MODIFIKASI METODE NEWTON-SECANT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINIER YANG MEMILIKI MULTIPLISITAS $M > 1$

SKRIPSI

OLEH
IMROATUL KHOIRIYAH
NIM. 17610110

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

MODIFIKASI METODE NEWTON-SECANT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINIER YANG MEMILIKI MULTIPLISITAS $M > 1$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH
IMROATUL KHOIRIYAH
NIM. 17610110

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

MODIFIKASI METODE NEWTON-SECANT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINIER YANG MEMILIKI MULTIPLISITAS $M > 1$

SKRIPSI

OLEH
IMROATUL KHOIRIYAH
NIM. 17610110

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 24 Juni 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Juhari, M.Si	Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19840209 20160801 1 055	NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

MODIFIKASI METODE NEWTON-SECANT DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINIER YANG MEMILIKI MULTIPLISITAS $M > 1$

SKRIPSI

OLEH
IMROATUL KHOIRIYAH
NIM. 17610110

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 Juni 2021

Penguji Utama	: Abdul Aziz, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Juhari, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Imroatul Khoiriyah
NIM	: 17610110
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Modifikasi Metode Newton-Secant dalam Penyelesaian Persamaan Nonlinier yang Memiliki Multiplisitas $m > 1$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Juni 2021

Yang membuat pernyataan,

Imroatul Khoiriyah

NIM. 17610110

MOTO

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.

Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan."

(Q.S Al-Insyirah ayat 5-6).

"Kalahkan rasa ragu.

Ayo mencoba.

Ayo berusaha.

Semangat ☺"

"Bismillah.. Pasti bisa"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis Khayatudin dan Kartiyah (Alm), adik penulis Mohammad Muslihuddin, nenek penulis Juriyah yang selalu mendoakan, memberikan semangat, nasihat dan kasih sayang yang tiada tara. Sehingga menjadikan alasan penulis untuk selalu semangat dalam berjuang.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Modifikasi Metode Newton-Secant dalam Penyelesaian Persamaan Nonlinier yang Memiliki multiplisitas $m > 1$", Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak baik. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrhaim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, doa dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, doa dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen penguji utama yang telah memberikan saran dan masukan-masukan yang sangat berharga untuk penulisan skripsi ini.
7. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku ketua penguji yang telah memberikan saran dan masukan-masukan yang sangat berharga untuk penulisan skripsi ini.

8. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan arahan dan bimbingan sejak semester awal.
9. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu yang diberikan dan atas segala bimbingannya.
10. Ayahanda Khayatudin dan Ibunda Kartiyah (Alm), adik penulis, serta nenek penulis yang senantiasa memberikan doa, semangat, dukungan dan motivasi yang luar biasa kepada penulis.
11. KH. Dr. Ahmad Khudori Soleh, M.A dan Ibu Nyai Erik Sabti Rahmawati, M.A., M. Ag selaku pengasuh PP. Mahasiswa Al-Azkiya' yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menuntut ilmu dan mendapat banyak pengalaman di PP. Mahasiswa Al-Azkiya'.
12. Seluruh sahabat dan teman-teman di jurusan matematika 2017, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
13. Semua pihak yang tidak dapat dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan bantuan secara langsung maupun tidak langsung kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 24 Juni 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

f_n , g_n	:	Fungsi persamaan nonlinier dengan $n = 1, 2, 3, ...$
$f^{(n)}$	:	Turunan dari fungsi persamaan nonlinier f, dengan $n = 1, 2, 3, ...$
$f \in C^2[a, b]$	:	f kontinu sampai turunan kedua pada interval a sampai b
x_0	:	Tebakan awal atau nilai awal
x_n	:	Akar dari fungsi
r , α	:	Akar hampiran
m	:	Multiplisitas
e_n	:	Error pada iterasi ke-n
$\overline{x_n}$	:	Aproksimasi perantara
θ	:	Parameter modifikasi metode Newton-Secant
ε	:	Toleransi galat

ABSTRAK

Khoiriyah, Imroatul. 2021. **Modifikasi Metode Newton-Secant dalam Penyelesaian Persamaan Nonlinier yang Memiliki Multiplisitas $m > 1$.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Juhari, M.Si, (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata kunci : Metode; Modifikasi; Newton-Secant; Nonlinier; Multiplisitas

Penelitian ini membahas tentang analisis modifikasi metode Newton-Secant dan penyelesaian persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant. Persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ artinya persamaan nonlinier tersebut memiliki kesamaan akar lebih dari satu. Adapun langkah pertama untuk melakukan analisis modifikasi metode Newton-Secant, yakni melakukan konstruksi model matematika metode Newton-Secant dengan menggunakan konsep metode Newton dan konsep metode Secant. Langkah kedua melakukan konstruksi model matematika modifikasi metode Newton-Secant dengan menambahkan parameter θ. Setelah diperoleh rumus modifikasi metode Newton-Secant selanjutnya menerapkan metode tersebut untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Dalam hal ini diterapkan pada persamaan nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ yang memiliki multiplisitas $m = 5$. Penyelesaian dilakukan dengan pemilihan dua nilai awal yang berbeda, yakni $-0{,}8$ dan $-0{,}2$. Selanjutnya untuk mengetahui keefektifan dari modifikasi metode Newton-Secant maka dilakukan perbandingan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi. Hasil yang diperoleh dari analisis modifikasi metode Newton-Secant berupa rumus iterasi modifikasi metode Newton-Secant. Kemudian untuk hasil penyelesaian $f(x) = (\cos^2 x + 5)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan dua nilai awal yang berbeda diperoleh akar x secara hampiran, yakni -0,641714371 dengan iterasi kurang dari 5. Sedangkan ketika dikerjakan menggunakan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant juga diperoleh akar x secara hampiran, yakni -0,641714371 dengan iterasi lebih dari 50. Berdasarkan permasalahan mencari akar persamaan nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dapat disimpulkan bahwa modifikasi metode Newton-Secant lebih efektif jika dibandingkan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi.

ABSTRACT

Khoiriyah, Imroatul. 2021. **On the Modification of Newton-Secant Method in Solving Nonlinear Equations Having a Multiplicity of $m > 1$.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim Islamic State University of Malang. Supervisors: (I) Juhari, M.Si, (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keywords: Method; Modification; Newton-Secant; Nonlinear; Multiplicity

This study discusses the analysis of the modification of Newton-Secant method and solving nonlinear equations having a multiplicity of $m > 1$ by using a modified Newton-Secant method. A nonlinear equation that has a multiplicity $m > 1$ is an equation that has more than one root. The first step is to analyze the modification of the Newton-Secant method, namely to construct a mathematical model of the Newton-Secant method using the concept of the Newton method and the concept of the Secant method. The second step is to construct a modified mathematical model of the Newton-Secant method by adding the parameter θ. After obtaining the modified formula for the Newton-Secant method, then applying the method to solve a nonlinear equations that have a multiplicity $m > 1$. In this case, it is applied to the nonlinear equation $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ which has a multiplicity of $m = 5$. The solution is done by selecting two different initial values, namely -0.8 and -0.2. Furthermore, to determine the effectivity of this method, the researcher compared the result with the Newton-Raphson method, the Secant method, and the Newton-Secant method that has not been modified. The obtained results from the analysis of modification of Newton-Secant method is an iteration formula of the modified Newton-Secant method. And for the result of $f(x) = (\cos^2 x + 5)^5$ using a modified Newton-Secant method with two different initial values, the root of x is obtained approximately, namely -0.641714371 with less than 5 iterations. whereas when using the Newton-Raphson method, the Secant method, and the Newton-Secant method, the root x is also approximated, namely -0.641714371 with more than 50 iterations. Based on the problem to find the root of the nonlinear equation $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ it can be concluded that the modified Newton-Secant method is more effective than the Newton-Raphson method, the Secant method, and the Newton-Secant method that has not been modified.

المستخلص

الخيرية ، إمرأة. ٢٠٢١. **تعديل طريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* في حل المعادلة غير الخطية التي لها تعددية م>١ $(\boldsymbol{m > 1})$**. البحث العلمي الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.

المشرف : (١) جوهاري، الماجستير، (٢) الدكتور عثمان فجالي، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: طريقة؛ تعديل نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)*؛غير خطي؛تعددية

ناقش هذا البحث العلمي عن تحليل تعديل طريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* وحل المعادلات غير الخطية التي لها تعددية م>١ $(m > 1)$ باستخدام طريقة التعديل نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)*. تعني المعادلة غير الخطية التي لها تعددية م>١ $(m > 1)$ أنها تستحق المساواة الجذرية أكثر من واحد. فالخطوة الأولى لتحليل تعديل طريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* هي بناء النموذج الرياضي لطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* باستخدام مفهوم طريقة نيوتون *(Newton)* ومفهوم طريقةسيكانت *(Secant)*. الخطوة الثانية هي بناء النموذج الرياضي المعدل لطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* عن طريق إضافة θ. بعد الحصول على الرمز المعدلة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)*، قامت الباحثة بتطبيق الطريقة لحل المعادلات غير الخطية التي لها تعددية م>١ $(m > 1)$. في هذه الحالة، طبق فى المعادلة غير الخطية $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ التي لها تعددية م=٥ $(m = 5)$. تم الانهاء باختيار قيمتين أوليتين مختلفتين هما ٠،٨- و ٠،٢-. بالتالي، لتحديد الفعالية من طريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* ، يتم إجراء مقارنة مع طريقة نيوتون–رابسون *(Newton–Raphson)* ، طريقةسيكانت *(Secant)* وطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* التي لم تعدل أصلا. بالنسبة إلى النتيجة المحصولة من تحليل طريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* المعدلة هي رمز التكرار المعدل لطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)*. وبالنسبة إلى النتيجة من انهاء $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ باستخدام المعدلة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* بنتيجتين أولتين مختلفتين، فتحصل التسوية المحور السيني x- أعني٠،٦٤١٧١٤٣٧١- بالتكرار أقل من ٥. أما في القيام باستخدام طريقة نيوتون–رابسون *(Newton–Raphson)*، طريقةسيكانت *(Secant)* وطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* أيضا تحصل جذر السيني x- أعني٠،٦٤١٧١٤٣٧١- بالتكرار أكثر من ٠٥. انطلاقا من المشكلة في البحث عن تسوية الجذر غير الخطية$f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ فستنتج أن التعديل لطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* أكثر فعالا مقارنة بطريقة نيوتون–رابسون *(Newton–Raphson)*، طريقةسيكانت *(Secant)* وطريقة نيوتن–سيكانت *(Newton–Secant)* التي لم تعدل.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam bidang sains, teknik dan ekonomi sering kali melibatkan permasalahan matematika. Permasalahan matematika sering dijumpai dalam bentuk persamaan-persamaan nonlinier. Persamaan nonlinier berupa fungsi-fungsi $f(x)$ dapat berbentuk persamaan aljabar, persamaan polinomial, persamaan trigonometri, dan persamaan transendental. Dalam mencari akar-akar persamaan tersebut berarti membuat persamaan itu menjadi nol, yakni $f(x) = 0$ (Batarius, 2018). Pencarian akar-akar persamaan nonlinier $f(x) = 0$ selalu menjadi hal menarik untuk dikaji. Dalam menentukan akar-akar persamaan nonlinier yang rumit tentunya akan kesulitan apabila dikerjakan dengan menggunakan metode analitik sehingga metode numerik menjadi solusi dalam permasalahan ini (Muda dkk, 2012).

Dalam bukunya Rinaldi Munir (2008) metode numerik merupakan teknik untuk memformulasikan permasalahan matematika dengan menggunakan operasi perhitungan aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode berarti cara, sedangkan numerik berarti angka. Dengan demikian secara harfiah arti dari metode numerik adalah cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Solusi yang didapat dari metode numerik berupa solusi hampiran *(approximation)* atau disebut juga dengan solusi pendekatan. Meskipun hasil yang didapat berupa solusi hampiran, solusi ini dapat dibuat seteliti mungkin sesuai yang kita inginkan. Solusi hampiran berbeda dengan solusi eksak, dengan demikian ada selisih antara keduanya. Selisih ini sering disebut dengan *error* atau galat (Munir, 2008).

Dalam mencari akar dari suatu persamaan nonlinier tidak selamanya tunggal atau sederhana, ada juga beberapa persamaan yang sulit untuk diselesaikan dengan metode numerik sederhana, salah satunya persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Beberapa metode numerik yang sering digunakan seperti metode Newton-Raphson untuk akar sederhana dan metode Secant untuk akar sederhana akan mengalami kesulitan dalam mencari akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Terkadang hasil dari metode-metode tersebut mengalami divergensi. Hasil yang dicari tidak ditemukan (Batarius, 2018).

Metode Newton untuk menemukan akar sederhana telah dimodifikasi oleh Scheroder (1870) sehingga dapat digunakan untuk menemukan akar dari persamaan nolinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Namun, dalam hal ini kita harus mengetahui terlebih dahulu multiplisitasnya. Alternatif lain yang disarankan Ralston dan Rabinowitz (1978) dalam Chapara (2010), yakni dengan mendefinisikan suatu fungsi baru $u(x)$ yang merupakan hasil bagi fungsi terhadap turunanya. Fungsi baru ini juga diterapkan pada metode Secant yang dimodifikasi untuk menemukan akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Dengan demikian metode Newton dan Secant yang dimodifikasi dapat digunakan untuk menemukan akar dari persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ (Chapra & Canale, 2010).

Pada tahun 2018 dalam Seminar Nasional Riset dan Teknologi Terapan 8 (RITEKTRA 8) Batarius membandingkan metode Newton-Raphson yang dimodifikasi dan metode Secant yang dimodifikasi untuk menemukan akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Pada penelitian tersebut disimpulkan bahwa metode Newton-Raphson yang dimodifikasi oleh Ralston dan Rabinowitz lebih efektif dibandingkan metode Secant yang dimodifikasi oleh Ralston dan Rabinowitz dalam penentuan akar ganda (akar yang memiliki multiplisitas $m > 1$) (Batarius, 2018).

Kasturiarachi (2002) dalam Putra (2011) menyajikan penggabungan metode Newton dan metode Secant untuk menyelesaikan persamaan nonlinier sederhana. Metode ini disebut dengan metode *leap-frogging* Newton atau metode Newton-Secant. Metode ini memerlukan fungsi evaluasi dan turunan pertama (Putra dkk, 2011). Metode Newton-Secant apabila digunakan untuk menemukan akar persamaan nonlinier sederhana memiliki orde konvergensi kubik. Sedangkan apabila metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ orde konvergensinya menjadi linier (Ferrara *et al*, 2016).

Pada tahun 2016 Ferrara *et al* memodifikasi metode Newton-Secant dengan penambahan parameter θ. Tujuan dari modifikasi ini, yakni untuk mempertahankan orde konvergensi metode Newton-Secant agar tetap kubik, apabila digunakan untuk mencari akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Sehingga modifikasi metode Newton-Secant dapat menjadi alternatif bagi metode Newton-Secant dalam mencari akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ (Ferrara *et al*, 2016).

Permasalahan dalam mencari akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ dengan menggunakan berbagai metode numerik, seperti metode Newton yang dimodifikasi, metode Secant yang dimodifikasi, dan modifikasi metode Newton-Secant sesuai dengan pandangan Islam yang menyatakan bahwa setiap permasalahan dapat dicari jalan keluar atau solusinya. Hal tersebut sesuai dengan firman Allah dalam Q.S Al-Insyirah ayat 5-6, yang artinya :

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan (5). Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan (6)." Q.S Al-Insyirah ayat 5-6.

Pada ayat di atas Allah mengungkapkan bahwa sesungguhnya di dalam kesulitan, terdapat kemudahan, dan di dalam suatu permasalahan terdapat solusi atau jalan keluar untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Berdasarkan penjelasan tersebut suatu masalah matematika, seperti permasalahan dalam mencari solusi persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ apabila sulit dicari dengan menggunakan metode Newton-Raphson sederhana, metode Secant sederhana, dan metode Newton-Secant maka dapat dicari dengan alternatif metode lain, yakni dengan menggunakan modifikasi metode Newton-Secant.

Berdasarkan uraian latar belakang di atas penulis bermaksud untuk menganalisis modifikasi metode Newton-Secant dalam menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dari penelitian ini, yakni :

1. Bagaimana hasil analisis modifikasi metode Newton-Secant?
2. Bagaimana penyelesaian persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas maka tujuan dari penelitian ini, yakni :

1. Mengetahui hasil analisis modifikasi metode Newton-Secant.
2. Mengetahui penyelesaian persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini, yaitu dapat digunakan sebagai literatur penunjang terkait program komputer dan analisis numerik di jurusan matematika dan teknik.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini agar tidak terjadi perluasan dalam pembahasan, maka penulis memberikan batasan masalah, yakni persamaan nonlinier yang dikerjakan berupa fungsi trigonometri yang merupakan salah satu fungsi dari persamaan non linier. Dalam hal ini digunakan persamaan nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan multiplisitas $m = 5$. Penyelesaian persamaan $f(x)$ akan dikerjakan menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan dua nilai awal yang berbeda. Kemudian dilakukan perbandingan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi. Dalam hal ini iterasi akan berhenti apabila $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 10^{-10}$.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan metode literatur atau metode studi pustaka, yakni dengan melakukan penelusuran dan penelaah terhadap beberapa literatur pendukung, seperti buku, jurnal, catatan perkuliahan, dan bahan-bahan literatur lainnya yang mendukung penelitian ini. Berikut metode yang digunakan pada penelitian ini :

1. Analisis metode Newton-Secant dan modifikasinya dengan langkah-langkah sebagai berikut :
   a) Konstruksi model matematika metode Newton-Secant.

- Menganalisis teori terkait asal mula diperoleh metode Newton-Secant berdasarkan artikel Kasturiarachi tahun 2002 yang berjudul *Leap-Frogging Newton's Method*.
- Melakukan analisis didapatkannya aproksimasi Newton dengan cara menggunakan persamaan garis singgung $(x_0, f(x_0))$ yang memotong $(\overline{x_0}, 0)$.
- Membuat persamaan garis potong yang menghubungkan titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(\overline{x_0}, f(\overline{x_0}))$ menggunakan rumus persamaan garis yang melalui dua titik dan mengasumsikan garis potong yang memenuhi sumbu-x pada titik $(x_1, 0)$.
- Mensubstitusi persamaan aproksimasi Newton ke dalam persamaan garis potong yang menghubungkan titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(\overline{x_0}, f(\overline{x_0}))$.
- Menuliskan rumus iterasi berdasarkan proses yang telah dikerjakan pada tahapan-tahapan di atas.

b) Konstruksi model matematika modifikasi metode Newton-Secant dengan menambahkan parameter θ pada suku kedua rumus iterasi metode Newton-Secant. Dalam hal ini digunakan teorema 3 yang ada pada subbab 2.7 di BAB 2.

2. Penyelesaian persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant. Dalam hal ini dilakukan penyelesaian dengan dua nilai yang berbeda. Setelah itu dilakukan perbandingan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi. Perbandingan ini bertujuan untuk mengetahui keefektifan dari modifikasi metode Newton-Secant apabila dilihat dari banyaknya iterasi, konvergensi, dan waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan pada penelitian ini meliputi empat bab yang masing-masing babnya terdiri dari subbab-subbab, yakni sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini tersusun atas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab ini dijelaskan terkait persamaan nonlinier, akar ganda (multiplisitas $m > 1$), teorema nilai antara, metode numerik, metode Newton-Raphson, metode Secant, tingkat konvergensi, parameter θ untuk modifikasi metode Newton-Secant, dan kajian Islam dibalik kesulitan ada kemudahan.

BAB III Pembahasan

Pada bab ini dijelaskan analisis metode Newton-Secant dan modifikasinya, penyelesaian persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant, dan kajian Islam terkait penelitian.

BAB IV Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan yang telah dikerjakan dan juga berisi saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Nonlinier

Pada umumnya model matematika ditulis dalam bentuk sistem persamaan nonlinier. Sistem persamaan nonlinier merupakan kumpulan dari dua atau lebih persamaan-persamaan nonlinier. Bentuk umum dari persamaan nonlinier dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
. \qquad\qquad & \; . \\
. \qquad\qquad & \; . \\
. \qquad\qquad & \; . \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Penyelesaian dari persamaan nonlinier berupa himpunan x simultan $x_1, x_2, \dots, x_n$, yang memenuhi seluruh persamaan. Penyelesaian persamaan nonlinier merupakan penentuan akar-akar persamaan nonlinier, dimana nilai x menyebabkan $f(x) = 0$. Dengan kata lain akar persamaan nonlinier $f(x) = 0$ merupakan titik potong antara kurva $f(x)$ dan sumbu-x. Selesaian tersebut biasa disebut dengan akar persamaan atau nilai-nilai nol yang berbentuk $f(x) = 0$ (Chapra & Canale, 2010).

Pada umumnya bentuk persamaan linier dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b = 0 \tag{2.2}$$

dimana a dan b adalah konstanta. Persamaan aljabar dan transenden yang tidak sesuai dengan persamaan (2.2) di atas maka disebut persamaan nonlinier seperti halnya persamaan berikut ini :

$$x^2 + xy = 10 \tag{2.3}$$

dan

$$y + 3xy^2 = 57 \tag{2.4}$$

Dua persamaan di atas merupakan contoh persamaan nonlinier simultan dengan dua bilangan yang tidak diketahui, x dan y. Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk persamaan (2.1) sebagai berikut :

$$u(x, y) = x^2 + xy - 10 = 0 \tag{2.5}$$

dan

$$v(x, y) = y + 3xy^2 - 57 = 0 \tag{2.6}$$

dimana u dan v adalah fungsi polinomial.

Penyelesaian kedua persamaan tersebut akan berupa x dan y yang membuat fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ sama dengan nol (Chapra & Canale, 2010).

Jenis-jenis persamaan nonlinier diantaranya :

1. Persamaan Aljabar

   Berikut bentuk-bentuk persamaan yang termasuk ke dalam persamaan aljabar nonlinier :

   a) Polinomial (suku banyak)

      polinomial dapat dinyatakan sebagai berikut :

      $$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \tag{2.7}$$

      dimana a merupakan konstanta.

   b) Persamaan Rasional

      Persamaan rasional merupakan persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $p(x) = q(x)$, dimana $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan polinomial dan $q(x) \neq 0$.

2. Persamaan Transenden

   Fungsi transenden atau fungsi non aljabar merupakan fungsi yang tidak dapat dinyatakan dalam operasi aljabar. Fungsi ini terdiri dari fungsi logaritmik, fungsi eksponensial, fungsi hiperbolik dan fungsi trigonometrik (Sapari & Bahri, 2015).

Sistem persamaan nonlinier dapat diselesaikan secara iterasi dengan metode numerik, seperti metode Newton-Raphson, metode Secant, metode Regula Falsi, dan metode numerik lainnya (Munir, 2008).

2.2 Akar Ganda (Multiplisitas $m > 1$)

Pemfaktoran dari suatu persamaan nonlinier akan menghasilkan akar-akar persamaan nonlinier. Apabila akar tersebut memiliki kesamaan akar lebih dari satu maka akar tersebut disebut akar ganda (multiplisitas $m > 1$). Berikut merupakan dafinisi dari multiplisitas.

Definisi 1 (Multiplisitas)

Akar α dari $f(x)$ dikatakan memiliki multiplisitas (m) apabila

$$f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$$

untuk $h(x)$ fungsi kontinu dengan $h(x) \neq 0$, dan m merupakan bilangan bulat positif. Jika $m = 1$ maka α disebut akar sederhana. Jika $m \geq 2$ maka α disebut akar ganda (Atkinson, 1993 dalam Lega dkk, 2014). Perhatikan contoh berikut:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x-1)(x-3)$
$= (x-1)^2(x-3)$

   memiliki akar $x = 1$ dan $x = 3$. Ini berarti bahwa fungsi tersebut memiliki multiplisitas dua di $x = 1$ dan memiliki akar sederhana di $x = 3$.

2) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = (x-1)(x-1)(x-1)(x-3)$
$= (x-1)^3(x-3)$

   memiliki akar $x = 1$ dan $x = 3$. Ini berarti bahwa fungsi tersebut memiliki multiplisitas tiga di $x = 1$ dan memiliki akar sederhana di $x = 3$.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa akar ganda atau multiplisitas akar merupakan banyaknya kesamaan akar dari suatu fungsi. Suatu fungsi dikatakan memiliki multiplisitas apabila multiplisitas dari suatu fungsi tersebut lebih dari satu (Munir, 2008).

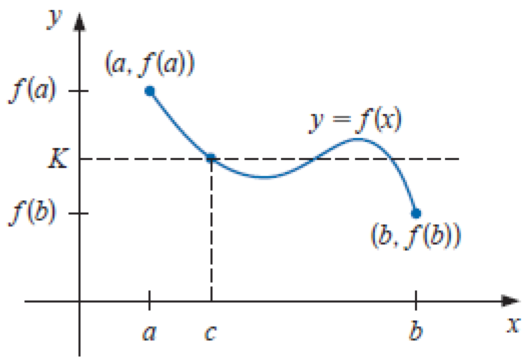
2.3. Teorema Nilai Antara *(Intermediate Value Theorem)*

Teorema nilai antara merupakan teorema yang digunakan untuk mengetahui ada atau tidak adanya solusi pada batas interval tertentu.

Teorema 1 (Teorema Nilai Antara)

Jika $f \in C[a, b]$ dan K adalah bilangan sembarang di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat bilangan c dalam (a,b) sehingga $f(c) = K$.

(Burden & Faires, 2011)



Gambar 2.1 Kurva Teorema Nilai Antara

<u>Contoh :</u>

Tunjukkan bahwa $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ mempunyai solusi dalam interval $[0,1]$.

<u>Penyelesaian :</u>

$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$. Fungsi f kontinu pada $[0,1]$. Maka substitusi $x = 0$ dan $x = 1$ pada $f(x)$. Sehingga,

$f(0) = 0^5 - 2(0)^3 + 3(0)^2 - 1 = -1 \quad < 0$

$f(1) = 1^5 - 2(1)^3 + 3(1)^2 - 1 = 1 \quad > 0$

Dengan denikian, berdasarkan teorema nilai antara maka terdapat bilangan x dengan $0 < x < 1$. (Burden & Faires, 2011)

Teorema lain yang hampir mirip dengan teorema nilai antara, yakni teorema Bolzano.

Teorema 2 (Teorema Bolzano)

Apabila $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu dan jika $f(a) \cdot f(b) < 0$, maka terdapat paling sedikit satu akar $x \in (a, b)$ sehingga $f(x) = 0$.

(Vrahatis, 2015)

<u>Contoh :</u>

Fungsi $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$ kontinu pada $[0,1]$. Tunjukkan bahwa $f(x)$ memiliki akar $x \in (0,1)$.

<u>Penyelesaian :</u>

$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$. Fungsi f kontinu pada $[0,1]$. Maka substitusi $x = 0$ dan $x = 1$ pada $f(x)$. Sehingga,

$f(0) = 0^5 - 2(0)^3 + 3(0)^2 - 1 = -1$

$f(1) = 1^5 - 2(1)^3 + 3(1)^2 - 1 = 1$

$f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 1 = -1 \qquad < 0$

Berdasarkan teorema Bolzano maka terdapat akar $x \in (0,1)$. (Burden & Faires, 2011)

2.4 Metode Numerik

Dalam bidang sains, teknik dan ekonomi sering kali melibatkan persoalan model matematika. Model yang rumit sering kali muncul dalam persoalan matematika. Metode analitik atau yang biasa kita kenal dengan metode penyelesaian untuk memecahkan persoalan matematika menggunakan rumus-rumus aljabar yang sudah ada terkadang sulit untuk memperoleh solusi eksak (exact solution). Apabila metode analitik tidak dapat digunakan untuk memecahkan persoalan matematika yang rumit maka metode numerik dapat menjadi solusi dalam menyelesaikan permasalahan tersebut (Munir, 2008).

Dalam bukunya Rinaldi Munir (2008) metode numerik merupakan teknik untuk memformulasikan permasalahan matematika dengan menggunakan operasi perhitungan aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode berarti cara, sedangkan numerik berarti angka. Dengan demikian secara harfiah arti dari metode numerik adalah cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Solusi yang didapat dari metode numerik berupa solusi hampiran *(approximation)* disebut juga dengan solusi pendekatan. Meskipun hasil yang didapat berupa solusi hampiran, solusi ini dapat dibuat seteliti mungkin sesuai yang diinginkan. Solusi hampiran berbeda dengan solusi eksak, dengan demikian ada selisih antara keduanya. Selisih ini sering disebut dengan *error* atau galat (Munir, 2008).

2.5 Metode Newton-Raphson

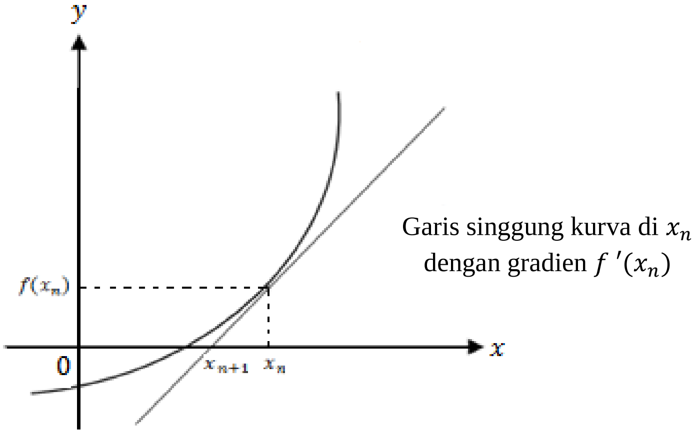
2.5.1 Metode Newton-Raphson untuk Akar Sederhana

Menurut Rinaldi Munir (2008) Metode Newton-Raphson atau yang dikenal dengan Metode Newton merupakan metode numerik yang paling terkenal dan paling banyak digunakan dalam sains dan rekayasa. Metode Newton sering digunakan sebab metode ini memiliki konvergensi paling cepat jika dibandingkan dengan metode numerik lainnya (Munir, 2008). Dalam menyelesaikan permasalahan matematika metode Newton membutuhkan satu titik awal sebagai tebakan awal, membutuhkan slope atau gradien pada titik tersebut, dan barisan titik potong garis singgungnya dengan sumbu-x. Metode ini akan mengalami kegagalan apabila pemilihan titik awalnya memberikan nilai turunannya nol (Rochmad, 2013).

Penurunan rumus metode Newton dapat diperoleh dari dua konsep dasar, yakni

1. Penurunan rumus metode Newton secara geometri

   Konsep dasar penurunan rumus metode Newton secara geometri didapatkan dari kekonvergenan barisan titik-titik potong antara garis singgung kurva dan sumbu-X. Perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 2.2 Kurva metode Newton-Raphson

   Berdasarkan gambar 2.2 gradien garis singgung di x_n pada kurva di atas, yakni

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) = f(x_n)$$

$$(x_n - x_{n+1}) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.8)$$

   dengan $n = 0,1,2, \dots.$ dan $f'(x_n) \neq 0$.

   Persamaan (2.8) di atas merupakan rumus iterasi dari metode Newton-Raphson (Rochmad, 2013).

2. Penurunan rumus metode Newton dengan bantuan deret Taylor

Penurunan rumus metode Newton dengan bantuan deret Taylor dapat diperoleh dengan cara menguraikan $f(x_{n+1})$ di sekitar x_n ke dalam deret Taylor sehingga diperoleh

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!}f''(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^3}{3!}f'''(x_n) + \ldots$$

Kemudian dilakukan pemotongan pada deret setelah suku turunan pertama sehingga diperoleh

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

Untuk $f(x_{n+1}) = 0$, diperoleh

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.9}$$

dengan $n = 0,1,2, \ldots$. dan $f'(x_n) \neq 0$.

Persamaan (2.9) di atas merupakan rumus iterasi dari metode Newton-Raphson (Rochmad, 2013).

Dalam mencari hampiran akar-akar $f(x) = 0$ menggunakan rumus iterasi metode Newton maka dibutuhkan titik awal sebagai tebakan awal, dan selanjutnya untuk iterasinya menggunakan rumus (2.8) atau (2.9) di atas. Kondisi berhentinya iterasi metode Newton dapat dilakukan dengan cara pembatasan pada banyaknya iterasi atau dengan cara memperhatikan kondisi, yakni apabila

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

dimana ε merupakan toleransi galat yang diinginkan (Stalis, 2009).

2.5.2 Metode Newton-Raphson yang Dimodifikasi

Metode Newton untuk menemukan akar sederhana telah dimodifikasi oleh Scheroder (1870) untuk menemukan akar dari persamaan nolinier yang memiliki multiplisitas m dengan $m > 1$. Berikut rumus iterasi metode Newton yang dimodifikasi :

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.10}$$

Metode Newton-Raphson yang dimodifikasi ini memiliki orde konvergensi kuadratik (Ferrara *et al*, 2016).

Rumus iterasi (2.10) di atas apabila kita gunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ kita harus terlebih dahulu mengetahui bilangan multiplisitas akar. Oleh karena itu, Ralston dan Rabinowitz (1978) memberikan alternatif lain untuk mencari solusi akar ganda, yakni dengan mendefinisikan fungsi baru $u(x)$ sebagai berikut :

$$u(x) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.11}$$

Dapat diperhatikan bahwa fungsi ini mempunyai akar pada lokasi yang sama seperti fungsi semula (persamaan 2.9) dengan maksud mengembangkan suatu bentuk alternatif dari metode Newton-Raphson :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) dapat dijabarkan lagi. Namun, sebelumnya dicari terlebih dahulu turunan dari persamaan (2.11) sehingga diperoleh :

$$u'(x) = \frac{f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.11) dan (2.13) kita substitusikan ke persamaan (2.12).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\frac{f'(x_n) \cdot f'(x_n) + f(x_n) \cdot f''(x_n)}{\{f'(x_n)]^2}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{[f'(x_n)]^2}{f'(x_n) \cdot f'(x_n) + f(x_n) \cdot f''(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 + f(x_n) \cdot f''(x_n)} \tag{2.14}$$

Persamaan (2.10) dan (2.14) merupakan rumus metode Newton-Raphson yang dimodifikasi untuk mencari akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ (Chapra & Canale, 2010).

2.5.3 Analisis Kekonvergenan Metode Newton-Raphson

Misalkan barisan hampiran-hampiran akar yang didapatkan dari iterasi menggunakan metode Newton-Raphson berturut-turut, yakni $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n, x_{n+1}$. Dan misalkan r merupakan akar eksaknya, e_n menyatakan galat atau error pada iterasi ke-n. Maka $e_n = x_n - r$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - r \\ &= \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - r \\ &= (x_n - r) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{\left(e_n f'(x_n) - f(x_n)\right)}{f'(x_n)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Kemudian dengan mengekspansi $f(x_n - e_n)$ dalam bentuk deret Taylor maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n - e_n) &= f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(c_n)}{2}e_n^2 + \ldots \\ f(r) &= f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(c_n)}{2}e_n^2 + \ldots \\ 0 &= f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(c_n)}{2}e_n^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{f''(c_n)}{2}e_n^2 \tag{2.16}$$

Dengan c_n merupakan suatu bilangan antara r dan x_n. Dari persamaan (2.15) dan (2.16) di atas maka didapatkan

$$e_{n+1} = \frac{f''(c_n)e_n^2}{2f'(x_n)}$$

Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{e_n^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

Jika $f'(x), f''(x)$ keduanya kontinu pada interval x_n dan $f'(r) \neq 0$ maka metode Newton konvergen secara kuadratik ke akar eksak. Oleh karena itu, metode Newton sering disebut juga dengan metode kuadratik (Rochmad, 2013). Apabila r

merupakan akar eksak yang berderajat $m > 1$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = (x - r)^m h(x)$, dimana h merupakan fungsi kontinu yang bersifat $h(r) \neq 0$, dengan demikian diperoleh turunan dari $f(x)$, yakni

$$f'(x) = (x - r)^{m-1}[mh(x) + (x - r)h'(x)].$$

Oleh sebab itu, fungsi g yang didefinisikan sebagai

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

memenuhi

$$g(x_n) = x_n - \frac{(x_n - r)h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n - r)h'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - r)h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n - r)h'(x_n)}$$

Sehingga

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n h(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)}$$

$$= e_n \left\{ \frac{(m-1)h(x_n) + e_n h'(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)} \right\}$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(m-1)h(x_n) + e_n h'(x_n)}{mh(x_n) + e_n h'(x_n)}$$

Oleh karena

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{e_n} = \frac{(m-1)h(r) + 0h'(r)}{mh(r) + 0h'(r)} = \frac{m-1}{m} \quad , \quad dan \;\; h(r) \neq 0.$$

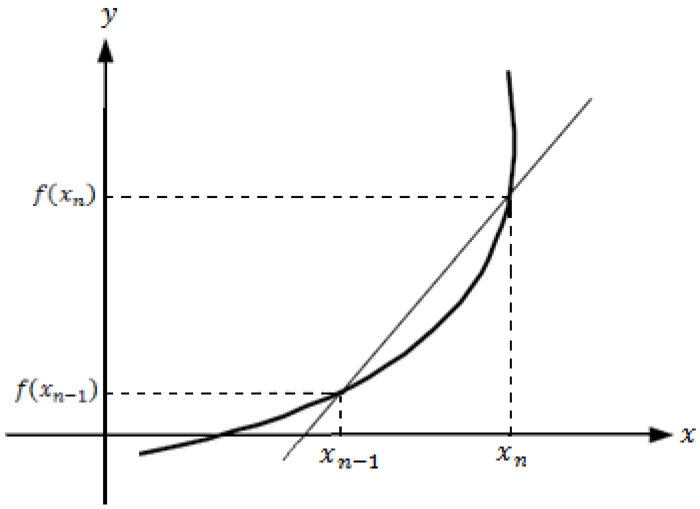
Dengan demikian rumus iterasi metode Newton-Raphson sederhana apabila diterapkan pada fungsi yang memiliki multiplisitas $m > 1$ kecepatan konvergensinya berjalan secara linier, tidak lagi konvergen secara kuadratik ke akar eksak (Rochmad, 2013).

2.6 Metode Secant

2.6.1 Metode Secant untuk Akar Sederhana

Metode Secant merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk mencari akar dari persamaan nonlinier. Metode ini mampu mengatasi kelemahan dari metode Newton-Raphson. Pada metode Newton-Raphson diperlukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$. Proses mencari turunan dari fungsi

$f(x)$ tidak selamanya mudah, ada beberapa fungsi yang sulit untuk dicari nilai turunannya (Chapra & Canale, 2010). Selain itu, proses untuk mencari turunan dari fungsi $f(x)$ juga membutuhkan waktu. Untuk mengatasi kelemahan ini maka turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara mengganti turunannya dengan bentuk lain yang ekuivalen. Perhatikan kurva berikut ini.



Gambar 2.3 Kurva metode Secant

Berdasarkan gambar 2.3 di atas dapat dihitung gradiennya, yakni :

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{2.17}$$

Substitusi persamaan (2.17) ke rumus iterasi metode Newton-Rhapson berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Sehingga diperoleh :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2.18}$$

Persamaan (2.18) merupakan rumus iterasi metode Secant (Munir, 2008). Dalam bukunya Chapra dan Canale (2010) yang berjudul *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition* persamaan (2.18) juga dapat ditulis sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \tag{2.19}$$

Dengan demikian persamaan (2.19) juga merupakan rumus iterasi dari metode Secant (Chapra & Canale, 2010). Metode ini membutuhkan dua tebakan awal, yakni x_0 dan x_1. Iterasi metode Secant ini berhenti apabila

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \ \ (\text{galat mutlak})$$

atau

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| < \delta \ \ (\text{galat hampiran})$$

dengan ε dan δ merupakan toleransi galat (Munir, 2008).

2.6.2 Metode Secant yang Dimodifikasi

Dalam pencarian solusi akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas m dengan $m > 1$ akan sulit dilakukan jika menggunakan rumus metode Secant sederhana. Oleh karena itu Ralston dan Rabinowitz (1978) dalam Chapra (2010) mengusulkan alternatif untuk mengatasi permasalahan tersebut, yakni dengan mendefinisikan suatu fungsi baru $u(x)$ yang merupakan rasio (hasil bagi) fungsi terhadap turunannya (Chapra & Canale, 2010). Persamaannya ditulis:

$$u(x) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.20}$$

Jika diperhatikan bentuk $u(x)$ ini mempunyai akar yang sama dengan $f(x_n)$ sebab apabila $u(x) = 0$ maka $f(x) = 0$ (Munir, 2008). Dengan demikian persamaan (2.19) dapat diubah menjadi persamaan berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{u(x_{n-1}) - u(x_n)} \tag{2.21}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (2.21) yang merupakan rumus iterasi metode Secant yang dimodifikasi untuk mencari solusi akar persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ (Chapra & Canale, 2010).

2.7 Tingkat Konvergensi

Tingkat konvergensi merupakan kecepatan suatu metode iterasi dalam menemukan akar-akar secara hampiran dari persamaan fungsi f. Berikut definisi dari kovergensi :

<u>**Definisi 2 (konvergensi)**</u>

Misalkan barisan $x_1, x_2, \dots, x_n$ konvergen terhadap α dan $e_n = x_n - \alpha$ dimana $n \geq 0$. Jika orde konvergensi $p > 0$ dan konstanta galat $C \neq 0$, dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$$

maka barisan $\{x_n\}$ konvergen terhadap α dengan orde konvergensi p (Mathews, 1992).

Jika $p = 1$ maka metode iterasi memiliki orde konvergensi linier. Jika $p = 2$ maka metode iterasi memiliki orde konvergensi kuadratik. Jika $1 < p < 2$ maka metode iterasi memiliki orde konvergensi superlinier (Senning, 2019). Jika $p = 3$ maka metode iterasi memiliki orde konvergensi kubik (Kasturiarachi, 2002). Apabila $e_n = x_n - \alpha$ adalah notasi kesalahan (error) pada iterasi ke-n pada suatu metode numerik yang meghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan :

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1})$$

disebut persamaan galat pada iterasi ke-(n+1) dan c merupakan konstanta kesalahan asimtotik atau disebut juga koefisien orde galat ke-p. (Mathews, 1992).

Berikut cara memperoleh orde konvergensi dari suatu metode numerik. Dalam hal ini dicari orde konvergensi dari metode Newton-Raphson dan metode Secant.

❖ **Tingkat Konvergensi Metode Newton-Raphson**

Rumus iterasi metode Newton, yakni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.22}$$

Substitusi $x_n = \alpha + e_n$ pada persamaan (2.22) diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\alpha + e_n)}{f'(\alpha + e_n)}$$

Perluas $f(\alpha + e_n)$ dan $f'(\alpha + e_n)$ dalam deret Taylor sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - \frac{\left[e_n f'(\alpha) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\alpha) + \cdots\right]}{f'(\alpha) + e_n f''(\alpha) + \cdots} \\
&= e_n - \left[e_n + \frac{1}{2} e_n^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \cdots\right]\left[1 + e_n \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{2} e_n^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + O(e_n^3)
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = C e_n^2$$

dimana $C = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$

Dengan demikian konvergensi metode Newton-Raphson adalah kuadratik. (Kumar & Vipan, 2015)

❖ **Tingkat Konvergensi Metode Secant**

Rumus iterasi metode Secant, yakni

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2.23}$$

Substitusi $x_n = \alpha + e_n$ pada persamaan (2.23) diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - f(\alpha + e_n)\frac{(e_n - e_{n-1})}{f(\alpha + e_n) - f(\alpha + e_{n-1})}$$

Perluas $f(\alpha + e_n)$ dan $f(\alpha + e_{n-1})$ dalam deret Taylor dengan catatan $f(\alpha) = 0$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - \frac{(e_n - e_{n-1})\left[e_n f'(\alpha) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\alpha) + \cdots\right]}{(e_n - e_{n-1}) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(e_n^2 - e_{n-1}^2) f''(\alpha) + \cdots} \\
&= e_n - \left[e_n + \frac{1}{2} e_n^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \cdots\right] \\
&\qquad \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_n)\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \cdots\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

atau

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n e_{n-1} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + O(e_n^2 e_{n-1} + e_n e_{n-1}^2)$$

atau

$$e_{n+1} = Ce_n e_{n-1} \tag{2.24}$$

dimana

$$C = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Persamaan (2.24) disebut persamaan galat. Mengingat definisi konvergensi kita ingin menghubungkan bentuk

$$e_{n+1} = Ae_n^p \tag{2.25}$$

dimana A merupakan konstanta asimtotik. A dan p ditentukan dari persamaan (2.25) kita miliki $e_n = Ae_{n-1}^p$ atau $e_{n-1} = A^{-\frac{1}{p}}e_k^{\frac{1}{p}}$

Substitusi nilai e_{n+1} dan e_{n-1} ke persamaan (2.24)

$$e_n^p = CA^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}e_n^{1+\frac{1}{p}}$$

Bandingkan e_n di kedua ruas maka diperoleh

$$p = 1 + \frac{1}{p}$$

$$p - \frac{1}{p} = 1$$

$$\frac{p^2}{p} - \frac{1}{p} = 1$$

$$p^2 - 1 = p$$

$$p^2 - p - 1 = 0$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Ambil akar positif (jika tidak maka istilah error asimtotik divergen), sehingga diperoleh

$$p \approx 1{,}618 \; < 2$$

Karena nilai $1 < p < 2$ maka orde konvergensi metode Secant adalah superlinier. (Kumar & Vipan, 2015)

2.8 Parameter θ untuk Modifikasi Metode Newton-Secant

Metode Newton-Secant atau disebut juga metode *Leap-Frogging Newton* merupakan kombinasi metode Newton dan metode Secant (Kasturiarachi, 2002).

Metode ini akan dilakukan modifikasi dengan penambahan parameter θ berdasarkan teorema berikut ini :

Teorema 3

Misalkan $\alpha \in D$ merupakan akar berganda dari fungsi yang cukup terdiferensiasi $f : D \subset \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ pada interval terbuka D dengan multiplisitas $m > 1$, yang memasukkan x_0 sebagai aproksimasi awal dari α. Kemudian, modifikasi metode Newton-Secant memiliki orde-3 dan $\theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m}$, $m \in Z^+$.

