

**IMPLEMENTASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (MAH) PADA  
SOLUSI SEMI-ANALITIK MODEL EPIDEMI SIR**

**SKRIPSI**

**OLEH  
GIAN ARDIANZAH  
NIM. 17610071**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**IMPLEMENTASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (MAH) PADA  
SOLUSI SEMI-ANALITIK MODEL EPIDEMI SIR**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Gian Ardianzah  
NIM. 17610071**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

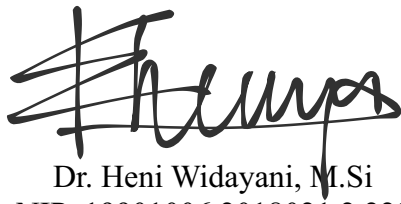
**IMPLEMENTASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (MAH) PADA  
SOLUSI SEMI-ANALITIK MODEL EPIDEMI SIR**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Gian Ardianzah  
NIM. 17610071**

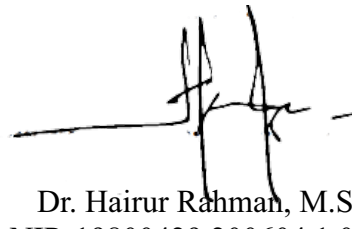
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 18 Juni 2021

Pembimbing I,



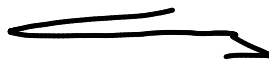
Dr. Heni Widayani, M.Si  
NIP. 19901006 2018021 2 229

Pembimbing II,



Dr. Hairur Rahman, M.Si  
NIP. 19800429 200604 1 003

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**IMPLEMENTASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (MAH) PADA  
SOLUSI SEMI-ANALITIK MODEL EPIDEMI SIR**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Gian Ardianzah  
NIM. 17610071**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

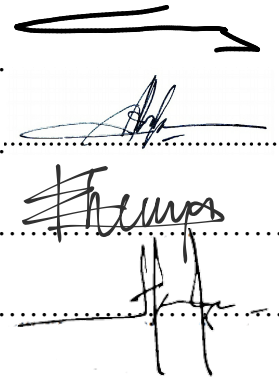
Tanggal 24 Juni 2021

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si .

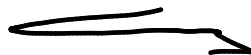
Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Gian Ardianzah

NIM : 17610071

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Implementasi Metode Analisis Homotopi (MAH) pada Solusi  
Semi-Analitik Model Epidemologi SIR

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Juli 2021  
Yang membuat pernyataan,



Gian Ardianzah  
NIM. 17610071

## **MOTTO**

“Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri”  
(QS. Ar-Ra'd/13:11).

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk  
yang tersayang dan tercinta:

Ibunda Suci Lestari, ayahanda Sukatno,  
kakak Pravinto Suryo Nugroho (Alm), serta adik Rikat Ayu Satrianti.  
Terima kasih telah mendoakan dan menjadi alasan penulis  
berjuang sampai saat ini

## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrahmanirrahim*

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji dan syukur *alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga skripsi dengan judul “Implementasi Metode Analisis Homotopi (MAH) pada Solusi Semi-Analitik Model Epidemologi SIR” ini mampu terselesaikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Program Studi Matematika sekaligus penguji utama pada ujian skripsi yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis.

4. Abdul Aziz, M.Si, selaku ketua penguji pada ujian skripsi yang telah memberikan saran dan arahan kepada penulis.
5. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah membimbing dan berbagi ilmunya dengan sabar.
8. Ayah dan Mama tercinta serta adik yang selalu memberikan doa dan dukungan.
9. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017 yang telah berjuang bersama-sama serta memberikan banyak kenangan dan cerita semasa di bangku perkuliahan.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu atas bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah Swt memberikan balasan atas kebaikan mereka semua. Penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak khususnya penulis dan pembaca. *Aamiin Ya Rabbal Alamin*

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, 18 Juni 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL .....	xiii
ABSTRAK .....	xiv
ABSTRACT .....	xv
ملخص .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
1.5 Batasan Masalah .....	4
1.6 Metode Penelitian .....	4
1.7 Sistematika Penulisan .....	5
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA.....</b>	<b>6</b>
2.1 Model Epidemologi SIR.....	6
2.2 Deret Taylor.....	8
2.2.1 Definisi Deret Taylor.....	8
2.2.2 Contoh Penerapan Deret Taylor .....	9
2.3 Metode Homotopi.....	10
2.3.1 Metode Analisis Homotopi.....	11
2.3.2 Contoh Penyelesaian Metode Analisis Homotopi.....	14
2.4 Pandangan Islam dalam Menyelesaikan Permasalahan.....	17

<b>BAB III PEMBAHASAN .....</b>	<b>19</b>
3.1 Aplikasi Solusi Semi-Analitik Metode Analisis Homotopi pada Model Epidemi SIR.....	19
3.2 Kevalidan Metode Analisis Homotopi pada Model Epidemi SIR .....	25
3.3 Implementasi Metode Analisis Homotopi pada Model Epidemi SIR dalam Penyebaran COVID-19 di Jepang.....	28
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>34</b>
4.1 Kesimpulan.....	34
4.2 Saran .....	34
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>35</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	
<b>RIWAYAT HIDUP</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Transfer Model SIR Sederhana .....	7
Gambar 2.2	Perbandingan Solusi Eksak dan Metode Analisis Homotopi dari Masalah Nilai Awal (2.18) .....	16
Gambar 3.1	Grafik Model Epidemi dengan Metode RKF 45 .....	28
Gambar 3.2	Grafik $S(t)$ dengan Metode RKF 45 dan MAH .....	31
Gambar 3.3	Grafik $I(t)$ dengan metode RKF 45 dan MAH .....	31

## DAFTAR TABEL

Tabel 1.1	Data COVID-19 di Jepang .....	4
Tabel 3.1	Nilai $S_m(t)$ dan $I_m(t)$ orde ke $m$ .....	30
Tabel 3.2	Solusi Metode Runge Kutta Fehlberg dan Metode Analisis Homotopi .....	32

## ABSTRAK

Ardianzah, Gian. 2021. **Implementasi Metode Analisis Homotopi (MAH) pada Solusi Semi-Analitik Model Epidemii SIR**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Hairur Rahman, M.Si

**Kata kunci:** Model Epidemii SIR, Metode Analisis Homotopi.

Permasalahan penyakit menular sebagian besar dimodelkan dalam bentuk masalah taklinier. Salah satunya yaitu model epidemii SIR. Berbagai metode digunakan untuk menyelesaikan dan mengurangi kesalahan dalam mencari solusi tersebut. Model Epidemii SIR akan diselesaikan dengan menggunakan metode analisis homotopi. Metode Analisis Homotopi (MAH) adalah teknik semi analitik untuk memecahkan masalah tak linear persamaan diferensial biasa atau parsial.

Penelitian ini menunjukkan bahwa model Epidemii SIR dapat diselesaikan dengan baik menggunakan metode analisis homotopi. Metode ini memberikan cara yang mudah untuk menyesuaikan wilayah konvergensi dan laju aproksimasi. Solusi model epidemii SIR dilakukan dengan bantuan *software* MAPLE. Hasil perbandingan solusi yang diperoleh metode analisis homotopi mendekati solusi penyelesaian metode Runge Kutta Fehlberg (RKF45).

## ABSTRACT

Ardianzah, Gian. 2021. **On the Implementation of Homotopy Analysis Method (HAM) on SIR Epidemic Model Semi-Analytic Solutions**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Hairur Rahman, M.Si

**Kata kunci:** SIR Epidemic Model, Homotopy Analysis Method.

Infectious disease problems are mostly modeled in the form of a nonlinear problem. One of them is the SIR epidemic model. Various methods are used to solve and reduce errors in finding the solution. The SIR Epidemic Model will be solved using the homotopy analysis method. Homotopy Analysis Method (HAM) is a semi-analytic technique to solve nonlinear problems of ordinary or partial differential equations.

This study shows that the SIR Epidemic model can be solved well using the homotopy analysis method. This method provides an easy way to adjust the convergence region and approximation rate. The solution of the SIR epidemic model was carried out with the help of MAPLE software. The results of the comparison of solutions obtained by the homotopy analysis method are close to the solution completion of the Runge Kutta Fehlberg method (RKF45).

## ملخص

أرديانشه، غيان. 2021. تطبيق منهج تحليل هوموتوبي (*HOMOTOPI*) (ماه) في ذلك الحلول قبلي-تحليلي شكل وباء سير. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) الدكتورة هيني ويداياني الماجستير، (٢) الدكتور حرير الرحمن الماجستير.

الكلمات المفتاحية: شكل وباء سير، منهج تحليل هوموتوبي (*HOMOTOPI*).

مشكلة الألم المعدي أكثرها بشكل مسألة خطية. منها شكل وباء سير. عدة المناهج تستخدم حل ونقص الأخطاء في بحث تلك الحلول. شكل وباء سير سيحلّ باستخدام منهج تحليل هوموتوبي (*HOMOTOPI*) (ماه). منهج تحليل هوموتوبي (*HOMOTOPI*) هو أسلوب قبلي-تحليلي لحل مشكلة عدم خطي سوائي توزيعي أو جزئي. يدل هذا البحث على أن شكل وباء سير يستطيع أن يحلّ باستخدام منهج تحليل هوموتوبي (*HOMOTOPI*) جيدا. يعطي هذا المنهج الطريقة السهلة التي تناسب ولاية المركزي التقديرية. حل شكل وباء سير، يستخدم إلى مساعدة برنامج مايبيل (*MAPLE*). ونتيجة مقارنة بين المنهجين هي أن منهج التحليل هوموتوبي (*HOMOTOPI*) أقرب إلى تحليل المنهج رونجي كتنا فيهلبارغ (*RKF45*).

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Masalah taklinier adalah masalah yang memuat bentuk taklinier biasanya terdapat dalam kehidupan sehari-hari (Pagalay, 2009:3). Sebagian besar masalah penyakit menular dimodelkan dalam bentuk masalah taklinier. Salah satunya yaitu model epidemi SIR dimana model ini cukup prediktif untuk penyakit menular yang ditularkan dari manusia ke manusia, dan dimana pemulihan memberikan resistensi yang bertahan lama, seperti penyakit campak, gondok, dan rubella. Model epidemi SIR merupakan model yang sederhana dan banyak model merupakan turunan dari bentuk dasar ini.

Model Epidemi SIR sering diaplikasikan dengan persamaan diferensial biasa akan tetapi tidak ditemukan solusi eksaknya. Berbagai metode digunakan untuk menyelesaikan dan mengurangi kesalahan dalam mencari solusi model epidemi SIR. Pendekatan analitik telah diterapkan untuk memecahkan masalah taklinier yaitu Rafei, Ganji, dan Daniali (2007) dengan menggunakan metode perturbasi homotopi dan Biazar (2006) menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan model epidemi SIR. Liao (2004:3) mengembangkan metode analitik baru yaitu metode analisis homotopi dimana valid digunakan untuk masalah taklinier yang kuat meskipun masalah taklinier tertentu tidak berisi parameter kecil atau besar. Menurut Jaharuddin (2008) metode ini merupakan bentuk umum dari metode perturbasi homotopi dan metode dekomposisi

Adomian. Metode analisis homotopi akan diterapkan untuk mengetahui metode semi-analitik dapat mendekati solusi dari model epidemi SIR.

