IMPLEMENTASI METODE PERTURBASI HOMOTOPI PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NONLINIER

SKRIPSI

OLEH
ZAKI FIRMANSYAH
NIM. 17610106

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

IMPLEMENTASI METODE PERTURBASI HOMOTOPI PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NONLINIER

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam
Memperoleh gelar Sarjanan Matematika (S.Mat)

OLEH
ZAKI FIRMANSYAH
NIM. 17610106

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

IMPLEMENTASI METODE PERTURBASI HOMOTOPI PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NONLINIER

SKRIPSI

OLEH
ZAKI FIRMANSYAH
NIM. 17610106

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji

Tanggal, 23 Mei 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Heni Widayani, M.Si	Achmad Nasichuddin, M.A
NIP. 19901006 20180201 2 229	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

IMPLEMENTASI METODE PERTURBASI HOMOTOPI PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NONLINIER

SKRIPSI

OLEH
ZAKI FIRMANSYAH
NIM. 17610106

Telah dipertahankan di depan dewan penguji skripsi
Dan dinyatakan diterima sebagai salah satu persyaratan
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 3 Juni 2021

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Heni WIdayani, M.Si	....
Anggota Penguji	: Ach. Nasichuddin, M.A	....

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Zaki Firmansyah

NIM : 17610106

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Implementasi Metode Perturbasi Homotopi Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan dan daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Mojokerto, 12 Mei 2021

Yang membuat pernyataan

Zaki Firmansyah
NIM. 17610106

MOTTO

خيركم من تعلم القرآن وعلمه

"Sebaik-baik umat adalah yang belajar al-Qur'an dan mengajarkannya"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk :

1. Kedua orang tua tercinta, bapak Bahrul dan Ibu Supiatun yang telah merawat dan mendoakan saya tiada kenal lelah.
2. Kedua kakak saya, Nikmatus Sholihah dan Nur Faizah yang telah mendukung saya selama prosesi kuliah.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakaatuh

Puji dan syukur bagi kehadirat Allah Swt. atas rahmat serta hidayahNya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana dalam bidang keilmuan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapat berbagai bimbingan serta arahan dari banyak pihak. Oleh karenanya, ucapan terimakasih dan penghargaan yang tinggi penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

2. Dr. Sri. Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan araha, motivasi, nasihat serta berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang juga telah memberikan arahan, serta ilmu dan pengalaman kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya seluruh dosen, penulis ucapkan terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Ibu dan kakak yang selalu memberikan dukungan, doa, semangat serta motivasi kepada penulis hingga sekarang.

8. Rekan penulis yang juga bersama-sama mengerjakan skripsi tapi tetap selalu menemani, membantu serta menjadi sumber inspirasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2017 yang bersama-sama berjuang untuk mencapai impian.

10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril ataupun materil.

Semoga Allah SWT senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita. Penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya serta terselesaikannya skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis ataupun bagi pembaca. *Aamiin*.

Wasslamu'alaikum Warahmatullah Wabarakaatuh

Malang, 12 Mei 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGAJUAN i
HALAMAN PERNGESAHAN ii
HALAMAN PERSETUJUAN iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN iv
HALAMAN MOTTO v
HALAMAN PERSEMBAHAN vi
KATA PENGANTAR vii
DAFTAR ISI ix
DAFTAR TABEL xi
DAFTAR GAMBAR xii
ABSTRAK xiii
ABSTRACT xiv
ملخص xv
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan masalah 2
1.3 Tujuan Penelitian 2
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 3
1.6 Metode Penelitian 3
1.7 Sistematika Penulisan 4
BAB II KAJIAN PUSTAKA 5
2.1 Persamaan Adveksi 5
2.2 Persamaan Burgers 6

2.3 Metode Homotopi Perturbasi 7
2.4 Deret Taylor dan Deret Mac Laurin 9
2.5 Model Penyelesaian Masalah Dalam Islam 10

BAB III PEMBAHASAN 12

3.1 Penyelesaian Persamaan Adveksi 12
3.2 Penyelesaian Persamaan Burgers 25
3.3 Memahami Al-Qur'an dengan Metode Homotopi Perturbasi 35

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN 36

4.1 Kesimpulan 36
4.2 Saran 36

DAFTAR PUSTAKA 37

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Representasi deret taylor pada fungsi hiperbolik dan eksponensial......... 9

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Plot Aliran Fluida Dengan Kecepatan c 5

Gambar 3.1 Plot Solusi Persamaan Adveksi Menggunakan Metode Homotopi Perturbasi 24

Gambar 3.2 Plot Solusi Persamaan Burgers Menggunakan Metode Homotopi Perturbasi 34

ABSTRAK

Firmansyah, Zaki, 2021. **Implementasi Metode Perturbasi Homotopy Pada Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Achmad Nasichuddin, M.A

Kata kunci: Metode Homotopy Perturbasi, Persamaan Advection, Persamaan Burgers.

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinier yaitu persamaan advecti dan persamaan burgers. Penyelesaian persamaan tersebut dilakukan dengan menggunakan metode homotopy perturbasi yang merupakan metode semi-analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang terdiri atas bagian linier dan bagian non linier. Metode homotopy perturbasi merupakan metode yang memiliki solusi berbentuk deret pangkat sehingga kemungkinan mempunyai solusi semakin besar. Solusi dari persamaan advection dan persamaan burgers dihasilkan dengan menjalankan beberapa iterasi. Pada penelitian ini digunakan dua tipe metode homotopy perturbasi. Pada persamaan pertama yaitu persamaan advection menggunakan metode homotopy perturbasi secara umum sedangkan pada persamaan kedua yaitu persamaan burgers menggunakan metode homotopy perturbasi sederhana. Solusi eksak dari persamaan advection dengan nilai awal tertentu adalah $u(x,t) = 2(\operatorname{sech}(t)) + x(\tanh(\mathrm{t}))$, sedangkan solusi eksak dari persamaan burgers dengan nilai awal tertentu yaitu $u(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$ dan $v(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$. Kemudian solusi dari kedua persamaa tersebut disimulasikan menggunakan software Maple dalam bentuk grafik yang bergantung pada x dan t. Disimpulkan bahwa metode homotopy perturbasi pada penelitian ini merupakan salah satu metode yang mampu menghasilkan solusi eksak untuk persamaan advection dan persamaan burgers.

ABSTRACT

Firmansyah, Zaki. 2021. **The Implementation of Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equation Nonlinear**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of malang, Advisors: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Achmad Nasichuddin, M.A

Keyword: Homotopy Perturbation Method, Advection Equation, Burgers Equation.

This study discusses the solution of nonlinear partial differential equations, namely the advection equation and burgers equation. The solution of the equation is done by using the homotopy perturbation method which is a semi-analytical method, it can be used to solve differential equations which consist of linear and nonlinear part. Homotopy perturbation method is a method that have a power series solution so it will have higher probability to find solution. The solution of advection equation and burgers equation is obtained by using iteration process. In this study, two types of homotopy perturbation method were used. The first equation, advection equation, will be solved using general homotopy perturbation method while the second equation which is burgers equation will be solved using simple homotopy perturbation method. The exact solution for advection equation with certain initial value is $u(x,t) = 2(\mathrm{sech}(t)) + x(\tanh(\mathrm{t}))$, while the exact solution for advection equation with certain initial value is $u(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$ and $v(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$. Then the solution is simulated using Maple software in the form of graph that depends on x and t. It was concluded that the homotopy perturbation method in this study is a method that produced an exact solution to the advection equation and burgers equation.

ملخص

فرمنشة، زاكي، 2021. **تنفيذ طريق هوموتوفي فرتورباسي للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوكيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون : (1) الدكتور. هيني ويداياني ، الماجستير، (2) احمد ناصح الدين ، الماجستير .