<u>**Bukti :**</u>

Misalkan α adalah akar ganda dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Selanjutnya misalkan

$$e_n \coloneqq x_n - \alpha$$

$$e_{n,\bar{x}} \coloneqq \overline{x_n} - \alpha$$

$$c_i \coloneqq \frac{m!}{(m+i)!} \frac{f^{(m+i)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ akan diperoleh

$$f(x_n) = c_0 e_n^m + c_1 e_n e_n^m + c_2 e_n^2 e_n^m + c_3 e_n^3 e_n^m + O(e_n^4)$$

disederhanakan menjadi

$$f(x_n) = e_n^m(c_0 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3) + O(e_n^4), \tag{2.26}$$

dan

$$f'(x_n) = e_n^{m-1}\big(m + (m+1)c_1 e_n + (m+2)c_2 e_n^2 + (m+3)c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\big). \tag{2.27}$$

Apabila persamaan (2.26) dibagi dengan persamaan (2.27), maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n\left(\frac{(c_0 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3) + O(e_n^4)}{\big(m + (m+1)c_1 e_n + (m+2)c_2 e_n^2 + (m+3)c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\big)}\right) \tag{2.28}$$

Selanjutnya persamaan (2.28) dapat ditulis menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{m} e_n - \frac{c_1}{m^2 c_0} e_n^2 + \frac{-(1+m)c_1^2 + 2m c_0 c_2}{m^3 c_0^2} e_n^3 + O(e_n^4), \tag{2.29}$$

dan karena

$$e_{n,\bar{x}} = \overline{x_n} - \alpha$$
$$= \frac{-1+m}{m} e_n - \frac{c_1}{m^2 c_0} e_n^2 + \frac{-(1+m)c_1^2 + 2mc_0c_2}{m^3 c_0^2} e_n^3 + O(e_n^4). \quad (2.30)$$

Untuk $f(\overline{x_n})$ kita punya

$$f(\overline{x_n}) = e_{n,\bar{x}}^m \left(c_0 + c_1 e_{n,\bar{x}} + c_2 e_{n,\bar{x}}^2 + c_3 e_{n,\bar{x}}^3\right) + O\left(e_{n,\bar{x}}^4\right) \quad (2.31)$$

Substitusi (2.26)-(2.31) pada rumus modifikasi metode Newton-Secant, dimana modifikasi metode Newton-Secant akan dikonstruksi di BAB 3 Pembahasan. Setelah mensubstitusi (2.26)-(2.31) pada rumus modifikasi metode Newton-Secant sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = D_1 e_n + D_2 e_n^2 + D_3 e_n^3 + O(e_n^4),$$

dimana

$$D_1 = 1 + \frac{\theta}{m\left(-\theta + \left(\frac{-1+m}{m}\right)^m\right)} \quad ,$$

dan

$$D_2 = \frac{\theta m^{-2+m}\left(-m(-1+m)^m + \theta m^m(-1+m)\right)c_1}{(-1+m)((-1+m)^m - \theta m^m)^2 c_0} \quad ,$$

dan

$$D_3 = \frac{\theta m^{-3+m} A}{2(-1+m)^2((-1+m)^m - \theta m^m)^3 c_0^2} \quad ,$$

dimana

$$A = (-1+m)^{2m}(-1+m+2m^2)(mc_1^2 - 2(-1+m)c_0c_2)$$
$$+ 2\theta^2(-1+m)^2 m^{2m}\left((1+m)c_1^2 - 2mc_0c_2\right)$$
$$- \theta(-1+m)^{1+m}(m(3+4m)c_1^2 + 2(1+m-4m^2)c_0c_2).$$

Oleh karena itu, untuk memberikan orde tiga konvergensi, perlu dipilih $D_i = 0 \quad (i = 1, 2)$, jadi kami punya

$$\theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m} \quad ,$$

dan persamaan error menjadi

$$e_{n+1} = \left(\frac{mc_1^2 - 2(-1+m)c_0c_2}{2m^2 c_0^2}\right) e_n^3 + O(e_n^4) \ ,$$

dan modifikasi metode Newton-Secant memiliki orde konvergensi kubik (Ferrara *et al*, 2016).

2.9 Kajian Islam tentang Dibalik Kesulitan Pasti Ada Kemudahan

Dalam Al-Qur’an Allah memberikan kabar gembira kepada Rasullullah saw dan umatnya. Dalam Al-Qur’an surat Al-Insyirah ayat 5-6 Allah berfirman yang artinya :

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan (5). Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan (6).” (Q.S Al-Insyirah ayat 5-6).

Dalam tafsir Juz’Amma yang ditulis Syaikh Muhammad bin Shalih Al-‘Utsaimin yang kemudian diterjemahkan oleh Ust. Abu Ihsan Al-Atsari, surat Al-Insyirah ayat 5-6 merupakan kabar gembira dari Allah SWT untuk Rasulullah saw dan umat Rasulullah saw. Rasulullah telah menanggung beban berat pada saat berdakwah di Mekah dan Thaif. Sebagaimana beliau juga mendapatkan gangguan dari orang-orang munafik di Madinah. Kemudian Allah melapangkan dada Nabi Muhammad, melepaskan beban kesulitan, dan meninggikan sebutan Nabi Muhammad. Kesulitan yang dihadapi oleh Nabi Muhammad mendapatkan janji kemudahan dari Allah SWT (Al-'Utsaimin, 2016).

Selanjutnya di dalam tafsir Al-Mishbah, Imam Malik ra. meriwayatkan bahwa Abu ‘Ubaidah Ibn al-Jarrah sahabat Nabi Muhammad saw yang memimpin pasukan Islam menghadapi Romawi pada masa pemerintahan ‘Umar Ibn al-Khaththab, menyurati khalifah ‘Umar ra, sambil menggambarkan kekhawatirannya menghadapi kesulitan melawan Romawi, maka jawaban yang diterimanya dari beliau adalah “Bila seorang mukmin ditimpa suatu kesulitan, niscaya Allah akan menjadikan sesudah kesulitan itu kelapangan karena sesungguhnya satu kesulitan tidak akan mempu mengalahkan dua kelapangan” (Shihab, 2003).

Setiap kesulitan yang dihadapi manusia dalam beribadah pasti mendapatkan kemudahan. Demikian pula dalam masalah takdir, yakni ketetapan Allah atas hamba-Nya berupa musibah, kesulitan hidup, kesempitan jiwa dan lain sebagainya, janganlah berputus asa. Karena setelah kesulitan itu pasti ada kemudahan. Kemudahan itu kadangkala bersifat lahiriyah dan nyata, misalnya seorang faqir yang menghadapi kesulitan lalu Allah memberikan baginya kemudahan untuk memperoleh kekayaan. Contoh lain, seorang yang sakit merasa letih dan berat karena sakit, lalu Allah memberinya kesembuhan. Ini juga bentuk kemudahan yang konkrit. Dan ada pula kemudahan maknawi. Yakni pertolongan Allah kepada seseorang untuk bersabar, itu juga termasuk kemudahan. Apabila Allah menolongmu untuk bisa bersabar, maka menjadi ringanlah bagimu urusan-urusan yang sulit (Al-'Utsaimin, 2016).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Analisis Metode Newton-Secant dan Modifikasinya

Di bidang analisis numerik permasalahan untuk mencari solusi dari persamaan nonlinier $f(x) = 0$ selalu menjadi hal menarik untuk dikaji. Oleh karena itu, banyak metode baru yang diusulkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan terkait persamaan nonlinier yang ada. Mulai dari penyelesaian persamaan nonlinier sederhana hingga penyelesaian persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$.

Metode numerik yang paling terkenal untuk menyelesaikan permasalahan persamaan nonlinier, yakni metode Newton-Raphson dan metode Secant. Metode Newton-Raphson atau yang biasa dikenal dengan metode Newton membutuhkan satu tebakan awal, dan membutuhkan turunan pertama dari fungsi $f(x)$. Apabila pemilihan tebakan awal memberikan nilai turunannya nol maka metode ini akan mengalami kegagalan. Rumus iterasi metode Newton-Raphson dapat dilihat pada persamaan (2.9) yang ada di BAB 2 memiliki konvergensi kuadratik. Metode numerik lain yang tak kalah terkenalnya dari metode Newton adalah metode Secant. Dalam proses mencari solusi persamaan nonlinier menggunakan metode Secant dibutuhkan dua tebakan awal. Rumus metode Secant dapat dilihat pada persamaan (2.19) yang ada di BAB 2.

Pada tahun 2002 Kasturiarachi menyajikan penggabungan metode Newton dan metode Secant yang kemudian disebut dengan metode Newton-Secant atau disebut juga dengan metode *Leap-Frogging Newton*. Metode tersebut memiliki konvergensi kubik untuk menyelesaikan persamaan nonlinier sederhana. Proses didapatkannya metode Newton-Secant belum dijabarkan secara rinci. Oleh karena itu, pada BAB 3 ini penulis bermaksud untuk menjabarkan asal mula didapatkannya metode Newton-Secant secara rinci. Sebab proses ini berkaitan dengan proses untuk mendapatkan rumus modifikasi metode Newton-Secant yang menjadi kajian utama dari penelitian ini.

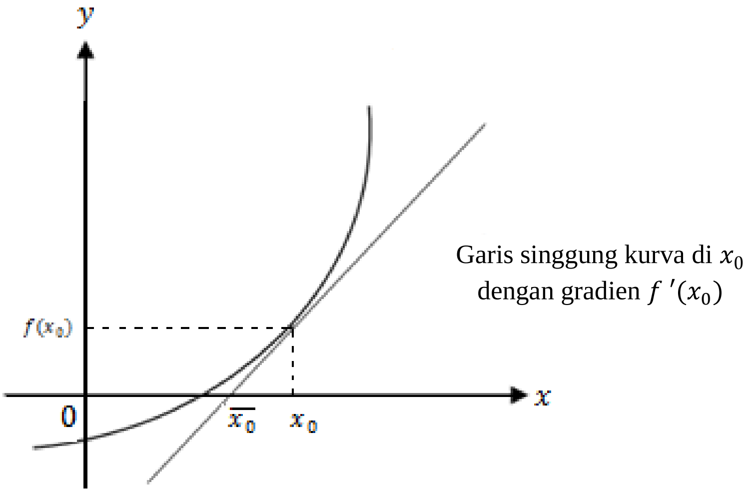
Pada bagian ini untuk mengetahui hasil analisis modifikasi metode Newton-Secant terlebih dahulu dilakukan konstruksi model matematik metode

Newton-Secant. Kemudian melakukan konstruksi model matematik modifikasi metode Newton-Secant. Berikut konstruksi model matematik metode Newton-Secant dan modifikasi metode Newton-Secant.

3.1.1 Konstruksi Model Matematika Metode Newton-Secant

Metode Newton-Secant atau disebut juga metode *leap-frogging Newton* merupakan kombinasi metode Newton dan metode Secant. Oleh karena itu, untuk melakukan konstruksi model matematika metode Newton-Secant digunakan konsep metode Newton dan konsep metode Secant.

Misalkan fungsi $f(x)$ memiliki akar α dalam interval $[a,b]$ dan $f \in C^2[a,b]$. Misalkan x_0 menjadi tebakan awal. Jika persamaan garis singgung pada $(x_0, f(x_0))$ memotong $(\overline{x_0}, 0)$ maka dengan menggunakan konsep metode Newton secara geometris berikut :



Gambar 3.1 Kurva Aproksimasi Newton

maka akan didapatkan aproksimasi Newton berikut :

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - \overline{x_0}}$$

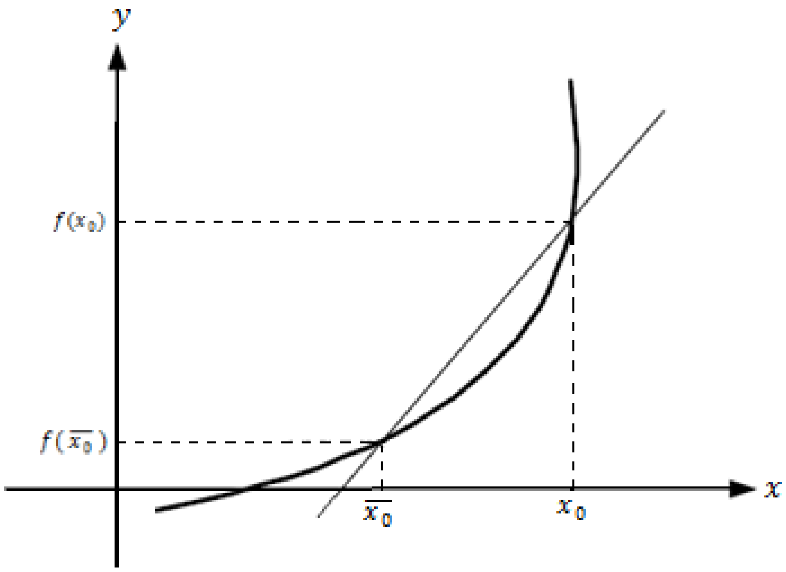
$$f'(x_0)(x_0 - \overline{x_0}) = f(x_0)$$

$$x_0 - \overline{x_0} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\overline{x_0} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3.1}$$

Dalam hal ini digunakan $\overline{x_0}$ bukan x_1 sebab ini hanya digunakan sebagai aproksimasi perantara.

Selanjutnya dicari persamaan garis potong yang menghubungkan titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(\overline{x_0}, f(\overline{x_0}))$. Untuk mencari persamaan tersebut digunakan konsep metode Secant secara geometri. Perhatikan kurva berikut ini :



Gambar 3.2 konsep metode Secant untuk mencari persamaan garis potong

Berdasarkan gambar 3.2 di atas maka diperoleh gradien sebagai berikut :

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \frac{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}{x_0 - \overline{x_0}}$$

Gradien tersebut digunakan untuk mendapatkan persamaan garis yang menghubungkan titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(\overline{x_0}, f(\overline{x_0}))$. Berdasarkan rumus gradien untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0) - f(\overline{x_0})}{x_0 - \overline{x_0}}(x - x_0) \tag{3.2}$$

Asumsikan garis potong memenuhi sumbu-x pada titik $(x_1, 0)$. Sehingga dengan mensubstitusikan nilai x_1 pada x dan nilai 0 pada y di persamaan (3.2) maka diperoleh,

$$0 - f(x_0) = \frac{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}{x_0 - \overline{x_0}}(x_1 - x_0)$$

$$\frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}{x_0 - \overline{x_0}}$$

$$\frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}{(x_0 - \overline{x_0})}$$

$$[f(x_0) - f(\overline{x_0})] \cdot (x_1 - x_0) = -f(x_0) \cdot (x_0 - \overline{x_0})$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0) \cdot (x_0 - \overline{x_0})}{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) \cdot (x_0 - \overline{x_0})}{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]} \tag{3.3}$$

Kemudian substisusikan aproksimasi Newton (3.1) ke persamaan (3.3) sehingga diperoleh,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) \cdot \left(x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)\right)}{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}$$

$$= x_0 - \frac{f(x_0) \cdot \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)}{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}$$

$$= x_0 - \frac{\frac{[f(x_0)]^2}{f'(x_0)}}{[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}$$

$$= x_0 - \frac{[f(x_0)]^2}{f'(x_0)[f(x_0) - f(\overline{x_0})]} \tag{3.4}$$

Dengan mengulangi proses di atas maka dapat dituliskan rumus iterasi sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots.$$

dimana (3.5)

$$\overline{x_n} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (3.5) yang merupakan rumus iterasi metode Newton-Secant.

3.1.2 Konstruksi Model Matematika Modifikasi Metode Newton-Secant

Dalam menyelesaikan persamaan nonlinier sederhana metode Newton-Secant memiliki konvergensi kubik. Sedangkan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ kovergensinya tidak lagi kubik melainkan menjadi linier. Oleh karena itu, untuk mempertahankan konvergensi dari metode Newton-Secant agar tetap kubik maka perlu dilakukan modifikasi metode Newton-Secant. Proses modifikasi metode Newton-Secant dilakukan dengan penambahan parameter θ pada suku kedua rumus metode Newton-Secant. Penambahan parameter tersebut mengakibatkan konvergensi modifikasi metode Newton-Secant untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ tidak lagi linier melainkan konvergen secara kubik.

Rumus metode Newton-Secant (3.5) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \; . \; . \; . \; .$$

Merujuk pada teorema 3 pada subbab 2.8 yang ada di BAB 2, konstruksi model matematika modifikasi metode Newton-Secant dilakukan dengan menambahkan parameter θ pada suku kedua rumus iterasi metode Newton-Secant. Sehingga diperoleh rumus iterasi sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \; . \; . \; . \; .$$

dimana (3.6)

$$\overline{x_n} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{dan} \qquad \theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (3.6) yang merupakan rumus modifikasi metode Newton-Secant yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$.

3.2 Penyelesaian Persamaan Nonlinier yang Memiliki Multiplisitas $m > 1$ Menggunakan Modifikasi Metode Newton-Secant

Pada subbab 3.1 telah dijelaskan analisis metode Newton-Secant dan modifikasinya. Untuk mengetahui keefektifan dari modifikasi metode Newton-Secant maka perlu dilakukan penerapan modifikasi metode Newton-Secant pada persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$. Dalam hal ini akan diterapkan modifikasi metode Newton-Secant untuk menyelesaikan persamaan nonlinier :

$$f(x) = (\cos^2 x + x)^5$$

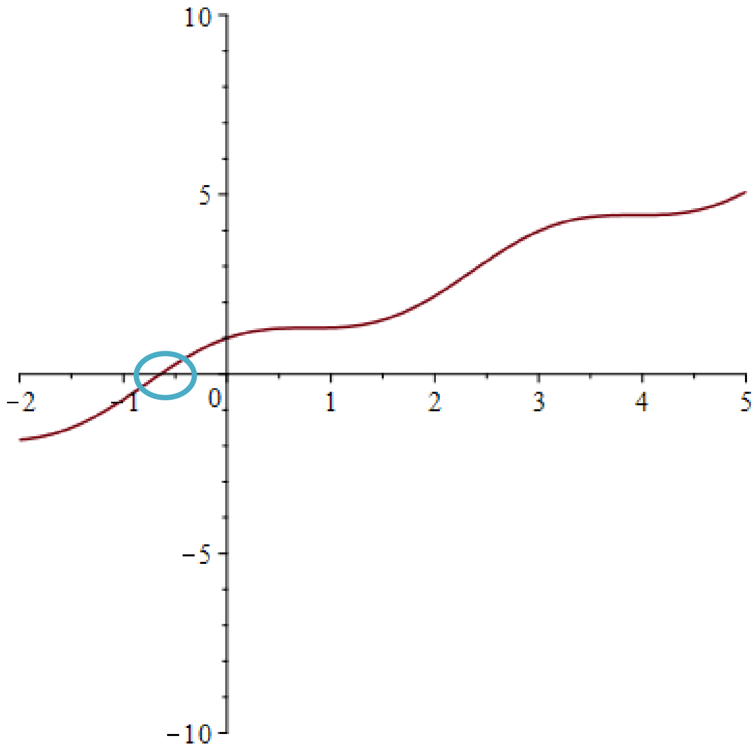
Penyelesaian persamaan $f(x)$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant akan dilakukan dengan dua nilai awal yang berbeda. Penyelesaian pertama digunakan nilai awal yang dekat dengan perpotongan kurva $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ terhadap sumbu-x, artinya digunakan nilai awal yang dekat dengan akar $f(x) = 0$. Penyelesaian kedua digunakan nilai awal yang jauh dengan letak perpotongan kurva $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ terhadap sumbu-x, artinya digunakan nilai awal yang dekat dengan akar $f(x) = 0$. Berikut penyelesaian persamaan nonlinier $f_1(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan dua nilai awal berbeda.

3.2.1 Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal Dekat dengan akar $f(x) = 0$ Menggunakan Modifikasi Metode Newton-Secant

Berikut langkah-langkah untuk mencari solusi dari persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan nilai awal dekat dengan perpotongan kurva $f(x)$ terhadap sumbu-x.

1) **Langkah 1 :** Menentukan nilai awal yang akan digunakan.

   Dalam menentukan nilai awal tidak ada aturan khusus untuk menentukannya. Penentuan nilai awal dapat dilakukan dengan cara *trial and error*. Namun, akan lebih mudah jika sebelum menentukan nilai awal untuk proses iterasi, terlebih dahulu menggambarkan fungsi persamaannya secara geometris. Penggambaran secara geometris ini bertujuan untuk mengetahui interval yang akan digunakan dan juga nilai awal yang akan digunakan. Berikut kurva dari persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$.



Gambar 3.3 kurva $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ *untuk nilai awal* $x = -0{,}8$

Berdasarkan gambar 3.3 di atas dapat diketahui bahwa letak akar dari $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ terletak pada interval terbuka -1 sampai 0. Berdasarkan hal tersebut maka dalam hal ini dapat digunakan batas interval -1 sampai 0. Supaya lebih meyakinkan terkait adanya solusi dari persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ pada interval -1 sampai 0 maka diambil nilai $x = -0{,}8$ dan $x = -0{,}2$, yang selanjutnya dilakukan pengecekan menggunakan teorema nilai antara yang telah dijelaskan di subbab 2.3 yang ada di BAB 2. Merujuk pada teorema tersebut sehingga diperoleh,

$f(x) = (\cos^2 x + x)^5$

$f(-0{,}8) = (\cos^2(-0{,}8) + (-0{,}8))^5 = -0{,}003081711 \qquad < 0$

$f(-0{,}2) = (\cos^2(-0{,}2) + (-0{,}2))^5 = 0{,}254438701 \qquad > 0$

Dengan demikian berdasarkan teorema nilai antara maka terbukti bahwa terdapat akar x pada interval -1 sampai 0. Oleh karena itu pada penyelesaian 3.2.1 dipilih nilai awal $x = -0{,}8$.

2) **Langkah 2 :** mencari turunan dari $f(x)$

$f(x) = (cos^2 x + x)^5$

Untuk mencari turunan dari $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ terlebih dahulu dicari turunan dari $\cos^2 x$ terlebih dahulu.

Misalkan : $y = \cos^2 x$

$y' = \cdots ?$

Untuk mencari nilai dari y' maka digunakan aturan rantai sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{3.7}$$

dengan memisalkan

$$u = \cos x$$

maka

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \tag{3.8}$$

sehingga

$$y = u^2$$

$$\frac{dy}{du} = 2u \tag{3.9}$$

Substitusikan (3.8) dan (3.9) ke (3.7)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 2u \cdot (-\sin x) \\ &= 2\cos x \cdot (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x\end{aligned}$$

Sehingga turunan dari $\cos^2 x = -2 \sin x \cos x$.

Setelah diketahui turunan dari $\cos^2 x$ selanjutnya dapat dicari turunan dari

$$f(x) = (cos^2 x + x)^5$$

$$f'(x) = 5(cos^2 x + x)^4(-2\cos x \sin x + 1) \tag{3.10}$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (3.10) yang merupakan turunan dari $f(x)$.

3) **Langkah 3 :** menentukan multiplisitas dari $f(x)$

Berdasarkan pengertian multiplisitas yang ada di subbab 2.2 di BAB 2 dapat dikatakan bahwa multiplisitas dari $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ adalah 5.

4) **Langkah 4 :** menetapkan besarnya error yang akan digunakan

Dalam hal ini penulis menetapkan error yang digunakan, yakni $\varepsilon = 10^{-10}$.

5) **Langkah 5** : menghitung nilai θ

Multiplisitas dari $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ adalah 5 atau dapat ditulis $m = 5$. Dengan demikian diperoleh nilai θ sebagai berikut.

$$\theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m}$$
$$= \left(\frac{-1+5}{5}\right)^{-1+5}$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{4}$$
$$= 0{,}4096$$

6) **Langkah 6 :** melakukan iterasi dengan menggunakan rumus modifikasi metode Newton-Secant (3.6).

- Untuk iterasi 1.

  Dengan $n = 0$ dan $x_0 = -0{,}8$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{0+1} = x_0 - \frac{\theta f(x_0)}{\theta f(x_0) - f(\overline{x_0})} \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = (-0{,}8) - \frac{(0{,}4096)(-0{,}003081711)}{(0{,}4096)(-0{,}003081711) - (-0{,}001009652)} \cdot \frac{(-0{,}003081711)}{0{,}097935682}$$
$$= -0{,}642768328$$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 1$ dan $x_1 = -0{,}642768328$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{1+1} = x_1 - \frac{\theta f(x_1)}{\theta f(x_1) - f(\overline{x_1})} \cdot \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = (-0{,}642768328) - \frac{(0{,}4096)(-3{,}755\text{E}-14)}{(0{,}4096)(-3{,}755\text{E}-14)-(-1{,}23048\text{E}-14)} \cdot \frac{-3{,}755\text{E}-14}{1{,}78165\text{E}-10}$$

$$= -0{,}641714371$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 2$ dan $x_2 = -0{,}641714371$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{\theta f(x_2)}{\theta f(x_2) - f(\overline{x_2})} \cdot \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = (-0{,}641714371) - \frac{(0{,}4096)(-1{,}08811\text{E}-46)}{(0{,}4096)(-1{,}08811\text{E}-46)-(-3{,}56551\text{E}-47)} \cdot \frac{(-1{,}08811\text{E}-46)}{1{,}66089\text{E}-36}$$

$$= -0{,}641714371$$

Karena pada iterasi ketiga error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$

$$= 0{,}000000000 \quad < 10^{-10}$$

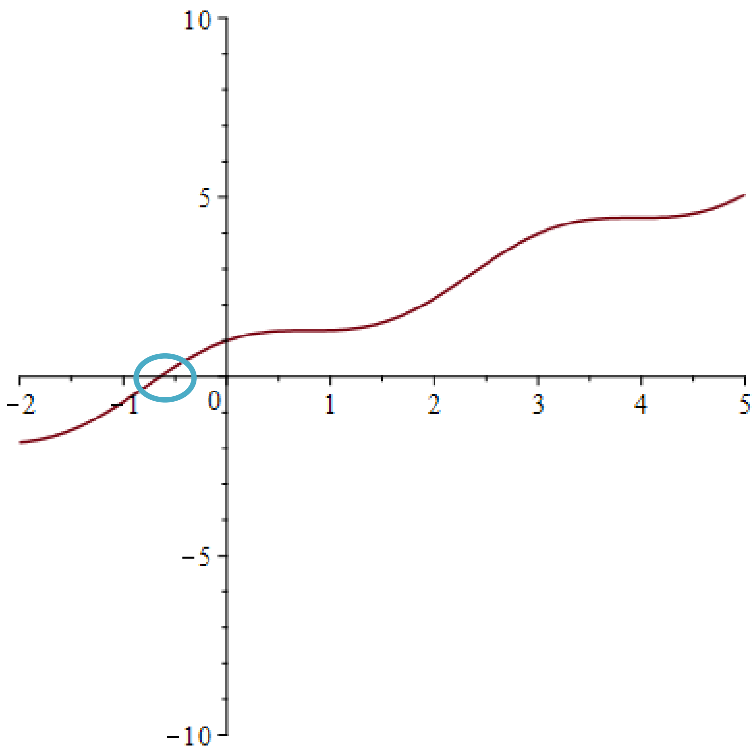
artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x_0 = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ketiga dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 3.