Dalam ayat Al-Quran Allah berfirman yang artinya: "Maka sesungguhnya beserta kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya beserta kesulitan itu ada kemudahan." (QS. Al-Insyirah 94:5-6). Ayat ini menjelaskan bahwa setelah kesulitan selalu ada kemudahan. Seperti halnya dengan metode numerik yang telah banyak dikembangkan. Metode tersebut bertujuan untuk memudahkan dalam menyelesaikan suatu permasalahan.

Penelitian ini menggunakan suatu pendekatan analitik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah taklinier yaitu metode analisis homotopi. Untuk mengetahui hasil dari penerapan metode ini, sebelumnya telah diterapkan pada masalah-masalah taklinier antara lain "Metode Homotopi dalam Menyelesaikan Model *Predator Prey*" (Laila, 2016), pada penelitian tersebut model predator prey dapat diselesaikan kemudian dianalisis dengan parameter bantu yang mendekati penyelesaian ode45. "Penggunaan Metode Homotopi untuk Menyelesaikan Model Populasi Volterra" (Arti, 2010), pada penelitian tersebut dijelaskan dalam metode ini terdapat suatu parameter dan suatu fungsi yang dapat dipilih sembarang yang dapat mengakibatkan perluasan daerah kekonvergenan. "*Application of Homotopy Analysis Method for Solving the SEIR Models of Epidemics*" (Momoh, dkk, 2015), pada penelitian tersebut metode analisis homotopi sangat efisien dan akurat dalam menyelesaikan model SEIR.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis tertarik untuk menerapkan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan model epidemi SIR.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian model epidemi SIR dengan menggunakan metode analisis homotopi ?
2. Bagaimana simulasi solusi semi-analitik dari metode analisis homotopi ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk menjelaskan penyelesaian model epidemi SIR dengan menggunakan metode analisis homotopi.
2. Untuk mengetahui hasil simulasi solusi semi-analitik dari metode analisis homotopi.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang penerapan metode analisis homotopi.
2. Menambah wawasan tentang penyelesaian persamaan diferensial taklinier.

### 1.5 Batasan Masalah

Metode analisis homotopi diterapkan pada model epidemi SIR dalam penyebaran COVID-19 di Jepang pada 22 Januari 2020 saat  $t = 0$ , dengan parameter  $\beta = 2,9236 \times 10^{-5}$  dan  $\gamma = 0,0164$  yang diperoleh melalui kecocokan kuadrat terkecil antara perkiraan asimtotik dan data wabah COVID-19 di Jepang.

Tabel 1.1 Data COVID-19 di Jepang (Barlow dan Weinstein, 2020)

No	Variabel	Keterangan	Jumlah	Satuan
1	$S$	Individu yang sehat dan rentan	4206	orang
2	$I$	Individu yang terinfeksi	2	orang
3	$R$	Individu yang sembuh	0	orang

Sumber: CSSE Universitas John Hopkins

### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Metode ini dilakukan dengan cara mencari bahan-bahan literatur berupa skripsi, buku, jurnal atau artikel yang berkaitan dengan metode analisis homotopi dan model epidemi SIR dijadikan sebagai landasan teori. Selain itu juga terdapat kajian agama berupa al-Quran dan hadits. Setelah itu dilakukan pengkajian terhadap literatur yang telah diperoleh untuk melakukan pembahasan dengan menganalisis objek penelitian serta mengkonsultasikan kepada dosen pembimbing yang bertujuan untuk menyusun laporan penelitian atau skripsi.

Tahapan penerapan metode analisis homotopi pada model epidemi SIR sebagai berikut:

1. Pengaplikasian metode analisis homotopi
  - a. Mendefinisikan operator linier.
  - b. Mendefinisikan operator taklinier berdasarkan persamaan dasar.

- c. Menetapkan pendekatan awal berdasarkan syarat awal.
  - d. Mendefinisikan fungsi homotopi, fungsi bantu, dan parameter bantu.
  - e. Menentukan penyelesaian deformasi orde tinggi.
  - f. Mengevaluasi penyelesaian hampiran.
2. Membuktikan kevalidan metode analisis homotopi.
  3. Melakukan penyelesaian numerik.

### **1.7 Sistematika Penulisan**

Sistematika penulisan dari penelitian ini terdiri dari empat bab antara lain:

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penelitian

#### **BAB II KAJIAN PUSTAKA**

Bab ini menjelaskan tentang kajian teori yang mendasari penelitian dari metode analisis homotopi untuk menyelesaikan model epidemi SIR yang digunakan dalam pembahasan.

#### **BAB III PEMBAHASAN**

Bab ini meliputi hasil dari pengaplikasian metode analisis homotopi untuk menyelesaikan model epidemi SIR.

#### **BAB IV PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian dan saran.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Epidemi SIR

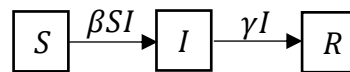
Kermack dan MacKendrick pada tahun 1927 pertama kali memperkenalkan model epidemi SIR (Martcheva, 2015:9). Model ini juga dapat disebut sebagai model kompartemen. Kompartemen dalam model epidemiologi umumnya dibagi menjadi tiga yaitu *susceptible population* ( $S(t)$ ) merupakan populasi sehat yang rentan sehingga dapat terinfeksi penyakit dan *Infective population* ( $I(t)$ ) merupakan populasi yang terinfeksi pada saat  $t$  dan dapat menularkan penyakit melalui kontak dengan populasi sehat, dan *Removed population* ( $R(t)$ ) yaitu populasi yang pernah terinfeksi dan kemudian sembuh (Kasbawati, 2011:99).

Model SIR mempunyai hipotesis-hipotesis tentang proses penularan penyakit menular dan populasi inangnya (Li, 2018:8-10).

1. Penularan terjadi secara horizontal melalui kontak langsung antar orang banyak.
2. Pencampuran inang individu adalah homogen, dengan demikian Hukum Aksi Massa berlaku yaitu jumlah kontak antara inang dari kompartemen yang berbeda hanya bergantung pada jumlah inang di setiap kompartemen. Secara khusus, laju insiden jumlah infeksi baru per satuan waktu dapat dinyatakan sebagai  $\beta S(t)I(t)$ , di mana  $\beta$  disebut koefisien transmisi.
3. Tingkat transfer dari kompartemen sebanding dengan ukuran populasi kompartemen. Misalnya, laju transfer dari I ke R, laju pemulihan, dapat ditulis sebagai  $\gamma I(t)$ , untuk beberapa konstanta laju  $\gamma$ .

4. Individu yang terinfeksi menjadi menular setelah infeksi tanpa periode laten.
5. Tidak ada kehilangan kekebalan dan tidak ada kemungkinan reinfeksi. Ini berarti bahwa kecepatan transfer dari R kembali ke S adalah nol.
6. Tidak ada masukan kerentanan baru dan tidak ada penghapusan dari kompartemen mana pun. Masuknya kerentanan baru adalah nol, begitu juga dengan tingkat penghilangan dari semua kompartemen.
7. Total populasi inang tetap konstan.

Berikut merupakan diagram transfer untuk model konseptual SIR:



Gambar 2.1 Diagram Transfer Model SIR Sederhana

dengan rumus sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

dengan kondisi awal  $S(0) = N_S, I(0) = N_I, R(0) = N_R$ .

Dalam model ini, fungsi  $S(t), I(t)$ , dan  $R(t)$  adalah variabel. Karena menotasikan jumlah orang, maka diharapkan untuk mengambil nilai-nilai taknegatif. Konstanta  $\beta$  dan  $\gamma$  adalah parameter model, dan dianggap taknegatif karena menunjukkan konstanta laju. Jika diketahui nilai parameter model  $\beta$  dan  $\gamma$ , maka untuk setiap himpunan dari kondisi awal  $N_S$  dan  $N_I$ , model (2.1) mempunyai solusi unik  $(S(t), I(t), R(t))$  yang menghasilkan prediksi untuk perjalanan waktu epidemi untuk  $t > 0$ . Pada saat  $t = 0$  menandai awal dari epidemi.

Perilaku ambang model epidemi SIR dimana, jika jumlah awal yang rentan ( $N_S$ ) di bawah jumlah tertentu, maka jumlah infeksi  $I(t)$  berkurang. Di sisi lain, jika ( $N_S$ ) lebih besar dari ambang batas maka  $I(t)$  meningkat sebelum menurun lagi. Ini tampaknya tidak tergantung pada jumlah awal individu yang menular ( $N_I$ ). Besaran ambang ini didefinisikan suatu besaran penting yang disebut bilangan reproduksi dasar, dilambangkan dengan  $R_0$  (Barnes dan Fulford, 2003:102).

## 2.2 Deret Taylor

Penghampiran Fungsi dalam metode numerik kebanyakan diturunkan didasarkan dalam bentuk polinom. Deret Taylor merupakan suatu kaskas utama untuk membuat polinom hampiran. Fungsi yang awalnya berbentuk kompleks dapat menjadi sederhana apabila dihampiri dengan polinom. Perhitungan dengan fungsi hampiran dapat menghasilkan solusi hampiran.

### 2.2.1 Definisi Deret Taylor

Andaikan  $f$  dan semua turunannya,  $f', f'', f''', \dots$ , menerus di dalam selang  $[a, b]$ . Misalkan  $x_0 \in [a, b]$ , maka untuk nilai-nilai  $x$  disekitar  $x_0$  dan  $x \in [a, b]$ ,  $f(x)$  dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan penjumlahan dari suku-suku, yang disebut deret. Perlu diketahui bahwa deret Taylor memiliki panjang yang tidak berhingga sehingga penulisan suku-suku selanjutnya digunakan tanda elipsis (...) (Munir, 2015:18). Jika dimisalkan  $x - x_0 = h$ , maka  $f(x)$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Contoh Penerapan Deret Taylor

Diberikan fungsi  $f(x) = \cos(x)$ . Hampiri fungsi tersebut ke dalam deret Taylor di sekitar  $x_0 = 1$ .

#### Penyelesaian

Menentukan turunan fungsi  $\cos(x)$  terlebih dahulu:

$$f(x) = \cos(x),$$

$$f'(x) = -\sin(x),$$

$$f''(x) = -\cos(x),$$

$$f'''(x) = \sin(x),$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x),$$

dan seterusnya.

Berdasarkan definisi deret Taylor pada persamaan (2.2), fungsi  $\cos(x)$  dapat dihampiri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(1) + \frac{x-1}{1!} (-\sin(1)) + \frac{(x-1)^2}{2!} (-\cos(1)) + \frac{(x-1)^3}{3!} (\sin(1)) \\ &\quad + \frac{(x-1)^4}{4!} \cos(1) + \dots \end{aligned}$$

Jika dimisalkan  $x - 1 = h$ , maka berdasarkan persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(1) + h(-\sin(1)) + \frac{h^2}{2!} (-\cos(1)) + \frac{h^3}{3!} (\sin(1)) + \frac{h^4}{4!} \cos(1) + \dots \\ &= 0,5403 - 0,8415h - 0,2701h^2 + 0,1402h^3 + 0,0225h^4 + \dots \end{aligned}$$

### 2.3 Metode Homotopi

Menurut Liao (2004:4) Ide homotopi sangat sederhana dan lurus ke depan.