الكلمات الرئيسية : طريق هوموتوفي فرتورباسي ، معادلة ادفكسين، معادلة بورغر

البحث يناقش إكمال المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية هما معادلة أدفكسين ومعادلة بورغر. إكمال تلك المعادلتان بالطريقة هوموتوفي فرتورباسي هو الطريق بين التحليلية يستخدم ليخلص معادلة تفاضلية التي فيها جزء الخطية وجزء غير الخطية. الطريق هوموتوفي فرتورباسي هو الطريق الذي عنده الحل السلسلة الترتيب ولذالك لديه فرصة أكبر لإيجاد حل. الحل من المعادلة أدفكسين ومعادلة بورغر ينتج بإنشاء من السلسلات. في هذا البحث يستخدم نوعان من الطريق هوموتوفي فرتورباسي. في معادلة الأول يعني معادلة أدفكسين منجز بالطريق هوموتوفي فرتورباسي عادة وفي معادلة الثاني يعني معادلة بورغر منجز بالطريق هوموتوفي فرتورباسي بسيطا. الحل الدقيق من معادلة أدفكسين بقيمة أولية محددة هو $u(x,t) = 2(\text{sech}(t)) + x(\tanh(\text{t}))$ والحل الدقيق من معادلة بورغر بقيمة أولية محددة هو $u(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$ و $v(x,t) = \sin x \cdot e^{-t}$ ثم ذالك حل يتم اختبار بالتطبيق Maple في شكل رسم بياني اعتمادا على x و t . يختتم يعني الطريق هوموتوفي فرتورباسي في هذا البحث هي أحد من الطرائق التي تنتج حل الدقيق للمعادلة أدفكسين والمعادلة بورغر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang merupakan suatu gejala terjadinya perambatan yang melewati suatu medium dimana setelah gejala terjadi maka keadaan medium akan kembali ke keadaan semula (Trisnobudi, 2005). Dalam perambaatannya gelombang memiliki kecepatan yang berbeda. Gelombang linier dikategorikan sebagai gelombang yang cepat rambatnya tidak dipengaruhi amplitudo atau amplitudonya sangat kecil. Sedangkan gelombang nonlinier dikategorikan sebagai gelombang yang cepat rambatnya dipengaruhi oleh amplitudo atau amplitudonya sangat besar. Salah satu persamaan yang memiliki solusi atas persamaan gelombang linier dan nonlinier adalah persamaan adveksi dan persamaan burgers.

Persamaan adveksi merupakan salah satu persamaan matematika yang paling sederhana untuk menghasilkan gelombang berjalan, sedangkan persamaan burgers merupakan penyederhanaan persamaan momentum transport nonlinier pada dimensi ruang. Kedua persamaan ini merupakan contoh persamaan diferensial parsial yang memiliki struktur bentuk linier dan nonlinier. Proses penyelesaian dari persamaan diferensial parsial dapat dilakukan dengan berbagai macam metode.

Metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial sangat banyak macamnya, dan setiap metode efektif dalam beberapa jenis persamaan diferensial saja. Sama halnya dengan permasalahan kehidupan, cara penyelesaian setiap permasalahan pun juga akan berbeda. Apapun masalahnya, Allah SWT mengajarkan kepada kita agar menyikapi dan menyelesaikan permasalahan tersebut dengan sebaik mungkin. Sesuai dengan firman Allah SWT dalam surah ar-Ra’d ayat 11 berikut ini :

...اِنَّ اللّٰهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتّٰى يُغَيِّرُوْا مَا بِاَنْفُسِهِمْۗ ...

Artinya : *“...Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri…”.*

Dijelaskan dalam tafsir al-misbah bahwa Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan satu kaum dari positif ke negatif atau sebaliknya dari negatif ke positif sehingga mereka mengubah apayang ada pada diri mereka, yakni sikap mental dan pikiran mereka sendiri (Shihab, 2002 : 565). Ayat ini mengajarkan kepada kita bahwa kita harus berusaha sebaik mungkin dalam menyelesaikan suatu permasalahan kehidupan serta tidak boleh mendurhakai Allah, agar Allah SWT senantiasa membantu dan membimbing kita melalui petunjuk-Nya dalam menyelesaikan suatu permasalahan dengan metode/cara yang terbaik.

Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah metode homotopi perturbasi. Metode ini bersifat semi-analytical yang bisa digunakan juga untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang terdiri atas bagian linier dan non linier, lebih lanjut, metode ini memiliki solusi berbentuk deret pangkat sehingga memiliki kemungkinan besar untuk memperoleh solusi. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mencari solusi persamaan adveksi dan persamaan burgers dengan menggunakan metode homotopi perturbasi.

1.2 Rumusan masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka diperoleh suatu rumusan masalah yaitu :

1. Bagaimana penyelesaian persamaan adveksi menggunakan metode homotopi perturbasi?
2. Bagaimana penyelesaian persamaan burgers menggunakan metode homotopi perturbasi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dalam penelitian ini yaitu untuk :

1. Menyelesaikan persamaan adveksi menggunakan metode homotopi perturbasi.
2. Menyelesaikan persamaan burgers menggunakan metode homotopi perturbasi.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian diatas, maka manfaat dalam penelitian ini yaitu :

1. Memperoleh solusi yang terverifikasi dari persamaan adveksi menggunakan metode homotopi perturbasi.
2. Memperoleh solusi yang terverifikasi dari persamaan adveksi s menggunakan metode homotopi perturbasi.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu :

1. Persamaan adveksi berdasarkan (Snehashish Chakraverty, dkk, 2019)
$$u_t + uu_x = x$$
2. Nilai awal pada persamaan adveksi berdasarkan (Snehashish Chakraverty, dkk, 2019)
$$u(x, 0) = 2$$
3. Persamaan burgers berdasarkan (Snehashish Chakraverty, dkk, 2019)
$$u_t + u_{xx} + 2uu_x + (uv)_x = 0$$
$$v_t + v_{xx} + 2vv_x + (uv)_x = 0$$
4. Nilai awal pada persamaan adveksi berdasarkan (Snehashish Chakraverty, dkk, 2019)
$$u(x, 0) = \sin x \quad , \quad v(x, 0) = \sin x$$

1.6 Metode Penelitian

1. Menentukan bagian linier dan nonlinier pada persamaan yang akan dikerjakan.
2. Mengubah kedua persamaan kedalam bentuk metode homotopi perturbasi.
3. Mengasumsikan bentuk umum solusi dari kedua persamaan yang telah diubah.

4. Mensubstitusikan asumsi yang diperoleh pada metode homotopi perturbasi.
5. Menjalankan beberapa iterasi yang menghasilkan

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}$$

6. Mensubtitusikan $u(x, 0)$ pada hasil iterasi yang diperoleh.
7. Menentukan solusi kedua persamaan pada aproksimasi :

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

8. Memverifikasi solusi metode homotopi perturbasi.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian merupakan gambaran umum dari topik pembahasan. Sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini peneliti akan membahas tentang latar belakang dari penelitian, perumusan masalah yang didapat dari latar belakang, tujuan yang dapat diambil, manfaat penelitian yang dapat diambil dan digunakan, batasan masalah agar pembahasan tidak meluas, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini peneliti akan membahas tentang kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang akan dibahas, yaitu tentang persamaan adveksi, persamaan burgers, metode homotopi perturbasi, deret taylor dan deret Mac Laurin, serta integrasi pembahasan dengan dunia Islam.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini peneliti akan membahas tentang rumusan masalah dan hasil penelitian yaitu menyelesaikan persamaan adveksi dan persamaan burgers dengan menggunakan metode homotopi perturbasi.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran yang sesuai dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Adveksi

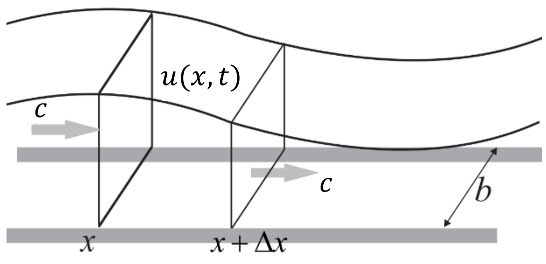
Setiap orang pasti pernah melihat gelombang yang berjalan, diantaranya adalah gelombang di sebuah danau, gelombang suara, atau bahkan gelombang getaran yang diakibatkan oleh gempa bumi. Adveksi merupakan suatu mekanisme transportasi massa suatu materi dari suatu titik ke titik lain yang terjadi pada aliran fluida (Ipung dan Widowati, 2011). Dalam hal ini, akan menggunakan persamaan matematika sederhana yang menghasilkan gelombang yang berjalan. Persamaan ini merupakan persamaan adveksi.

2.1.1 Adveksi Linier

Persamaan adveksi secara umum yang meliputi massa jenis u dan aliran ϕ dalam bentuk $\phi(x,t) = cu(x,t)$ untuk suatu c yang bernilai konstan. Hukum kekekalan disinilah yang disebut persamaan adveksi yang memenuhi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, untuk\ -\infty < x < \infty\,, dan\ \ t > 0 \qquad (1.1)$$

dimana $u(x,0) = u_0(x)$ yang merupakan nilai awal dari persamaan ini. Nilai awal ini menunjukkan kondisi yang akan menggambarkan solusi persamaan $u(x,t)$ saat $t = 0$ (Roger, 2000 : 81). Perhatikan gambar dibawah ini :



Gambar 2.1 Plot Aliran Fluida Dengan Kecepatan c

fluida yang mengalir dengan kecepatan c pada sebuah kanal dengan penampang konstan. Misalkan $u(x,t)$ menyatakan ketinggian fluida pada posisi x saat t. Perhatikan massa fluida pada domain dengan batas kiri x

dan batas kanan $x + \Delta x$. Dalam selang waktu $\Delta t.$ Persamaan (1.1) dibentuk dengan menghitung :

$$[akumulasi] = [laju\ masuk] - [laju\ keluar]$$

$$(u|_{t+\Delta t} - u|_t)\Delta x b = ((cu)|_x - (cu)|_{x+\Delta x}) b \Delta t \tag{1.2}$$

persamaan (1.2) jika dibagi dengan $b\Delta x \Delta t$, dan kemudian diambil limit $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0,$ maka diperoleh (Pudjaprasetya, 2013:6):

$$u_t + cu_x = 0$$

solusi eksak untuk persamaan ini adalah $u(x,t) = f(x - ct)$, yang menandakan bahwa gelombang bergerak ke kanan dan konstanta c disini merupakan tingkat kecepatan massa jenis u ketika bergerak dalam aliran ϕ.