3.2.2 Penyelesaian Persamaan Nonlinier $\boldsymbol{f(x) = (\cos^2 x + x)^5}$ dengan Nilai Awal Jauh dengan akar $\boldsymbol{f(x) = 0}$ Menggunakan Modifikasi Metode Newton-Secant

Berikut langkah-langkah untuk mencari solusi dari persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan nilai awal jauh dari perpotongan kurva $f(x)$ terhadap sumbu-x.

1) **Langkah 1 :** Menentukan nilai awal yang akan digunakan.

Dalam menentukan nilai awal tidak ada aturan khusus untuk menentukannya. Penentuan nilai awal dapat dilakukan dengan cara *trial and error*. Namun, akan lebih mudah jika sebelum menentukan nilai awal untuk proses iterasi, terlebih dahulu menggambarkan fungsi persamaannya secara geometris. Penggambaran secara geometris ini bertujuan untuk mengetahui interval yang akan digunakan dan juga nilai awal yang akan digunakan. Berikut kurva dari persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$.



Gambar 3.4 kurva $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ untuk nilai awal $x = -0{,}2$

Berdasarkan gambar 3.4 di atas dapat diketahui bahwa letak akar dari $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ terletak pada interval terbuka -1 sampai 0. Berdasarkan hal tersebut maka dalam hal ini dapat digunakan batas interval -1 sampai 0. Supaya lebih meyakinkan terkait adanya solusi dari persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ pada interval -1 sampai 0 maka diambil nilai $x = -0{,}8$ dan $x = -0{,}2$, yang selanjutnya dilakukan pengecekan menggunakan teorema nilai antara yang telah dijelaskan di subbab 2.3 yang ada di BAB 2. Merujuk pada teorema tersebut sehingga diperoleh,

$f(x) = (\cos^2 x + x)^5$

$f(-0{,}8) = (\cos^2(-0{,}8) + (-0{,}8))^5 = -0{,}003081711 \qquad < 0$

$f(-0{,}2) = (\cos^2(-0{,}2) + (-0{,}2))^5 = 0{,}254438701 \qquad > 0$

Dengan demikian berdasarkan teorema nilai antara maka terbukti bahwa terdapat akar x pada interval -1 sampai 0. Oleh karena itu pada penyelesaian 3.2.2 dipilih nilai awal $x = -0{,}2$.

2) **Langkah 2 :** mencari turunan dari $f(x)$

$f(x) = (cos^2 x + x)^5$

Untuk mencari turunan dari $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ terlebih dahulu dicari turunan dari $\cos^2 x$ terlebih dahulu.

Misalkan : $y = \cos^2 x$

$y' = \cdots ?$

Untuk mencari nilai dari y' maka digunakan aturan rantai sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{3.11}$$

dengan memisalkan

$$u = \cos x$$

maka

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \tag{3.12}$$

sehingga

$$y = u^2$$

$$\frac{dy}{du} = 2u \tag{3.13}$$

Substitusikan (3.12) dan (3.13) ke (3.11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 2u \cdot (-\sin x)$$
$$= 2\cos x \cdot (-\sin x)$$
$$= -2\cos x \sin x$$

Sehingga turunan dari $\cos^2 x = -2\sin x \cos x$.

Setelah diketahui turunan dari $\cos^2 x$ selanjutnya dapat dicari turunan dari

$$f(x) = (cos^2 x + x)^5$$
$$f'(x) = 5(cos^2 x + x)^4(-2\cos x \sin x + 1) \qquad (3.14)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan (3.14) yang merupakan turunan dari $f(x)$.

3) **Langkah 3 :** menentukan multiplisitas dari $f(x)$

   Berdasarkan pengertian multiplisitas yang ada di subbab 2.2 yang ada di BAB 2 dapat dikatakan bahwa multiplisitas dari $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ adalah 5.

4) **Langkah 4 :** menetapkan besarnya error yang akan digunakan

   Dalam hal ini penulis menetapkan error yang digunakan, yakni $\varepsilon = 10^{-10}$.

5) **Langkah 5** : menghitung nilai θ

   Multiplisitas dari $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ adalah 5 atau dapat ditulis $m = 5$. Dengan demikian diperoleh nilai θ sebagai berikut.

$$\theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m}$$
$$= \left(\frac{-1+5}{5}\right)^{-1+5}$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{4}$$
$$= 0{,}4096$$

6) **Langkah 6 :** melakukan iterasi dengan menggunakan rumus modifikasi metode Newton-Secant (3.6).

   - Untuk iterasi 1.

     Dengan $n = 0$ dan $x_0 = -0{,}2$

     maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{\theta f(x_0)}{\theta f(x_0) - f(\overline{x_0})} \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = -0{,}2 - \frac{(0{,}4096)(0{,}254438701)}{(0{,}4096)(0{,}254438701) - (0{,}076325397)} \cdot \frac{0{,}254438701}{2{,}324178971}$$

$= -0{,}609040443$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 1$ dan $x_1 = -0{,}609040443$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{\theta f(x_1)}{\theta f(x_1) - f(\overline{x_1})} \cdot \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = (-0{,}609040443) - \frac{(0{,}4096)(1{,}04743\text{E} - 06)}{(0{,}4096)(1{,}04743\text{E} - 06) - (3{,}42726\text{E} - 07)} \cdot \frac{1{,}04743\text{E} - 06}{0{,}000159412}$$

$$= -0{,}641704451$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 2$ dan $x_2 = -0{,}641704451$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{\theta f(x_2)}{\theta f(x_2) - f(\overline{x_2})} \cdot \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = (-0{,}641704451) - \frac{(0{,}4096)(2{,}7709\text{E} - 24)}{(0{,}4096)(2{,}7709\text{E} - 24) - (9{,}07968\text{E} - 25)} \cdot \frac{2{,}7709\text{E} - 24}{0{,}000159412}$$

$$= -0{,}641714371$$

- Untuk iterasi 4.

  Dengan $n = 3$ dan $x_3 = -0{,}641714371$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{\theta f(x_3)}{\theta f(x_3) - f(\overline{x_3})} \cdot \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$x_4 = (-0{,}641714371) - \frac{(0{,}4096)(-9{,}9601\text{E} - 76)}{(0{,}4096)(-9{,}9601\text{E} - 76) - (-2{,}83492\text{E} - 76)} \cdot \frac{-9{,}9601E - 76}{9{,}76369\text{E} - 60}$$

$$= -0{,}641714371$$

Karena pada iterasi keempat error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$

$$= 0{,}000000000 \qquad < 10^{-10}$$

artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}2$ berhenti pada iterasi keempat dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 4.

Berdasarkan penyelesaian persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ pada subbab 3.2.1 dan 3.2.2, pengambilan nilai awal yang berbeda untuk mencari solusi dari persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ dengan nilai awal $x = -0{,}8$ dibutuhkan iterasi yang lebih sedikit jika dibandingkan dengan pengambilan nilai awal $x = -0{,}2$. Dimana pada pengambilan nilai awal $x = -0{,}8$ dibutuhkan iterasi sebanyak 3, sedangkan pengambilan nilai awal $x = -0{,}2$ dibutuhkan iterasi sebanyak 4. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa pemilihan nilai awal berpengaruh pada banyaknya iterasi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$.

Setelah dilakukan penyelesaian persamaan nonlinier $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant maka untuk lebih meyakinkan keefektifan dari modifikasi metode Newton-Secant maka dilakukan perbandingan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi. Sebelum dilakukan perbandingan terlebih dahulu dilakukan penyelesaian persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ dengan dua penyelesaian seperti pada penerapan modifikasi metode Newton-Secant. Penyelesaian pertama menggunakan nilai awal $x = -0{,}8$. Penyelesaian kedua menggunakan nilai awal $x = -0{,}2$. Dalam hal ini juga digunakan nilai toleransi galat yang sama dengan nilai toleransi galat yang digunakan pada penyelesaian persamaan $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant, yakni $\varepsilon = 10^{-10}$. Berikut penyelesaian persamaan nonlinier $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi.

PENYELESAIAN PERTAMA MENGGUNAKAN NILAI AWAL $x = -0{,}8$

- **Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal $x = -0{,}8$ Menggunakan Metode Newton-Raphson**

  Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ meggunakan metode Newton-Raphson (2.9) dengan menggunakan nilai awal yang sama dengan nilai awal yang digunakan pada modifikasi metode Newton-Secant, yakni $x = -0{,}8$ dan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-10}$ diperoleh iterasi sebagai berikut:

  - Untuk iterasi 1.

    Dengan $n = 0$ dan $x_0 = -0{,}8$

    maka,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{0+1} &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
x_1 &= -0{,}8 - \frac{-0{,}003081711}{0{,}097935682} \\
&= -0{,}768533315
\end{aligned}
$$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 1$ dan $x_1 = -0{,}768533315$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = (-0{,}768533315) - \frac{-0{,}001009652}{0{,}040106407}$$

$$= -0{,}743358989$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 2$ dan $x_2 = -0{,}743358989$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = (-0{,}743358989) - \frac{-0{,}000331106}{0{,}016413664}$$

$$= -0{,}723186427$$

- Untuk iterasi 4.

  Dengan $n = 3$ dan $x_3 = -0{,}723186427$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$x_4 = -0{,}723186427 - \frac{-0{,}00010863}{0{,}006715502}$$

$$= -0{,}707010393$$

- Untuk iterasi 5.

  Dengan $n = 4$ dan $x_4 = -0{,}707010393$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{4+1} = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}$$

$$x_5 = -0{,}707010393 - \frac{-3{,}56447\text{E} - 05}{0{,}002747415}$$

$$= -0{,}694036502$$

- Untuk iterasi 6 sampai iterasi 92 dapat dilihat pada lampiran 3.

  Pada iterasi 92 error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$

$$= 0{,}0000000000 \qquad < 10^{-10}$$

artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Raphson proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ke-92 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 92.

❖ **Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal $x_1 = -0{,}2$ dan $x_2 = -0{,}8$ Menggunakan Metode Secant**

Penyelesaian persamaan nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Secant dibutuhkan dua nilai awal. Dalam hal ini digunakan nilai awal $x_1 = -0{,}2$ dan $x_2 = -0{,}8$ sehingga diperoleh iterasi sebagai berikut :

- Untuk iterasi 1.

  Dengan $n = 1$ dan $x_0 = -0{,}2$ dan $x_1 = -0{,}8$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_{1-1} - x_1)}{f(x_{1-1}) - f(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$= -0{,}8 - \frac{-0{,}003081711 \cdot \big((-0{,}2\,) - (-0{,}8)\big)}{(0{,}254438701) - (-0{,}003081711)}$$

$= -0{,}792819883$

- Untuk iterasi 2.

Dengan $n = 2$ dan $x_1 = -0{,}8$ dan $x_2 = -0{,}792819883$

maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_{2-1} - x_2)}{f(x_{2-1}) - f(x_2)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$= -0{,}792819883 - \frac{(-0{,}00243979)\cdot\big((-0{,}8\ ) - (-0{,}792819883)\big)}{(-0{,}003081711) - (-0{,}00243979)}$$

$= -0{,}765529987$

- Untuk iterasi 3.

Dengan $n = 3$ dan $x_2 = -0{,}792819883$ dan $x_3 = -0{,}765529987$

maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_{3-1} - x_3)}{f(x_{3-1}) - f(x_3)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_2 - x_3)}{f(x_2) - f(x_3)}$$

$$x_4 = -0{,}765529987 - \frac{(-0{,}000894817)\cdot\big((-0{,}792819883\ ) - (-0{,}765529987)\big)}{(-0{,}00243979) - (-0{,}000894817)}$$

$= -0{,}749724216$

- Untuk iterasi 4.

Dengan $n = 4$ dan $x_3 = -0{,}765529987$ dan $x_4 = -0{,}749724216$

maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{4+1} = x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_{4-1} - x_4)}{f(x_{4-1}) - f(x_4)}$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_3 - x_4)}{f(x_3) - f(x_4)}$$

$$x_5 = -0{,}749724216 - \frac{(-0{,}000449662)\cdot\left((-0{,}765529987\ ) - (-0{,}749724216)\right)}{(-0{,}000894817) - (-0{,}000449662)}$$

= -0,733758462

- Untuk iterasi 5.

  Dengan $n = 5$ dan $x_4 = -0{,}749724216$ dan $x_5 = -0{,}733758462$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{5+1} = x_5 - \frac{f(x_5)\cdot(x_{5-1} - x_5)}{f(x_{5-1}) - f(x_5)}$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)\cdot(x_4 - x_5)}{f(x_4) - f(x_5)}$$

$$x_6 = -0{,}733758462 - \frac{(-0{,}000200848)\cdot\left((-0{,}749724216\ ) - (-0{,}733758462)\right)}{(-0{,}000449662) - (-0{,}000200848)}$$

= -0,720870561

- Untuk iterasi 6 sampai iterasi 131 dapat dilihat pada lampiran 4.

  Pada iterasi 131 error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$
$$= 0{,}0000000000 \qquad < 10^{-10}$$

artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Secant dengan menggunakan nilai awal $x_0 = -0{,}2$ dan $x_1 = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ke-131 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 131.

- **Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal $x = -0,8$ Menggunakan Metode Newton-Secant yang Belum Dimodifikasi**

Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ meggunakan metode Newton-Secant (3.5) dengan menggunakan nilai awal yang sama dengan nilai awal yang digunakan pada modifikasi metode Newton-Secant, yakni $x = -0,8$ dan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-10}$ diperoleh iterasi sebagai berikut:

- Untuk iterasi 1.

  Dengan $n = 0$ dan $x_0 = -0,8$

  maka,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]} \\ x_{0+1} &= x_0 - \frac{[f(x_0)]^2}{f'(x_0)[f(x_0) - f(\overline{x_0})]} \\ x_1 &= -0,8 \\ &\quad - \frac{(-0,003081711)^2}{(0,097935682)[(-0,003081711) - (-0,001009652)]} \\ &= -0,753200554 \end{aligned}$$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 1$ dan $x_1 = -0,753200554$

  maka,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]} \\ x_{1+1} &= x_1 - \frac{[f(x_1)]^2}{f'(x_0)[f(x_1) - f(\overline{x_1})]} \\ x_2 &= (-0,753200554) \\ &\quad - \frac{[(-0,000527484)]^2}{(0,023840579)[(-0,000527484) - (-0,000173035)]} \\ &= -0,72027388 \end{aligned}$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 2$ dan $x_2 = -0,72027388$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{[f(x_2)]^2}{f'(x_2)[f(x_2) - f(\overline{x_2})]}$$

$$x_3 = (-0{,}72027388) - \frac{[(-9{,}04329\text{E} - 05)]^2}{(0{,}005797198)[(-9{,}04329\text{E} - 05) - (-2{,}96738\text{E} -}$$

$$= -0{,}69705596$$

- Untuk iterasi 4.

  Dengan $n = 3$ dan $x_3 = -0{,}69705596$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{[f(x_3)]^2}{f'(x_3)[f(x_3) - f(\overline{x_3})]}$$

$$x_4 = -0{,}69705596 - \frac{[(-1{,}55085\text{E} - 05)]^2}{(0{,}00140949)[(-1{,}55085\text{E} - 05) - (-5{,}08827\text{E} - 06)]}$$

$$= -0{,}680680241$$

- Untuk iterasi 5.

  Dengan $n = 4$ dan $x_4 = -0{,}680680241$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{4+1} = x_4 - \frac{[f(x_4)]^2}{f'(x_4)[f(x_4) - f(\overline{x_4})]}$$

$$x_5 = -0{,}680680241 - \frac{[(-2{,}659\text{E} - 06)]^2}{(0{,}00034277)[(-2{,}659\text{E} - 06) - (-8{,}72211\text{E} - 07)]}$$

$$= -0{,}669136147$$

- Untuk iterasi 6 sampai iterasi 60 dapat dilihat pada lampiran 5.

  Pada iterasi 60 error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$
$$= 0{,}0000000000 \qquad < 10^{-10}$$

artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ke-60 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 60.

PENYELESAIAN KEDUA MENGGUNAKAN NILAI AWAL $x = -0,2$

- **Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal $x = -0,2$ Menggunakan Metode Newton-Raphson**

Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ meggunakan metode Newton-Raphson (2.9) dengan menggunakan nilai awal yang sama dengan nilai awal yang digunakan pada modifikasi metode Newton-Secant, yakni $x = -0{,}2$ dan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-10}$ diperoleh iterasi sebagai berikut:

- Untuk iterasi 1.

  Dengan $n = 0$ dan $x_0 = -0{,}2$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = -0{,}2 - \frac{0{,}254438701}{2{,}324178971}$$

$$= -0{,}309474659$$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 1$ dan $x_1 = -0{,}309474659$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = (-0{,}309474659) - \frac{0{,}076325397}{1{,}008815497}$$
$$= -0{,}38513309$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 2$ dan $x_2 = -0{,}38513309$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{2+1} = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$x_3 = (-0{,}38513309) - \frac{0{,}023859016}{0{,}427170673}$$
$$= -0{,}440986681$$

- Untuk iterasi 4.

  Dengan $n = 3$ dan $x_3 = -0{,}440986681$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{3+1} = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$
$$x_4 = -0{,}440986681 - \frac{0{,}007598269}{0{,}178650465}$$
$$= -0{,}483518162$$

- Untuk iterasi 5.

  Dengan $n = 4$ dan $x_4 = -0{,}483518162$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{4+1} = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}$$
$$x_5 = -0{,}483518162 - \frac{0{,}002444318}{0{,}074187736}$$
$$= -0{,}516465903$$

- Untuk iterasi 6 sampai iterasi 96 dapat dilihat pada lampiran 6.

Pada iterasi 96 error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$
$$= 0{,}0000000000 \qquad < \varepsilon$$

artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Raphson dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}2$ berhenti pada iterasi ke-96 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 96.

- **Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal $x_1 = -0{,}8$ dan $x_2 = -0{,}2$ Menggunakan Metode Secant**

Penyelesaian persamaan nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Secant dibutuhkan dua nilai awal. Dalam hal ini digunakan nilai awal $x_1 = -0{,}8$ dan $x_2 = -0{,}2$ sehingga diperoleh iterasi sebagai berikut :

- Untuk iterasi 1.

  Dengan $n = 1$ dan $x_0 = -0{,}8$ dan $x_1 = -0{,}2$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_{1-1} - x_1)}{f(x_{1-1}) - f(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$= -0{,}2 - \frac{0{,}254438701 \cdot \left((-0{,}8\ ) - (-0{,}2)\right)}{(-0{,}003081711) - 0{,}254438701}$$

$$= -0{,}792819883$$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 2$ dan $x_1 = -0{,}2$ dan $x_2 = -0{,}792819883$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{f(x_2) \cdot (x_{2-1} - x_2)}{f(x_{2-1}) - f(x_2)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$= -0{,}792819883 - \frac{(-0{,}00243979)\cdot\big((-0{,}2\ ) - (-0{,}792819883)\big)}{(0{,}254438701) - (-0{,}00243979)}$$

$$= -0{,}787189377$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 3$ dan $x_2 = -0{,}792819883$ dan $x_3 = -0{,}787189377$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_{3-1} - x_3)}{f(x_{3-1}) - f(x_3)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_2 - x_3)}{f(x_2) - f(x_3)}$$

$$x_4 = -0{,}787189377 - \frac{(-0{,}002015317)\cdot\big((-0{,}792819883\ ) - (-0{,}787189377)\big)}{(-0{,}00243979) - (-0{,}002015317)}$$

$$= -0{,}760456791$$

- Untuk iterasi 4.

  Dengan $n = 4$ dan $x_3 = -0{,}787189377$ dan $x_4 = -0{,}760456791$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{4+1} = x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_{4-1} - x_4)}{f(x_{4-1}) - f(x_4)}$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_3 - x_4)}{f(x_3) - f(x_4)}$$

$$x_5 = -0{,}760456791 - \frac{(-0{,}000724756)\cdot\big((-0{,}787189377\ ) - (-0{,}760456791)\big)}{(-0{,}002015317) - (-0{,}000724756)}$$

$$= \quad -0{,}745444233$$

- Untuk iterasi 5.

  Dengan $n = 5$ dan $x_4 = -0{,}760456791$ dan $x_5 = -0{,}745444233$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

$$x_{5+1} = x_5 - \frac{f(x_5) \cdot (x_{5-1} - x_5)}{f(x_{5-1}) - f(x_5)}$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5) \cdot (x_4 - x_5)}{f(x_4) - f(x_5)}$$

$$x_6 = -0{,}745444233 - \frac{(-0{,}00036678) \cdot \big((-0{,}760456791\ ) - (-0{,}745444233)\big)}{(-0{,}000724756) - (-0{,}00036678)}$$

$$= -0{,}730062467$$

- Untuk iterasi 6 sampai iterasi 132 dapat dilihat pada lampiran 4.

  Pada iterasi 132 error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$
$$= 0{,}0000000000 \qquad < 10^{-10}$$

artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Secant dengan menggunakan nilai awal $x_0 = -0{,}8$ dan $x_1 = -0{,}2$ berhenti pada iterasi ke-132 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 132.

❖ **Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ dengan Nilai Awal $x = -0{,}2$ Menggunakan Metode Newton-Secant yang Belum Dimodifikasi**

Penyelesaian Persamaan Nonlinier $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ meggunakan metode Newton-Secant (3.5) dengan nilai awal $x = -0{,}2$ diperoleh iterasi sebagai berikut :

- Untuk iterasi 1.

  Dengan $n = 0$ dan $x_0 = -0{,}2$

maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{[f(x_0)]^2}{f'(x_0)[f(x_0) - f(\overline{x_0})]}$$

$$x_1 = -0,2 - \frac{(0,254438701)^2}{(2,324178971)[0,254438701 - (0,076325397)]}$$

$$= -0,356386915$$

- Untuk iterasi 2.

  Dengan $n = 1$ dan $x_1 = -0,356386915$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{[f(x_1)]^2}{f'(x_0)[f(x_1) - f(\overline{x_1})]}$$

$$x_2 = (-0,356386915) - \frac{[0,038715846]^2}{(0,61347857)[0,038715846 - 0,012251946]}$$

$$= -0,448712966$$

- Untuk iterasi 3.

  Dengan $n = 2$ dan $x_2 = -0,448712966$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{[f(x_2)]^2}{f'(x_2)[f(x_2) - f(\overline{x_2})]}$$

$$x_3 = (-0,448712966) - \frac{[0,006311407]^2}{(0,154850087)[(0,006311407) - (0,002032763)]}$$

$$= -0,508835153$$

- Untuk iterasi 4.

  Dengan $n = 3$ dan $x_3 = -0,508835153$

maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{[f(x_3)]^2}{f'(x_3)[f(x_3) - f(\overline{x_3})]}$$

$$x_4 = -0{,}508835153 - \frac{[0{,}001053896]^2}{(0{,}038422699)[0{,}001053896 - 0{,}000342092]}$$

$$= -0{,}549446502$$

- Untuk iterasi 5.