Misalkan diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\mathcal{N}[u(t)] = 0. \quad (2.4)$$

$\mathcal{N}$  merupakan suatu operator taklinier,  $t$  menunjukkan waktu, dan  $u(t)$  adalah variabel yang tidak diketahui. Diberikan  $u_0(t)$  merupakan pendekatan awal dari solusi persamaan  $u(t)$  dan  $\mathcal{L}$  merupakan suatu operator linier yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}[f] = 0 \text{ ketika } f = 0. \quad (2.5)$$

Maka dapat dibangun suatu fungsi homotopi sebagai berikut:

$$\mathcal{H}(\phi(t, p), p) = (1 - p)\mathcal{L}[\phi(t, p) - u_0] + p\mathcal{N}[\phi(t, p)]. \quad (2.6)$$

Di mana  $p \in [0,1]$  merupakan suatu parameter dan didefinisikan fungsi real  $\phi(t, p)$ . Ketika  $p = 0$  dan  $p = 1$  dari persamaan (2.6) diperoleh:

$$\mathcal{H}(\phi(t, 0), 0) = \mathcal{L}[\phi(t, 0) - u_0],$$

$$\mathcal{H}(\phi(t, 1), 1) = \mathcal{N}[\phi(t, 1)].$$

Sehingga dari persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) dapat diperoleh:

$$\phi(t, 0) = u_0(t), \quad (2.7)$$

$$\phi(t, 1) = u(t). \quad (2.8)$$

Masing-masing merupakan penyelesaian dari persamaan:

$$\mathcal{H}(\phi(t, 0), 0) = 0,$$

$$\mathcal{H}(\phi(t, 1), 1) = 0.$$

Peningkatan nilai parameter  $p$  dari 0 ke 1 menyatakan solusi  $\phi(t, p)$  dari persamaan

$$\mathcal{H}(\phi(t, p), p) = 0.$$

Hal tersebut bergantung pada parameter  $p$  dan variasi terhadap pendekatan awal  $u_0(t)$  hingga solusi  $u(t)$  dari Persamaan (2.4). Dalam topologi, variasi kontinu semacam ini disebut deformasi.

### 2.3.1 Metode Analisis Homotopi

Berdasarkan konsep dasar metode homotopi, metode ini dapat berkembang salah satunya yaitu metode analisis homotopi. Metode ini memperkenalkan parameter bantu  $h$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}(t)$  bukan nol untuk membangun suatu jenis homotopi baru seperti berikut:

$$\mathcal{H}(\phi(t, p), p, h, \mathcal{H}(t)) = (1 - p)\mathcal{L}[\phi(t, p) - u_0(t)] - ph\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi(t, p)] \quad (2.9)$$

Dimana persamaan ini lebih umum dari pada persamaan (2.6) karena persamaan (2.6) merupakan kasus khusus dari persamaan (2.9) ketika  $h = -1$  dan  $\mathcal{H}(t) = 1$  yaitu:

$$\mathcal{H}(\phi(t, p), p, -1, 1) = \mathcal{H}(\phi(t, p), p)$$

Dengan demikian, peningkatan parameter  $p$  dari 0 ke 1, variasi fungsi  $\phi(t, p), p, h, \mathcal{H}(t)$  berasal dari pendekatan awal  $u_0(t)$  hingga solusi eksak  $u(t)$  dari masalah takliner. Solusi dari  $\phi(t, p), p, h, \mathcal{H}(t)$  adalah persamaan:

$$\mathcal{H}(\phi(t, p), p, h, \mathcal{H}(t)) = 0.$$

Dimana tidak hanya bergantung pada parameter  $p$  saja karena terdapat parameter bantu  $h$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}(t)$  jadi solusi dan perluasan wilayah konvergensi juga bergantung pada parameter bantu  $h$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}(t)$ . Persamaan deformasi orde nol dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(1 - p)\mathcal{L}[\phi(t, p) - u_0(t)] = ph\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi(t, p)]. \quad (2.10)$$

Dengan kondisi awal  $\phi(t, p) = 0$ . Ketika  $p = 0$  dan  $p = 1$  maka persamaan (2.10) menjadi:

$$\mathcal{L}[\phi(t, 0) - u_0(t)] = 0,$$

$$h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi(t, 1)] = 0.$$

Berdasarkan persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) maka solusinya adalah:

$$\phi(t, 0) = u_0(t), \quad (2.11)$$

$$\phi(t, 1) = u(t). \quad (2.12)$$

Berdasarkan persamaan (2.11) dan persamaan (2.12), maka  $\phi(t, p)$  variasi dari pendugaan awal  $u_0(t)$  ke solusi eksak  $u(t)$  karena peningkatan nilai parameter  $p$  dari 0 ke 1. Selain itu untuk turunan ke  $m$  dari fungsi  $\phi(t, p)$  terhadap parameter  $p$  yang dihitung di  $p = 0$  adalah:

$$u_0^{(m)}(t) = \left. \frac{d^m \phi(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0}$$

dimana  $m = 1, 2, 3, \dots$ , jika kedua ruas pada persamaan tersebut dibagi dengan  $m!$  maka diperoleh:

$$\frac{1}{m!} u_0^{(m)}(t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0}$$

dinotasikan:

$$u_m(t) = \frac{u_0^{(m)}(t)}{m!} = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0}$$

Berdasarkan teorema deret Taylor, fungsi  $\phi(t, p)$  dapat diperluas dalam deret pangkat terhadap parameter  $p$  di sekitar  $p = 0$  berbentuk:

$$\phi(t, p) = \phi(t, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \phi(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0} p^m$$

Berdasarkan persamaan (2.11) diperoleh:

$$\phi(t, p) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) p^m \quad (2.13)$$

Asumsikan bahwa parameter bantu  $h$ , Fungsi bantu  $\mathcal{H}(t)$ , pendekatan awal  $u_0(t)$ , dan operator linier bantu  $\mathcal{L}$  dipilih dengan tepat sehingga deret (2.13) konvergen pada  $p = 1$ . Oleh karena itu, pada saat  $p = 1$  deret (2.13) menjadi

$$\phi(t, 1) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t)$$

Berdasarkan persamaan (2.12) diperoleh:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) \quad (2.14)$$

Hal ini menunjukkan hubungan antara pendugaan awal  $u_0(t)$  dan solusi eksak  $u(t)$  yang berarti berasal dari deret  $u_m(t)$  dengan  $m = 1, 2, 3, \dots$  yang akan ditentukan. Untuk menentukannya dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (2.10) sebanyak  $m$  kali terhadap parameter  $p$  dengan  $p = 0$  dan dibagi oleh  $m!$  maka diperoleh:

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m(t)u_{m-1}(t)] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{R}_m[\vec{u}_{m-1}] \quad (2.15)$$

dengan kondisi awal:

$$u_m(0) = 0,$$

di mana

$$\mathcal{R}_m[\vec{u}_{m-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi(t, p)]}{dp^{m-1}} \Big|_{p=0} \right], \quad (2.16)$$

dengan

$$\vec{u}_{m-1} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}),$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

$\chi_m$  merupakan fungsi karakteristik dari  $m$  (Royden dan Fitzpatrick, 2010:61).

Perhatikan bahwa  $\mathcal{R}_m[\vec{u}_{m-1}]$  merupakan ekspresi yang bergantung pada

$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$  dan dapat diperoleh jika diberikan masalah taklinier pada persamaan (2.4), maka dengan menggunakan metode analisis homotopi dapat diperoleh solusi dengan pendekatan orde ke  $m$  dari  $u(t)$  sebagai berikut:

$$u(t) \approx \sum_{n=0}^m u_n(t) \quad (2.17)$$

Dengan  $u_m$  diperoleh dari penyelesaian persamaan (2.15), di mana  $m = 1, 2, 3, \dots$ , dan  $u_0(t)$  adalah kondisi awal yang diberikan.

### 2.3.2 Contoh Penyelesaian Metode Analisis Homotopi

Diberikan suatu masalah taklinier yang dinyatakan dalam masalah nilai awal sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}u(t) + tu^2(t) = t, \quad u(0) = 0. \quad (2.18)$$

#### Penyelesaian

Solusi eksak dari masalah nilai awal pada persamaan (2.18) adalah

$$u(t) = \tanh\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Dengan menggunakan metode analisis homotopi akan diselesaikan masalah nilai awal pada persamaan (2.18). Misalkan  $u_0(t)$  sebagai pendekatan awal, dengan parameter  $p \in [0, 1]$ , dan dipetakan sebagai berikut

$$u(t) = \phi(t, p)$$

Berdasarkan persamaan (2.18) dipilih operator linier berbentuk:

$$\mathcal{L}[\phi(t, p)] = \frac{d\phi(t, p)}{dt} \quad (2.19)$$

dengan

$$\mathcal{L}[c] = 0$$

di mana  $c$  adalah konstan.

Berdasarkan persamaan (2.18), operator taklinier berbentuk:

$$\mathcal{N}[\phi(t, p)] = \frac{d\phi(t, p)}{dt} + t\phi^2(t, p) - t \quad (2.20)$$

Dipilih parameter bantu  $h$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}(t)$  bukan nol, maka deformasi orde nol pada persamaan (2.10) dan deformasi orde  $m$  pada persamaan (2.15) memenuhi syarat awal  $\phi(0, p) = 0$  dan  $u_m(0) = 0$ . Solusi masalah nilai awal pada persamaan (2.18) dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut:

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \quad (2.21)$$

Untuk menentukan  $u_m(t)$ , berdasarkan syarat awal  $u_0(0) = 0$  maka dipilih  $u_0(t) = t^2$  sebagai pendekatan awal dari solusi masalah nilai awal pada persamaan (2.18). Dengan menerapkan operator linier pada persamaan (2.19) ke deformasi orde  $m$  pada persamaan (2.15) maka diperoleh:

$$u_m(t) = \chi_m u_{m-1}(t) + h \int_0^t \mathcal{H}(\tau) \mathcal{R}_m[\vec{u}_{m-1}] d\tau. \quad (2.22)$$

Bentuk dari  $\mathcal{R}_m[\vec{u}_{m-1}]$  dapat diperoleh dari persamaan (2.16) dengan mensubstitusikan operator taklinier pada persamaan (2.20) adalah:

$$\mathcal{R}_m[\vec{u}_{m-1}] = \frac{du_{m-1}(t)}{dx} + \sum_{k=0}^{m-1} t(u_k(t)u_{m-1-k}(t)) - t(1 - \chi_m) \quad (2.23)$$