2.1.2 Adveksi Nonlinier

Persamaan adveksi nonlinier merupakan pengembangan dari konsep adveksi linier. Persamaan adveksi linier memiliki kecepatan konstan berupa c, sedangkan pada persamaan adveksi nonlinier memiliki kecepatan berupa fungsi u (Erich Zauderer,1998 :82). Sehingga persamaan adveksi nonlinier memenuhi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0\ , untuk\ -\infty < x < \infty\ , dan\ \ t > 0$$

Dimana $u(x,0) = u_0(x) = f(x)$ yang merupakan nilai awal dari persamaan ini. Solusi eksak untuk persamaan ini adalah $u(x,t) = f(x - ut)$, yang menandakan bahwa gelombang bergerak ke kanan dengan kecepatan u. Persamaan ini tidak memiliki gaya luar (*source*). Gaya luar merupakan tindakan yang diberikan kepada massa jenis u sehingga mempengaruhi pergerakannya dalam suatu aliran ϕ. Seperti pada persamaan $u_t + uu_x = x$, Dimana variabel x merupakan gaya luar yang diberikan.

2.2 Persamaan Burgers

Persamaan burgers merupakan penyederhanaan sementara persamaan momentum transport nonlinier pada dimensi ruang. Persamaan burgers nonlinier asli telah dieksploitasi menjadi prototype persamaan diferensial yang sangat berguna untuk memodelkan banyak peristiwa dan fenomena yang tidak umum seperti gelombang kejut, perambatan gelombang dalam ruangan, pergerakan kendaraan lalu lintas, transmisi akustik, dan lain sebagainya. Persamaan burgers bisa diperhitungkan untuk diterapkan pada fenomena dalam bentuk apapun selama fenomena tersebut memiliki keseimbangan dampak gaya tarik atau konvektif. Persamaan burgers memiliki perbedaan bentuk tergantung dampak dari gaya mana yang lebih dominan. karena perbedaan inilah, persamaan burgers bisa diasumsikan berpasangan dengan karakteristik nonliniernya, ini akan menjadi persamaan model untuk menilai dan mengevaluasi kinerja banyak teknik komputasi. Persamaan burgers direpresentasikan oleh :

$$y_t + yy_x - y_{xx} = 0$$

Persamaan burgers memiliki suku nonlinier lebih banyak dibandingkan dengan persamaan adveksi yang disajikan sebelumnya, namun cara mengklasifikasikan suku linier dan nonliniernya masih tetap sama seperti pada umumnya (Pannekoucke, 2018).

2.3 Metode Homotopi Perturbasi

Banyak metode perturbasi yang diperluas penerapannya untuk menyelesaikan persamaan nonlinier, salah satunya adalah metode homotopi perturbasi (Ji Huan, 2002). Metode homotopi perturbasi atau biasa disingkat HPM merupakan metode semi-analytical. metode ini bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang terdiri atas bagian linier dan bagian non linier, Metode ini tidak hanya dapat digunakan untuk persamaan diferensial parsial saja namun juga bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Metode ini dibangun dengan membuat parameter khusus.

Hampir semua metode perturbasi yang sederhana berdasarkan pada asumsi parameter yang dibilang kecil. Akan tetapi, kebanyakan persamaan nonlinier tidak memiliki parameter yang kecil dan penghitungan dari parameter yang kecil tersebut terlihat seperti suatu seni tersendiri yang membutuhkan teknik spesial untuk menyelesaikannya (Chakraverty, 2009).

2.3.1 Dasar-Dasar Metode Homotopi Perturbasi

Ide dasar dari metode Homotopi perturbasi adalah persamaan berikut (Ghoutbi, 2008) :

$$A(u) - f(r) = 0, \qquad r \in \Omega \tag{2.1}$$

dengan kondisi batas :

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \tag{2.2}$$

dimana A merupakan operator diferensial secara umum, B adalah operator batas, Γ merupakan batas dari domain Ω, dan $f(r)$ dikenal dengan fungsi analitik. Operator A bisa diubah menjadi dua bagian, linier (L) dan nonlinier (N). Sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis menjadi :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{2.3}$$

sehingga jika ditambahkan parameter p dapat ditulis sebagai :

$$L(u) + p\big(N(u) - f(r)\big) = 0 \tag{2.4}$$

dimana $p \in [0,1]$ disebut sebagai parameter artificial. Menggunakan teknik homotopi, kita membangun sebuah homotopi $v(r,p): \Omega \times [0,1] \to R$ pada persamaan (2.4) yang memenuhi :

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \tag{2.5}$$

dimana p berubah dari 0 ke 1, $v(r,p)$ berubah dari $u_0(r)$ ke $u(r)$. Pada materi topologi ini disebut deformasi dan $L(v) - L(u_0)$ dan $A(v) - f(r)$ keduanya merupakan homotopic. Meningat fakta bahwa $p \in [0,1]$ merupakan parameter yang kecil, kita menduga bahwa solusi dari persamaan (2.5) memenuhi deret p dibawah ini :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots$$

sehingga solusi umum dari persamaan metode homotopi perturbasi memenuhi :

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

2.4 Deret Taylor dan Deret Mac Laurin

Teorema deret taylor mengatakan bahwa andaikan $f(x)$ adalah suatu fungsi dan $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ ada untuk setiap $x \in [a,b]$ yang merupakan turunan dari $f(x)$. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x di sektiar x_0, fungsi $f(x)$ dapat diperluas kedalam deret taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x) + \cdots$$

Ekspansi deret taylor dari fungsi $y(x)$ analitik pada sekitaran $x = 0$. (Anton 2012) sebagai berikut :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \frac{x^k}{k!} = y(k)x^k$$

Dimana $y^k(x) = \frac{d^k y(x)}{dx^k}$ dan $Y(k)$ merupakan koefisien taylor ke-k maka :

$$Y(k) = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

2.4.1 Representasi Deret Taylor Pada Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik memiliki kemiripan sifat dan perbedaan dengan fungsi trigonometri. Representasi dengan deret taylor digunakan untuk fungsi kontinu, dan fungsi hiperbolik merupakan fungsi kontinu (Epi, dkk : 2019). Berikut adalah hasil representasi deret taylor pada fungsi hiperbolik (Purcell, 1987 :72):

Fungsi Hiperbolik	Deret Taylor
Sinh (x)	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$
Cosh (x)	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2^n)!} + \cdots$
Tanh (x)	$x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots$
Sech (x)	$1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \frac{1358x^8}{8!} + \cdots$
$\boldsymbol{e^x}$	$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots$
$\boldsymbol{e^{-x}}$	$1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \cdots$

Tabel 2.1 Representasi deret taylor pada fungsi hiperbolik dan eksponensial

2.5 Model Penyelesaian Masalah Dalam Islam

Hidup di dunia memiliki lika-liku tersendiri bagi masing-masing individu, kadar ujian yang dialami pun berbeda-beda. Namun, Allah SWT telah mengajarkan kepada umat manusia agar senantiasa menyelesaikan ujian yang diberikan dengan bersungguh-sungguh dan secara maksimal. Allah telah berfirman dalam al-Qur’an surah ar-Ra’d ayat 11 yang berbunyi :

لَهٗ مُعَقِّبٰتٌ مِّنْۢ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهٖ يَحْفَظُوْنَهٗ مِنْ اَمْرِ اللّٰهِ ۗاِنَّ اللّٰهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتّٰى يُغَيِّرُوْا مَا بِاَنْفُسِهِمْۗ وَاِذَآ اَرَادَ اللّٰهُ بِقَوْمٍ سُوْۤءًا فَلَا مَرَدَّ لَهٗ ۚوَمَا لَهُمْ مِّنْ دُوْنِهٖ مِنْ وَّالٍ

Artinya *: Baginya (manusia) ada malaikat-malaikat yang selalu menjaganya bergiliran, dari depan dan belakangnya. Mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia.*