  Dengan $n = 4$ dan $x_4 = -0{,}549446502$

  maka,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f'(x_n)[f(x_n) - f(\overline{x_n})]}$$

$$x_{4+1} = x_4 - \frac{[f(x_4)]^2}{f'(x_4)[f(x_4) - f(\overline{x_4})]}$$

$$x_5 = -0{,}549446502 - \frac{[0{,}000177912]^2}{(0{,}009457088)[0{,}000177912 - (5{,}79774\text{E} - 05)]}$$

$$= -0{,}577353179$$

- Untuk iterasi 6 sampai iterasi 62 dapat dilihat pada lampiran 8.

  Pada iterasi 62 error bernilai

$$|x_{n+1} - x_n| = |-0{,}641714371 - (-0{,}641714371)|$$

$$= 0{,}0000000000 \quad < 10^{-10}$$

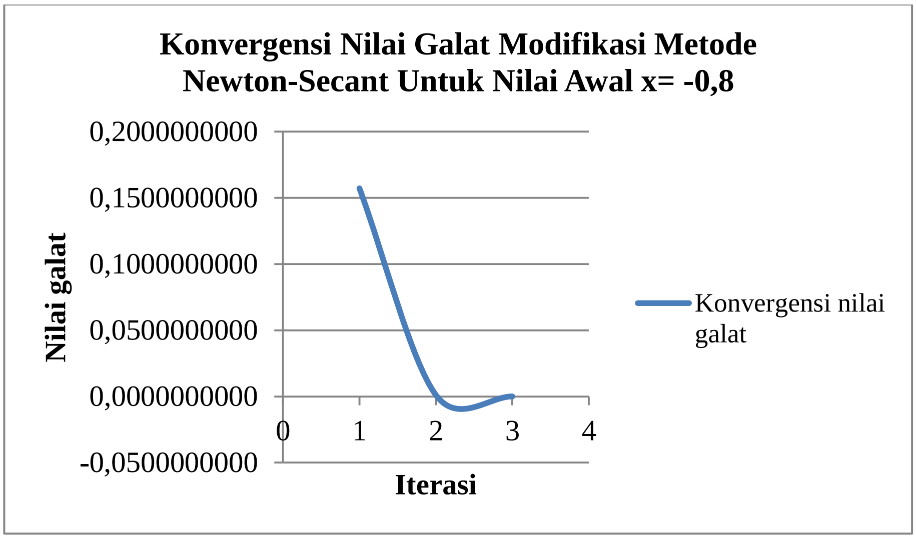
artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ke-62 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 62.

Setelah dilakukan penyelesaian persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant, metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi dengan menggunakan dua nilai awal yang berbeda. Selanjutnya hasil perhitungan dari metode-metode tersebut dapat dituliskan pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.1 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Modifikasi Metode Newton-Secant dengan Nilai Awal $x = -0{,}8$

	Modifikasi Metode Newton-Secant		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,157231672
2	-0,642768328	-3,755E-14	0,001053957
3	-0,641714371	-1,08811E-46	0,000000000

Pada iterasi ketiga error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ketiga dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 3. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



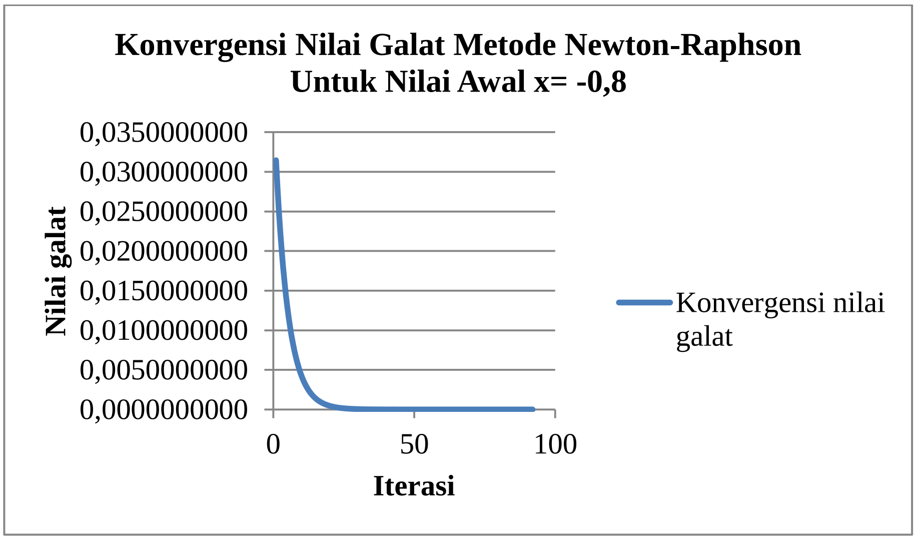
Gambar 3.5 Gambar Konvergensi Nilai Galat Modifikasi Metode Newton-Secant Untuk Nilai Awal $x = -0{,}8$

Tabel 3.2 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Metode Newton-Raphson dengan Nilai Awal $x = -0{,}8$

	Metode Newton-Raphson		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,0314666848
2	-0,768533315	-0,001009652	0,0251743260

3	-0,743358989	-0,000331106	0,0201725626
4	-0,723186427	-0,00010863	0,0161760338
5	-0,707010393	-3,56447E-05	0,0129738905
⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
92	-0,641714371	-2,51216E-47	0,0000000000

Pada iterasi ke-92 error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Raphson dengan menggunakan nilai awal $x = -0,8$ berhenti pada iterasi ke-92 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0,641714371$ dengan iterasi sebanyak 92. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



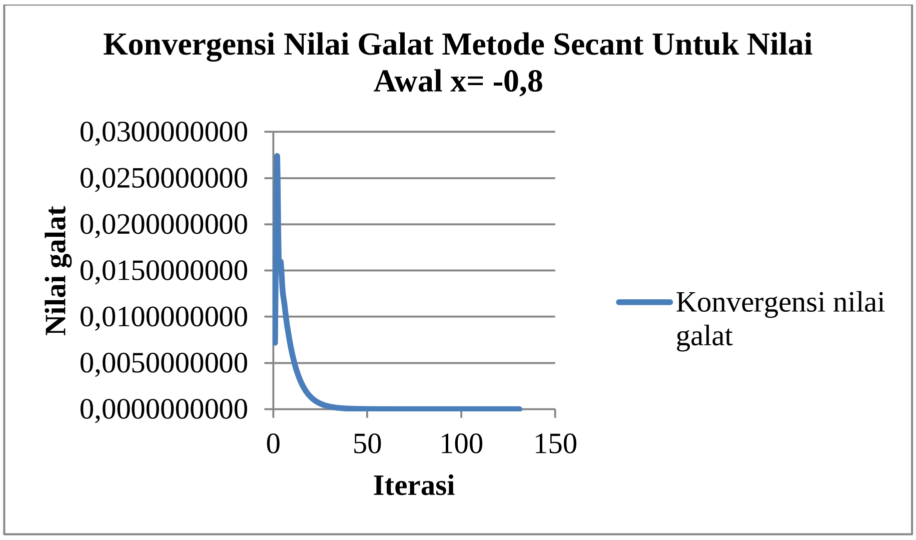
Gambar 3.6 Gambar Konvergensi Nilai Galat Metode Newton-Raphson Untuk Nilai Awal $x = -0,8$

Tabel 3.3 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Metode Secant dengan Nilai Awal $x_0 = -0,2$ dan $x_1 = -0,8$

	Metode Secant		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,0071801172
2	-0,792819883	-0,00243979	0,0272898960
3	-0,765529987	-0,000894817	0,0158057709

4	-0,749724216	-0,000449662	0,0159657542
5	-0,733758462	-0,000200848	0,0128879006
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
132	-0,641714371	-1,81522E-48	0,0000000000

Pada iterasi ke-132 error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Secant dengan menggunakan nilai awal $x_0 = -0{,}8$ dan $x_1 = -0{,}2$ berhenti pada iterasi ke-132 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 132. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



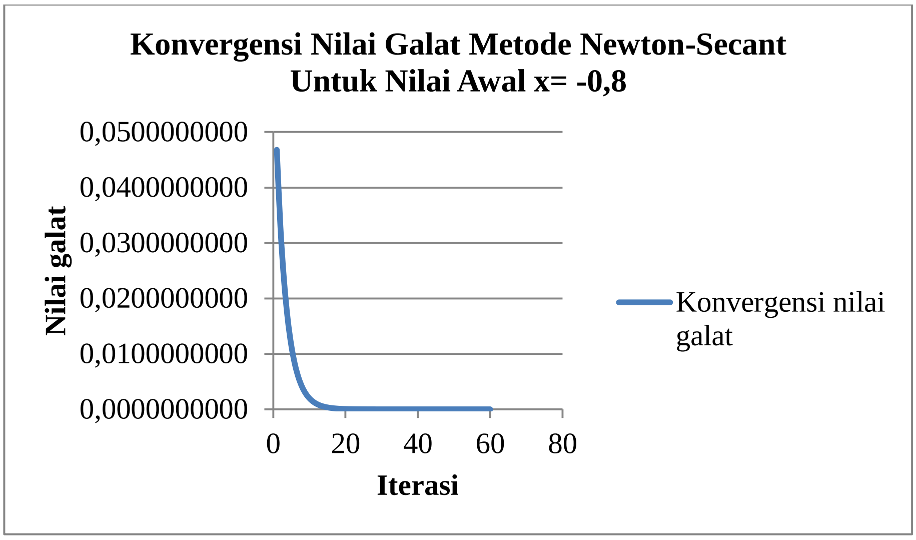
Gambar 3.7 Gambar Konvergensi Nilai Galat Metode Secant Untuk Nilai Awal $x = -0{,}8$

Tabel 3.4 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Metode Newton-Secant dengan Nilai Awal $x = -0{,}8$

	Metode Newton-Secant		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,0467994463
2	-0,753200554	-0,000527484	0,0329266739
3	-0,72027388	-9,04329E-05	0,0232179199
4	-0,69705596	-1,55085E-05	0,0163757191
5	-0,680680241	-2,659E-06	0,0115440936

⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
60	-0,641714371	-1,81522E-48	0,0000000000

Pada iterasi ke-60 error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}8$ berhenti pada iterasi ke-60 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 60. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

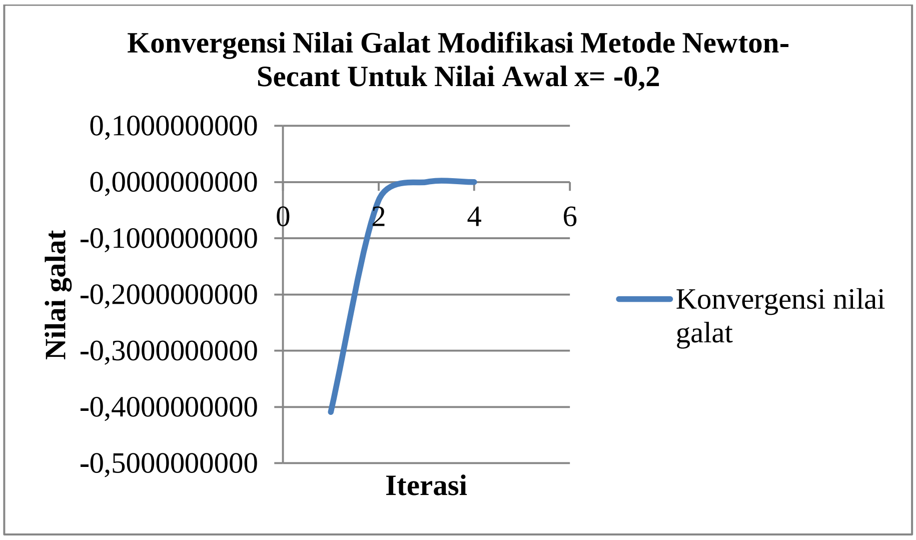


Gambar 3.8 Gambar Konvergensi Nilai Galat Metode Newton-Secant Untuk Nilai Awal $x = -0{,}8$

Tabel 3.5 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Modifikasi Metode Newton-Secant dengan Nilai Awal $x = -0{,}2$

	Modifikasi Metode Newton-Secant		
Iterasi	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{f(x_n)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$
1	-0,2	0,254438701	-0,409040443
2	-0,609040443	1,04743E-06	-0,032664009
3	-0,641704451	2,7709E-24	-0,000009920
4	-0,641714371	-9,9601E-76	0,000000000

Pada iterasi keempat error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}2$ berhenti pada iterasi keempat dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 4. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



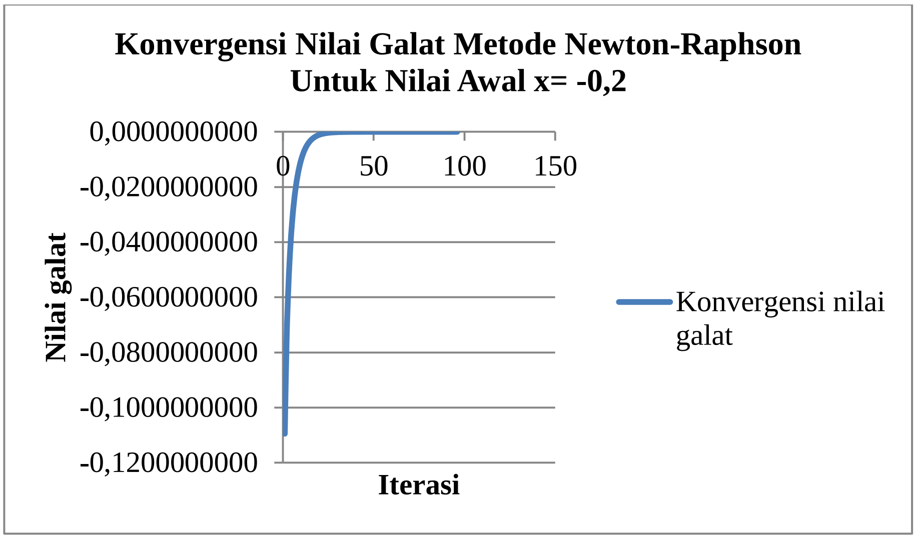
Gambar 3.9 Gambar Konvergensi Nilai Galat Modifikasi Metode Newton-Secant Untuk Nilai Awal $x = -0{,}2$

Tabel 3.6 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Metode Newton-Raphson dengan Nilai Awal $x = -0{,}2$

	Metode Newton-Raphson		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,2	0,254438701	-0,1094746591
2	-0,309474659	0,076325397	-0,0756584307
3	-0,38513309	0,023859016	-0,0558535916
4	-0,440986681	0,007598269	-0,0425314811
5	-0,483518162	0,002444318	-0,0329477400
⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
96	-0,641714371	1,88037E-47	0,0000000000

Pada iterasi ke-96 error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Raphson dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}2$ berhenti pada iterasi ke-96 dan diperoleh akar

x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 96. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



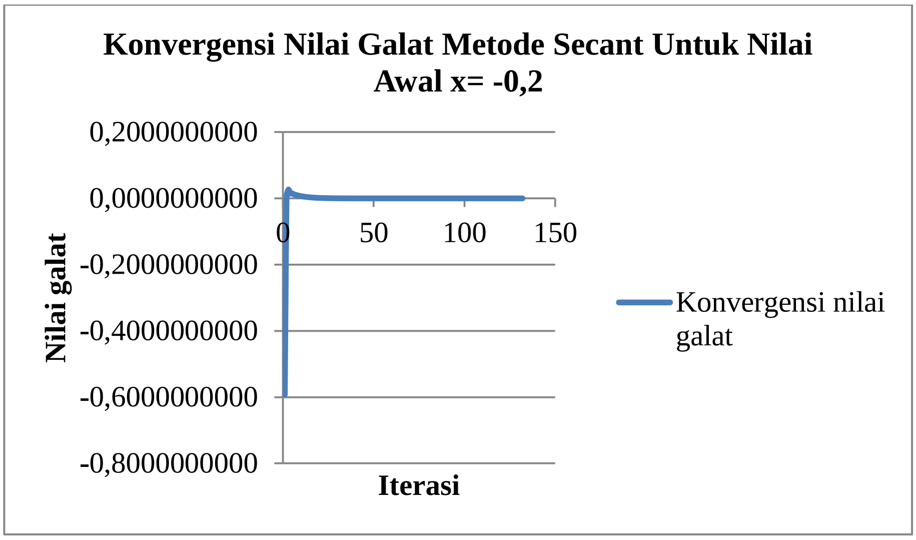
Gambar 3.10 Gambar Konvergensi nilai galat Metode Newton-Raphson Untuk Nilai Awal $x = -0{,}2$

Tabel 3.7 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Metode Secant dengan Nilai Awal $x_0 = -0{,}8$ dan $x_1 = -0{,}2$

	Metode Secant		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,2	0,254438701	-0,5928198828
2	-0,792819883	-0,00243979	0,0056305056
3	-0,787189377	-0,002015317	0,0267325867
4	-0,760456791	-0,000724756	0,0150125577
5	-0,745444233	-0,00036678	0,0153817656
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
132	-0,641714371	-7,87677E-47	0,0000000000

Pada iterasi ke-132 error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Secant dengan menggunakan nilai awal $x_0 = -0{,}8$ dan $x_1 = -0{,}2$ berhenti pada iterasi ke-132 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 132.

Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

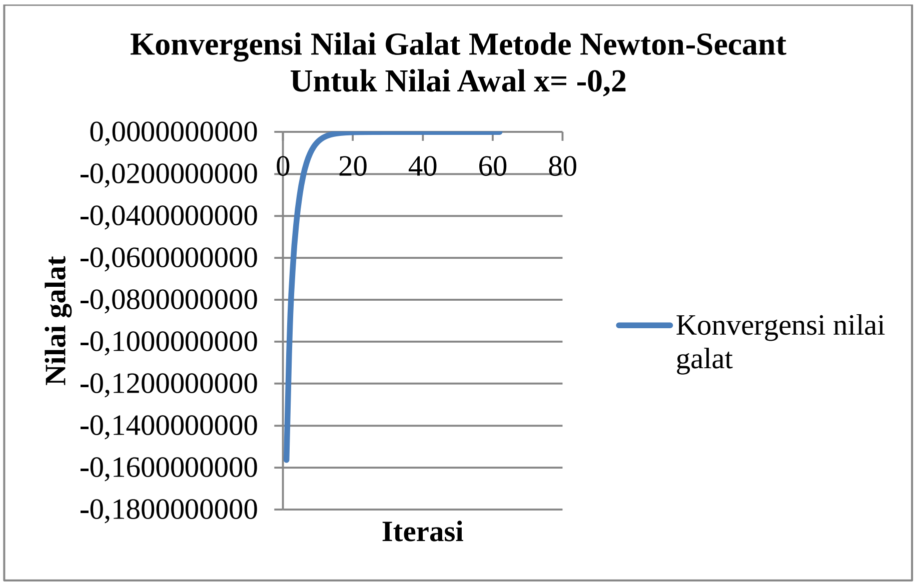


Gambar 3.11 Gambar Konvergensi nilai galat Metode Secant Untuk Nilai Awal $x = -0{,}2$

Tabel 3.8 Tabel Penyelesaian $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ Menggunakan Metode Newton-Secant dengan Nilai Awal $x = -0{,}2$

	Metode Newton-Secant		
Iterasi	x_n	$f(x_n)$	ε
1	-0,2	0,254438701	-0,1563869150
2	-0,356386915	0,038715846	-0,0923260508
3	-0,448712966	0,006311407	-0,0601221874
4	-0,508835153	0,001053896	-0,0406113486
5	-0,549446502	0,000177912	-0,0279066767
⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮		
62	-0,641714371	3,45672E-48	0,0000000000

Pada iterasi ke-62 error bernilai 0,000000000, artinya error pada iterasi tersebut nilainya kurang dari tetapan toleransi galat yang digunakan, yakni 10^{-10}. Oleh karena itu, proses iterasi menggunakan metode Newton-Secant dengan menggunakan nilai awal $x = -0{,}2$ berhenti pada iterasi ke-62 dan diperoleh akar x secara hampiran, yakni $-0{,}641714371$ dengan iterasi sebanyak 62. Konvergensi nilai galat dari perhitungan di atas dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.12 Gambar Konvergensi nilai galat Metode Newton-Secant Untuk Nilai Awal $x = -0{,}2$

Berdasarkan tabel 3.1 sampai tabel 3.4 di atas dapat diketahui bahwa pencarian akar x secara hampiran dari persaamaan nonlinier $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ yang memiliki multiplisitas $m = 5$ dengan nilai awal $x = -0{,}8$ dan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-10}$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant lebih efektif jika dibandingkan dengan menggunakan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi.

Berdasarkan tabel 3.5 sampai tabel 3.8 di atas dapat diketahui bahwa pencarian akar x secara hampiran dari persaamaan nonlinier $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ yang memiliki multiplisitas $m = 5$ dengan nilai awal $x = -0{,}2$ dan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-10}$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant lebih efektif jika dibandingkan dengan menggunakan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant yang belum dimodifikasi.

Berdasarkan penjelasan di atas dapat diketahui bahwa modifikasi metode Newton-Secant untuk menyelesaikan persaamaan nonlinier $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ yang memiliki multiplisitas $m = 5$ dengan nilai awal $x = -0{,}2$ dan toleransi galat $\varepsilon = 10^{-10}$ lebih efektif jika dibandingkan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant. Selain itu pemilihan nilai awal yang berbeda juga berpengaruh pada banyaknya iterasi yang dibutuhkan.

3.3 Kajian Islam terkait Penelitian

Permasalahan matematika dalam mencari solusi dari persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant menjadi alternatif bagi metode analitik dan metode numerik sederhana. Pada penjelasan di subbab 2.8 yang ada di bab 2 Allah mengungkapkan bahwa sesungguhnya di dalam kesulitan, terdapat kemudahan, dan di dalam suatu permasalahan terdapat solusi atau jalan keluar untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Berdasarkan penjelasan tersebut suatu masalah matematika, seperti permasalahan dalam mencari solusi persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ apabila sulit dicari dengan menggunakan metode analitik, dan metode numerik sederhana seperti metode Newton sederhana, metode Secant sederhana, dan metode Newton-Secant maka dapat dicari dengan alternatif menggunakan modifikasi metode Newton-Secant.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di bab sebelumnya maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Penggabungan dua konsep metode numerik, yakni konsep metode Newton dan konsep metode Secant menghasilkan metode Newton-Secant. Metode Newton-Secant selanjutnya dimodifikasi dengan penambahan parameter θ pada suku kedua rumus iterasi metode Newton-Secant. Sehingga diperoleh metode baru, yakni modifikasi metode Newton-Secant dengan rumus iterasi sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)}{\theta f(x_n) - f(\overline{x_n})} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ . \ . \ . \ .$$

dimana

$$\overline{x_n} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{dan} \qquad \theta = \left(\frac{-1+m}{m}\right)^{-1+m}$$

2. Penyelesaian persamaan nonlinier $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ yang memiliki multiplisitas lebih dari satu, yakni $m = 5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant lebih efektif jika dibandingkan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan modifikasi metode Newton-Secant. Hal itu dapat diperhatikan dari banyaknya iterasi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier tersebut. Pada penyelesaian pertama, yakni ketika dipilih nilai awal $x_0 = -0{,}8$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant diperoleh nilai x secara hampiran, yakni -0,641714371 dengan iterasi sebanyak 3 sedangkan pada metode Newton-Raphson dibutuhkan iterasi sebanyak 92, metode Secant dibutuhkan iterasi sebanyak 131, dan metode Newton-Secant dibutuhkan iterasi sebanyak 60. Pada penyelesaian kedua, yakni ketika dipilih nilai awal $x_0 = -0{,}2$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant diperoleh nilai x secara hampiran, yakni -0,641714371 dengan iterasi sebanyak 4 sedangkan pada metode Newton-Raphson dibutuhkan iterasi sebanyak 96, metode Secant

dibutuhkan iterasi sebanyak 132, dan metode Newton-Secant dibutuhkan iterasi sebanyak 62. Berdasarkan permasalahan mencari akar dari $f(x) = (\cos^2 x + x)^5$ modifikasi metode Newton-Secant lebih efektif jika dibandingkan dengan metode Newton-Raphson, metode Secant, dan metode Newton-Secant. Selain itu pemilihan nilai awal yang berbeda juga berpengaruh pada banyaknya iterasi yang dibutuhkan.