Berdasarkan persamaan (2.21) dan (2.22), dengan fungsi bantu  $\mathcal{H}(t)$  yang dipilih berbentuk  $\mathcal{H}(t) = 1$  maka dari persamaan (2.22) dan (2.23) diperoleh  $u_m(t)$ , sebagai berikut:

untuk  $m = 1$ , diperoleh:

$$u_1(t) = \chi_1 u_0(t) + h \int_0^t \frac{d}{dx} u_0(\tau) + \tau(u_0(\tau)u_0(\tau)) - \tau(1 - \chi_1) d\tau$$

$$u_1(t) = 0 \cdot t^2 + h \int_0^t 2\tau + \tau(\tau^2 \cdot \tau^2) - \tau(1 - 0) d\tau$$

$$u_1(t) = h \int_0^t 2\tau + \tau^5 - \tau d\tau$$

$$u_1(t) = h \left( \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^6 \right)$$

$$u_1(t) = \frac{1}{2}ht^2 + \frac{1}{6}ht^6$$

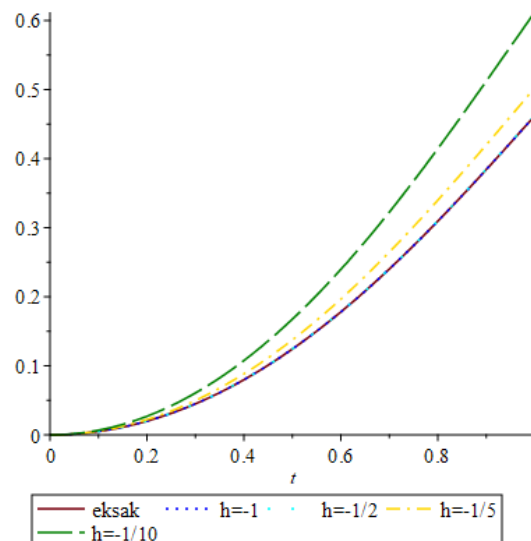
untuk  $m = 2$ , diperoleh:

$$u_2(t) = \frac{1}{2}h(1+h)t^2 + \frac{1}{6}h(1+2h)t^6 + \frac{1}{30}h^2t^{10}$$

untuk  $m = 3$ , diperoleh:

$$u_3(t) = \frac{1}{2}h(1+h)^2t^2 + \frac{2}{3}h(4+16h+23h^2)t^6 + \frac{1}{60}h^2(4+7h)t^{10} + \frac{17}{2520}h^3t^{14}$$

diperoleh pula  $u_4(t)$ ,  $u_5(t)$ , dan seterusnya yang dapat diperoleh dengan bantuan *software* MAPLE, MATLAB, atau yang lainnya. Solusi masalah nilai awal pada persamaan (2.18) dinyatakan dalam bentuk deret pada persamaan (2.21).



Gambar 2.2 Perbandingan Solusi Eksak dan Metode Analisis Homotopi dari Masalah Nilai Awal (2.18)

Perbandingan solusi eksak dan hampiran solusi dari masalah nilai awal (2.18) dengan metode homotopi untuk beberapa nilai  $h$  hingga orde 10 yang ditunjukkan pada Gambar 2.3. Diperoleh bahwa hampiran solusi menggunakan metode homotopi dari masalah nilai awal (2.18) mendekati solusi eksak dengan baik pada  $h = -1$  dan  $h = -1/2$  (Jaharuddin, 2008:17-19).

#### **2.4 Pandangan Islam dalam Menyelesaikan Permasalahan**

Agama Islam mengajarkan banyak hal dalam kehidupan. Al-Qur'an merupakan pedoman bagi umat manusia dan hadits dijadikan sebagai pendukung ajaran syariat Islam. Setiap manusia selalu dihadapkan dalam permasalahan-permasalahan. Masalah akan terus datang setelah masalah yang lalu terselesaikan. Manusia diuji untuk lebih meningkatkan iman kepada Allah SWT. Manusia hendaknya dalam menyelesaikan masalah atau musibah dengan ikhtiar, doa, dan berserah diri kepada Allah.

Sakit merupakan salah satu ujian dari Allah. Sebagai orang muslim harus menghadapinya dengan ikhlas dan sabar karena hal itu datangnya dari Allah dan hanya atas kuasa-Nya penyakit dapat disembuhkan. Rasulullah shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: "*Tha'un (wabah penyakit menular) adalah suatu peringatan dari Allah Subhanahu Wa Ta'ala untuk menguji hamba-hamba-Nya dari kalangan manusia. Maka apabila kamu mendengar penyakit itu berjangkit di suatu negeri, janganlah kamu masuk ke negeri itu. Dan apabila wabah itu berjangkit di negeri tempat kamu berada, jangan pula kamu lari daripadanya.*" (HR Bukhari dan Muslim dari Usamah bin Zaid). Berdasarkan hadits tersebut jika terjadi wabah penyakit di suatu daerah maka hendaknya seseorang menghadapinya dengan tidak

pergi dari daerah tersebut. seperti halnya pada model epidemi SIR dimana pada model tersebut jumlah individu selalu tetap. Seorang yang terjangkit penyakit akan sembuh dan memberikan kekebalan kepadanya.

Allah berfirman dalam surat At-Taghabun Ayat 11 yang artinya: "*Tidak ada suatu musibah yang menimpa (seseorang), kecuali dengan izin Allah; dan barang siapa beriman kepada Allah, niscaya Allah akan memberi petunjuk kepada hatinya. Dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu*". (QS. At-Taghabun 64: Ayat 11). Menurut tafsir Ibnu Katsir, barangsiapa yang ditimpa musibah kemudian dia menyadari bahwa hal itu terjadi atas qadha' dan takdir Allah, lalu dia bersabar dan mengharapkan balasan pahala atas kesabarannya itu, serta menerima keputusan yang telah ditetapkan oleh Allah terhadap dirinya, maka Allah akan memberikan petunjuk ke dalam hatinya dan akan menggantikan apa yang telah hilang dari dirinya di dunia dengan petunjuk dan keyakinan di dalam hatinya. Terkadang Allah Ta'ala mengganti apa yang telah diambil-Nya atau menggantinya dengan yang lebih baik darinya (Ghoffar, Mu'thi, dan Al-Atsari, 2004).

Dalam matematika model epidemi SIR dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Dari permasalahan tersebut tidak semuanya mudah untuk diselesaikan akan tetapi sesuatu masalah akan selalu memiliki solusinya. Sebagai seorang mukmin hendaknya bersabar dalam mengatasinya. Dengan melakukan pendekatan numerik untuk mengetahui berakhirnya wabah penyakit menular. Metode-metode telah banyak dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Pemilihan metode yang tepat merupakan ikhtiar yang harus dilakukan disertai dengan doa dan tawakal.

**BAB III**  
**PEMBAHASAN**

**3.1 Aplikasi Solusi Semi-Analitik Metode Analisis Homotopi pada Model  
Epidemi SIR**

Pada Penelitian ini metode analisis homotopi akan diterapkan untuk menyelesaikan model SIR pada persamaan (2.1). Berdasarkan kondisi awal yang diberikan maka dipilih  $S_0(t) = N_S, I_0(t) = N_I$ , dan  $R_0(t) = N_R$  sebagai pendekatan awal pada  $S(t), I(t)$ , dan  $R(t)$ . Karena  $dR/dt$  tidak bergantung dengan  $dS/dt$  maupun  $dI/dt$  maka cukup digunakan  $dS/dt$  dan  $dI/dt$ . Diberikan parameter  $p \in [0, 1]$  dan dipetakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S(t) &= \phi_1(t, p), \\ I(t) &= \phi_2(t, p). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dibentuk operator linier:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1[\phi_1(t, p)] &= \frac{d\phi_1(t, p)}{dt}, \\ \mathcal{L}_2[\phi_2(t, p)] &= \frac{d\phi_2(t, p)}{dt}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan

$$\mathcal{L}_i[c_i] = 0, \quad i = 1, 2$$

di mana  $c_i$  adalah konstan.

Berdasarkan persamaan (2.1) dibentuk operator tak linier:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)] &= \frac{d\phi_1(t, p)}{dt} + \beta\phi_1(t, p)\phi_2(t, p), \\ \mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)] &= \frac{d\phi_2(t, p)}{dt} - \beta\phi_1(t, p)\phi_2(t, p) + \gamma\phi_2(t, p), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Fungsi homotopi  $\mathcal{H}_1$  dan  $\mathcal{H}_2$  didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(\phi_1(t, p), p, h_1, \mathcal{H}_1(t)) &= (1 - p)\mathcal{L}_1[\phi_1(t, p) - S_0(t)] - \\ &\quad ph_1\mathcal{H}_1(t)\mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)], \\ \mathcal{H}_2(\phi_2(t, p), p, h_2, \mathcal{H}_2(t)) &= (1 - p)\mathcal{L}_2[\phi_2(t, p) - I_0(t)] - \\ &\quad ph_2\mathcal{H}_2(t)\mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)].\end{aligned}\tag{3.4}$$

Misalkan fungsi  $\phi_1(t, p)$  dan  $\phi_2(t, p)$  masing-masing merupakan penyelesaian dari persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1(\phi_3(t, p), p, h_1, \mathcal{H}_1(t)) &= 0 \\ \mathcal{H}_2(\phi_2(t, p), p, h_2, \mathcal{H}_1(t)) &= 0\end{aligned}\tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.5), deformasi orde nol pada persamaan (3.4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(1 - p)\mathcal{L}_1[\phi_1(t, p) - S_0(t)] &= ph_1\mathcal{H}_1(t)\mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)], \\ (1 - p)\mathcal{L}_2[\phi_2(t, p) - I_0(t)] &= ph_2\mathcal{H}_2(t)\mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)],\end{aligned}\tag{3.6}$$

dengan nilai awal

$$\begin{aligned}\phi_1(0, p) &= S_0, \\ \phi_2(0, p) &= I_0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

Berdasarkan persamaan (3.6) jika  $p = 0$  maka diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1[\phi_1(t, 0) - S_0(t)] &= 0, \\ \mathcal{L}_2[\phi_2(t, 0) - I_0(t)] &= 0,\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\phi_1(t, 0) &= S_0(t), \\ \phi_2(t, 0) &= I_0(t),\end{aligned}\tag{3.8}$$

masing-masing adalah pendekatan dari pendekatan awal dari  $S(t)$  dan  $I(t)$ .