Al imam ibn Katsir mengatakan dalam tafsirnya bahwa imam Abi Hatim meriwayatkan dari Ibrahim, ia mengatakan : “Allah mewahyukan kepada seorang Nabi dari Bani Isra’il, “Hendaklah kamu katakana kepada kaummu bahwa warga desa dan angora keluarga yang taat kepada Allah tetapi kemudian berubah berbuat maksiat atau durhaka kepada Allah, pasti Allah akan merubah dari mereka apa yang mereka senangi menjadi apa yang mereka benci. Hal itu dibenarkan dalam *kitabullah* yakni al-Qur’an surah ar-Ra’d ayat 11. (Ibn Katsir, 2003 : 484)

Imam Jalalain dalam tafsirnya mengatakan bahwa (Baginya) manusia (ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran) para malaikat yang bertugas mengawasinya (di muka) di hadapannya (dan di belakangnya) dari belakangnya (mereka menjaganya atas perintah Allah) berdasarkan perintah Allah, dari gangguan jin dan makhluk-makhluk yang lainnya. (Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan sesuatu kaum) artinya Dia tidak mencabut dari mereka nikmat-Nya (sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri) dari keadaan yang baik dengan melakukan perbuatan durhaka. (Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum) yakni menimpakan azab (maka tak ada yang dapat menolaknya) dari siksaan-siksaan tersebut dan pula dari hal-hal lainnya yang telah dipastikan-Nya (dan sekali-kali tak ada bagi mereka) bagi orang-orang yang telah dikehendaki keburukan oleh

Allah (selain Dia) selain Allah sendiri (seorang penolong pun) yang dapat mencegah datangnya azab Allah terhadap mereka. Huruf min di sini adalah zaidah (al-Suyuthi, 2010 : 322).

Dr. M. Quraish shihab menjelaskan dalam kitabnya tafsir al-misbah bahwa Siapa pun, baik yang bersembunyi di malam hari atau berjalan terangterangan di siang hari, masing-masing ada baginya pengikit-pengikut, yakni malaikat-malaikat atau makhluk yang selalu mengikutinya secara bergiliran, di hadapannya dan juga di belakangnya, mereka, yakni para malaikat itu menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan satu kaum dari positif ke negatif atau sebaliknya dari negatif ke positif sehingga mereka mengubah apayang ada pada diri mereka, yakni sikap mental dan pikiran mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, tetapi ingat bahwa Dia tidak menghendakinya kecuali jika manusia mengubah sikapnya terlebih dahulu. Jika Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka ketika itu berlakulah ketentuan-Nya yang berdasar sunnatullah atau hukum-hukum kemasyarakatan yang ditetapkanNya. Bila itu terjadi, m aka tak ada yang dapat menolaknya dan pastilah sunnatullah menimpanya; dan sekali-kali tak ada pelindung bagi mereka yang jatuh atasnya ketentuan tersebut selain Dia (Shihab, 2002 : 565).

Syaikh Ahmad Musthtafa al-Maroghi dalam tafsirnya menjelaskan bahwa Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah apa yang ada pada suatu kaum, berupa nikmat dan kesehatan, lalu mencabutnya dari mereka., sehingga mereka mengubah apa yang ada pada diri mereka sendiri, seperti kezaliman sebagian mereka terhadao sebagian yang lai, dan kejahatan yang menggrogoti tatanan masyarakat serta menghancurkan umat, seperti bibit penyakit menghancurkan individu (Mushtafa, 1946 : 78).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Persamaan Adveksi

$$u_t + uu_x = x$$

u_t = Bagian linier

uu_x = Bagian nonlinier

x = Fungsi analitik

dengan nilai awal $u(x,0) = 2$

Metode Homotopi perturbasi

$$(1-p)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - x\right) = 0, \quad p \in [0,1]$$

$$(1-p)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) = -p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - x\right), \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial u_0}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial t} - pv\frac{\partial v}{\partial x} + px, \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial t} - pv\frac{\partial v}{\partial x} + px + \frac{\partial u_0}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -pv\frac{\partial v}{\partial x} + px + \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - pv\frac{\partial v}{\partial x} + px, \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\left(v\frac{\partial v}{\partial x} - x\right), \quad p \in [0,1] \tag{3.1}$$

Asumsi persamaan :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots, \quad p \in [0,1] \tag{3.2}$$

dimana perkiraan solusinya $u = \lim_{p\to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$

Subtitusi persamaan (3.2) pada persamaan (3.1) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots) = \frac{\partial \mathrm{u}_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\Big((v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots) \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots) - x\Big) \tag{3.3}$$

Dengan memasukkan iterasi p pada persamaan (3.3), kita memperoleh :

$$p \in [0,1] \qquad , \qquad u(x,0) = 2$$

- Iterasi ke-0

$$p^0 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{3.4}$$

- Iterasi ke-1

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\left((v_0 + pv_1)\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} - x\right)$$

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} = -p\left((v_0 + pv_1)\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} - x\right)$$

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} = -pv_0 - p^2 v_1\left(\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}\right) + px$$

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} = -pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - p^2 v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - pv_0\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} - p^2 v_1\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + px$$

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} = -pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - p^2 v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - p^2 v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - p^3 v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + px$$

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} = -pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + px$$

Subtitusi nilai $p = 1$ pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^1 \to \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = -v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x$$

$$p^1 \rightarrow \ \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_0}{\partial t} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x$$

$$p^1 \rightarrow \ \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial u_0}{\partial t} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x \tag{3.5}$$

- Iterasi ke-2

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\left((v_0 + p v_1 + p^2 v_2)\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} - x\right)$$

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\left(v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_0\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} + p v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p v_1\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + p v_1 \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} + p^2 v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_2 \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_2 \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} - x\right)$$

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\left(v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_0\frac{\partial v_2}{\partial x} + p v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^2 v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^4 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - x\right)$$

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - \left(p v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_0\frac{\partial v_2}{\partial x} + p^2 v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^4 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^3 v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^4 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - p x\right)$$

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - \left(p v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - px\right)$$

Subtitusi nilai $p = 1$ pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - \left(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - x\right)$$

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x + \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - \left(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - x\right)$$

$$p^2 \rightarrow \ -v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x + \frac{\partial v_2}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x$$

$$p^2 \rightarrow \ \frac{\partial v_2}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} \tag{3.6}$$

$$p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} = -\sum_{i=0}^{1} v_i \frac{\partial v_{1-i}}{\partial x}, \qquad i = 1,2,3, \ldots$$

- Iterasi ke-3

$$p^3 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\Big((v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3)\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial x} - x\Big)$$

$$p^3 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-p\left(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+v_0 \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p^3 v_3}{\partial x} + p v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p v_1 \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + p v_1 \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} + p v_1 \frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}$$

$$+p^2v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_2\frac{\partial pv_1}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_2\frac{\partial p^2v_2}{\partial x}$$

$$+p^2v_2\frac{\partial p^3v_3}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_3\frac{\partial pv_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^3v_3\frac{\partial p^2v_2}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial p^3v_3}{\partial x}-x\Bigg)$$

$$p^3 \rightarrow \quad \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial pv_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3v_3}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\frac{\partial u_0}{\partial t}-\Bigg(pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+pv_0\frac{\partial pv_1}{\partial \mathrm{x}}+pv_0\frac{\partial p^2v_2}{\partial x}$$

$$+pv_0\frac{\partial p^3v_3}{\partial x}+p^2v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^2v_1\frac{\partial pv_1}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_1\frac{\partial p^2v_2}{\partial x}$$

$$+p^2v_1\frac{\partial p^3v_3}{\partial x}+p^3v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^3v_2\frac{\partial pv_1}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_2\frac{\partial p^2v_2}{\partial x}$$

$$+p^3v_2\frac{\partial p^3v_3}{\partial x}+p^4v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^4v_3\frac{\partial pv_1}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_3\frac{\partial p^2v_2}{\partial x}$$

$$+p^4v_3\frac{\partial p^3v_3}{\partial x}-px\Bigg)$$

$$p^3 \rightarrow \quad \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial pv_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3v_3}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\frac{\partial u_0}{\partial t}-\Bigg(pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^2v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$+p^4v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^2v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^3v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$+p^5v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^3v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^4v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^5v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$+p^6 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^4 v_3 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^5 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^6 v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$+p^7 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} - px\Big)$$

$$p^3 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - \Big(p v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^2 v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$+p^2 v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^3 v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - px\Big)$$

Subtitusi nilai $p = 1$ pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^3 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - \Big(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - x\Big)$$

$$p^3 \rightarrow \ \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x - v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + x$$

$$p^3 \rightarrow \ \frac{\partial v_3}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} \qquad (3.7)$$

$$p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial t} = -\sum_{i=0}^{2} v_i \frac{\partial v_{2-i}}{\partial x}, \qquad i = 1,2,3,\ldots$$

