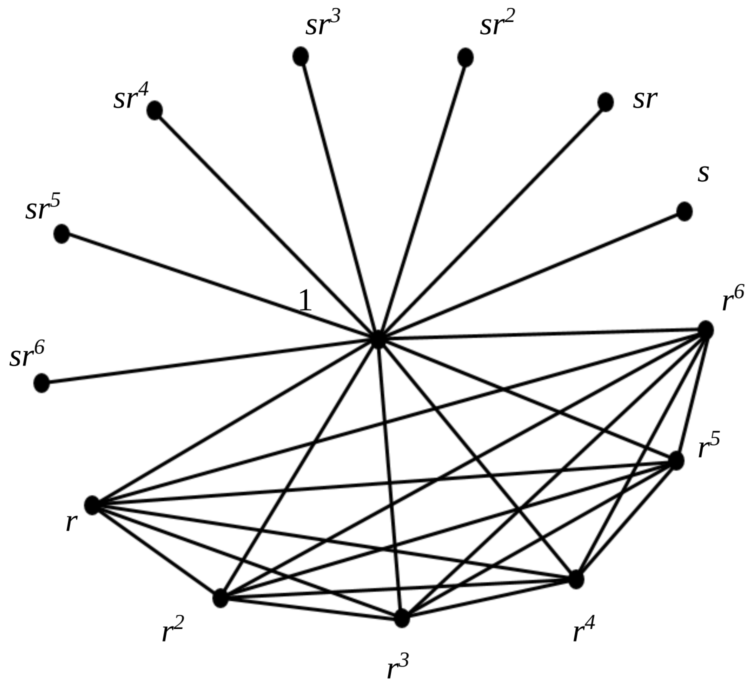
3.1.5 Pelabelan $C(D_{14})$

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\ s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangun tersebut, maka diperoleh tabel *Cayley* dari D_6 sebagai berikut:

Tabel 3.5 *Cayley* dari D_{14}

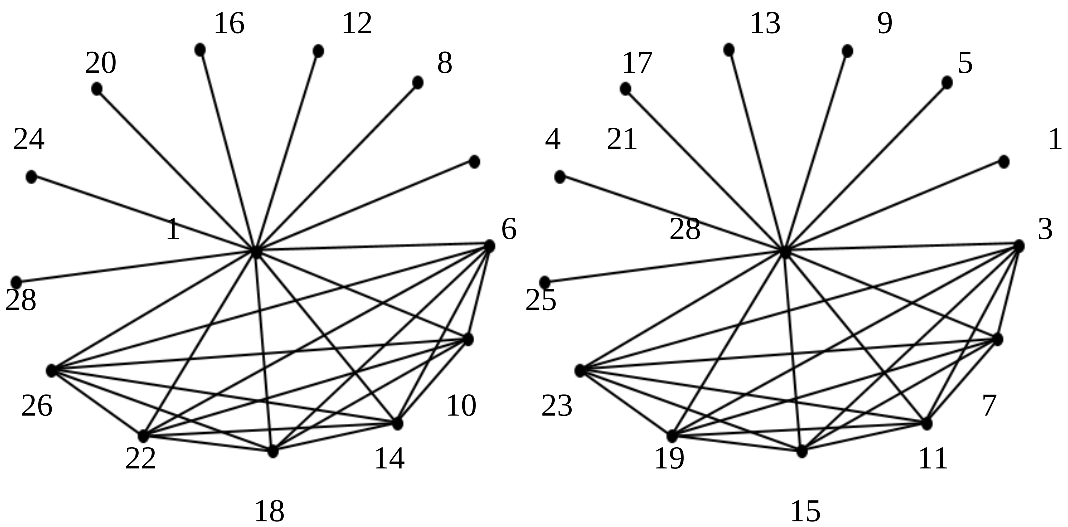
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
R	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