Berdasarkan persamaan (3.6) jika  $p = 1$  maka diperoleh

$$h_1 \mathcal{H}_1(t) \mathcal{N}_1[\phi_1(t, 1)] = 0,$$

$$h_2 \mathcal{H}_2(t) \mathcal{N}_2[\phi_2(t, 1)] = 0,$$

atau

$$\mathcal{N}_1[\phi_1(t, 1)] = 0,$$

$$\mathcal{N}_2[\phi_2(t, 1)] = 0. \quad (3.9)$$

Jika  $p$  berubah dari 0 ke 1, maka nilai  $\phi_1(t, p)$  dan  $\phi_2(t, p)$  akan bervariasi dari nilai awal  $S_0(t)$  dan  $I_0(t)$ , ke solusi  $S(t)$  dan  $I(t)$  pada persamaan (2.1). Pemilihan parameter bantu  $h_1$  dan  $h_2$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}_1(t)$  dan  $\mathcal{H}_2(t)$  juga dapat mempengaruhi hasil penyelesaian dari persamaan (3.6) ke persamaan (3.9). Untuk setiap  $p \in [0, 1]$  turunan ke  $m$  dari fungsi  $\phi_1(t, p)$  dan  $\phi_2(t, p)$  terhadap  $p$  yang dihitung  $p = 0$  adalah

$$S_0^{(m)}(t) = \left. \frac{d^m \phi_1(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0},$$

$$I_0^{(m)}(t) = \left. \frac{d^m \phi_2(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0}. \quad (3.10)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (3.10) dibagi dengan  $m!$  diperoleh:

$$\frac{1}{m!} S_0^{(m)}(t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi_1(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0},$$

$$\frac{1}{m!} I_0^{(m)}(t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi_2(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0}, \quad (3.11)$$

dinotasikan sebagai berikut:

$$S_m(t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi_1(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0},$$

$$I_m(t) = \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi_2(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0}, \quad (3.12)$$

Deret Taylor pada fungsi  $\phi_1(t, p)$  dan  $\phi_2(t, p)$  di sekitar  $p = 0$  adalah

$$\begin{aligned}\phi_1(t, p) &= \phi_1(t, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \phi_1(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0} p^m, \\ \phi_2(t, p) &= \phi_2(t, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m \phi_2(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0} p^m.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Berdasarkan persamaan (3.8) dan persamaan (3.12), maka persamaan (3.13) menjadi:

$$\begin{aligned}\phi_1(t, p) &= S_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} S_m(t) p^m, \\ \phi_2(t, p) &= I_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} I_m(t) p^m,\end{aligned}\quad (3.14)$$

untuk  $p = 1$  dari persamaan (3.14) maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\phi_1(t, 1) &= S_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} S_m(t), \\ \phi_2(t, 1) &= I_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} I_m(t).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Karena  $\phi_1(t, 1) = S(t)$  dan  $\phi_2(t, 1) = I(t)$  maka persamaan (3.15) dapat dinyatakan dalam bentuk deret:

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(t), \\ I(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(t),\end{aligned}\quad (3.16)$$

Hasil ini menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara penyelesaian persamaan taklinier dari pendekatan  $S_0, I_0$  ke  $S_m(t), I_m(t)$  untuk  $m = 1, 2, 3, \dots$  yang akan ditentukan. Persamaan untuk menentukan  $S_m$  dan  $I_m$  di mana  $m =$

1, 2, 3, ... dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan (3.6) terhadap  $p$  hingga  $m$  kali dan dihitung pada  $p = 0$  kemudian dibagi dengan  $m!$  maka diperoleh bentuk persamaan deformasi orde ke- $m$ :

$$\mathcal{L}_1[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] = h_1 \mathcal{H}_1(t) \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0},$$

$$\mathcal{L}_2[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] = h_2 \mathcal{H}_2(t) \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0},$$

atau

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] &= h_1 \mathcal{H}_1(t) \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}], \\ \mathcal{L}_2[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] &= h_2 \mathcal{H}_2(t) \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}], \end{aligned} \quad (3.17)$$

dengan kondisi awal:

$$S_m(0) = 0,$$

$$I_m(0) = 0,$$

di mana

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] &= \frac{1}{(m-1)!} \left[ \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \right], \\ \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] &= \frac{1}{(m-1)!} \left[ \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

dengan

$$\vec{S}_{m-1} = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_{m-1}),$$

$$\vec{I}_{m-1} = (I_0, I_1, I_2, \dots, I_{m-1}),$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

Tinjauan dari persamaan (3.6) terdapat pada Lampiran 1.

Berdasarkan persamaan (3.3) kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.18) maka diperoleh bentuk  $\mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}]$  dan  $\mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}]$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] &= S'_{m-1}(t) + \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t) I_{m-1-k}(t), \\ \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] &= I'_{m-1}(t) - \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t) I_{m-1-k}(t) + \gamma I_{m-1}(t).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Tinjauan dari persamaan (3.18) terdapat pada Lampiran 2.

Andaikan pendekatan awal  $S(0) = S_0$  dan  $I(0) = I_0$  dengan  $S_0$  dan  $I_0$  merupakan konstanta bernilai positif. Dengan mengintegrasikan persamaan (3.17) terhadap  $t$ ,  $\mathcal{L}_1[\phi_1(t, p)]$  dan  $\mathcal{L}_2[\phi_2(t, p)]$  berdasarkan persamaan (3.2), memilih parameter bantu  $h_1, h_2, h_3 = -1$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}_1(t), \mathcal{H}_2(t), \mathcal{H}_3(t) = 1$  (Awawdeh, Adawi, dan Mustafa, 2009), maka diperoleh:

$$S_m(t) = \chi_m S_{m-1}(t) - \int_0^t \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] d\tau,$$

$$I_m(t) = \chi_m I_{m-1}(t) - \int_0^t \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] d\tau,$$

atau

$$\begin{aligned}S_m(t) &= \chi_m S_{m-1}(t) - \int_0^t \left[ S'_{m-1}(\tau) + \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(\tau) I_{m-1-k}(\tau) \right] d\tau, \\ I_m(t) &= \chi_m I_{m-1}(t) - \int_0^t \left[ I'_{m-1}(\tau) - \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(\tau) I_{m-1-k}(\tau) + \gamma I_{m-1}(\tau) \right] d\tau,\end{aligned}\quad (3.20)$$

Tinjauan dari persamaan (3.17) terdapat pada Lampiran 3.

### 3.2 Kevalidan Metode Analisis Homotopi pada Model Epidemologi SIR

Berikut ini merupakan bukti kevalidan dari metode analisis homotopi selama deret pada persamaan (3.16) konvergen, dimana  $S_m(t)$  dan  $I_m(t)$  diatur oleh persamaan deformasi orde tinggi (3.17), harus menjadi solusi eksak dari persamaan (2.1):

#### Pembuktian:

Jika deret

$$\sum_{m=0}^{+\infty} S_m(t),$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} I_m(t),$$

konvergen, maka dapat ditulis

$$S(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(t),$$

$$I(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(t).$$

maka berlaku

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m(t) = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m(t) = 0 \tag{3.21}$$

Berdasarkan definisi dari  $\chi_m$ , maka diperoleh

$$\sum_{m=1}^n [S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)]$$

$$= S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots + (S_n - S_{n-1})$$

$$= S_n(t)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n [I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] \\
&= I_1 + (I_2 - I_1) + (I_3 - I_2) + \cdots + (I_n - I_{n-1}) \\
&= I_n(t)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.21),

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} [S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] &= \lim_{m \rightarrow +\infty} S_n(t) \\
\sum_{m=1}^{+\infty} [I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] &= \lim_{m \rightarrow +\infty} I_n(t)
\end{aligned}$$

kemudian berdasarkan ekspresi berikut dan operator linier pada persamaan (3.2), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \sum_{m=1}^{+\infty} [S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L}[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] = 0, \\
\mathcal{L} \sum_{m=1}^{+\infty} [I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] &= \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L}[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] = 0.
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.17), diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \sum_{m=1}^n [S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] &= h_1 \mathcal{H}_1(t) \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] = 0 \\
\mathcal{L} \sum_{m=1}^n [I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] &= h_2 \mathcal{H}_2(t) \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] = 0
\end{aligned}$$

Karena  $h \neq 0$  dan  $\mathcal{H}(t) \neq 0$ , maka:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] = 0$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] = 0 \quad (3.22)$$

Dari persamaan (3.19), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] &= S'(t) + \beta S(t)I(t) \\ \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] &= I'(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Berdasarkan persamaan (3.22) dan (3.23), maka

$$S'(t) + \beta S(t)I(t) = 0$$

$$I'(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) = 0$$

atau

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

Tinjauan dari persamaan (3.23) terdapat pada Lampiran 4.

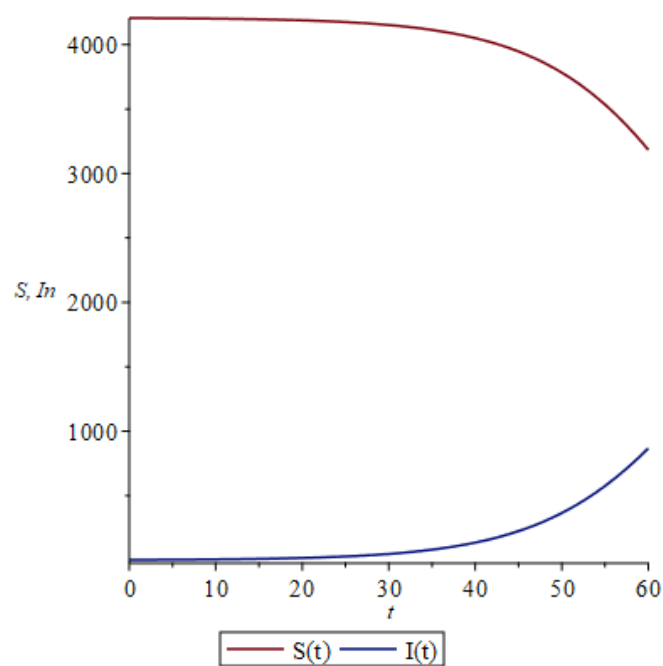
Maka berlaku:

$$\begin{aligned} S(0) &= \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(0) = S_0(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} S_m(0) = S_0(0) = 0 \\ I(0) &= \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(0) = I_0(0) + \sum_{m=1}^{+\infty} I_m(0) = I_0(0) = 0 \end{aligned}$$

Hal ini dapat dilihat penerapan metode analisis homotopi kembali ke persamaan awal.

### 3.3 Implementasi Metode Analisis Homotopi pada Model Epidemologi SIR dalam Penyebaran COVID-19 di Jepang

Untuk mengetahui hasil numerik dari penerapan metode analisis homotopi digunakan nilai parameter dan nilai awal berdasarkan Tabel 1.1. Berikut merupakan hasil simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dari model epidemologi SIR yang direduksi dalam penyebaran COVID-19 di Jepang pada saat  $0 \leq t \leq 60$