4.2 Saran

Pada penelitian ini modifikasi metode Newton-Secant hanya diterapkan pada persamaan nonlinier yang memiliki multiplisitas $m > 1$ dan belum diterapkan pada persamaan nonlinier yang memiliki akar-akar yang berbeda dari suatu fungsi. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya menerapkan modifikasi metode Newton-Secant pada persamaan nonlinier yang memiliki akar-akar berbeda dari suatu fungsi.

DAFTAR PUSTAKA

Al-'Utsaimin, S. b. (2016). *Tafsir Juz 'Amma.* Solo: At-Tibyan.

Batarius, P. (2018). Nilai Awal pada Metode Newton-Raphson yang Dimodifikasi dalam Penentuan Akar Persamaan. *Pi:Mathematics Education Journal*.

Batarius, P. (2018). Perbandingan Metode Newton-Raphson Modifikasi dan Metode Secant Modifikasi dalam Penentuan Akar Persamaan. *Seminar Nasional Riset dan Terapan 8 (RITEKTRA 8).*

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis Ninth Edition.* USA: Brooks/Cole Cengage Learning.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition.* New York: McGraw-Hill Companies, Inc.

Ferrara, M., Sharifi, S., & Salimi, M. (2016). Computing Multiple Zeros by Using a Parameter in Newton-Secant Method. *SeMA Journal*.

Kasturiarachi, A. B. (2002). Leap-frogging Newton's Method. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Lega, Z., Agusni, & Putra, S. (2014). Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Lima untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear Berakar Ganda. *Jurnal JOM FMIPA Vol.1*.

Mathews, J. H. (1992). *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering.* New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Muda, Y., Wartono, & Maulana, N. (2012). Konvergensi Modifikasi Metode Newton Ganda dengan Menggunakan Kelengkungan Kurva. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*.

Munir, R. (2008). *Metode Numerik.* Bandung: Informatika.

Putra, S., AR, D. A., & Imran, M. (2011). Kombinasi Metode Newton dengan Metode Secant untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear. *Jurnal EKSAKTA Vol. 2*.

Rochmad. (2013). Aplikasi Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Solusi Persamaan Non Linear. *Jurnal MIPA 36 (2): 193-200 (2013)*.

Sapari, J., & Bahri, S. (2015). Penentuan Akar-akar Persamaan Nonlinier dengan Metode Iterasi Baru. *Jurnal Matematika UNAND*.

Senning, J. R. (2019). Computing and Estimating The Rate of Convergence. *Department of Mathematics and Computer Science, Gordon College*.

Shihab, M. Q. (2003). *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Stalis, C. (2009). *Perbandingan Metode Newton Raphson dengan Metode Halley dalam Menyelesaikan Akar-akar Persamaan Nonlinier.Skripsi.* Malang: UIN Maliki Malang.

Vrahatis, M. N. (2015). Generalization of the Bolzano Theorem for Simplices. *ELSEVIER*.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan nilai awal $x = -0{,}8$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\overline{x_n}$	$f(\overline{x_n})$	m	θ	x_{n+1}	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,097935682	-0,768533315	-0,001009652	5	0,4096	-0,642768328	0,157231672
2	-0,642768328	-3,755E-14	1,78165E-10	-0,642557568	-1,23048E-14	5	0,4096	-0,641714371	0,001053957
3	-0,641714371	-1,08811E-46	1,66089E-36	-0,641714371	-3,56551E-47	5	0,4096	-0,641714371	0,000000000

Lampiran 2. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan modifikasi metode Newton-Secant dengan nilai awal $x = -0{,}2$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\overline{x_n}$	$f(\overline{x_n})$	m	θ	x_{n+1}	ε
1	-0,2	0,254438701	2,324178971	-0,309474659	0,076325397	5	0,4096	-0,609040443	-0,409040443
2	-0,609040443	1,04743E-06	0,000159412	-0,615611014	3,42726E-07	5	0,4096	-0,641704451	-0,032664009
3	-0,641704451	2,7709E-24	1,39668E-18	-0,641706435	9,07968E-25	5	0,4096	-0,641714371	-0,000009920
4	-0,641714371	-9,9601E-76	9,76369E-60	-0,641714371	-2,83492E-76	5	0,4096	-0,641714371	0,000000000

Lampiran 3. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Newton-Raphson dengan nilai awal $x = -0,8$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,097935682	-0,768533315	0,0314666848
2	-0,768533315	-0,001009652	0,040106407	-0,743358989	0,0251743260
3	-0,743358989	-0,000331106	0,016413664	-0,723186427	0,0201725626
4	-0,723186427	-0,00010863	0,006715502	-0,707010393	0,0161760338
5	-0,707010393	-3,56447E-05	0,002747415	-0,694036502	0,0129738905
6	-0,694036502	-1,16957E-05	0,001124067	-0,683631656	0,0104048461
7	-0,683631656	-3,8372E-06	0,000459945	-0,675288921	0,0083427350
8	-0,675288921	-1,25875E-06	0,000188224	-0,668601418	0,0066875027
9	-0,668601418	-4,12856E-07	7,70373E-05	-0,663242247	0,0053591718
10	-0,663242247	-1,35393E-07	3,1534E-05	-0,658948704	0,0042935426
11	-0,658948704	-4,4395E-08	1,29094E-05	-0,655509724	0,0034389797
12	-0,655509724	-1,45554E-08	5,28532E-06	-0,652755797	0,0027539271
13	-0,652755797	-4,77167E-09	2,16408E-06	-0,650550853	0,0022049440
14	-0,650550853	-1,56416E-09	8,86142E-07	-0,648785721	0,0017651326
15	-0,648785721	-5,12698E-10	3,62876E-07	-0,647372849	0,0014128720
16	-0,647372849	-1,68042E-10	1,48605E-07	-0,646242054	0,0011307942
17	-0,646242054	-5,50747E-11	6,0859E-08	-0,645337098	0,0009049564
18	-0,645337098	-1,80498E-11	2,49247E-08	-0,644612926	0,0007241723

19	-0,644612926	-5,9153E-12	1,02081E-08	-0,644033454	0,0005794712
20	-0,644033454	-1,93853E-12	4,18089E-09	-0,643569792	0,0004636628
21	-0,643569792	-6,35268E-13	1,71238E-09	-0,643198806	0,0003709854
22	-0,643198806	-2,08179E-13	7,01354E-10	-0,642901982	0,0002968238
23	-0,642901982	-6,82196E-14	2,87262E-10	-0,642664501	0,0002374817
24	-0,642664501	-2,23551E-14	1,17659E-10	-0,642474501	0,0001900000
25	-0,642474501	-7,32558E-15	4,81917E-11	-0,642322491	0,0001520093
26	-0,642322491	-2,40051E-15	1,97389E-11	-0,642200878	0,0001216134
27	-0,642200878	-7,86617E-16	8,0849E-12	-0,642103583	0,0000972946
28	-0,642103583	-2,57763E-16	3,31153E-12	-0,642025745	0,0000778381
29	-0,642025745	-8,4465E-17	1,35639E-12	-0,641963473	0,0000622721
30	-0,641963473	-2,76778E-17	5,55571E-13	-0,641913655	0,0000498187
31	-0,641913655	-9,06955E-18	2,2756E-13	-0,641873799	0,0000398556
32	-0,641873799	-2,97193E-18	9,32082E-14	-0,641841914	0,0000318849
33	-0,641841914	-9,73848E-19	3,81779E-14	-0,641816406	0,0000255082
34	-0,641816406	-3,19112E-19	1,56376E-14	-0,641795999	0,0000204067
35	-0,641795999	-1,04567E-19	6,40514E-15	-0,641779674	0,0000163255
36	-0,641779674	-3,42646E-20	2,62354E-15	-0,641766613	0,0000130604
37	-0,641766613	-1,12279E-20	1,0746E-15	-0,641756165	0,0000104484
38	-0,641756165	-3,67915E-21	4,40156E-16	-0,641747806	0,0000083587

39	-0,641747806	-1,20559E-21	1,80288E-16	-0,641741119	0,0000066870
40	-0,641741119	-3,95047E-22	7,38457E-17	-0,641735769	0,0000053496
41	-0,641735769	-1,29449E-22	3,02472E-17	-0,64173149	0,0000042797
42	-0,64173149	-4,24179E-23	1,23892E-17	-0,641728066	0,0000034238
43	-0,641728066	-1,38995E-23	5,07463E-18	-0,641725327	0,0000027390
44	-0,641725327	-4,55459E-24	2,07857E-18	-0,641723136	0,0000021912
45	-0,641723136	-1,49245E-24	8,51381E-19	-0,641721383	0,0000017530
46	-0,641721383	-4,89046E-25	3,48725E-19	-0,64171998	0,0000014024
47	-0,64171998	-1,60251E-25	1,42838E-19	-0,641718858	0,0000011219
48	-0,641718858	-5,25109E-26	5,85064E-20	-0,641717961	0,0000008975
49	-0,641717961	-1,72068E-26	2,39642E-20	-0,641717243	0,0000007180
50	-0,641717243	-5,63832E-27	9,81574E-21	-0,641716669	0,0000005744
51	-0,641716669	-1,84757E-27	4,02053E-21	-0,641716209	0,0000004595
52	-0,641716209	-6,0541E-28	1,64681E-21	-0,641715841	0,0000003676
53	-0,641715841	-1,98381E-28	6,74533E-22	-0,641715547	0,0000002941
54	-0,641715547	-6,50054E-29	2,76289E-22	-0,641715312	0,0000002353
55	-0,641715312	-2,1301E-29	1,13168E-22	-0,641715124	0,0000001882
56	-0,641715124	-6,97991E-30	4,63535E-23	-0,641714973	0,0000001506
57	-0,641714973	-2,28718E-30	1,89864E-23	-0,641714853	0,0000001205
58	-0,641714853	-7,49462E-31	7,77683E-24	-0,641714756	0,0000000964

59	-0,641714756	-2,45584E-31	3,18539E-24	-0,641714679	0,0000000771
60	-0,641714679	-8,04729E-32	1,30474E-24	-0,641714618	0,0000000617
61	-0,641714618	-2,63693E-32	5,3442E-25	-0,641714568	0,0000000493
62	-0,641714568	-8,64071E-33	2,18898E-25	-0,641714529	0,0000000395
63	-0,641714529	-2,83139E-33	8,96607E-26	-0,641714497	0,0000000316
64	-0,641714497	-9,27789E-34	3,6725E-26	-0,641714472	0,0000000253
65	-0,641714472	-3,04018E-34	1,50426E-26	-0,641714452	0,0000000202
66	-0,641714452	-9,96206E-35	6,16144E-27	-0,641714436	0,0000000162
67	-0,641714436	-3,26437E-35	2,52373E-27	-0,641714423	0,0000000129
68	-0,641714423	-1,06967E-35	1,03372E-27	-0,641714412	0,0000000103
69	-0,641714412	-3,50509E-36	4,23411E-28	-0,641714404	0,0000000083
70	-0,641714404	-1,14855E-36	1,73429E-28	-0,641714397	0,0000000066
71	-0,641714397	-3,76356E-37	7,10366E-29	-0,641714392	0,0000000053
72	-0,641714392	-1,23324E-37	2,90966E-29	-0,641714388	0,0000000042
73	-0,641714388	-4,04109E-38	1,1918E-29	-0,641714384	0,0000000034
74	-0,641714384	-1,32418E-38	4,8816E-30	-0,641714382	0,0000000027
75	-0,641714382	-4,33909E-39	1,9995E-30	-0,64171438	0,0000000022
76	-0,64171438	-1,42183E-39	8,18996E-31	-0,641714378	0,0000000017
77	-0,641714378	-4,65906E-40	3,35461E-31	-0,641714376	0,0000000014
78	-0,641714376	-1,52668E-40	1,37405E-31	-0,641714375	0,0000000011

79	-0,641714375	-5,00263E-41	5,6281E-32	-0,641714374	0,0000000009
80	-0,641714374	-1,63926E-41	2,30527E-32	-0,641714374	0,0000000007
81	-0,641714374	-5,37153E-42	9,44238E-33	-0,641714373	0,0000000006
82	-0,641714373	-1,76014E-42	3,8676E-33	-0,641714373	0,0000000005
83	-0,641714373	-5,76764E-43	1,58417E-33	-0,641714372	0,0000000004
84	-0,641714372	-1,88994E-43	6,48875E-34	-0,641714372	0,0000000003
85	-0,641714372	-6,19295E-44	2,65779E-34	-0,641714372	0,0000000002
86	-0,641714372	-2,02931E-44	1,08863E-34	-0,641714372	0,0000000002
87	-0,641714372	-6,64963E-45	4,45904E-35	-0,641714371	0,0000000001
88	-0,641714371	-2,17895E-45	1,82642E-35	-0,641714371	0,0000000001
89	-0,641714371	-7,13999E-46	7,48103E-36	-0,641714371	0,0000000001
90	-0,641714371	-2,33963E-46	3,06423E-36	-0,641714371	0,0000000001
91	-0,641714371	-7,6665E-47	1,25511E-36	-0,641714371	0,0000000001
92	-0,641714371	-2,51216E-47	5,14092E-37	-0,641714371	0,0000000000

Lampiran 4. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Secant dengan nilai awal $x_0 = -0{,}2$ dan $x_1 = -0{,}8$

Iterasi	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	x_{n+1}	ε
1	-0,2	-0,8	0,254438701	-0,003081711	-0,792819883	0,0071801172
2	-0,8	-0,792819883	-0,003081711	-0,00243979	-0,765529987	0,0272898960

3	-0,792819883	-0,765529987	-0,00243979	-0,000894817	-0,749724216	0,0158057709
4	-0,765529987	-0,749724216	-0,000894817	-0,000449662	-0,733758462	0,0159657542
5	-0,749724216	-0,733758462	-0,000449662	-0,000200848	-0,720870561	0,0128879006
6	-0,733758462	-0,720870561	-0,000200848	-9,39455E-05	-0,709544708	0,0113258529
7	-0,720870561	-0,709544708	-9,39455E-05	-4,31748E-05	-0,699913337	0,0096313707
8	-0,709544708	-0,699913337	-4,31748E-05	-1,99778E-05	-0,691618546	0,0082947911
9	-0,699913337	-0,691618546	-1,99778E-05	-9,21948E-06	-0,684510249	0,0071082976
10	-0,691618546	-0,684510249	-9,21948E-06	-4,25873E-06	-0,678407874	0,0061023742
11	-0,684510249	-0,678407874	-4,25873E-06	-1,96632E-06	-0,673173556	0,0052343185
12	-0,678407874	-0,673173556	-1,96632E-06	-9,0795E-07	-0,668683158	0,0044903975
13	-0,673173556	-0,668683158	-9,0795E-07	-4,19192E-07	-0,664831892	0,0038512669
14	-0,668683158	-0,664831892	-4,19192E-07	-1,93528E-07	-0,661529077	0,0033028142
15	-0,664831892	-0,661529077	-1,93528E-07	-8,9339E-08	-0,658697003	0,0028320747
16	-0,661529077	-0,658697003	-8,9339E-08	-4,12396E-08	-0,656268832	0,0024281708
17	-0,658697003	-0,656268832	-4,12396E-08	-1,90354E-08	-0,654187178	0,0020816535
18	-0,656268832	-0,654187178	-1,90354E-08	-8,78599E-09	-0,652402753	0,0017844249
19	-0,654187178	-0,652402753	-8,78599E-09	-4,05508E-09	-0,650873243	0,0015295108
20	-0,652402753	-0,650873243	-4,05508E-09	-1,8715E-09	-0,649562325	0,0013109180
21	-0,650873243	-0,649562325	-1,8715E-09	-8,63709E-10	-0,64843883	0,0011234943
22	-0,649562325	-0,64843883	-8,63709E-10	-3,98594E-10	-0,647476017	0,0009628132

23	-0,64843883	-0,647476017	-3,98594E-10	-1,83943E-10	-0,646650945	0,0008250725
24	-0,647476017	-0,646650945	-1,83943E-10	-8,4884E-11	-0,645943938	0,0007070071
25	-0,646650945	-0,645943938	-8,4884E-11	-3,91706E-11	-0,645338123	0,0006058142
26	-0,645943938	-0,645338123	-3,91706E-11	-1,80753E-11	-0,644819035	0,0005190884
27	-0,645338123	-0,644819035	-1,80753E-11	-8,34077E-12	-0,644374269	0,0004447656
28	-0,644819035	-0,644374269	-8,34077E-12	-3,84876E-12	-0,643993194	0,0003810752
29	-0,644374269	-0,643993194	-3,84876E-12	-1,77595E-12	-0,643666696	0,0003264986
30	-0,643993194	-0,643666696	-1,77595E-12	-8,19475E-13	-0,643386962	0,0002797333
31	-0,643666696	-0,643386962	-8,19475E-13	-3,78127E-13	-0,643147299	0,0002396627
32	-0,643386962	-0,643147299	-3,78127E-13	-1,74476E-13	-0,64294197	0,0002053294
33	-0,643147299	-0,64294197	-1,74476E-13	-8,05068E-14	-0,642766058	0,0001759125
34	-0,64294197	-0,642766058	-8,05068E-14	-3,71472E-14	-0,642615349	0,0001507087
35	-0,642766058	-0,642615349	-3,71472E-14	-1,71403E-14	-0,642486234	0,0001291148
36	-0,642615349	-0,642486234	-1,71403E-14	-7,90876E-15	-0,64237562	0,0001106142
37	-0,642486234	-0,64237562	-7,90876E-15	-3,6492E-15	-0,642280856	0,0000947639
38	-0,64237562	-0,642280856	-3,6492E-15	-1,68378E-15	-0,642199671	0,0000811844
39	-0,642280856	-0,642199671	-1,68378E-15	-7,76911E-16	-0,642130121	0,0000695506
40	-0,642199671	-0,642130121	-7,76911E-16	-3,58473E-16	-0,642070537	0,0000595836
41	-0,642130121	-0,642070537	-3,58473E-16	-1,65402E-16	-0,642019493	0,0000510448
42	-0,642070537	-0,642019493	-1,65402E-16	-7,63178E-17	-0,641975763	0,0000437295

43	-0,642019493	-0,641975763	-7,63178E-17	-3,52135E-17	-0,6419383	0,0000374625
44	-0,641975763	-0,6419383	-3,52135E-17	-1,62477E-17	-0,641906207	0,0000320936
45	-0,6419383	-0,641906207	-1,62477E-17	-7,49679E-18	-0,641878713	0,0000274941
46	-0,641906207	-0,641878713	-7,49679E-18	-3,45906E-18	-0,641855159	0,0000235537
47	-0,641878713	-0,641855159	-3,45906E-18	-1,59602E-18	-0,641834981	0,0000201780
48	-0,641855159	-0,641834981	-1,59602E-18	-7,36413E-19	-0,641817695	0,0000172861
49	-0,641834981	-0,641817695	-7,36413E-19	-3,39784E-19	-0,641802886	0,0000148087
50	-0,641817695	-0,641802886	-3,39784E-19	-1,56778E-19	-0,6417902	0,0000126863
51	-0,641802886	-0,6417902	-1,56778E-19	-7,23378E-20	-0,641779332	0,0000108681
52	-0,6417902	-0,641779332	-7,23378E-20	-3,33769E-20	-0,641770021	0,0000093104
53	-0,641779332	-0,641770021	-3,33769E-20	-1,54002E-20	-0,641762045	0,0000079760
54	-0,641770021	-0,641762045	-1,54002E-20	-7,10572E-21	-0,641755212	0,0000068329
55	-0,641762045	-0,641755212	-7,10572E-21	-3,2786E-21	-0,641749359	0,0000058536
56	-0,641755212	-0,641749359	-3,2786E-21	-1,51276E-21	-0,641744344	0,0000050146
57	-0,641749359	-0,641744344	-1,51276E-21	-6,97991E-22	-0,641740048	0,0000042959
58	-0,641744344	-0,641740048	-6,97991E-22	-3,22055E-22	-0,641736368	0,0000036802
59	-0,641740048	-0,641736368	-3,22055E-22	-1,48597E-22	-0,641733215	0,0000031527
60	-0,641736368	-0,641733215	-1,48597E-22	-6,85633E-23	-0,641730514	0,0000027009
61	-0,641733215	-0,641730514	-6,85633E-23	-3,16353E-23	-0,641728201	0,0000023138
62	-0,641730514	-0,641728201	-3,16353E-23	-1,45966E-23	-0,641726219	0,0000019822

63	-0,641728201	-0,641726219	-1,45966E-23	-6,73492E-24	-0,64172452	0,0000016981
64	-0,641726219	-0,64172452	-6,73492E-24	-3,10751E-24	-0,641723066	0,0000014547
65	-0,64172452	-0,641723066	-3,10751E-24	-1,43381E-24	-0,64172182	0,0000012462
66	-0,641723066	-0,64172182	-1,43381E-24	-6,61566E-25	-0,641720752	0,0000010676
67	-0,64172182	-0,641720752	-6,61566E-25	-3,05249E-25	-0,641719837	0,0000009146
68	-0,641720752	-0,641719837	-3,05249E-25	-1,40843E-25	-0,641719054	0,0000007835
69	-0,641719837	-0,641719054	-1,40843E-25	-6,49851E-26	-0,641718383	0,0000006712
70	-0,641719054	-0,641718383	-6,49851E-26	-2,99843E-26	-0,641717808	0,0000005750
71	-0,641718383	-0,641717808	-2,99843E-26	-1,38349E-26	-0,641717315	0,0000004926
72	-0,641717808	-0,641717315	-1,38349E-26	-6,38344E-27	-0,641716893	0,0000004220
73	-0,641717315	-0,641716893	-6,38344E-27	-2,94534E-27	-0,641716532	0,0000003615
74	-0,641716893	-0,641716532	-2,94534E-27	-1,35899E-27	-0,641716222	0,0000003097
75	-0,641716532	-0,641716222	-1,35899E-27	-6,2704E-28	-0,641715957	0,0000002653
76	-0,641716222	-0,641715957	-6,2704E-28	-2,89318E-28	-0,641715729	0,0000002273
77	-0,641715957	-0,641715729	-2,89318E-28	-1,33492E-28	-0,641715535	0,0000001947
78	-0,641715729	-0,641715535	-1,33492E-28	-6,15936E-29	-0,641715368	0,0000001668
79	-0,641715535	-0,641715368	-6,15936E-29	-2,84195E-29	-0,641715225	0,0000001429
80	-0,641715368	-0,641715225	-2,84195E-29	-1,31128E-29	-0,641715103	0,0000001224
81	-0,641715225	-0,641715103	-1,31128E-29	-6,05029E-30	-0,641714998	0,0000001049
82	-0,641715103	-0,641714998	-6,05029E-30	-2,79162E-30	-0,641714908	0,0000000898

83	-0,641714998	-0,641714908	-2,79162E-30	-1,28806E-30	-0,641714831	0,0000000770
84	-0,641714908	-0,641714831	-1,28806E-30	-5,94315E-31	-0,641714765	0,0000000659
85	-0,641714831	-0,641714765	-5,94315E-31	-2,74219E-31	-0,641714708	0,0000000565
86	-0,641714765	-0,641714708	-2,74219E-31	-1,26525E-31	-0,64171466	0,0000000484
87	-0,641714708	-0,64171466	-1,26525E-31	-5,83791E-32	-0,641714619	0,0000000415
88	-0,64171466	-0,641714619	-5,83791E-32	-2,69363E-32	-0,641714583	0,0000000355
89	-0,641714619	-0,641714583	-2,69363E-32	-1,24285E-32	-0,641714553	0,0000000304
90	-0,641714583	-0,641714553	-1,24285E-32	-5,73453E-33	-0,641714527	0,0000000261
91	-0,641714553	-0,641714527	-5,73453E-33	-2,64593E-33	-0,641714504	0,0000000223
92	-0,641714527	-0,641714504	-2,64593E-33	-1,22084E-33	-0,641714485	0,0000000191
93	-0,641714504	-0,641714485	-1,22084E-33	-5,63299E-34	-0,641714469	0,0000000164
94	-0,641714485	-0,641714469	-5,63299E-34	-2,59907E-34	-0,641714455	0,0000000140
95	-0,641714469	-0,641714455	-2,59907E-34	-1,19922E-34	-0,641714443	0,0000000120
96	-0,641714455	-0,641714443	-1,19922E-34	-5,53324E-35	-0,641714432	0,0000000103
97	-0,641714443	-0,641714432	-5,53324E-35	-2,55305E-35	-0,641714424	0,0000000088
98	-0,641714432	-0,641714424	-2,55305E-35	-1,17798E-35	-0,641714416	0,0000000076
99	-0,641714424	-0,641714416	-1,17798E-35	-5,43525E-36	-0,64171441	0,0000000065
100	-0,641714416	-0,64171441	-5,43525E-36	-2,50784E-36	-0,641714404	0,0000000055
101	-0,64171441	-0,641714404	-2,50784E-36	-1,15712E-36	-0,641714399	0,0000000048
102	-0,641714404	-0,641714399	-1,15712E-36	-5,339E-37	-0,641714395	0,0000000041