- Iterasi ke-4

$$p^4 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial t} + \frac{\partial p^4 v_4}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\frac{\partial u_0}{\partial t} - p\big((v_0$$

$$+p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3$$

$$+p^4 v_4)\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}-x\Bigg)$$

$$p^4 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial p v_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial t}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\,\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-p\Bigg(v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+v_0\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_0\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+v_0\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+v_0\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}$$

$$+pv_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+pv_1\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+pv_1\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+pv_1\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+pv_1\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}$$

$$+p^2v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_2\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_2\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+p^2v_2\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+p^2v_2\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}$$

$$+p^3v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_3\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_3\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}$$

$$+p^4v_4\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_4\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_4\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+p^4v_4\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+p^4v_4\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}-x\Bigg)$$

$$p^4 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial p v_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial t}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\,\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\Bigg(pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^4v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^5v_0\frac{\partial v_4}{\partial x}$$

$$+p^2v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^5v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^6v_1\frac{\partial v_4}{\partial x}$$

$$+p^3v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^5v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^6v_2\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^7v_2\frac{\partial v_4}{\partial x}$$

$$+p^4v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^5v_3\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^6v_3\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^7v_3\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^8v_3\frac{\partial v_4}{\partial x}$$

$$+p^5v_4\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^6v_4\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^7v_4\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^8v_4\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^9v_4\frac{\partial v_4}{\partial x}-x\Bigg)$$

$$p^4 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial p v_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial t}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\,\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\Bigg(pv_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^4v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}+p^2v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^3v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}+p^3v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-px\Bigg)$$

Subtitusi nilai $p=1$ pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^4 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\partial v_4}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\Bigg(v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}+v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-x\Bigg)$$

$$p^4 \rightarrow \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}-v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+x-v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$-v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial v_4}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}-v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$-v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$-v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+x$$

$$p^4 \rightarrow \quad \frac{\partial v_4}{\partial t}=-v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} \qquad (3.8)$$

$$p^4 : \frac{\partial v_4}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{3} v_i\frac{\partial v_{3-i}}{\partial x}, \qquad i = 1,2,3,\ldots$$

- Iterasi ke-5

$$p^5 \rightarrow \quad \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial p v_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial t}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial t}+\frac{\partial p^5 v_5}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-p\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\Bigg((v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+p^4v_4+p^5v_5)\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}+\frac{\partial p^5 v_5}{\partial x}-x\Bigg)$$

$$p^5 \rightarrow \quad \frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{\partial p v_1}{\partial t}+\frac{\partial p^2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial p^3 v_3}{\partial t}+\frac{\partial p^4 v_4}{\partial t}+\frac{\partial p^5 v_5}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}-p\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-p\Bigg(v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+v_0\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_0\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+v_0\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+v_0\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}+v_0\frac{\partial p^5 v_5}{\partial x}$$

$$+pv_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+pv_1\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+pv_1\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+pv_1\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+pv_1\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}$$

$$+pv_1\frac{\partial p^5 v_5}{\partial x}+p^2v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_2\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^2v_2\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+p^2v_2\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}$$

$$+p^2v_2\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}+p^2v_2\frac{\partial p^5 v_5}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_3\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}+p^3v_3\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}$$

$$+p^3v_3\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}+p^3v_3\frac{\partial p^5 v_5}{\partial x}+p^4v_4\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+p^4v_4\frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^4v_4\frac{\partial p^2 v_2}{\partial x}+p^4v_4\frac{\partial p^3 v_3}{\partial x}+p^4v_4\frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}+p^4v_4\frac{\partial p^5 v_5}{\partial x}+p^5v_5\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^5 v_5 \frac{\partial p v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_5 \frac{\partial p^2 v_2}{\partial x} + p^5 v_5 \frac{\partial p^3 v_3}{\partial x} + p^5 v_5 \frac{\partial p^4 v_4}{\partial x}$$

$$\left. +p^5 v_5 \frac{\partial p^5 v_5}{\partial x} - x \right)$$

$$p^5 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial t} + \frac{\partial p^4 v_4}{\partial t} + \frac{\partial p^5 v_5}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\left(p v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^4 v_0 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^5 v_0 \frac{\partial v_4}{\partial x} \right.$$

$$+p^6 v_0 \frac{\partial v_5}{\partial x} + p^2 v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^4 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^5 v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x}$$

$$+p^6 v_1 \frac{\partial v_4}{\partial x} + p^7 v_1 \frac{\partial v_5}{\partial x} + p^3 v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^4 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$+p^6 v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^7 v_2 \frac{\partial v_4}{\partial x} + p^8 v_2 \frac{\partial v_5}{\partial x} + p^4 v_3 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^6 v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^7 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^8 v_3 \frac{\partial v_4}{\partial x} + p^9 v_3 \frac{\partial v_5}{\partial x} + p^5 v_4 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+p^6 v_4 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^7 v_4 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^8 v_4 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^9 v_4 \frac{\partial v_4}{\partial x} + p^{10} v_4 \frac{\partial v_5}{\partial x}$$

$$+p^6 v_5 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^7 v_5 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^8 v_5 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^9 v_5 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^{10} v_5 \frac{\partial v_4}{\partial x}$$

$$\left. +p^{11} v_5 \frac{\partial v_5}{\partial x} - px \right)$$

$$p^5 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial p v_1}{\partial t} + \frac{\partial p^2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial p^3 v_3}{\partial t} + \frac{\partial p^4 v_4}{\partial t} + \frac{\partial p^5 v_5}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\left(p v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^2 v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^4 v_0 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^5 v_0 \frac{\partial v_4}{\partial x} \right.$$

$$+p^2 v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^3 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^4 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^5 v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + p^3 v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\left. +p^4 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + p^4 v_3 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_3 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + p^5 v_4 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - px \right)$$

Subtitusi nilai $p = 1$ pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^5 \rightarrow \ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_4}{\partial t} + \frac{\partial v_5}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\left(v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_4}{\partial x} \right.$$

$$+v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}+v_4\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-x\bigg)$$

$$p^5\rightarrow\ \frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial u_0}{\partial t}-v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+x-v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$-v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial v_5}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u_0}{\partial t}-v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_0\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_0\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_0\frac{\partial v_3}{\partial x}-v_0\frac{\partial v_4}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$-v_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_1\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}-v_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}-v_2\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_3\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$-v_3\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_4\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}+x$$

$$p^5\rightarrow\ \frac{\partial v_5}{\partial t}=-v_0\frac{\partial v_4}{\partial x}-v_1\frac{\partial v_3}{\partial x}-v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}-v_3\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}}-v_4\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} \tag{3.9}$$

$$p^5:\frac{\partial v_5}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{4}v_i\frac{\partial v_{4-i}}{\partial x},\qquad i=1,2,3,\ldots$$

Iterasi masih terus berlanjut hingga p^n.

Berdasarkan iterasi diatas dapat dibentuk pola umumnya, yaitu :

$$p^{n+1}:\frac{\partial v_{n+1}}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{n}v_i\frac{\partial v_{n-i}}{\partial x},\qquad i=1,2,3,\ldots$$

Semua persamaan yang diperoleh pada iterasi diatas (3.4)-(3.9), jika diintegralkan akan menjadi :

- Iterasi 0

$$p^0:\frac{\partial v_0}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$v_0=u_0=2$$

- Iterasi 1

$$p^1:\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{t}}=-\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{t}}-v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+x$$

$$\int_0^t\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{s}}ds=-\int_0^t\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{s}}ds-v_0\int_0^t\left(\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{s}}\right)ds+\int_0^t \mathrm{x}\,ds$$

$$v_1 = 0 - 2\int_0^t (0)\, ds + \int_0^t \mathrm{x}\, ds$$

$$v_1 = xt$$

- Iterasi 2

$$p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{t}} = -v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$\int_0^t \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{s}} ds = -v_0 \int_0^t \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}\right) ds$$

$$v_2 = -2\int_0^t \left(\frac{\partial xt}{\partial \mathrm{x}}\right) ds - \int_0^t xt \left(\frac{\partial 2}{\partial \mathrm{x}}\right) ds$$

$$v_2 = -2\int_0^t (t)\, ds - \int_0^t xt(0)\, ds$$

$$v_2 = -t^2$$

- Iterasi 3

$$p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial \mathrm{t}} = -v_0 \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\int_0^t \frac{\partial v_3}{\partial \mathrm{t}} ds = -v_0 \int_0^t \frac{\partial - t^2}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_1 \left(\frac{\partial xt}{\partial \mathrm{x}}\right) ds - \int_0^t v_2 \left(\frac{\partial 2}{\partial \mathrm{x}}\right) ds$$