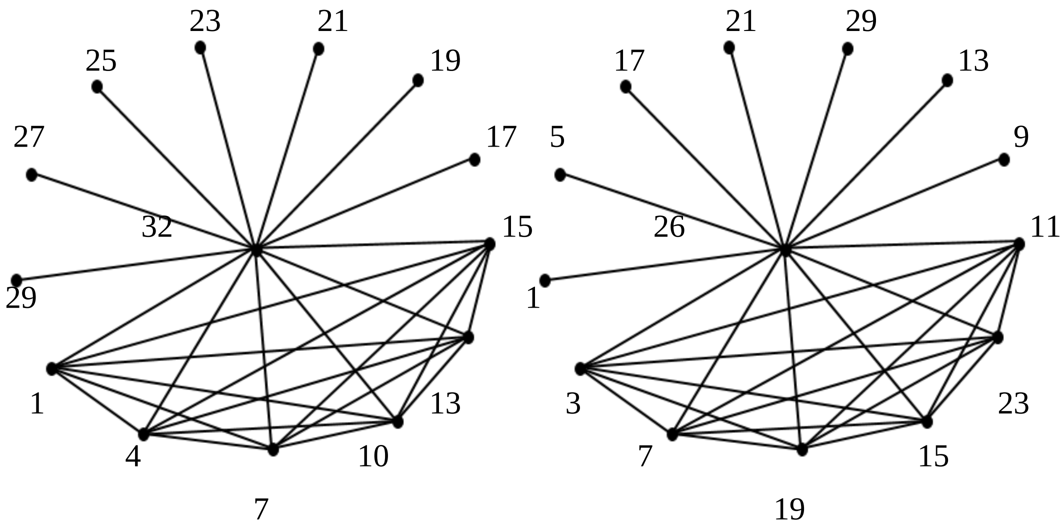
Berdasarkan tabel *Cayley* 3.5 kita dapatkan elemen-elemen komutatif dari D_{14} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{14} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Hal tersebut bertujuan untuk mempermudah menemukan elemen mana saja yang memenuhi sifat komutatif. Sehingga didapat graf *commuting* sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf $C(D_{14})$

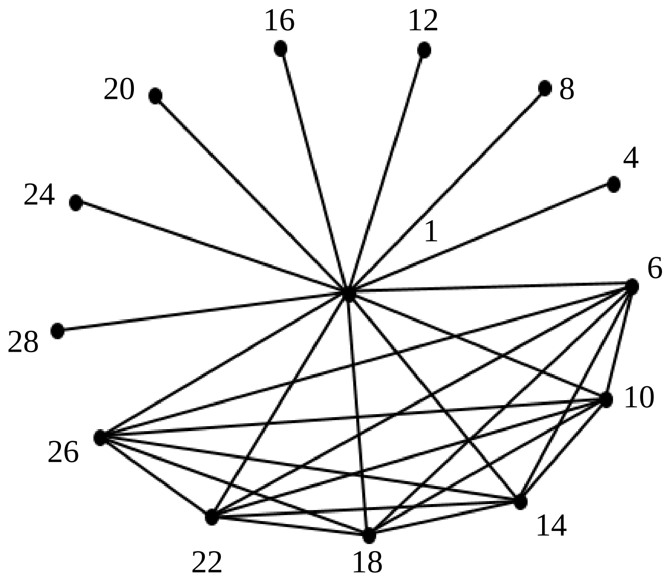
Setelah mendapatkan gambar graf *commuting*, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{14})$. Berikut adalah beberapa percobaan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk $C(D_{14})$.





Gambar 3.14 Beberapa pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{14})$

Berdasarkan gambar 3.14 diperoleh $\lambda_{3,2,1}\big(C(D_{14})\big) = 28$.