103	-0,641714399	-0,641714395	-5,339E-37	-2,46343E-37	-0,641714392	0,0000000035
104	-0,641714395	-0,641714392	-2,46343E-37	-1,13663E-37	-0,641714389	0,0000000030
105	-0,641714392	-0,641714389	-1,13663E-37	-5,24446E-38	-0,641714386	0,0000000026
106	-0,641714389	-0,641714386	-5,24446E-38	-2,41981E-38	-0,641714384	0,0000000022
107	-0,641714386	-0,641714384	-2,41981E-38	-1,11651E-38	-0,641714382	0,0000000019
108	-0,641714384	-0,641714382	-1,11651E-38	-5,15159E-39	-0,64171438	0,0000000016
109	-0,641714382	-0,64171438	-5,15159E-39	-2,37696E-39	-0,641714379	0,0000000014
110	-0,64171438	-0,641714379	-2,37696E-39	-1,09673E-39	-0,641714378	0,0000000012
111	-0,641714379	-0,641714378	-1,09673E-39	-5,06036E-40	-0,641714377	0,0000000010
112	-0,641714378	-0,641714377	-5,06036E-40	-2,33487E-40	-0,641714376	0,0000000009
113	-0,641714377	-0,641714376	-2,33487E-40	-1,07731E-40	-0,641714375	0,0000000007
114	-0,641714376	-0,641714375	-1,07731E-40	-4,97075E-41	-0,641714375	0,0000000006
115	-0,641714375	-0,641714375	-4,97075E-41	-2,29352E-41	-0,641714374	0,0000000005
116	-0,641714375	-0,641714374	-2,29352E-41	-1,05824E-41	-0,641714374	0,0000000005
117	-0,641714374	-0,641714374	-1,05824E-41	-4,88273E-42	-0,641714373	0,0000000004
118	-0,641714374	-0,641714373	-4,88273E-42	-2,2529E-42	-0,641714373	0,0000000003
119	-0,641714373	-0,641714373	-2,2529E-42	-1,0395E-42	-0,641714373	0,0000000003
120	-0,641714373	-0,641714373	-1,0395E-42	-4,79627E-43	-0,641714372	0,0000000003
121	-0,641714373	-0,641714372	-4,79627E-43	-2,21301E-43	-0,641714372	0,0000000002
122	-0,641714372	-0,641714372	-2,21301E-43	-1,02109E-43	-0,641714372	0,0000000002

123	-0,641714372	-0,641714372	-1,02109E-43	-4,71133E-44	-0,641714372	0,0000000002
124	-0,641714372	-0,641714372	-4,71133E-44	-2,17382E-44	-0,641714372	0,0000000001
125	-0,641714372	-0,641714372	-2,17382E-44	-1,00301E-44	-0,641714372	0,0000000001
126	-0,641714372	-0,641714372	-1,00301E-44	-4,6279E-45	-0,641714371	0,0000000001
127	-0,641714372	-0,641714371	-4,6279E-45	-2,13533E-45	-0,641714371	0,0000000001
128	-0,641714371	-0,641714371	-2,13533E-45	-9,85246E-46	-0,641714371	0,0000000001
129	-0,641714371	-0,641714371	-9,85246E-46	-4,54595E-46	-0,641714371	0,0000000001
130	-0,641714371	-0,641714371	-4,54595E-46	-2,09751E-46	-0,641714371	0,0000000001
131	-0,641714371	-0,641714371	-2,09751E-46	-9,67797E-47	-0,641714371	0,0000000000

Lampiran 5. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Newton-Secant dengan nilai awal $x = -0{,}8$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\overline{x_n}$	$f(\overline{x_n})$	x_{n+1}	ε
1	-0,8	-0,003081711	0,097935682	-0,768533315	-0,001009652	-0,753200554	0,0467994463
2	-0,753200554	-0,000527484	0,023840579	-0,731075105	-0,000173035	-0,72027388	0,0329266739
3	-0,72027388	-9,04329E-05	0,005797198	-0,704674456	-2,96738E-05	-0,69705596	0,0232179199
4	-0,69705596	-1,55085E-05	0,00140949	-0,686053045	-5,08827E-06	-0,680680241	0,0163757191
5	-0,680680241	-2,659E-06	0,00034277	-0,672922866	-8,72211E-07	-0,669136147	0,0115440936
6	-0,669136147	-4,5573E-07	8,3384E-05	-0,663670707	-1,49455E-07	-0,661003711	0,0081324364
7	-0,661003711	-7,808E-08	2,02906E-05	-0,657155618	-2,56008E-08	-0,655278411	0,0057252994
8	-0,655278411	-1,33733E-08	4,93873E-06	-0,652570582	-4,3841E-09	-0,651249945	0,0040284663

9	-0,651249945	-2,28996E-09	1,20233E-06	-0,649345341	-7,50617E-10	-0,648416616	0,0028333288
10	-0,648416616	-3,92048E-10	2,9275E-07	-0,647077425	-1,28496E-10	-0,646424496	0,0019921200
11	-0,646424496	-6,71105E-11	7,12882E-08	-0,645483099	-2,19944E-11	-0,645024161	0,0014003351
12	-0,645024161	-1,14868E-11	1,73609E-08	-0,644362515	-3,76443E-12	-0,644039981	0,0009841799
13	-0,644039981	-1,96597E-12	4,22818E-09	-0,643575014	-6,44261E-13	-0,643348367	0,0006916142
14	-0,643348367	-3,36458E-13	1,0298E-09	-0,643021644	-1,10257E-13	-0,64286239	0,0004859767
15	-0,64286239	-5,75799E-14	2,50821E-10	-0,642632824	-1,88685E-14	-0,64252093	0,0003414603
16	-0,64252093	-9,85369E-15	6,10918E-11	-0,642359637	-3,22895E-15	-0,642281021	0,0002399086
17	-0,642281021	-1,68624E-15	1,48802E-11	-0,642167701	-5,52558E-16	-0,642112468	0,0001685536
18	-0,642112468	-2,88558E-16	3,62443E-12	-0,642032853	-9,45562E-17	-0,641994049	0,0001184188
19	-0,641994049	-4,93793E-17	8,82823E-13	-0,641938116	-1,61808E-17	-0,641910854	0,0000831949
20	-0,641910854	-8,44992E-18	2,15035E-13	-0,641871558	-2,76889E-18	-0,641852406	0,0000584478
21	-0,641852406	-1,44597E-18	5,23778E-14	-0,6418248	-4,73817E-19	-0,641811345	0,0000410617
22	-0,641811345	-2,47436E-19	1,27581E-14	-0,64179195	-8,10802E-20	-0,641782497	0,0000288471
23	-0,641782497	-4,23416E-20	3,1076E-15	-0,641768872	-1,38745E-20	-0,641762231	0,0000202659
24	-0,641762231	-7,24553E-21	7,56947E-16	-0,641752659	-2,37422E-21	-0,641747994	0,0000142374
25	-0,641747994	-1,23986E-21	1,84376E-16	-0,641741269	-4,06278E-22	-0,641737992	0,0000100021
26	-0,641737992	-2,12166E-22	4,49103E-17	-0,641733268	-6,95225E-23	-0,641730965	0,0000070267
27	-0,641730965	-3,63059E-23	1,09392E-17	-0,641727646	-1,18967E-23	-0,641726029	0,0000049364
28	-0,641726029	-6,21268E-24	2,66457E-18	-0,641723697	-2,03577E-24	-0,641722561	0,0000034680

29	-0,641722561	-1,06312E-24	6,49036E-19	-0,641720923	-3,48362E-25	-0,641720125	0,0000024363
30	-0,641720125	-1,81921E-25	1,58092E-19	-0,641718974	-5,96119E-26	-0,641718413	0,0000017116
31	-0,641718413	-3,11304E-26	3,8508E-20	-0,641717605	-1,02008E-26	-0,641717211	0,0000012024
32	-0,641717211	-5,32704E-27	9,37977E-21	-0,641716643	-1,74557E-27	-0,641716366	0,0000008447
33	-0,641716366	-9,11565E-28	2,28472E-21	-0,641715967	-2,98702E-28	-0,641715772	0,0000005934
34	-0,641715772	-1,55987E-28	5,56512E-22	-0,641715492	-5,11139E-29	-0,641715355	0,0000004169
35	-0,641715355	-2,66926E-29	1,35555E-22	-0,641715159	-8,74663E-30	-0,641715063	0,0000002929
36	-0,641715063	-4,56764E-30	3,30185E-23	-0,641714924	-1,49673E-30	-0,641714857	0,0000002058
37	-0,641714857	-7,81617E-31	8,04263E-24	-0,64171476	-2,5612E-31	-0,641714712	0,0000001446
38	-0,641714712	-1,3375E-31	1,95902E-24	-0,641714644	-4,38274E-32	-0,641714611	0,0000001016
39	-0,641714611	-2,28874E-32	4,77178E-25	-0,641714563	-7,49975E-33	-0,641714539	0,0000000713
40	-0,641714539	-3,9165E-33	1,16231E-25	-0,641714506	-1,28336E-33	-0,641714489	0,0000000501
41	-0,641714489	-6,70193E-34	2,83115E-26	-0,641714466	-2,19609E-34	-0,641714454	0,0000000352
42	-0,641714454	-1,14684E-34	6,89611E-27	-0,641714437	-3,75795E-35	-0,641714429	0,0000000247
43	-0,641714429	-1,96247E-35	1,67975E-27	-0,641714418	-6,43062E-36	-0,641714412	0,0000000174
44	-0,641714412	-3,35818E-36	4,09154E-28	-0,641714404	-1,10041E-36	-0,6417144	0,0000000122
45	-0,6417144	-5,74654E-37	9,96616E-29	-0,641714394	-1,88302E-37	-0,641714391	0,0000000086
46	-0,641714391	-9,83349E-38	2,42756E-29	-0,641714387	-3,22224E-38	-0,641714385	0,0000000060
47	-0,641714385	-1,68271E-38	5,91303E-30	-0,641714382	-5,5139E-39	-0,641714381	0,0000000042
48	-0,641714381	-2,87946E-39	1,4403E-30	-0,641714379	-9,43541E-40	-0,641714378	0,0000000030

49	-0,641714378	-4,92734E-40	3,50827E-31	-0,641714376	-1,61459E-40	-0,641714376	0,0000000021
50	-0,641714376	-8,43167E-41	8,54543E-32	-0,641714375	-2,76289E-41	-0,641714374	0,0000000015
51	-0,641714374	-1,44283E-41	2,08149E-32	-0,641714374	-4,72787E-42	-0,641714373	0,0000000010
52	-0,641714373	-2,46898E-42	5,0701E-33	-0,641714373	-8,09034E-43	-0,641714373	0,0000000007
53	-0,641714373	-4,22492E-43	1,23497E-33	-0,641714372	-1,38442E-43	-0,641714372	0,0000000005
54	-0,641714372	-7,22969E-44	3,00815E-34	-0,641714372	-2,36903E-44	-0,641714372	0,0000000004
55	-0,641714372	-1,23715E-44	7,32724E-35	-0,641714372	-4,05389E-45	-0,641714371	0,0000000003
56	-0,641714371	-2,11701E-45	1,78477E-35	-0,641714371	-6,93702E-46	-0,641714371	0,0000000002
57	-0,641714371	-3,62264E-46	4,34733E-36	-0,641714371	-1,18707E-46	-0,641714371	0,0000000001
58	-0,641714371	-6,19906E-47	1,05892E-36	-0,641714371	-2,03131E-47	-0,641714371	0,0000000001
59	-0,641714371	-1,06079E-47	2,57932E-37	-0,641714371	-3,47599E-48	-0,641714371	0,0000000001
60	-0,641714371	-1,81522E-48	6,28269E-38	-0,641714371	-5,94811E-49	-0,641714371	0,0000000000

Lampiran 6. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Newton-Raphson dengan nilai awal $x = -0,2$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	ε
1	-0,2	0,254438701	2,324178971	-0,309474659	-0,1094746591
2	-0,309474659	0,076325397	1,008815497	-0,38513309	-0,0756584307
3	-0,38513309	0,023859016	0,427170673	-0,440986681	-0,0558535916
4	-0,440986681	0,007598269	0,178650465	-0,483518162	-0,0425314811
5	-0,483518162	0,002444318	0,074187736	-0,516465903	-0,0329477400

6	-0,516465903	0,000791062	0,030674129	-0,542255132	-0,0257892295
7	-0,542255132	0,000256987	0,012647269	-0,56257468	-0,0203195483
8	-0,56257468	8,36938E-05	0,005204883	-0,578654544	-0,0160798636
9	-0,578654544	2,73029E-05	0,002139294	-0,591417127	-0,0127625835
10	-0,591417127	8,91731E-06	0,000878499	-0,601567738	-0,0101506106
11	-0,601567738	2,91487E-06	0,000360525	-0,609652804	-0,0080850656
12	-0,609652804	9,53375E-07	0,000147886	-0,616099485	-0,0064466814
13	-0,616099485	3,1196E-07	6,06418E-05	-0,621243801	-0,0051443156
14	-0,621243801	1,02112E-07	2,48603E-05	-0,625351239	-0,0041074385
15	-0,625351239	3,34318E-08	1,01896E-05	-0,628632225	-0,0032809856
16	-0,628632225	1,09477E-08	4,17583E-06	-0,631253918	-0,0026216937
17	-0,631253918	3,58551E-09	1,71112E-06	-0,633349335	-0,0020954162
18	-0,633349335	1,17442E-09	7,01101E-07	-0,635024448	-0,0016751135
19	-0,635024448	3,84712E-10	2,87244E-07	-0,636363769	-0,0013393213
20	-0,636363769	1,26031E-10	1,17679E-07	-0,637434739	-0,0010709700
21	-0,637434739	4,12894E-11	4,8209E-08	-0,638291207	-0,0008564672
22	-0,638291207	1,35276E-11	1,97489E-08	-0,638976184	-0,0006849775
23	-0,638976184	4,43215E-12	8,08997E-09	-0,639524041	-0,0005478572
24	-0,639524041	1,45218E-12	3,31392E-09	-0,639962247	-0,0004382062
25	-0,639962247	4,75812E-13	1,35747E-09	-0,640312762	-0,0003505143

26	-0,640312762	1,55904E-13	5,56048E-10	-0,640593141	-0,0002803791
27	-0,640593141	5,1084E-14	2,27766E-10	-0,640817423	-0,0002242826
28	-0,640817423	1,67385E-14	9,32962E-11	-0,640996836	-0,0001794129
29	-0,640996836	5,4847E-15	3,82151E-11	-0,641140358	-0,0001435219
30	-0,641140358	1,79718E-15	1,56532E-11	-0,64125517	-0,0001148121
31	-0,64125517	5,88888E-16	6,41167E-12	-0,641347016	-0,0000918462
32	-0,641347016	1,92964E-16	2,62626E-12	-0,641420491	-0,0000734748
33	-0,641420491	6,32295E-17	1,07573E-12	-0,64147927	-0,0000587784
34	-0,64147927	2,07188E-17	4,40621E-13	-0,641526292	-0,0000470218
35	-0,641526292	6,78908E-18	1,8048E-13	-0,641563908	-0,0000376169
36	-0,641563908	2,22463E-18	7,39249E-14	-0,641594002	-0,0000300931
37	-0,641594002	7,28963E-19	3,02798E-14	-0,641618076	-0,0000240743
38	-0,641618076	2,38866E-19	1,24026E-14	-0,641637335	-0,0000192593
39	-0,641637335	7,82712E-20	5,08013E-15	-0,641652742	-0,0000154073
40	-0,641652742	2,56478E-20	2,08083E-15	-0,641665068	-0,0000123258
41	-0,641665068	8,40427E-21	8,52308E-16	-0,641674929	-0,0000098606
42	-0,641674929	2,75391E-21	3,49106E-16	-0,641682817	-0,0000078885
43	-0,641682817	9,02398E-22	1,42994E-16	-0,641689128	-0,0000063107
44	-0,641689128	2,95698E-22	5,85704E-17	-0,641694177	-0,0000050486
45	-0,641694177	9,68941E-23	2,39904E-17	-0,641698215	-0,0000040389

46	-0,641698215	3,17502E-23	9,82649E-18	-0,641701447	-0,0000032311
47	-0,641701447	1,04039E-23	4,02493E-18	-0,641704031	-0,0000025849
48	-0,641704031	3,40915E-24	1,64861E-18	-0,641706099	-0,0000020679
49	-0,641706099	1,11711E-24	6,75272E-19	-0,641707754	-0,0000016543
50	-0,641707754	3,66055E-25	2,76592E-19	-0,641709077	-0,0000013234
51	-0,641709077	1,19949E-25	1,13292E-19	-0,641710136	-0,0000010588
52	-0,641710136	3,93048E-26	4,64044E-20	-0,641710983	-0,0000008470
53	-0,641710983	1,28794E-26	1,90072E-20	-0,64171166	-0,0000006776
54	-0,64171166	4,22032E-27	7,78536E-21	-0,641712203	-0,0000005421
55	-0,641712203	1,38291E-27	3,18889E-21	-0,641712636	-0,0000004337
56	-0,641712636	4,53153E-28	1,30617E-21	-0,641712983	-0,0000003469
57	-0,641712983	1,48489E-28	5,35006E-22	-0,641713261	-0,0000002775
58	-0,641713261	4,8657E-29	2,19139E-22	-0,641713483	-0,0000002220
59	-0,641713483	1,59439E-29	8,97592E-23	-0,64171366	-0,0000001776
60	-0,64171366	5,2245E-30	3,67653E-23	-0,641713802	-0,0000001421
61	-0,641713802	1,71196E-30	1,50591E-23	-0,641713916	-0,0000001137
62	-0,641713916	5,60976E-31	6,1682E-24	-0,641714007	-0,0000000909
63	-0,641714007	1,83821E-31	2,5265E-24	-0,64171408	-0,0000000728
64	-0,64171408	6,02344E-32	1,03485E-24	-0,641714138	-0,0000000582
65	-0,641714138	1,97376E-32	4,23876E-25	-0,641714185	-0,0000000466

66	-0,641714185	6,46762E-33	1,73619E-25	-0,641714222	-0,0000000373
67	-0,641714222	2,11931E-33	7,11145E-26	-0,641714252	-0,0000000298
68	-0,641714252	6,94455E-34	2,91285E-26	-0,641714276	-0,0000000238
69	-0,641714276	2,27559E-34	1,1931E-26	-0,641714295	-0,0000000191
70	-0,641714295	7,45666E-35	4,88695E-27	-0,64171431	-0,0000000153
71	-0,64171431	2,4434E-35	2,0017E-27	-0,641714322	-0,0000000122
72	-0,641714322	8,00652E-36	8,19895E-28	-0,641714332	-0,0000000098
73	-0,641714332	2,62358E-36	3,35829E-28	-0,64171434	-0,0000000078
74	-0,64171434	8,59694E-37	1,37556E-28	-0,641714346	-0,0000000062
75	-0,641714346	2,81704E-37	5,63427E-29	-0,641714351	-0,0000000050
76	-0,641714351	9,23089E-38	2,3078E-29	-0,641714355	-0,0000000040
77	-0,641714355	3,02478E-38	9,45274E-30	-0,641714358	-0,0000000032
78	-0,641714358	9,91159E-39	3,87184E-30	-0,641714361	-0,0000000026
79	-0,641714361	3,24783E-39	1,58591E-30	-0,641714363	-0,0000000020
80	-0,641714363	1,06425E-39	6,49588E-31	-0,641714364	-0,0000000016
81	-0,641714364	3,48733E-40	2,66071E-31	-0,641714366	-0,0000000013
82	-0,641714366	1,14273E-40	1,08983E-31	-0,641714367	-0,0000000010
83	-0,641714367	3,74449E-41	4,46393E-32	-0,641714368	-0,0000000008
84	-0,641714368	1,227E-41	1,82843E-32	-0,641714368	-0,0000000007
85	-0,641714368	4,02062E-42	7,48923E-33	-0,641714369	-0,0000000005

86	-0,641714369	1,31748E-42	3,06759E-33	-0,641714369	-0,0000000004
87	-0,641714369	4,31711E-43	1,25649E-33	-0,641714369	-0,0000000003
88	-0,641714369	1,41463E-43	5,14656E-34	-0,64171437	-0,0000000003
89	-0,64171437	4,63546E-44	2,10803E-34	-0,64171437	-0,0000000002
90	-0,64171437	1,51895E-44	8,6345E-35	-0,64171437	-0,0000000002
91	-0,64171437	4,97729E-45	3,53669E-35	-0,64171437	-0,0000000001
92	-0,64171437	1,63096E-45	1,44863E-35	-0,64171437	-0,0000000001
93	-0,64171437	5,34433E-46	5,93359E-36	-0,641714371	-0,0000000001
94	-0,641714371	1,75123E-46	2,4304E-36	-0,641714371	-0,0000000001
95	-0,641714371	5,73843E-47	9,95491E-37	-0,641714371	-0,0000000001
96	-0,641714371	1,88037E-47	4,07753E-37	-0,641714371	0,0000000000

Lampiran 7. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Secant dengan nilai awal $x_0 = -0{,}8$ dan $x_1 = -0{,}2$

Iterasi	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	x_{n+1}	ε
1	-0,8	-0,2	-0,003081711	0,254438701	-0,792819883	-0,5928198828
2	-0,2	-0,792819883	0,254438701	-0,00243979	-0,787189377	0,0056305056
3	-0,792819883	-0,787189377	-0,00243979	-0,002015317	-0,760456791	0,0267325867
4	-0,787189377	-0,760456791	-0,002015317	-0,000724756	-0,745444233	0,0150125577
5	-0,760456791	-0,745444233	-0,000724756	-0,00036678	-0,730062467	0,0153817656

6	-0,745444233	-0,730062467	-0,00036678	-0,00016338	-0,717707104	0,0123553631
7	-0,730062467	-0,717707104	-0,00016338	-7,65027E-05	-0,706827216	0,0108798879
8	-0,717707104	-0,706827216	-7,65027E-05	-3,51442E-05	-0,697582062	0,0092451544
9	-0,706827216	-0,697582062	-3,51442E-05	-1,62644E-05	-0,689617659	0,0079644033
10	-0,697582062	-0,689617659	-1,62644E-05	-7,50521E-06	-0,682793441	0,0068242173
11	-0,689617659	-0,682793441	-7,50521E-06	-3,46689E-06	-0,676934881	0,0058585604
12	-0,682793441	-0,676934881	-3,46689E-06	-1,60067E-06	-0,671909958	0,0050249228
13	-0,676934881	-0,671909958	-1,60067E-06	-7,39098E-07	-0,667599324	0,0043106338
14	-0,671909958	-0,667599324	-7,39098E-07	-3,41227E-07	-0,663902374	0,0036969497
15	-0,667599324	-0,663902374	-3,41227E-07	-1,57531E-07	-0,660732004	0,0031703705
16	-0,663902374	-0,660732004	-1,57531E-07	-7,27206E-08	-0,658013581	0,0027184228
17	-0,660732004	-0,658013581	-7,27206E-08	-3,35679E-08	-0,655682919	0,0023306623
18	-0,658013581	-0,655682919	-3,35679E-08	-1,54941E-08	-0,653684909	0,0019980094
19	-0,655682919	-0,653684909	-1,54941E-08	-7,15137E-09	-0,651972224	0,0017126852
20	-0,653684909	-0,651972224	-7,15137E-09	-3,3006E-09	-0,650504234	0,0014679899
21	-0,651972224	-0,650504234	-3,3006E-09	-1,52328E-09	-0,649246067	0,0012581671
22	-0,650504234	-0,649246067	-1,52328E-09	-7,02997E-10	-0,648167799	0,0010782685
23	-0,649246067	-0,648167799	-7,02997E-10	-3,24425E-10	-0,647243756	0,0009240430
24	-0,648167799	-0,647243756	-3,24425E-10	-1,49714E-10	-0,646451916	0,0007918394
25	-0,647243756	-0,646451916	-1,49714E-10	-6,90882E-11	-0,645773394	0,0006785226