$$v_3 = -2\int_0^t (0)\, ds - \int_0^t xt(\mathrm{t})\, ds - \int_0^t -t^2(0)\, ds$$

$$v_3 = -\frac{1}{3} xt^3$$

- Iterasi 4

$$p^4 : \frac{\partial v_4}{\partial \mathrm{t}} = -v_0 \frac{\partial v_3}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_3 \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\int_0^t \frac{\partial v_4}{\partial \mathrm{t}} ds = -v_0 \int_0^t \frac{\partial - \frac{1}{3} xt^3}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_1 \left(\frac{\partial - t^2}{\partial \mathrm{x}}\right) ds - \int_0^t v_2 \left(\frac{\partial xt}{\partial \mathrm{x}}\right) ds$$

$$- \int_0^t v_3 \left(\frac{\partial 2}{\partial \mathrm{x}}\right) ds$$

$$v_4 = -2\int_0^t \left(-\frac{1}{3} t^3\right) ds - \int_0^t xt(0)\, ds - \int_0^t -t^2(\mathrm{t})\, ds$$

$$- \int_0^t -\frac{1}{3} xt^3(0)\, ds$$

$$v_4 = \frac{2}{12} t^4 + \frac{1}{4} t^4 = \frac{5}{12} t^4$$

- Iterasi 5

$$p^5 : \frac{\partial v_5}{\partial \mathrm{t}} = -v_0 \frac{\partial v_4}{\partial \mathrm{x}} - v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_4 \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\int_0^t \frac{\partial v_5}{\partial \mathrm{t}} ds = -v_0 \int_0^t \frac{\partial - \frac{5}{12} t^4}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_1 \left(\frac{\partial - \frac{1}{3} x t^3}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$- \int_0^t v_2 \left(\frac{\partial - t^2}{\partial \mathrm{x}} \right) ds - \int_0^t v_3 \left(\frac{\partial x t}{\partial \mathrm{x}} \right) ds - \int_0^t v_4 \left(\frac{\partial 2}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$v_5 = -2 \int_0^t (0)\, ds - \int_0^t xt \left(-\frac{1}{3} t^3 \right) ds - \int_0^t -t^2 (0)\, ds$$

$$- \int_0^t -\frac{1}{3} x t^3 (\mathrm{t})\, ds - \int_0^t -\frac{5}{12} t^4 (0)\, ds$$

$$v_5 = \frac{1}{15} x t^5 + \frac{1}{15} x t^5 = \frac{2}{15} x t^5$$

Sehingga solusi dari persamaan adveksi diatas adalah :

$$u = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + \cdots$$

$$u = 2 + xt - t^2 - \frac{1}{3} x t^3 + \frac{5}{12} t^4 + \frac{2}{15} x t^5 + \cdots$$

$$u = 2 \left(1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{5}{24} t^4 - \cdots \right) + x \left(t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 - \cdots \right) \tag{3.10}$$

Berdasarkan deret Mac-Laurin, maka persamaan (3.10) dapat ditulis menjadi :

$$u = 2(\mathrm{sech}(t)) + x(\tanh(t)) \tag{3.11}$$

Setelah memperoleh solusi dari persamaan adveksi (3.11) diatas, maka langkah selanjutnya adalah memverifikasi solusi dengan cara :

1. Solusi harus memenuhi nilai awal persamaan

$$u = 2(\mathrm{sech}(t)) + x(\tanh(t))$$

$$u(x,0) = 2(\mathrm{sech}(t)) + x(\tanh(t))$$

$$u(x,0) = 2(\mathrm{sech}(0)) + x(\tanh(0))$$

$$u(x,0) = 2(1) + x(0)$$

$$u(x,0) = 2$$

Terbukti solusi memenuhi nilai awal PDP

2. Solusi harus memenuhi PDP

$$u = 2(\text{sech}(t)) + x(\tanh(t))$$

$$u(x,t) = 2(\text{sech}(t)) + x(\tanh(t))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\,\text{sech}(t)\tanh(t) + x(\text{sech}(2t))$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\tanh(t))$$

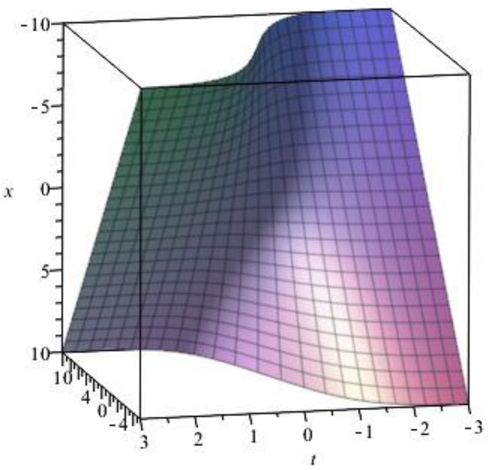
$$u_t + uu_x = x$$

$$\left(-2\,\text{sech}(t)\tanh(t) + x(\text{sech}^2(t))\right) + (2(\text{sech}(t))$$

$$+x(\tanh(t))(\tanh(t))\big) = \left(-2\,\text{sech}(t)\tanh(t) + x(1-\tanh^2(t))\right)$$

$$+\left(2(\text{sech}(t)\tanh(t)) + x(\tanh^2(t))\right) = x$$

Plot,$u = 2(\text{sech}(t)) + x(\tanh(t))$ dengan batas $= -10..10$; $t = -3..3$:



Gambar 3.1 Plot Solusi Persamaan Adveksi Menggunakan Metode Homotopi Perturbasi

3.2 Penyelesaian Persamaan Burgers

$$u_t - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0 \qquad (3.12)$$

$$v_t - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x = 0 \qquad (3.13)$$

Bagian linier

Bagian nonlinier

Fungsi analitik

dengan nilai awal $u(x,0) = \sin x$, $\quad v(x,0) = \sin x$

Metode Homotopi perturbasi untuk persamaan (3.12)

Persamaan diferensial yang bergantung atas waktu, akan dipilih nilai untuk operator L dan nilai awal sebagai berikut :

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \ , \ \ u_0(x,t) = v_0(x,0) = 0$$

Hal ini memungkinkan kita untuk memiliki operator yang mudah untuk dihitung dan memiliki kemiripan dengan persamaan aslinya. Di sisi lain memilih nilai awal sebagai fungsi nol kita dapat terlepas dari bentuk sekuler pada hasil persamaan, terlebih lagi dengan cara ini dapat mempermudah kita dalam penyelesaian persamaan (E. Babolian, dkk : 2009). Sehingga persamaan HPM dapat dibentuk sebagai berikut :

$$(1-p)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial x} + (uv)_x\right) = 0, \quad p \in [0,1]$$

$$(1-p)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -p\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial x}\right), \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - p\frac{\partial u}{\partial t} = -p\frac{\partial u}{\partial t} + p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2pu\frac{\partial u}{\partial x} - p\frac{\partial uv}{\partial x}, p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -p\frac{\partial u}{\partial t} + p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2pu\frac{\partial u}{\partial x} - p\frac{\partial uv}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial t}, p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2pu\frac{\partial u}{\partial x} - p\frac{\partial uv}{\partial x}, \qquad p \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2pu\frac{\partial u}{\partial x} - p\frac{\partial uv}{\partial x}, \qquad p \in [0,1]$$

$$u_t = p(u_{xx}) + p(2uu_x) - p(uv)_x, \qquad p \in [0,1]$$

$$u_t = p[(u_{xx}) + (2uu_x) - (uv)_x], p \in [0,1] \tag{3.14}$$

$$v_t = p[(v_{xx}) + (2vv_x) - (uv)_x], p \in [0,1] \tag{3.15}$$

Asumsi persamaan :

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots, \quad p \in [0,1] \tag{3.16}$$

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots, \quad p \in [0,1] \tag{3.17}$$

dimana perkiraan solusinya $u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ dan $v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$

subtitusi persamaan (3.16-3.17) ke persamaan (3.14-3.15) menjadi :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 \ + \cdots) = p\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)\right.$$

$$+2(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots)(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots)\right]$$

Dengan memasukkan iterasi p pada persamaan diatas, kita memperoleh :

$$p \in [0,1] \qquad , \qquad u_0(x,0) = v_0(x,0) = 0$$

- Iterasi ke-0

$$p^0 \to \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}u(x,0) = 0 \tag{3.18}$$

$$p^0 \to \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}v(x,0) = 0 \tag{3.19}$$

- Iterasi ke-1

$$p^1 : \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(u_0 + pu_1) = p\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}(u_0 + pu_1) + 2(u_0 + pu_1)\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(u_0 + pu_1) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}((u_0 + pu_1)(v_0 + pv_1))\right]$$

$$p^1 : \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{t}} + p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} = p\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 pu_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2pu_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2pu_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 pv_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial pu_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^1 : p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} = \left[p\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2pu_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} - \left(p\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^1 : p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} = \left[p\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + 2pu_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(p\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