Gambar 3.1 Grafik Model Epidemologi dengan Metode RKF 45

Hasil simulasi numerik tersebut akan dibandingkan dengan pendekatan metode analisis homotopi dengan bentuk deret pada persamaan (3.16). Dengan pendekatan awal  $S_0(t) = N_S$  dan  $I_0(t) = N_I$  dengan  $N_S = 72$  dan  $N_I = 16$  (Barlow dan Weinstein, 2020). Berdasarkan persamaan (3.20) solusi metode analisis homotopi diperoleh sebagai berikut:

untuk  $m = 1$  diperoleh:

$$S_1(t) = \chi_1 S_0(t) - \int_0^t S'_0(\tau) + \beta S_0(\tau) I_0(\tau) d\tau$$

$$= 0 \cdot 4206 - \int_0^t 0 + (2,9236 \times 10^{-5} \cdot 4206 \cdot 2) d\tau$$

$$= 0 - \int_0^t -0,2459332320 d\tau$$

$$= -0,2459332320t$$

$$I_1(t) = \chi_1 I_0(t) - \int_0^t I_0'(\tau) - \beta S_0(\tau) I_0(\tau) + \gamma I_0(\tau) d\tau$$

$$= 0 \cdot 2 - \int_0^t 0 - (2,9236 \times 10^{-5} \cdot 4206 \cdot 2) + (0,0164 \cdot 2) d\tau$$

$$= 0 - \int_0^t 0,2131332320 d\tau$$

$$= 0,2131332320t$$

untuk  $m = 2$  diperoleh:

$$S_2(t) = \chi_2 S_1(t) - \int_0^t S_1'(\tau) + \beta S_0(\tau) I_1(\tau) + \beta S_1(\tau) I_0(\tau) d\tau$$

$$= 1 \cdot -0,2459332320t - \int_0^t -0,2459332320 \tau$$

$$+ (2,9236 \times 10^{-5} \cdot 4206 \cdot 0,2131332320\tau)$$

$$+ (2,9236 \times 10^{-5} \cdot -0,2459332320\tau \cdot 2) d\tau$$

$$= -0,01309694604t^2$$

$$I_2(t) = \chi_2 I_1(t) - \int_0^t I_1'(\tau) - \beta S_0(\tau) I_1(\tau) - \beta S_1(\tau) I_0(\tau) + \gamma I_0(\tau) d\tau$$

$$= 1 \cdot 0,2131332320t - \int_0^t 174,7692309\tau$$

$$+ (-2,9236 \times 10^{-5} \cdot 4206 \cdot 0,2131332320\tau)$$

$$+ (-2,9236 \times 10^{-5} \cdot -0,2459332320\tau \cdot 2)$$

$$+ (0,0164 \cdot 0,2131332320\tau) d\tau$$

$$= 0,01134925354 \cdot t^2$$

dan seterusnya dengan menggunakan bantuan *software maple* sampai orde 9 disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 3.1 Nilai  $S_m(t)$  dan  $I_m(t)$  orde ke  $m$

$m$	$S_m(t)$	$I_m(t)$
3	$-0.0004644270157t^3$	$0.0004023844297t^3$
4	$-0.00001232237104t^4$	$0.00001067259488t^4$
5	$-2.603039200 \times 10^{-7}t^5$	$2.252978088 \times 10^{-7}t^5$
6	$-4.537865820 \times 10^{-9}t^6$	$3.922051810 \times 10^{-9}t^6$
7	$-6.644791591 \times 10^{-11}t^7$	$5.725910881 \times 10^{-11}t^7$
8	$-8.147606991 \times 10^{-13}t^8$	$6.973795261 \times 10^{-13}t^8$
9	$-7.989705006 \times 10^{-15}t^9$	$6.718924536 \times 10^{-15}t^9$

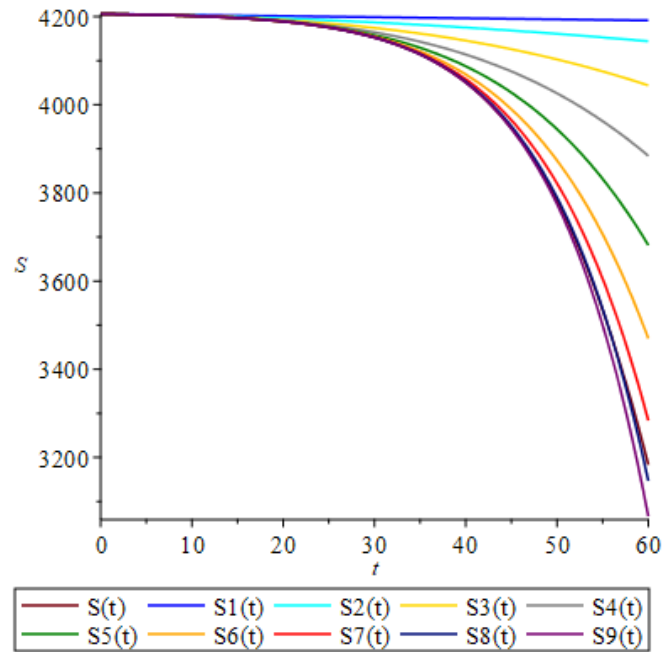
Jadi hasil hampiran solusi metode analisis homotopi berdasarkan persamaan (3.16) adalah:

$$\begin{aligned}
 S(t) \approx & 4206 + (-0,2459332320t) + (-0,01309694604) \\
 & + (-0.0004644270157t^3) + (-0.00001232237104t^4) \\
 & + (-2.603039200 \times 10^{-7}t^5) + (-4.537865820 \times 10^{-9}t^6) \\
 & + (-6.644791591 \times 10^{-11}t^7) + (-8.147606991 \times 10^{-13}t^8) \\
 & + (-7.989705006 \times 10^{-15}t^9)
 \end{aligned}$$

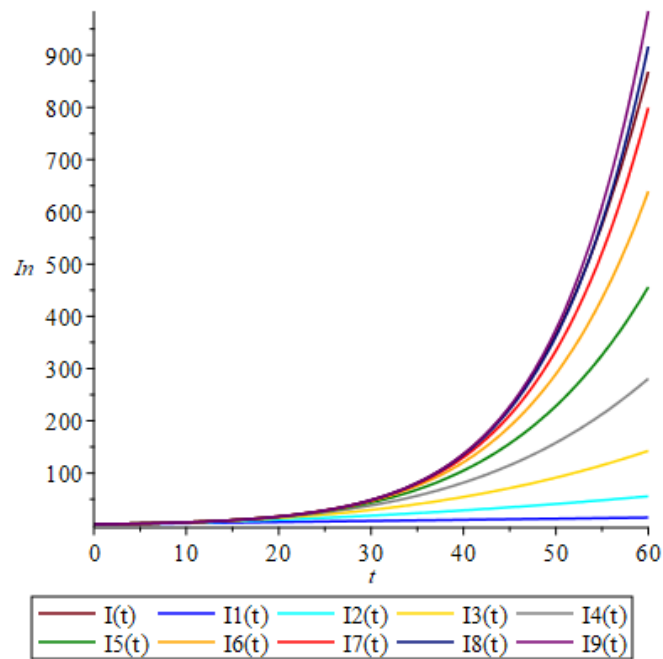
$$\begin{aligned}
 I(t) \approx & 2 + (0,2131332320t) + (0,01134925354 \cdot t^2) \\
 & + (0.0004023844297t^3) + (0.00001067259488t^4) \\
 & + (2.252978088 \times 10^{-7}t^5) + (3.922051810 \times 10^{-9}t^6) \\
 & + (5.725910881 \times 10^{-11}t^7) + (6.973795261 \times 10^{-13}t^8) \\
 & + (6.718924536 \times 10^{-15}t^9)
 \end{aligned}$$

Dengan bantuan *software maple* solusi model epidemi dengan menggunakan metode analisis homotopi sampai 9 dan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dapat disajikan dalam bentuk grafik. Berikut merupakan hasil Perbandingan metode

Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dengan metode analisis homotopi pada  $S(t)$  dan  $I(t)$ :



Gambar 3.2 Grafik  $S(t)$  dengan Metode RKF 45 dan MAH



Gambar 3.3 Grafik  $I(t)$  dengan Metode RKF 45 dan MAH

Pada Gambar 3.2 dan Gambar 3.3 menunjukkan bahwa pemilihan orde pada metode analisis homotopi dapat menyebabkan hampiran solusi analitik. Dapat dilihat

bahwa solusi dari metode analisis homotopi bervariasi berdasarkan ordenya. Setiap pemilihan orde yang digunakan pada metode analisis homotopi mendekati solusi Runge Kutta Fehlberg (RKF 45). Berikut hasil perbandingan galat pada model epidemi dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode analisis homotopi pada saat  $0 \leq t \leq 60$ :

Tabel 3.3 Solusi Metode Runge Kutta Fehlberg dan Metode Analisis Homotopi

t	Variabel	RKF 45	MAH 1	MAH 2	MAH 3	MAH 4
10	S	4201,6120004	4203.5406676	4202.23097307	4201.76654606	4201.64332234
	I	5,8024685	4.13133232	5.668642103	5.668642103	5.77536805
20	S	4188,9217778	4201.0813353	4195.84255694	4192.12714081	4190.15556145
	I	16,7958708	6.26266464	10.802366056	14.021441493	15.72905667
30	S	4152,5238241	4198.6220030	4186.83475160	4174.29522218	4164.31410163
	I	48,2983556	8.39399695	29.472704747	29.472704747	38.11750660
40	S	4050,5571941	4196.1626707	4175.20755705	4145.48422805	4113.93895818
	I	136,3186753	10.52532928	28.684134944	54.436738444	81.75858133
50	S	3782,7495632	4193.7033384	4160.9609733	4102.90759633	4025.89277733
	I	365,7553175	41.02979544	41.029795449	91.327849162	158.03156716
60	S	3183,7131722	4191.2440060	4144.09500033	4043.77876494	3884.08083626
	I	868.0818672	14.78799392	55.645306663	142.560343479	280.87717312
t	Variabel	MAH 5	MAH 6	MAH 7	MAH 8	MAH 9
10	S	4201.6172919	4201.6127540	4201.61208961	4201.61200813	4201.61200014
	I	5.7978978	5.8018198	5.80239247	5.80246221	5.80246893
20	S	4189.3225889	4189.0321654	4188.94711216	4188.92625428	4188.92216356
	I	16.4500096	16.7010209	16.77431263	16.79216555	16.79560564
30	S	4157.9887163	4154.6806121	4153.22739627	4152.69283178	4152.53557041
	I	46.4514191	46.4514191	47.70367583	48.29347513	48.29347513
40	S	4087.2838367	4068.6967383	4057.80991183	4052.47029612	4050.37584289
	I	104.8290769	120.8938011	130.27513355	134.84548002	136.60680577
50	S	3944.5478023	3873.6436489	3821.73121459	3789.90462478	3774.29973219
	I	228.4371324	289.7191919	334.45287070	361.69425843	374.81715792
60	S	3681.6685080	3469.9498403	3283.93820249	3147.08969185	3066.57187367
	I	456.0687492	639.0559984	799.34485733	916.47783834	984.18911726

Tabel 3.3 menunjukkan hasil numerik pada solusi model epidemi dengan menggunakan metode analisis homotopi sampai orde ke 9 pada saat  $0 \leq t \leq 60$ . Dapat dilihat bahwa semakin tinggi ordenya semakin mendekati solusi RKF 45. Hal ini dipengaruhi nilai awal, nilai parameter, dan orde yang digunakan. Metode analisis homotopi memiliki solusi yang menghampiri solusi penyelesaian metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45). Galat yang dihasilkan pada  $S(t)$  dan  $I(t)$  dengan

menggunakan metode analisis homotopi orde 8 lebih kecil daripada orde yang lainnya.

## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **2.1 Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan pada bab III dapat disimpulkan bahwa model epidemi SIR dapat diselesaikan dengan baik menggunakan metode analisis homotopi. Solusi model epidemi SIR dinyatakan dalam bentuk deret. Metode ini memberikan cara yang mudah untuk menyesuaikan wilayah konvergensi dan laju aproksimasi.

Metode analisis homotopi menghasilkan kekonvergenan hampiran solusi analitik dengan cukup cepat. Hasil numerik pada setiap orde metode analisis homotopi bervariasi. Perbandingan metode analisis homotopi sampai orde ke 9 dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) menghasilkan perbedaan selisih yang kecil orde ke 8. Hal ini menunjukkan pemilihan orde yang digunakan metode analisis homotopi pada model epidemi SIR sangat berpengaruh.