Gambar 3.15 Pelabelan $L(3,2,1)$ dengan Label Terkecil dari $C(D_{14})$

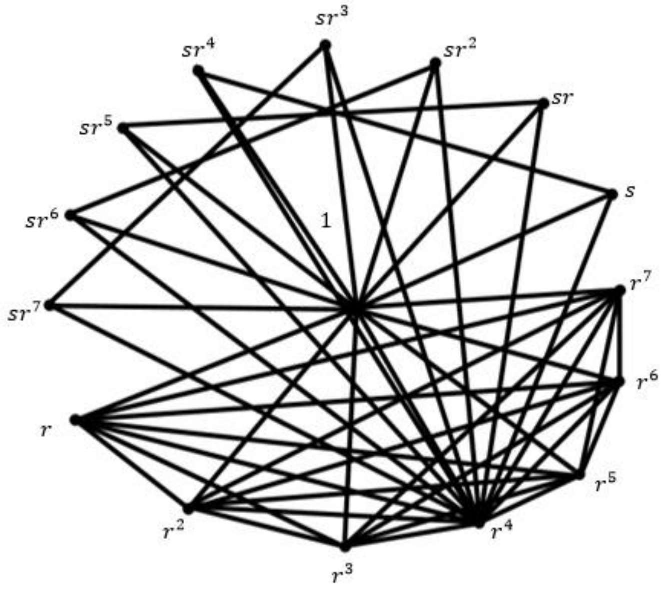
3.1.6 Pelabelan $C(D_{16})$

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{16} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangun tersebut, maka diperoleh tabel *cayley* dari $D1_6$ sebagai berikut:

Tabel 3.6 *Cayley* dari D_{16}

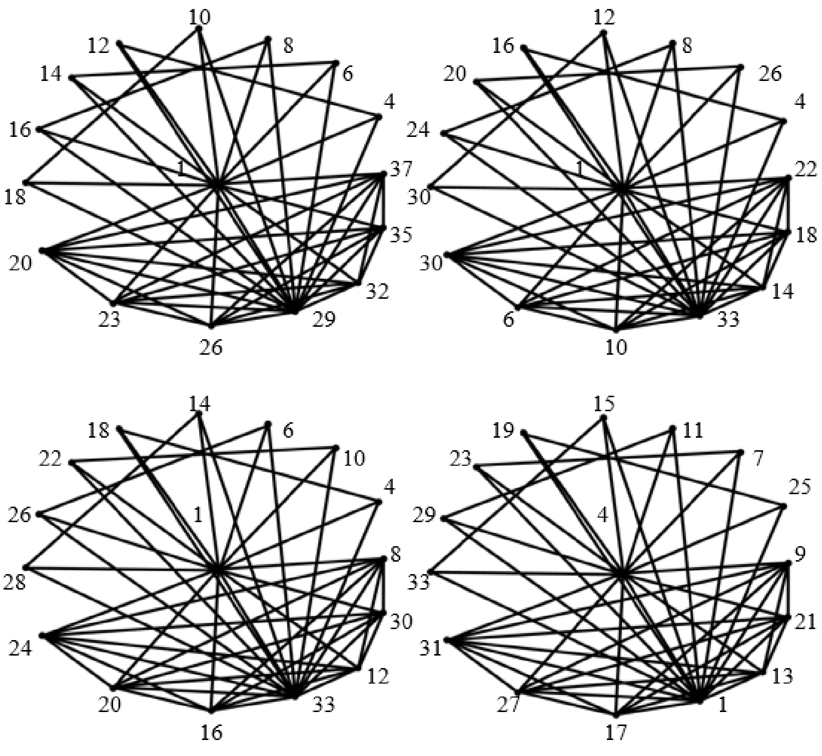
$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6		r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6		r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7		1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1		r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r		r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2		r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3		r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4		r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5		r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6		sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7		s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s		sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr		sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2		sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3		sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4		sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5		sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan tabel *Cayley* 3.6 kita dapatkan elemen-elemen komutatif dari D_{16} dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{16} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Hal tersebut bertujuan untuk mempermudah menemukan elemen mana saja yang memenuhi sifat komutatif. Sehingga didapat graf *commuting* sebagai berikut:



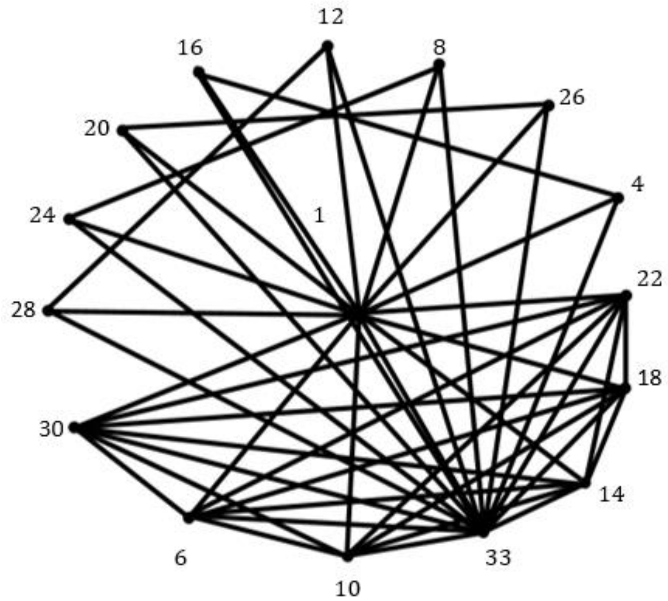
Gambar 3.16 Graf $C(D_{16})$

Setelah mendapatkan gambar graf *commuting*, maka langkah selanjutnya adalah melakukan pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{16})$. Berikut adalah beberapa percobaan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk $C(D_{16})$.



Gambar 3.17 Beberapa Pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{16})$

Berdasarkan gambar 3.17, diperoleh $\lambda_{3,2,1}\big(C(D_{16})\big) = 33$.



Gambar 3.18 Pelabelan $L(3,2,1)$ dengan Label Terkecil dari $C(D_{16})$.

Dari uraian dan percobaan di atas, diperoleh beberapa nilai sebagai berikut:

n	$\lambda_{3,2,1}\big(C(D_{2n})\big)$
3	12
4	17
5	20
6	25
7	28
8	33

Dari tabel tersebut diperoleh dugaan:

$$\lambda_{3,2,1}\big(C(D_{2n})\big) = \begin{cases} 4n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 4n+1, & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Dugaan tersebut selanjutnya akan dibuktikan. Akan disusun beberapa lemma dan teorema untuk membuktikan pernyataan di atas.

Lemma 1. 1 terhubung langsung dengan semua titik di $V\big(C(D_{2n})\big)$ dan $r^{\frac{n}{2}}$ terhubung langsung dengan semua titik di $V\big(C(D_{2n})\big)$ jika n genap.

Bukti. Dari sifat D_{2n}, kita peroleh $1 \circ x = x = x \circ 1, \forall\, x \in D_{2n}$. Sehingga 1 terhubung langsung dengan semua titik lain di $C(D_{2n})$.

Dan jika n genap, maka kita peroleh $r^{\frac{n}{2}} \circ r^i = r^{\frac{n}{2}+i} = r^{i+\frac{n}{2}} = r^i \circ r^{\frac{n}{2}}$. Sehingga $r^{\frac{n}{2}}$ terhubung langsung dengan r^i untuk semua i. Selanjutnya kita peroleh

$$r^{\frac{n}{2}} \cdot sr^i = sr^{-\frac{n}{2}} r^i = sr^{\frac{n}{2}} r^i = sr^{\frac{n}{2}+i} = sr^{i+\frac{n}{2}} = sr^i \circ r^{\frac{n}{2}}.$$

Sehingga $r^{\frac{n}{2}}$ terhubung langsung dengan sr^i untuk semua i. Akibatnya, $r^{\frac{n}{2}}$ terhubung langsung dengan semua titik lain di $C(D_{2n})$.