Subtitusi nilai $p = 1$, pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{3.20}$$

$$p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial \mathrm{x}^2} + 2v_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{3.21}$$

- Iterasi ke-2 :

$$p^2 : \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2) = p\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}(u_0 + pu_1 + p^2u_2) + 2(u_0 + pu_1 + p^2u_2)\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}((u_0 + pu_1 + p^2u_2)(v_0 + pv_1 + p^2v_2))\right]$$

$$p^2 : \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{t}} + p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = p\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+2pu_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2pu_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_1\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+2p^2u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_2\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p v_1}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+\frac{\partial u_0 p^2 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3 u_1 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\left.\left.+\frac{\partial p^3 u_2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4 u_2 v_2}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^2 : p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = p\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+2pu_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2pu_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\left.-\left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^2 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^2 : p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 p u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^3 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2pu_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+2p^2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\left.-\left(\frac{\partial u_0 p v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^3 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4 u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^2 : p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 p u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2pu_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$\left.+2p^2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 p v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

Subtitusi nilai $p = 1$, pada persamaan diatas, sehingga :

$$p^2 : \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$\left.+2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^2 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2}\right.$$

$$\left.+2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{3.22}$$

$$p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + 2v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{3.23}$$

- Iterasi ke-3 :

$$p^3 : \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3) = p\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3) + 2(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3)\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}((u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3)(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3u_3))\right]$$

$$\begin{aligned}
p^3 : \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{t}} + p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} + p^3\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = p\Bigg[&\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 pu_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2u_2}{\partial \mathrm{x}^2} \\
&+ \frac{\partial^2 p^3u_3}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2pu_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_0\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} \\
&+ 2pu_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_1\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_1\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \\
&+ 2p^3u_2\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^5u_2\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_3\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_3\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} \\
&+ 2p^5u_3\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^6u_3\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} - \left(+ \frac{\partial u_0p^3v_3}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial pu_1v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2u_1v_1}{\partial \mathrm{x}}\right. \\
&+ \frac{\partial p^3u_1v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4u_1v_3}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2u_2v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3u_2v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4u_2v_2}{\partial \mathrm{x}} \\
&\left.+ \frac{\partial p^5u_2v_3}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3u_3v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4u_3v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^5u_3v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^6u_3v_3}{\partial \mathrm{x}}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$p^3 : \ p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} + p^3\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 p u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^3 u_2}{\partial \mathrm{x}^2}\right.$$

$$+\frac{\partial^2 p^4 u_3}{\partial \mathrm{x}^2} + 2pu_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_0\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+2p^2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_1\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^5u_1\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+2p^4u_2\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^5u_2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^6u_2\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} + 2p^4u_3\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^5u_3\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+2p^6u_3\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^7u_3\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 p v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^3 v_2}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+\frac{\partial u_0 p^4 v_3}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4 u_1 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^5 u_1 v_3}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+\frac{\partial p^3 u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4 u_2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^5 u_2 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^6 u_2 v_3}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^4 u_3 v_0}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\left.\left.+\frac{\partial p^5 u_3 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^6 u_3 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^7 u_3 v_3}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^3 : \ p\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} + p^3\frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 p u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 p^3 u_2}{\partial \mathrm{x}^2}\right.$$

$$+2pu_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2p^2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2p^3u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}$$

$$+2p^3u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 p v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^2 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 p^3 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^2 u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial p^3 u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial p^3 u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

Subtitusi persamaaan diatas dengan $p = 1$, sehingga :

$$p^3 : \ \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2u_0\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$+2u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u_0 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^3 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2\left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right)$$
$$- \left(u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2}\right.$$
$$+ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_0 \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}}$$
$$\left.+2u_2 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_0 v_2}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_0}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_2 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(\frac{\partial u_0 v_2}{\partial \mathrm{x}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial u_2 v_0}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_2 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0 \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+v_2 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}}\right)\right] \quad (3.24)$$

$$p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2v_0 \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}} + 2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + 2v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0 \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+v_2 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_2 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}}\right)\right] \quad (3.25)$$

Iterasi akan terus berlanjut hingga p^n.

Pada tahap selanjutnya yakni pengintegralan, dalam tahap ini bisa dihitung dengan memasukkan nilai awal $u(x,0) = v(x,0) = \sin x$, sehingga semua persamaan yang diperoleh pada iterasi diatas (3.18)-(3.25), jika diintegralkan akan menjadi :

- Iterasi 0

$$p^0 : \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0)$$
$$u_0 = \sin x$$

- Iterasi 1

$$p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right)$$

$$\int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} ds = \int_0^t \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} ds + \int_0^t 2u_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds - \int_0^t \left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$\int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{t}} ds = \int_0^t \frac{\partial^2 u_0}{\partial \mathrm{x}^2} ds + \int_0^t 2u_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds - \int_0^t u_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$- \int_0^t v_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$u_1 = -t \sin x + 2t \sin x \cos x - t \sin x \cos x - t \sin x \cos x$$

$$u_1 = \ -t \sin x$$

$$v_1 = \ -t \sin x$$

- Iterasi 2

$$p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} + 2 \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) - \left(u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} \right.$$

$$\left. + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right)$$

$$\int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} ds = \int_0^t \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} ds + 2 \int_0^t \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$- \int_0^t \left(u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} \right) ds$$

$$\int_0^t \frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{t}} ds = \int_0^t \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mathrm{x}^2} ds + 2 \left(\int_0^t u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} ds + \int_0^t u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} ds \right)$$

$$- \int_0^t u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} ds$$

$$- \int_0^t v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} ds$$

$$u_2 = \frac{t^2}{2} \sin x + 2(-t \sin x \cos x - t \sin x \cos x) + t \sin x \cos x$$

$$+ t \sin x \cos x + t \sin x \cos x + t \sin x \cos x$$

$$u_2 = \frac{t^2}{2} \sin x$$

$$v_2 = \frac{t^2}{2} \sin x$$

- Iterasi 3

$$p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} = \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} + 2u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + 2u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + 2u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} - \left(u_0\frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}} + v_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + v_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}}\right)\right]$$

$$\int_0^t \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} ds = \int_0^t \frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} ds + 2\int_0^t \left(u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}}\right) ds - \int_0^t \left(u_0\frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}} + v_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} + u_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} + u_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}}\right) ds$$

$$\int_0^t \frac{\partial u_3}{\partial \mathrm{t}} ds = \int_0^t \frac{\partial^2 u_2}{\partial \mathrm{x}^2} ds + 2\left(\int_0^t u_0\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{x}} ds + \int_0^t u_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} ds + \int_0^t u_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} ds\right) - \int_0^t u_0\frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_2\frac{\partial u_0}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t u_1\frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t v_1\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t u_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} ds - \int_0^t u_2\frac{\partial v_0}{\partial \mathrm{x}} ds$$

$$u_3 = -\frac{t^3}{6}\sin x + 2\left(\frac{t^3}{6}\cos x \sin x + \frac{t^3}{6}\cos x \sin x + \frac{t^3}{6}\cos x \sin x\right) - \frac{t^3}{6}\cos x \sin x - \frac{t^3}{6}\cos x \sin x - \frac{t^3}{6}\cos x \sin x - \frac{t^3}{6}\cos x \sin x$$

$$u_3 = -\frac{t^3}{6}\sin x$$

$$v_3 = -\frac{t^3}{6}\sin x$$

Sehingga solusi dari persamaan adveksi diatas adalah :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

$$u = \sin x - t\sin x + \frac{t^2}{2}\sin x - \frac{t^3}{6}\sin x + \cdots$$

$$u = \sin x\left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \cdots\right) \tag{3.26}$$

$$v = \sin x\left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \cdots\right) \tag{3.27}$$

Berdasarkan deret Mac-Laurin, maka persamaan (3.25 & 3.26) dapat ditulis menjadi :

$$u = \sin x \ \cdot e^{-t} \tag{3.28}$$

$$v = \sin x \ \cdot e^{-t} \tag{3.29}$$

Setelah memperoleh solusi dari persamaan burgers (3.28 & 3.29) diatas, maka langkah selanjutnya adalah memverifikasi solusi dengan cara :