#### **2.2 Saran**

Pada penelitian ini metode analisis homotopi diterapkan pada persamaan diferensial biasa. Penelitian selanjutnya disarankan untuk menerapkan metode ini pada persamaan diferensial parsial.

## DAFTAR PUSTAKA

- Arti, Erni Juni. 2010. "Penggunaan Metode Homotopi Untuk Menyelesaikan Model Populasi Volterra." Institut Pertanian Bogor.
- Awawdeh, Fadi, A. Adawi, dan Z. Mustafa. 2009. "Solutions of the SIR Models of Epidemics Using HAM." *Chaos, Solitons and Fractals* 42(5): 3047–52. <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2009.04.012>.
- Barlow, Nathaniel S., dan Steven J. Weinstein. 2020. "Accurate Closed-Form Solution of the SIR Epidemic Model." *Physica D: Nonlinear Phenomena* 408: 132540. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132540>.
- Barnes, B, dan G R Fulford. 2003. "Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equation Approach Using Maple." *Choice Reviews Online* 41(04): 41-2216-41–2216.
- Biazar, J. 2006. "Solution of the Epidemic Model by Adomian Decomposition Method." *Applied Mathematics and Computation* 173(2): 1101–6.
- Ghoffar, M. Abdul, Abdurrahim Mu'thi, dan Abu Ihsan Al-Atsari. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Jaharuddin. 2008. "Analisis Homotopi Dalam Penyelesaian Suatu Masalah Taklinear." *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 7: 13–20.
- Kasbawati. 2011. "Analisis Numerik Model Epidemiologi SIR Dengan Faktor Difusi." *Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi* 7(2): 98–107.
- Laila, Alfu. 2016. "Metode Homotopi Dalam Menyelesaikan Model Predator Prey." UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Li, Michael Y. 2018. *An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases*. Switzerland: Springer.
- Liao, Shijun. 2004. *Beyond Perturbation*. Florida: CRC Press LLC.
- Martcheva, Maia. 2015. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York: Springer.
- Momoh, A. A., M. O. Ibrahim, A. Tahir, dan Ibrahim Isa Adamu. 2015. "Application of Homotopy Analysis Method for Solving the SEIR Models of Epidemics." *Nonlinear Analysis and Differential Equations* 3(2): 53–68.
- Munir, R. 2015. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling (Aplikasi Pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, Dan Perikanan)*. Malang: UIN Malang Press.

Rafei, M, D D Ganji, dan H Daniali. 2007. "Solution of the Epidemic Model by Homotopy Perturbation Method." 187: 1056–62.

Royden, H. L., dan P. M. Fitzpatrick. 2010. 53 *Real Analysis*. Republic of China: Prentice Hall.

## Lampiran 1

Tinjauan persamaan (3.6)

Misalkan:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$$

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$$

$$h_1 = h_2 = h$$

$$(1-p)\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)] = ph\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)],$$

$$(1-p)\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)] = ph\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)],$$

atau

$$\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)] - p\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)] = ph\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]$$

$$\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)] - p\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)] = ph\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]$$

turunan pertama pada kedua ruas persamaan (3.6) terhadap  $p$  diperoleh:

$$\frac{d\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp} - \mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)] - p \frac{d\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp}$$

$$= h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)] + ph\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]}{dp} \right]$$

$$\frac{d\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp} - \mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)] - p \frac{d\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp}$$

$$= h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)] + ph\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]}{dp} \right]$$

untuk  $p = 0$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d\phi_1(t,p) - S_0(t)}{dp} \right] \Big|_{p=0} - \mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]|_{p=0} = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d\phi_2(t,p) - I_0(t)}{dp} \right] \Big|_{p=0} - \mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]|_{p=0} = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d\phi_1(t,p)}{dp} \right] \Big|_{p=0} - \mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]|_{p=0} = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d\phi_2(t,p)}{dp} \right] \Big|_{p=0} - \mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]|_{p=0} = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]|_{p=0}$$

diperoleh:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{1!} \frac{d\phi_1(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} - \frac{1}{1!} \phi_1(t,0) + \frac{1}{1!} S_0(t) \right] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{1!} \frac{d\phi_2(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} - \frac{1}{1!} \phi_2(t,p) + \frac{1}{1!} I_0(t) \right] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L}[S_1(t) - S_0(t) + S_0(t)] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L}[I_1(t) - I_0(t) + I_0(t)] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L}[S_1(t)] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]|_{p=0}$$

$$\mathcal{L}[I_1(t)] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]|_{p=0}$$

turunan kedua pada kedua ruas persamaan (3.6) untuk  $m = 2$  terhadap  $p$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp^2} - 2 \frac{d\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp} - p \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp^2} \\ = 2h\mathcal{H}(t) \frac{d\mathcal{N}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp} + ph\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]}{dp^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp^2} - 2 \frac{d\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp} - p \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp^2} \\ = 2h\mathcal{H}(t) \frac{d\mathcal{N}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp} + ph\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]}{dp^2} \end{aligned}$$

untuk  $p = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp^2} \Big|_{p=0} - 2 \frac{d\mathcal{L}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp} \Big|_{p=0} \right] \\ = 2h\mathcal{H}(t) \frac{d\mathcal{N}[\phi_1(t,p) - S_0(t)]}{dp} \Big|_{p=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp^2} \Big|_{p=0} - 2 \frac{d\mathcal{L}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp} \Big|_{p=0} \right] \\ = 2h\mathcal{H}(t) \frac{d\mathcal{N}[\phi_2(t,p) - I_0(t)]}{dp} \Big|_{p=0} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2!} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2[\phi_1(t,p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} - 2 \frac{d\mathcal{L}[\phi_1(t,p)]}{dp} \Big|_{p=0} \right] = \frac{1}{2!} 2h\mathcal{H}(t) \frac{d\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]}{dp} \Big|_{p=0}$$

$$\frac{1}{2!} \mathcal{L} \left[ \frac{d^2[\phi_2(t,p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} - 2 \frac{d\mathcal{L}[\phi_2(t,p)]}{dp} \Big|_{p=0} \right] = \frac{1}{2!} 2h\mathcal{H}(t) \frac{d\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]}{dp} \Big|_{p=0}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{2!} \frac{d^2[\phi_1(t,p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} - \frac{d\mathcal{L}[\phi_1(t,0)]}{dp} \Big|_{p=0} \right] = h\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d\mathcal{N}[\phi_1(t,p)]}{dp} \right] \Big|_{p=0}$$

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{2!} \frac{d^2[\phi_2(t,p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} - \frac{d\mathcal{L}[\phi_2(t,0)]}{dp} \Big|_{p=0} \right] = h\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d\mathcal{N}[\phi_2(t,p)]}{dp} \right] \Big|_{p=0}$$

$$\mathcal{L}[S_2(t) - S_1(t)] = h\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp} \right] \Big|_{p=0}$$

$$\mathcal{L}[I_2(t) - I_1(t)] = h\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp} \right] \Big|_{p=0}$$

Turunan ketiga pada kedua ruas persamaan (3.6) untuk  $m = 3$  terhadap  $p$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^3} - 3 \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} - p \frac{d^3\mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^3} \\ = 3h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} + ph\mathcal{H}(t) \frac{d^3\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^3} \\ \frac{d^3\mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^3} - 3 \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} - p \frac{d^3\mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^3} \\ = 3h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} + ph\mathcal{H}(t) \frac{d^3\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^3} \end{aligned}$$

untuk  $p = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^3} \Big|_{p=0} - 3 \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} &= 3h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} \\ \frac{d^3\mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^3} \Big|_{p=0} - 3 \frac{d^2\mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} &= 3h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} \\ \frac{1}{3!} \mathcal{L} \left[ \frac{d^3\phi_1(t, p)}{dp^3} \Big|_{p=0} - 3 \frac{d^2\phi_1(t, p)}{dp^2} \Big|_{p=0} \right] &= \frac{1}{3!} 3h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} \\ \frac{1}{3!} \mathcal{L} \left[ \frac{d^3\phi_2(t, p)}{dp^3} \Big|_{p=0} - 3 \frac{d^2\phi_2(t, p)}{dp^2} \Big|_{p=0} \right] &= \frac{1}{3!} 3h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} \\ \mathcal{L} \left[ \frac{1}{3!} \frac{d^3\phi_1(t, p)}{dp^3} \Big|_{p=0} - \frac{1}{2!} \frac{d^2\phi_1(t, p)}{dp^2} \Big|_{p=0} \right] &= \frac{1}{2!} h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} \\ \mathcal{L} \left[ \frac{1}{3!} \frac{d^3\phi_2(t, p)}{dp^3} \Big|_{p=0} - \frac{1}{2!} \frac{d^2\phi_2(t, p)}{dp^2} \Big|_{p=0} \right] &= \frac{1}{2!} h\mathcal{H}(t) \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} \Big|_{p=0} \\ \mathcal{L}[S_3(t) - S_2(t)] &= \frac{1}{2!} h\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} \right] \Big|_{p=0} \\ \mathcal{L}[I_3(t) - I_2(t)] &= \frac{1}{2!} h\mathcal{H}(t) \left[ \frac{d^2\mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} \right] \Big|_{p=0} \end{aligned}$$

Berdasarkan turunan pertama, kedua, dan ketiga maka dapat dinyatakan secara umum turunan ke- $m$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^m \mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^m} - m \frac{d^{m-1} \mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} - p \frac{d^m \mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^m} \\
&= mh\mathcal{H}(t) \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} + ph\mathcal{H}(t) \frac{d^m \mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^m} \\
& \frac{d^m \mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^m} - m \frac{d^{m-1} \mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} - p \frac{d^m \mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^m} \\
&= mh\mathcal{H}(t) \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} + ph\mathcal{H}(t) \frac{d^m \mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^m}
\end{aligned}$$

Untuk  $p = 0$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d^m \mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^m} \right|_{p=0} - m \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{L}[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \\
&= mh\mathcal{H}(t) \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \\
& \left. \frac{d^m \mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^m} \right|_{p=0} - m \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{L}[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \\
&= mh\mathcal{H}(t) \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0}
\end{aligned}$$

selanjutnya kedua ruas persamaan di atas dibagi dengan  $m!$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m!} \mathcal{L} \left[ \left. \frac{d^3 \phi_1(t, p)}{dp^3} \right|_{p=0} - m \left. \frac{d^2 \phi_1(t, p)}{dp^2} \right|_{p=0} \right] = \frac{1}{m!} mh\mathcal{H}(t) \left. \frac{d^2 \mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^2} \right|_{p=0} \\
& \frac{1}{m!} \mathcal{L} \left[ \left. \frac{d^3 \phi_2(t, p)}{dp^3} \right|_{p=0} - m \left. \frac{d^2 \phi_2(t, p)}{dp^2} \right|_{p=0} \right] = \frac{1}{m!} mh\mathcal{H}(t) \left. \frac{d^2 \mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^2} \right|_{p=0}
\end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} \left[ \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi_1(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0} - \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \phi_1(t, p)}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \right] \\
&= \frac{1}{(m-1)!} h\mathcal{H}(t) \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \\
& \mathcal{L} \left[ \left. \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi_2(t, p)}{dp^m} \right|_{p=0} - \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} \phi_2(t, p)}{dp^{m-1}} \right|_{p=0} \right] \\
&= \frac{1}{(m-1)!} h\mathcal{H}(t) \left. \frac{d^{m-1} \mathcal{N}[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \right|_{p=0}
\end{aligned}$$

atau

$$\mathcal{L}[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] = h\mathcal{H}(t) \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}]$$

$$\mathcal{L}[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] = h\mathcal{H}(t)\mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}]$$

dengan

$$\mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1} N_1[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \Big|_{p=0} \right]$$

$$\mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1} N_2[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \Big|_{p=0} \right]$$

$$\vec{S}_{m-1} = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_{m-1})$$

$$\vec{I}_{m-1} = (I_0, I_1, I_2, \dots, I_{m-1})$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