26	-0,646451916	-0,645773394	-6,90882E-11	-3,18813E-11	-0,645191992	0,0005814014
27	-0,645773394	-0,645191992	-3,18813E-11	-1,47116E-11	-0,644693826	0,0004981666
28	-0,645191992	-0,644693826	-1,47116E-11	-6,78857E-12	-0,644266989	0,0004268365
29	-0,644693826	-0,644266989	-6,78857E-12	-3,1325E-12	-0,643901278	0,0003657115
30	-0,644266989	-0,643901278	-3,1325E-12	-1,44544E-12	-0,643587944	0,0003133336
31	-0,643901278	-0,643587944	-1,44544E-12	-6,66967E-13	-0,643319491	0,0002684529
32	-0,643587944	-0,643319491	-6,66967E-13	-3,07755E-13	-0,643089494	0,0002299973
33	-0,643319491	-0,643089494	-3,07755E-13	-1,42005E-13	-0,642892446	0,0001970480
34	-0,643089494	-0,642892446	-1,42005E-13	-6,55238E-14	-0,642723629	0,0001688171
35	-0,642892446	-0,642723629	-6,55238E-14	-3,02338E-14	-0,642578999	0,0001446295
36	-0,642723629	-0,642578999	-3,02338E-14	-1,39503E-14	-0,642455093	0,0001239064
37	-0,642578999	-0,642455093	-1,39503E-14	-6,43685E-15	-0,642348941	0,0001061519
38	-0,642455093	-0,642348941	-6,43685E-15	-2,97004E-15	-0,642258	0,0000909409
39	-0,642348941	-0,642258	-2,97004E-15	-1,37041E-15	-0,642180091	0,0000779092
40	-0,642258	-0,642180091	-1,37041E-15	-6,32318E-16	-0,642113346	0,0000667446
41	-0,642180091	-0,642113346	-6,32318E-16	-2,91757E-16	-0,642056167	0,0000571797
42	-0,642113346	-0,642056167	-2,91757E-16	-1,34619E-16	-0,642007181	0,0000489853
43	-0,642056167	-0,642007181	-1,34619E-16	-6,2114E-17	-0,641965216	0,0000419652
44	-0,642007181	-0,641965216	-6,2114E-17	-2,86598E-17	-0,641929265	0,0000359510
45	-0,641965216	-0,641929265	-2,86598E-17	-1,32238E-17	-0,641898466	0,0000307987

46	-0,641929265	-0,641898466	-1,32238E-17	-6,10153E-18	-0,641872082	0,0000263848
47	-0,641898466	-0,641872082	-6,10153E-18	-2,81527E-18	-0,641849478	0,0000226034
48	-0,641872082	-0,641849478	-2,81527E-18	-1,29898E-18	-0,641830114	0,0000193639
49	-0,641849478	-0,641830114	-1,29898E-18	-5,99355E-19	-0,641813526	0,0000165887
50	-0,641830114	-0,641813526	-5,99355E-19	-2,76545E-19	-0,641799315	0,0000142112
51	-0,641813526	-0,641799315	-2,76545E-19	-1,27599E-19	-0,64178714	0,0000121744
52	-0,641799315	-0,64178714	-1,27599E-19	-5,88746E-20	-0,641776711	0,0000104295
53	-0,64178714	-0,641776711	-5,88746E-20	-2,7165E-20	-0,641767776	0,0000089348
54	-0,641776711	-0,641767776	-2,7165E-20	-1,2534E-20	-0,641760122	0,0000076542
55	-0,641767776	-0,641760122	-1,2534E-20	-5,78324E-21	-0,641753564	0,0000065572
56	-0,641760122	-0,641753564	-5,78324E-21	-2,6684E-21	-0,641747947	0,0000056174
57	-0,641753564	-0,641747947	-2,6684E-21	-1,23121E-21	-0,641743135	0,0000048123
58	-0,641747947	-0,641743135	-1,23121E-21	-5,68084E-22	-0,641739012	0,0000041226
59	-0,641743135	-0,641739012	-5,68084E-22	-2,62116E-22	-0,64173548	0,0000035317
60	-0,641739012	-0,64173548	-2,62116E-22	-1,20941E-22	-0,641732455	0,0000030255
61	-0,64173548	-0,641732455	-1,20941E-22	-5,58026E-23	-0,641729863	0,0000025919
62	-0,641732455	-0,641729863	-5,58026E-23	-2,57475E-23	-0,641727643	0,0000022204
63	-0,641729863	-0,641727643	-2,57475E-23	-1,188E-23	-0,64172574	0,0000019022
64	-0,641727643	-0,64172574	-1,188E-23	-5,48145E-24	-0,641724111	0,0000016295
65	-0,64172574	-0,641724111	-5,48145E-24	-2,52916E-24	-0,641722715	0,0000013960

66	-0,641724111	-0,641722715	-2,52916E-24	-1,16696E-24	-0,641721519	0,0000011959
67	-0,641722715	-0,641721519	-1,16696E-24	-5,38438E-25	-0,641720495	0,0000010245
68	-0,641721519	-0,641720495	-5,38438E-25	-2,48437E-25	-0,641719617	0,0000008777
69	-0,641720495	-0,641719617	-2,48437E-25	-1,1463E-25	-0,641718865	0,0000007519
70	-0,641719617	-0,641718865	-1,1463E-25	-5,28904E-26	-0,641718221	0,0000006441
71	-0,641718865	-0,641718221	-5,28904E-26	-2,44038E-26	-0,641717669	0,0000005518
72	-0,641718221	-0,641717669	-2,44038E-26	-1,126E-26	-0,641717196	0,0000004727
73	-0,641717669	-0,641717196	-1,126E-26	-5,19538E-27	-0,641716791	0,0000004050
74	-0,641717196	-0,641716791	-5,19538E-27	-2,39716E-27	-0,641716444	0,0000003469
75	-0,641716791	-0,641716444	-2,39716E-27	-1,10606E-27	-0,641716147	0,0000002972
76	-0,641716444	-0,641716147	-1,10606E-27	-5,10338E-28	-0,641715893	0,0000002546
77	-0,641716147	-0,641715893	-5,10338E-28	-2,35471E-28	-0,641715675	0,0000002181
78	-0,641715893	-0,641715675	-2,35471E-28	-1,08647E-28	-0,641715488	0,0000001868
79	-0,641715675	-0,641715488	-1,08647E-28	-5,01301E-29	-0,641715328	0,0000001601
80	-0,641715488	-0,641715328	-5,01301E-29	-2,31302E-29	-0,641715191	0,0000001371
81	-0,641715328	-0,641715191	-2,31302E-29	-1,06723E-29	-0,641715073	0,0000001175
82	-0,641715191	-0,641715073	-1,06723E-29	-4,92424E-30	-0,641714972	0,0000001006
83	-0,641715073	-0,641714972	-4,92424E-30	-2,27206E-30	-0,641714886	0,0000000862
84	-0,641714972	-0,641714886	-2,27206E-30	-1,04833E-30	-0,641714812	0,0000000739
85	-0,641714886	-0,641714812	-1,04833E-30	-4,83704E-31	-0,641714749	0,0000000633

86	-0,641714812	-0,641714749	-4,83704E-31	-2,23182E-31	-0,641714695	0,0000000542
87	-0,641714749	-0,641714695	-2,23182E-31	-1,02977E-31	-0,641714648	0,0000000464
88	-0,641714695	-0,641714648	-1,02977E-31	-4,75138E-32	-0,641714609	0,0000000398
89	-0,641714648	-0,641714609	-4,75138E-32	-2,1923E-32	-0,641714575	0,0000000341
90	-0,641714609	-0,641714575	-2,1923E-32	-1,01153E-32	-0,641714545	0,0000000292
91	-0,641714575	-0,641714545	-1,01153E-32	-4,66725E-33	-0,64171452	0,0000000250
92	-0,641714545	-0,64171452	-4,66725E-33	-2,15348E-33	-0,641714499	0,0000000214
93	-0,64171452	-0,641714499	-2,15348E-33	-9,93622E-34	-0,641714481	0,0000000184
94	-0,641714499	-0,641714481	-9,93622E-34	-4,5846E-34	-0,641714465	0,0000000157
95	-0,641714481	-0,641714465	-4,5846E-34	-2,11535E-34	-0,641714451	0,0000000135
96	-0,641714465	-0,641714451	-2,11535E-34	-9,76026E-35	-0,64171444	0,0000000115
97	-0,641714451	-0,64171444	-9,76026E-35	-4,50341E-35	-0,64171443	0,0000000099
98	-0,64171444	-0,64171443	-4,50341E-35	-2,07789E-35	-0,641714421	0,0000000085
99	-0,64171443	-0,641714421	-2,07789E-35	-9,58743E-36	-0,641714414	0,0000000073
100	-0,641714421	-0,641714414	-9,58743E-36	-4,42367E-36	-0,641714408	0,0000000062
101	-0,641714414	-0,641714408	-4,42367E-36	-2,04109E-36	-0,641714403	0,0000000053
102	-0,641714408	-0,641714403	-2,04109E-36	-9,41765E-37	-0,641714398	0,0000000046
103	-0,641714403	-0,641714398	-9,41765E-37	-4,34533E-37	-0,641714394	0,0000000039
104	-0,641714398	-0,641714394	-4,34533E-37	-2,00495E-37	-0,641714391	0,0000000033
105	-0,641714394	-0,641714391	-2,00495E-37	-9,25088E-38	-0,641714388	0,0000000029

106	-0,641714391	-0,641714388	-9,25088E-38	-4,26838E-38	-0,641714386	0,0000000025
107	-0,641714388	-0,641714386	-4,26838E-38	-1,96944E-38	-0,641714383	0,0000000021
108	-0,641714386	-0,641714383	-1,96944E-38	-9,08706E-39	-0,641714382	0,0000000018
109	-0,641714383	-0,641714382	-9,08706E-39	-4,1928E-39	-0,64171438	0,0000000015
110	-0,641714382	-0,64171438	-4,1928E-39	-1,93457E-39	-0,641714379	0,0000000013
111	-0,64171438	-0,641714379	-1,93457E-39	-8,92615E-40	-0,641714378	0,0000000011
112	-0,641714379	-0,641714378	-8,92615E-40	-4,11855E-40	-0,641714377	0,0000000010
113	-0,641714378	-0,641714377	-4,11855E-40	-1,90031E-40	-0,641714376	0,0000000008
114	-0,641714377	-0,641714376	-1,90031E-40	-8,76808E-41	-0,641714375	0,0000000007
115	-0,641714376	-0,641714375	-8,76808E-41	-4,04562E-41	-0,641714375	0,0000000006
116	-0,641714375	-0,641714375	-4,04562E-41	-1,86666E-41	-0,641714374	0,0000000005
117	-0,641714375	-0,641714374	-1,86666E-41	-8,61281E-42	-0,641714374	0,0000000004
118	-0,641714374	-0,641714374	-8,61281E-42	-3,97398E-42	-0,641714373	0,0000000004
119	-0,641714374	-0,641714373	-3,97398E-42	-1,8336E-42	-0,641714373	0,0000000003
120	-0,641714373	-0,641714373	-1,8336E-42	-8,4603E-43	-0,641714373	0,0000000003
121	-0,641714373	-0,641714373	-8,4603E-43	-3,9036E-43	-0,641714372	0,0000000002
122	-0,641714373	-0,641714372	-3,9036E-43	-1,80113E-43	-0,641714372	0,0000000002
123	-0,641714372	-0,641714372	-1,80113E-43	-8,31048E-44	-0,641714372	0,0000000002
124	-0,641714372	-0,641714372	-8,31048E-44	-3,83448E-44	-0,641714372	0,0000000002
125	-0,641714372	-0,641714372	-3,83448E-44	-1,76924E-44	-0,641714372	0,0000000001

126	-0,641714372	-0,641714372	-1,76924E-44	-8,16332E-45	-0,641714372	0,0000000001
127	-0,641714372	-0,641714372	-8,16332E-45	-3,76658E-45	-0,641714371	0,0000000001
128	-0,641714372	-0,641714371	-3,76658E-45	-1,73791E-45	-0,641714371	0,0000000001
129	-0,641714371	-0,641714371	-1,73791E-45	-8,01876E-46	-0,641714371	0,0000000001
130	-0,641714371	-0,641714371	-8,01876E-46	-3,69988E-46	-0,641714371	0,0000000001
131	-0,641714371	-0,641714371	-3,69988E-46	-1,70713E-46	-0,641714371	0,0000000001
132	-0,641714371	-0,641714371	-1,70713E-46	-7,87677E-47	-0,641714371	0,0000000000

Lampiran 8. Tabel perhitungan persamaan $f(x) = (cos^2 x + x)^5$ menggunakan metode Newton-Secant dengan nilai awal $x = -0,2$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\overline{x_n}$	$f(\overline{x_n})$	x_{n+1}	ε
1	-0,2	0,254438701	2,324178971	-0,309474659	0,076325397	-0,356386915	-0,1563869150
2	-0,356386915	0,038715846	0,61347857	-0,419495632	0,012251946	-0,448712966	-0,0923260508
3	-0,448712966	0,006311407	0,154850087	-0,489471142	0,002032763	-0,508835153	-0,0601221874
4	-0,508835153	0,001053896	0,038422699	-0,536264139	0,000342092	-0,549446502	-0,0406113486
5	-0,549446502	0,000177912	0,009457088	-0,568259033	5,79774E-05	-0,577353179	-0,0279066767
6	-0,577353179	3,0202E-05	0,002317895	-0,590383098	9,86328E-06	-0,596701969	-0,0193487904
7	-0,596701969	5,14283E-06	0,000566768	-0,605775926	1,68161E-06	-0,61018445	-0,0134824813
8	-0,61018445	8,77296E-07	0,000138393	-0,616523597	2,87074E-07	-0,619606851	-0,0094224005
9	-0,619606851	1,49817E-07	3,37642E-05	-0,624044008	4,9047E-08	-0,626203663	-0,0065968126
10	-0,626203663	2,5602E-08	8,23315E-06	-0,629313287	8,38406E-09	-0,63082748	-0,0046238166

11	-0,63082748	4,37701E-09	2,00689E-06	-0,633008468	1,43365E-09	-0,634070784	-0,0032433043
12	-0,634070784	7,48525E-10	4,89082E-07	-0,635601254	2,45206E-10	-0,636346863	-0,0022760787
13	-0,636346863	1,28033E-10	1,19171E-07	-0,63742122	4,19453E-11	-0,637944691	-0,0015978276
14	-0,637944691	2,19024E-11	2,90347E-08	-0,638699045	7,17599E-12	-0,639066631	-0,0011219409
15	-0,639066631	3,74718E-12	7,07343E-09	-0,639596385	1,22775E-12	-0,639854542	-0,0007879108
16	-0,639854542	6,41125E-13	1,72314E-09	-0,640226609	2,10069E-13	-0,640407931	-0,0005533888
17	-0,640407931	1,09698E-13	4,19757E-10	-0,640669269	3,59442E-14	-0,640796632	-0,0003887012
18	-0,640796632	1,87703E-14	1,0225E-10	-0,640980204	6,15044E-15	-0,641069671	-0,0002730385
19	-0,641069671	3,21182E-15	2,49071E-11	-0,641198623	1,05242E-15	-0,64126147	-0,0001917995
20	-0,64126147	5,49588E-16	6,06703E-12	-0,641352056	1,80086E-16	-0,641396206	-0,0001347355
21	-0,641396206	9,40434E-17	1,47783E-12	-0,641459842	3,08158E-17	-0,641490856	-0,0000946508
22	-0,641490856	1,60925E-17	3,59975E-13	-0,641535561	5,27313E-18	-0,641557349	-0,0000664924
23	-0,641557349	2,75371E-18	8,76835E-14	-0,641588754	9,02331E-19	-0,64160406	-0,0000467114
24	-0,64160406	4,71212E-19	2,13581E-14	-0,641626123	1,54406E-19	-0,641636876	-0,0000328154
25	-0,641636876	8,06335E-20	5,20242E-15	-0,641652375	2,64219E-20	-0,641659929	-0,0000230533
26	-0,641659929	1,3798E-20	1,26721E-15	-0,641670817	4,52131E-21	-0,641676124	-0,0000161954
27	-0,641676124	2,36111E-21	3,08667E-16	-0,641683774	7,73686E-22	-0,641687502	-0,0000113775
28	-0,641687502	4,04032E-22	7,51852E-17	-0,641692876	1,32393E-22	-0,641695495	-0,0000079930
29	-0,641695495	6,9138E-23	1,83136E-17	-0,64169927	2,26551E-23	-0,64170111	-0,0000056152
30	-0,64170111	1,18309E-23	4,46083E-18	-0,641703762	3,87675E-24	-0,641705055	-0,0000039448

31	-0,641705055	2,02451E-24	1,08657E-18	-0,641706918	6,6339E-25	-0,641707826	-0,0000027713
32	-0,641707826	3,46434E-25	2,64666E-19	-0,641709135	1,13519E-25	-0,641709773	-0,0000019469
33	-0,641709773	5,92819E-26	6,44674E-20	-0,641710693	1,94255E-26	-0,641711141	-0,0000013677
34	-0,641711141	1,01443E-26	1,57029E-20	-0,641711787	3,32409E-27	-0,641712102	-0,0000009609
35	-0,641712102	1,7359E-27	3,82492E-21	-0,641712556	5,6882E-28	-0,641712777	-0,0000006750
36	-0,641712777	2,97048E-28	9,31673E-22	-0,641713096	9,73366E-29	-0,641713251	-0,0000004742
37	-0,641713251	5,08309E-29	2,26937E-22	-0,641713475	1,66563E-29	-0,641713584	-0,0000003332
38	-0,641713584	8,6982E-30	5,52772E-23	-0,641713741	2,85022E-30	-0,641713818	-0,0000002340
39	-0,641713818	1,48844E-30	1,34644E-23	-0,641713929	4,87731E-31	-0,641713983	-0,0000001644
40	-0,641713983	2,54702E-31	3,27966E-24	-0,64171406	8,34607E-32	-0,641714098	-0,0000001155
41	-0,641714098	4,35847E-32	7,98859E-25	-0,641714153	1,42818E-32	-0,641714179	-0,0000000811
42	-0,641714179	7,45822E-33	1,94586E-25	-0,641714218	2,44391E-33	-0,641714236	-0,0000000570
43	-0,641714236	1,27625E-33	4,73972E-26	-0,641714263	4,18203E-34	-0,641714276	-0,0000000401
44	-0,641714276	2,18393E-34	1,1545E-26	-0,641714295	7,15629E-35	-0,641714304	-0,0000000281
45	-0,641714304	3,73714E-35	2,81213E-27	-0,641714318	1,22459E-35	-0,641714324	-0,0000000198
46	-0,641714324	6,39501E-36	6,84977E-28	-0,641714334	2,09552E-36	-0,641714338	-0,0000000139
47	-0,641714338	1,09432E-36	1,66847E-28	-0,641714345	3,58586E-37	-0,641714348	-0,0000000098
48	-0,641714348	1,8726E-37	4,06404E-29	-0,641714352	6,13613E-38	-0,641714355	-0,0000000069
49	-0,641714355	3,20439E-38	9,89919E-30	-0,641714358	1,05002E-38	-0,64171436	-0,0000000048
50	-0,64171436	5,48337E-39	2,41124E-30	-0,641714362	1,79679E-39	-0,641714363	-0,0000000034

51	-0,641714363	9,38316E-40	5,8733E-31	-0,641714364	3,07467E-40	-0,641714365	-0,0000000024
52	-0,641714365	1,60565E-40	1,43062E-31	-0,641714366	5,26139E-41	-0,641714367	-0,0000000017
53	-0,641714367	2,74759E-41	3,48469E-32	-0,641714368	9,0033E-42	-0,641714368	-0,0000000012
54	-0,641714368	4,70169E-42	8,48801E-33	-0,641714369	1,54065E-42	-0,641714369	-0,0000000008
55	-0,641714369	8,04554E-43	2,06751E-33	-0,641714369	2,63636E-43	-0,64171437	-0,0000000006
56	-0,64171437	1,37676E-43	5,03603E-34	-0,64171437	4,51135E-44	-0,64171437	-0,0000000004
57	-0,64171437	2,35591E-44	1,22668E-34	-0,64171437	7,71984E-45	-0,64171437	-0,0000000003
58	-0,64171437	4,03144E-45	2,98793E-35	-0,64171437	1,32102E-45	-0,64171437	-0,0000000002
59	-0,64171437	6,8986E-46	7,278E-36	-0,64171437	2,26054E-46	-0,641714371	-0,0000000001
60	-0,641714371	1,18049E-46	1,77277E-36	-0,641714371	3,86823E-47	-0,641714371	-0,0000000001
61	-0,641714371	2,02006E-47	4,31811E-37	-0,641714371	6,61933E-48	-0,641714371	-0,0000000001
62	-0,641714371	3,45672E-48	1,0518E-37	-0,641714371	1,1327E-48	-0,641714371	0,0000000000

RIWAYAT HIDUP

Imroatul Khoiriyah, lahir di Kediri pada tanggal 19 Desember 1997, biasa dipanggil Khoir. Anak pertama dari dua bersaudara yakni dari pasangan Bapak Khayatudin dan Ibu Kartiyah (Alm).

Pendidikan formal berawal dari TK Kusuma Mulia 1 Kaliboto dan lulus pada tahun 2004. Kemudian menempuh pendidikan dasar di SD Negeri Kaliboto 3 dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 2 Tarokan dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya menempuh pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Grogol Kediri dan lulus pada tahun 2016. Pada tahun 2017 menempuh pendidikan selanjutnya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa telah menjadi asisten laboratorium di jurusan matematika dan aktif belajar di Sekolah Tahfidz HTQ UIN Maliki Malang, serta menjadi anggota komunitas di jurusan matematika, yakni MEC (Mathematics English Club) dan SEMATA (Serambi Matematika Aktif).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Imroatul Khoiriyah
NIM : 17610110
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Modifikasi Metode Newton-Secant dalam Penyelesaian Persaamaan Nonlinier yang Memiliki Multiplisitas $m > 1$.
Pembimbing I : Juhari, M.Si
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	15 Maret 2021	Konsultasi BAB 1	1.
2	24 Maret 2021	Revisi BAB I	2.
3	07 April 2021	Konsultasi BAB II	3.
4	12 April 2021	Revisi Agama BAB I	4.
5	20 April 2021	Revisi BAB II	5.
6	03 Mei 2021	Konsultasi Agama BAB II	6.
7	06 Mei 2021	Revisi Agama BAB II	7.
8	07 Mei 2021	ACC BAB I & BAB II untuk diseminarkan	8.
9	07 Mei 2021	ACC BAB I & BAB II untuk diseminarkan	9.
10	27 Mei 2021	Konsultasi BAB III	10.
11	28 Mei 2021	Konsultasi Agama BAB III	11.
12	09 Juni 2021	Revisi BAB III	12.
13	10 Juni 2021	Revisi Agama BAB III	13.
14	14 Juni 2021	Konsultasi BAB IV & Abstrak	14.
15	15 Juni 2021	ACC keseluruhan untuk disidangkan	15.
16	15 Juni 2021	ACC keseluruhan untuk disidangkan	16.

Malang, 27 Juni 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M. Si.
NIP. 19650414 200312 1 001