Lemma 2. $r^i, i = 0,1, \dots, n-1$ membentuk suatu K_n.

Bukti. Dari sifat D_{2n} kita peroleh $r^i \circ r^j = r^{i+j} = r^{j+i} = r^j \circ r^i$. Dengan demikian r^i terhubung langsung dengan r^j untuk semua i dan j dimana $i \neq j$. Artinya $r^i, \forall i \in \{0,1, \dots, n-1\}$ membentuk suatu K_n.

Lemma 3. Jika n ganjil, $sr^i, i = 0,1, \dots, n-1$ hanya terhubung langsung dengan 1.

Bukti. Misal $n \in \mathbb{N}$ ganjil. Maka

$$sr^i \circ r^j = sr^{i+j}$$

dan

$$r^j \circ sr^i = sr^{-j} \circ r^i = sr^{i-j}.$$

$i + j = i - j$ hanya dipenuhi oleh $j = 0$. Sehingga sr^i akan bertangga dengan r^j hanya jika $j = 0$.

Di sisi lain,

$$sr^i \circ sr^j = ssr^{-i}r^j = r^{j-i}$$

dan

$$sr^j \circ sr^i = ssr^{-j}r^i = r^{i-j}.$$

$r^{i-j} = r^{j-i}$ hanya jika $i = j$.

Dengan demikian terbukti bahwa untuk n ganjil, sr^i hanya terhubung langsung dengan 1.

Lemma 4. Jika n genap, $sr^i, i = 0,1, \dots, n-1$ hanya terhubung langsung dengan $1, r^{\frac{n}{2}}$, dan $sr^{i+\frac{n}{2}}$.

Bukti. Misal $n \in \mathbb{N}$ genap. Dari lemma 1 kita tahu bahwa sr^i terhubung langsung dengan 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$. Karena

$$\begin{aligned} sr^i \circ sr^{i+\frac{n}{2}} &= ssr^{-i}r^{i+\frac{n}{2}} \\ &= ssr^{\frac{n}{2}} \\ &= ssr^{n-\frac{n}{2}} \\ &= ssr^{-\frac{n}{2}} \\ &= ssr^{i-i-\frac{n}{2}} \\ &= ssr^{i-\left(i+\frac{n}{2}\right)} \\ &= ssr^{-\left(i+\frac{n}{2}\right)+i} \\ &= ssr^{-i+\frac{n}{2}}r^i \\ &= sr^{i+\frac{n}{2}} \circ sr^i, \end{aligned}$$

maka sr^i terhubung langsung dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$.

Di sisi lain, untuk n genap

$$sr^i \circ r^j = sr^{i+j}$$

dan

$$r^j \circ sr^i = sr^{i-j} = sr^{n+i-j}.$$

Persamaan $sr^{i+j} = sr^{n+i-j}$ hanya dipenuhi oleh $j = 0$ atau $j = \frac{n}{2}$. Sehingga sr^i tidak terhubung langsung ke sebarang titik r^j dimana $j \notin \left\{0, \frac{n}{2}\right\}$.

Dari sisi sr^j,

$$sr^i \circ sr^j = ssr^{-i}r^j = r^{j-i} = r^{n+j-i}$$

dan

$$sr^j \circ sr^i = ssr^{-j}r^i = r^{i-j}.$$

Persamaan $r^{n+j-i} = r^{n+i-j}$ hanya dipenuhi oleh $i = j + \frac{n}{2}$. Sehingga sr^i terhubung langsung ke sr^j hanya jika $i = j + \frac{n}{2}$.

Dengan demikian terbukti bahwa untuk n genap, sr^i hanya terhubung langsung dengan $1, r^{\frac{n}{2}}$, dan $sr^{i+\frac{n}{2}}, \forall i$.

Teorema 1. Untuk n ganjil, $\lambda_{3,2,1}(D_{2n}) = 4n$.