## Lampiran 2

Tinjauan persamaan (3.18)

Diketahui  $\mathcal{N}_1$  dan  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$  yang telah dimisalkan dan bentuk umum  $\mathcal{R}_{1m}$  dan  $\mathcal{R}_{2m}$  dari persamaan (3.18) untuk  $m = 1$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] &= \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1} \mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)]}{dp^{m-1}} \Big|_{p=0} \right] \\ \mathcal{R}_{11}[\vec{S}_0] &= \mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)]|_{p=0} \\ \mathcal{R}_{11}[\vec{S}_0] &= \frac{d\phi_1(t, p)}{dt} \Big|_{p=0} + \beta \phi_1(t, p) \phi_2(t, p)|_{p=0} \\ \mathcal{R}_{11}[\vec{S}_0] &= \frac{d\phi_1(t, 0)}{dt} + \beta \phi_1(t, 0) \phi_2(t, 0) \\ \mathcal{R}_{11}[\vec{S}_0] &= \frac{dS_0(t)}{dt} + \beta S_0(t) I_0(t) \\ \mathcal{R}_{11}[\vec{S}_0] &= S'_0(t) + \beta S_0(t) I_0(t) \\ \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] &= \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1} \mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)]}{dp^{m-1}} \Big|_{p=0} \right] \\ \mathcal{R}_{21}[\vec{I}_0] &= \mathcal{N}_2[\phi_2(t, p)]|_{p=0} \\ \mathcal{R}_{21}[\vec{I}_0] &= \frac{d\phi_2(t, p)}{dt} \Big|_{p=0} - \beta \phi_1(t, p) \phi_2(t, p)|_{p=0} + \gamma \phi_2(t, p)|_{p=0} \\ \mathcal{R}_{21}[\vec{I}_0] &= \frac{d\phi_2(t, 0)}{dt} - \beta \phi_1(t, 0) \phi_2(t, 0) + \gamma \phi_2(t, 0) \\ \mathcal{R}_{21}[\vec{I}_0] &= \frac{dI_0(t)}{dt} - \beta S_0(t) I_0(t) + \gamma I_0(t) \\ \mathcal{R}_{21}[\vec{I}_0] &= I'_0(t) - \beta S_0(t) I_0(t) + \gamma I_0(t) \end{aligned}$$

untuk  $m = 2$  diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}[\vec{S}_1] &= \frac{d\mathcal{N}_1[\phi_1(t, p)]}{dp} \Big|_{p=0} \\ \mathcal{R}_{12}[\vec{S}_1] &= \frac{d}{dp} \left[ \frac{d\phi_1(t, p)}{dt} \Big|_{p=0} + \beta \phi_1(t, p) \phi_2(t, p)|_{p=0} \right] \\ \mathcal{R}_{12}[\vec{S}_1] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi_1(t, p)}{dp} \Big|_{p=0} \right) + \frac{d}{dp} [\beta \phi_1(t, p) \phi_2(t, p)|_{p=0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{12}[\vec{S}_1] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi_1(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} \right) + \beta \frac{d\phi_1(t,p)}{dp} \phi_2(t,p)|_{p=0} \\
&\quad + \beta \phi_1(t,p) \frac{d\phi_2(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} \\
\mathcal{R}_{12}[\vec{S}_1] &= \left( \frac{dS_1(t)}{dt} \right) + \beta(S_1(t)I_0(t)) + \beta(S_0(t)I_1(t)) \\
\mathcal{R}_{12}[\vec{S}_1] &= S'_1(t) + \beta(S_1(t)I_0(t)) + \beta(S_0(t)I_1(t)) \\
\mathcal{R}_{22}[\vec{I}_1] &= \frac{d\mathcal{N}_2[\phi_2(t,p)]}{dp} \Big|_{p=0} \\
\mathcal{R}_{22}[\vec{I}_1] &= \frac{d}{dp} \left[ \frac{d\phi_2(t,p)}{dt} \Big|_{p=0} - \beta\phi_1(t,p)\phi_2(t,p)|_{p=0} + \gamma\phi_2(t,p)|_{p=0} \right] \\
\mathcal{R}_{22}[\vec{I}_1] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi_2(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} \right) - \frac{d}{dp} [\beta\phi_1(t,p)\phi_2(t,p)|_{p=0}] \\
&\quad + \gamma \frac{d}{dp} \phi_2(t,p)|_{p=0} \\
\mathcal{R}_{22}[\vec{I}_1] &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi_2(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} \right) - \beta \frac{d\phi_1(t,p)}{dp} \phi_2(t,p)|_{p=0} \\
&\quad - \beta\phi_1(t,p) \frac{d\phi_2(t,p)}{dp} \Big|_{p=0} + \gamma \frac{d}{dp} \phi_2(t,p)|_{p=0} \\
\mathcal{R}_{22}[\vec{I}_1] &= \left( \frac{dI_1(t)}{dt} \right) - \beta(S_1(t)I_0(t)) - \beta(S_0(t)I_1(t)) + \gamma I_1(t) \\
\mathcal{R}_{22}[\vec{I}_1] &= I'_1(t) - \beta(S_1(t)I_0(t)) - \beta(S_0(t)I_1(t)) + \gamma I_1(t)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh bentuk umum dari

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] &= S'_{m-1}(t) + \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t)I_{m-1-k}(t), \\
\mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] &= I'_{m-1}(t) - \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t)I_{m-1-k}(t) + \gamma I_{m-1}(t), \quad (3.19)
\end{aligned}$$

### Lampiran 3

Tinjauan persamaan (3.17)

Dengan menggunakan turunan deformasi Orde  $m$  pada persamaan (3.17)

$$\mathcal{L}_1[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] = h_1 \mathcal{H}_1(t) \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}]$$

$$\mathcal{L}_2[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] = h_2 \mathcal{H}_2(t) \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}]$$

dan operator linier pada persamaan (3.2)

$$\mathcal{L}_1[\phi_1(t, p)] = \frac{d\phi_1(t, p)}{dt}$$

$$\mathcal{L}_2[\phi_2(t, p)] = \frac{d\phi_2(t, p)}{dt}$$

Dimisalkan parameter bantu  $h_1, h_2, h_3 = -1$  dan fungsi bantu  $\mathcal{H}_1(t), \mathcal{H}_2(t), \mathcal{H}_3(t) = 1$  pada persamaan (3.17) diperoleh:

$$\mathcal{L}_1[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] = -\mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}]$$

$$\mathcal{L}_2[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] = -\mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}]$$

Dengan mensubstitusikan operator linier persamaan (3.2) maka diperoleh

$$\frac{d}{dt}[S_m(t) - \chi_m S_{m-1}(t)] = -\mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}]$$

$$\frac{d}{dt}[I_m(t) - \chi_m I_{m-1}(t)] = -\mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}]$$

Integral dari kedua ruas persamaan di atas terhadap  $t$ , diperoleh:

$$S_m(t) = \chi_m S_{m-1}(t) - \int_0^t \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] d\tau$$

$$I_m(t) = \chi_m I_{m-1}(t) - \int_0^t \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] d\tau$$

#### Lampiran 4

Tinjauan persamaan (3.23)

Berdasarkan persamaan (3.19), maka berlaku

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{1m}[\vec{S}_{m-1}] &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ S'_{m-1}(t) + \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t) I_{m-1-k}(t) \right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} S'_m(t) + \beta \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t) I_{m-1-k}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} S'_m(t) + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=k+1}^{+\infty} S_k(t) I_{m-1-k}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} S'_m(t) \beta \sum_{k=0}^{+\infty} S_k(t) \sum_{i=0}^{+\infty} I_i(t) \\
&= S'(t) + \beta S(t) I(t) \\
\sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{R}_{2m}[\vec{I}_{m-1}] &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ I'_{m-1}(t) - \beta \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t) I_{m-1-k}(t) + \gamma I_{m-1}(t) \right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} I'_m(t) - \beta \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} S_k(t) I_{m-1-k}(t) + \gamma \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(t) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} I'_m(t) - \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=k+1}^{+\infty} S_k(t) I_{m-1-k}(t) + \gamma \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(t) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} I'_m(t) - \beta \sum_{k=0}^{+\infty} S_k(t) \sum_{i=0}^{+\infty} I_i(t) + \gamma \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(t) \\
&= I'(t) - \beta S(t) I(t) + \gamma I(t)
\end{aligned}$$

## RIWAYAT HIDUP



Gian Ardianzah, lahir di Magetan pada tanggal 17 Oktober 1998. Anak kedua dari Bapak Sukatno dan Ibu Suci Lestari. Bertempat tinggal di Jl. Karya Darma No.173 RT 01 RW 04 Desa Ringinagung Kec. Magetan Kab. Magetan.

Pendidikan yang ditempuh olehnya dimulai di RA Al-Ikhlas, lalu pendidikan dasarnya di SDN Magetan 4 dan lulus pada tahun 2011, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 4 Magetan dan lulus pada tahun 2014. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 2 Magetan dan lulus tahun 2017. Pada tahun yang sama dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Program Studi Matematika. Dia juga menempuh pendidikan nonformal di MD. Nurul Huda.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi atau komunitas intra dan ekstra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Berbagai macam kepanitiaan telah dia ikuti. Dia pernah menjadi ketua Komunitas Serambi Matematika Aktif (SEMATA) pada periode 2019/2020. Dia juga pernah menjadi asisten laboratorium di Program Studi Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Gian Ardianzah  
NIM : 17610071  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Implementasi Metode Analisis Homotopi (MAH) pada  
Solusi Semi-Analitik Model Epidemologi SIR  
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si  
Pembimbing II : Dr. Hairur Rahman, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 November 2020	Konsultasi Bab I, II, III	1.
2.	27 November 2020	Revisi Bab I, II, III	2.
3.	27 Januari 2021	Konsultasi Lanjut Bab I, II, III	3.
4.	26 Maret 2021	Konsultasi Agama Bab I, II	4.
5.	26 April 2021	Revisi Agama Bab I, II	5.
6.	5 Mei 2021	ACC untuk Seminar Proposal	6.
7.	12 Juni 2021	Konsultasi Bab III, IV	7.
8.	18 Juni 2021	Konsultasi Agama Bab I, II	8.
9.	18 Juni 2021	ACC untuk Sidang Skripsi	9.
10.	22 Juni 2021	Konsultasi Pra Sidang	10.

Malang, 1 Juli 2021  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001