3. Solusi harus memenuhi nilai awal persamaan

$$u = \sin x \ \cdot e^{-t}$$

$$u(x, 0) = \sin x \ \cdot e^{0}$$

$$u(x, 0) = \sin x$$

   Terbukti solusi memenuhi nilai awal PDP

4. Solusi harus memenuhi PDP

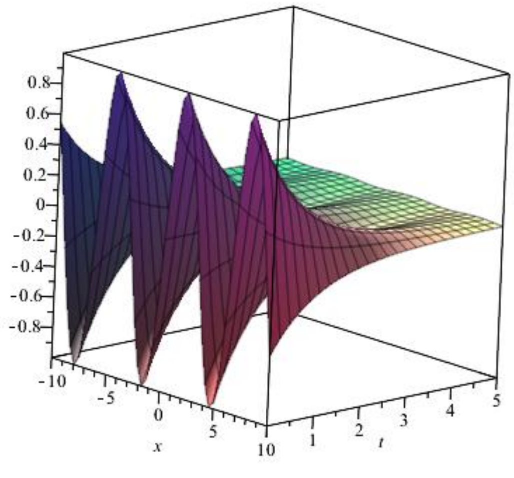
$$u = \sin x \ \cdot e^{-t}$$

$$u(x, t) = u_t - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0$$

$$u(x, t) = -(\sin x \ \cdot e^{-t}) + (\sin x \ \cdot e^{-t}) - (2 \sin x \cos x \ \cdot e^{-2t})$$

$$+ (2 \sin x \cos x \ \cdot e^{-2t}) = 0$$

   Plot $u = \sin x \ \cdot e^{-t}$ dengan $= -10..10$; $t = 0..5$:



Gambar 3.2 Plot Solusi Persamaan Burgers Menggunakan Metode Homotopi Perturbasi

3.3 Memahami Al-Qur’an dengan Metode Homotopi Perturbasi

Metode homotopy perturation merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang terdiri atas dua bagian, yaitu bagian linier dan nonlinier yang cara penyelesaiannya adalah dengan membuat parameter-parameter khusus guna membantu dalam proses pengerjaannya hingga menemukan suatu solusi. Metode ini memiliki kemungkinan lebih besar dalam penentuan solusinya karena solusi dari metode ini berbentuk deret pangkat, yang nanti akan disederhanakan oleh ekspansi deret Mac-Laurin. Metode ini merupakan salah satu wujud dari pengembangan ilmu matematika dalam menentukan upaya terbaik guna menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial. Upaya ini merupakan wujud dari penerapan al-Qur’an surah ar-Ra’d ayat 11 yang mana dijelaskan dalam tafsir al-misbah bahwa Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan satu kaum dari positif ke negatif atau sebaliknya dari negatif ke positif sehingga mereka mengubah apayang ada pada diri mereka, yakni sikap mental dan pikiran mereka sendiri (Shihab, 2002 : 565). Peneliti matematika yang berusaha sebaik mungkin dalam menemukan metode terbaik guna menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier ini telah berhasil menemukan metode homotopi perturbasi, sehingga sesuai dengan janji Allah pada surah tersebut yang mana akan merubah keadaan kaum yang bersungguh-sungguh dalam mengubah keadaannya.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Penyelesaian persamaan adveksi dan persamaan burgers telah berhasil menemukan solusi. Solusi yang diperoleh dalam bentuk deret dan sudah terbukti memenuhi nilai awal PDP dan PDP itu sendiri.

1. Penerapan metode homotopi perturbasi pada persamaan adveksi $u_t + uu_x = x$ dengan nilai awal $u(x,0) = 2$ memiliki solusi $u = 2(\text{sech}(t)) + x(\tanh(t))$.
2. Penerapan metode homotopi perturbasi pada pasangan persamaan burgers $u_t + u_{xx} + 2uu_x + (uv)_x = 0$ dan $v_t + v_{xx} + 2vv_x + (uv)_x = 0$ memiliki $u = \sin x\,(e^{-t})$ dan $v = \sin x\ (e^{-t})$ sebagai solusinya.

4.2 Saran

Metode Homotopi perturbasi terbukti mampu menyelesaikan persamaan adveksi dan juga pasangan persamaan burgers. Saran untuk penelitian selanjutnya agar mampu menyelesaikan PDP lainnya menggunakan metode Homotopi perturbasi.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Maroghi. Ahmad Mushtafa. 1946. *Tafsir al-Maroghi*. Musthofa Al-Babi Al-Halabi, Mesir

Anton, H. 2012. *Calvulus Early Transcendentals*. USA. Laurie Rosatone

Chakraverty. Snehashish, dkk, 2019. *Advanced Numerical and Semi-Analytical Method for Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc

Dr. Abdullah bin Muhammad bin Abdurrahman bin ishaq al-Syaikh. 2003. *Lubabut Tafsir min Ibnu Katsir jilid 4.* Terjemahan : M. Abdul Ghoffar E.M. Pustaka Imam Syafi'i, Bogor.

E. Babolian, J. Saeidian, A. Azizi. 2009. *Application Of Homotopi Perturbasi Method To Some Nonlinier Problems*. Applied Mathematical Sciences, Tarbiat Moallem Universitiy, Iran. Vol. 3, no. 45, 2215 – 2226.

Ghoutbi. Abdoul, dkk, 2008. *Application of Homotopi Perturbasi Method Ana Variational Iteration Method to Nonlinear Oscillator Differential Equations*. Springer Science and Media B.V

He. Ji-Huan, 2002. *Homotopy Perturbation Method : A New Nonlinear Analytical Technique*. Shanghai University. Elsevier Science. Inc

Jalal al-Dīn al-Mahalli dan Jalal al-Dīn al- Suyutī. 2010. *Tafsir Jalalain*. Sinar Baru Algensindo, Bandung

Knobel, Roger. 1962. *An Introduction To The Mathematical Theory Of Waves.* Yale University Press, United States America.

Pannekoucke, O., Bocquet M. dan Ménard, R. 2018. *Parametric Covariance Dynamics For The Nonlinear Diffusive Burgers Equation*, 25, 481- 495.

Pudjaprasetya, Sri Redjeki. 2013. *Catatan Kuliah Persamaan Diferensial Parsial.* Modul FMIPA IPB, Bandung.

Purcell, 1987. *Calculus With Analythic Geometry, Fifth Edition*. Prentice-Hall. Inc

Sari. Epi Riskia, dkk. 2019. *Representasi Deret Tayor Pada Fungsi Hiperbolik.* Jurnal Matematika UNIPA. Manokwari.

Setiawan, Ipung. Widowati. 2011. *Solusi Analitik Persamaan Transport Dan Distribusi Amoniak*. In: Prosiding Seminar Nasional, ISBN. 978-979-097-142-4, Jurnal Matematika UNDIP, Semarang.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah jilid 6.* Lentera Hati, Jakarta

Trisnobudi, Amoranto. 2005. *Fenomena Gelombang*. Bandung, ITB

Zauderer, Erich. 1998. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. John Willey & Sons Inc, Canada.

RIWAYAT HIDUP

Zaki Firmansyah lahir di Kota Mojokerto pada 11 Januari 1999. Memiliki nama panggilan Zaki. Alamatnya berada di Jalan Raya Mojosari-Pacet Dusun Ngudi RT 001 RW 007 Desa Pesanggrahan Kecamatan Kutorejo Kabupaten Mojokerto. Merupakan anak terakhir dari Bapak Bahrul dan Ibu Supiatun.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu TK Muslimat ’45, Kemudian melanjutkan sekolahnya di MI Hidayatul Muflihin dan lulus pada tahun 2011. Menempuh pendidikan SMP di Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Kutorejo lulus pada tahun 2014. Melanjutkan pendidikan SMA di Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Mojosari lulus pada tahun 2017.

Tahun 2017 melanjutkan studi ke jenjang pendidikan strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Aktif mengikuti kegiatan pengabdian dan organisasi serta komunitas yang ada di dalam (intra) kampus, seperti menjadi Musyrif Mahad Sunan Ampel Al-Aly (2016-2020), Pengurus Hai’ah Tahfizh al-Qur’an (HTQ) UIN Malang (2018-2020).

Prestasi-prestasi yang pernah diraihnya yaitu Best Presentation dalam acara Mathematics Paper Competition (MAPCOM) tingkat nasional yang diadakan oleh IAIN Kediri pada tahun 2020.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAUALANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Zaki Firmansyah
NIM : 17610106
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Implementasi Metode Homotopi Perturbasi Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Achmad Nasichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	24 Maret 2021	Konsultasi Bab I, Bab II	1.
2	29 Maret 2021	Konsultasi Kajiain Keagamaan pada Bab I dan Bab II	2.
3	31 Maret 2021	Revisi Bab I, Bab II	3.
4	7 April 2021	Revisi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	4.
5	12 April 2021	Konsultasi Bab III, Bab IV	5.
6	06 Juni 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan & Kepenulisan pada Bab I, Bab II, dan Bab III	6.
7	06 Juni 2021	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV dan Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II, Bab III	7.
8	21 Juni 2021	Konsultasi Keseluruhan	8.
9	22 Juni 2021	Revisi Keseluruhan	9.
10	23 Juni 2021	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 23 Juni 2021
Mengetahui,
Ketua Prodi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001