Bukti. Dari Lemma 1 kita tahu bahwa 1 dengan semua titik di $C(D_{2n})$ membangun suatu $K_{1,2n-1}$ dimana $\deg(1) = 2n - 1$. Sehingga dari teorema 2.6.1 dan teorema 2.6.2 kita peroleh

$$\lambda_{3,2,1}(D_{2n}) \geq 2(1 + 2n - 1) = 4n \tag{1}$$

Misal $f: V(G) \to \mathbb{N}$ didefinisikan sebagai berikut:

1. $f(1) = 0$,
2. $f(r^i) = 4i, \forall i \neq 0$,
3. $f(sr^i) = 6 + 4i, \forall i \neq n - 1$, dan
4. $f(sr^{n-1}) = 4 + 4i$.

Maka f merupakan suatu pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{2n})$. Karena selisih dari $f(r^i)$ dengan $f(r^j)$ adalah

$$\begin{aligned}\left|f\left(r^{i}\right)-f\left(r^{j}\right)\right| &= |4i-4j| \\ &= |4(i-j)| \\ &\geq 3.\end{aligned}$$

Dan selisih label dari sr^{i} dengan sr^{j} adalah

$$\begin{aligned}\left|f\left(sr^{i}\right)-f\left(sr^{j}\right)\right| &= |(6+4i)-(6+4j)| \\ &= |6+4i-6-4j| \\ &= |4(i-j)| \\ &\geq 3.\end{aligned}$$

Serta selisih label dari r^{i} dengan sr^{j} adalah

$$\begin{aligned}\left|f\left(r^{i}\right)-f\left(sr^{j}\right)\right| &= |4i-(6+4j)| \\ &= |4(i-j)-6| \\ &\geq 2.\end{aligned}$$

Dan dari definisi f tersebut selisih label 1 dengan titik yang lain adalah lebih dari 3.

Dengan demikian terbukti bahwa f merupakan suatu pelabelan $L(3,2,1)$ pada $C(D_{2n})$. Sehingga kita peroleh

$$\lambda_{3,2,1}\left(C(D_{2n})\right) \leq 4n \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) kita peroleh

$$\lambda_{3,2,1}\left(C(D_{2n})\right) = 4n$$

Teorema 2 Untuk n genap, $\lambda_{3,2,1}(D_{2n}) = 4n+1$.

Bukti. Dari lemma 1 kita tahu bahwa $r^{\frac{n}{2}}$ terhubung langsung dengan semua titik di $C(D_{2n})$. Misal G adalah graf yang diperoleh dari $C(D_{2n})$ dengan menghapus titik $r^{\frac{n}{2}}$ dan titik $sr^{\frac{n}{2}}$. Maka G adalah $C(D_{2n-1})$ dengan tambahan bahwa sr^{i} terhubung langsung dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$. Fungsi f pada bukti teorema 1 masih bisa kita gunakan karena selisih label sr^{i} dengan label $sr^{i+\frac{n}{2}}$ adalah

$$\begin{aligned}\left|f(sr^{i}) - f\left(sr^{i+\frac{n}{2}}\right)\right| &= \left|(6+4i) - \left(6+4\left(i+\frac{n}{2}\right)\right)\right| \\ &= \left|6+4i-6-4i-\frac{4n}{2}\right| \\ &= \left|-\frac{4n}{2}\right| \\ &= 2n \\ &\geq 3.\end{aligned}$$

Sehingga kita peroleh

$$\lambda_{3,2,1}(G) = 4(n-1) = 4n-4.$$

Kemudian, karena $sr^{\frac{n}{2}}$ berjarak 2 dari titik dengan label tertinggi, untuk memperoleh label minimal definisikan

$$f\left(sr^{\frac{n}{2}}\right) = (4n-4)+2 = 4n-2$$

dan karena $r^{\frac{n}{2}}$ terhubung langsung dengan semua titik di $C(D_{2n})$, maka untuk memperoleh label minimal definisikan

$$f\left(r^{\frac{n}{2}}\right) = (4n-4)+2+3 = 4n+1.$$

Terbukti bahwa $\lambda_{3,2,1}(D_{2n}) = 4n+1$ untuk n genap.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pemaparan lemma dan teorema pada pembahasa, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

$$\lambda_{3,2,1}(C(D_{2n})) = \begin{cases} 4n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 4n+1, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

4.2 Saran

Peneliti selanjutnya diharapkan agar meneliti pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *non-commuting* grup dihedral dan hubungannya dengan pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf *commuting* grup dihedral dalam penelitian ini.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2009. *Matematika 1*: *Kajian Integratif Matematika & Al-Quran*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir, Amalia, I., dan Arifandi, Z. 2013. *Menentukan Spectrum Graf Commuting dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Cameron, P.J. 2001. *Automorphism of Graph*. (Online) (http://www.designtheory.org/library.preprints/auts.pdf) diakses 23 April 2015.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph* 2^{nd} *Edition*. California: Wadswoth, Inc.

Clipperton, Jean, dkk. 2005, $L(3,2,1)$*-Labeling of Simple Graph*. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, 9(2), p.2.

Dan, H dan Wensong, L. 2014. L(1,2)-Edge-Labeling For Necklaces. *Journal of southeast University*, 30(4):550-554

J. Griggs, R.K. Yeh. 1992. *Labeling graphs with a condition at distance two*, SIAM J. Discrete Math. 5. 586–595.

Ray, S. S. 2013. *Graph Theory Wih Algorithms and its Application.* India: Springer.

Tuasikal, M. A. 2015. Jarak Disebut Safar yang Boleh Qhasar Shalat. [Online] Available at: https://rumaysho.com/10871-jarak-disebut-safar-yang-boleh-qashar-shalat.html [Diakses Senin 31 Mei 2018]

D. Dummit, R. Foote, Abstract Algebra, Third Edition. Prentice-Hall International Inc, 2004.

T.T. Chelvam, K. Selvakumar, S. Raja, Commuting Graph on Dihedral Group. Journal of Mathematics and Computer Science, 2, 402-406, 2011.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Yusuf Afandi, lahir di Tulungagung pada tanggal 22 September 1995. Bertempat tinggal di desa Salakkembang RT 02 RW 02, Kecamatan Kalidawir, Kabupaten Tulungagung. Anak pertama dari dua bersaudara dari Bapak Slamet Nurroziq dan Ibu Agustin Choiriyah. Mulai mengeyam pendidikan dasar di MI Darul Ulum pada tahun 2002 hingga 2008, kemudian menempuh pendidikan menenngah pertama di SMPN 1 Ngunut pada tahun 2008 hingga 2011, dan melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 1 Ngunut pada tahun 2011 hingga 2014. Selanjutnya pada tahun 2014 melanjutkan pendidikan kuliah di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Yusuf Afandi
NIM : 14610092
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan Titik *L*(3,2,1) Pada Graf *Commuting* Dari Grup Dihedral
Pembimbing I : H. Wahyu H Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Maret 2018	Konsultasi BAB I, II, & III	1.
2.	11 April 2018	Konsultasi Keagamaan BAB I &II	2.
3.	17 April 2018	Konsultasi BAB III & IV	3.
4.	25 April 2018	Konsultasi Keagamaan BAB III	4.
5.	9 Mei 2018	ACC Seminar Proposal	5.
6.	10 September 2018	Revisi BAB I, II, III & IV	6.
7.	20 September 2018	Konsultasi & Revisi BAB III	7.
8.	23 November 2018	Revisi Keagamaan BAB II	8.
9.	26 November 2018	Revisi Keagamaan BAB III	9.
10.	21 Maret 2019	Revisi Keagamaan BAB III	10.
11.	4 April 2019	ACC Keagamaan	11.
12.	5 April 2019	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 05 April 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001