PENERAPAN ESTIMASI METODE FULL INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD PADA DATA PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) DAN KEMISKINAN DI INDONESIA SECARA SIMULTAN

SKRIPSI

OLEH
UMMATUS SALAMAH
NIM. 14610045

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

PENERAPAN ESTIMASI METODE
FULL INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD
PADA DATA PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) DAN KEMISKINAN DI INDONESIA SECARA SIMULTAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ummatus Salamah
NIM. 14610045

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

PENERAPAN ESTIMASI METODE
FULL INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD
PADA DATA PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) DAN KEMISKINAN DI INDONESIA SECARA SIMULTAN

SKRIPSI

Oleh
Ummatus Salamah
NIM. 14610045

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 Mei 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Achmad Nasichuddin, MA
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**PENERAPAN ESTIMASI METODE
FULL INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD
PADA DATA PRODUK DOMESTIK REGIONAL BRUTO (PDRB) DAN
KEMISKINAN DI INDONESIA SECARA SIMULTAN**

SKRIPSI

**OLEH
UMMATUS SALAMAH
NIM. 14610045**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat) Tanggal 24 Juni 2021

Penguji Utama	: Ria Dea Layla Nur Karisma, M. Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Sri Harini, M. Si	....
Sekertaris Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	: Achmad Nasichuddin, MA	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ummatus Salamah

NIM : 14610045

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Estimasi Metode Full Information Maximum Likelihood Pada Data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan Kemiskinan di Indonesia Secara Simultan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Juni 2021
Yang membuat pernyataan

Ummatus Salamah
NIM. 14610045

MOTO

فَاِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًاۙ اِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًاۗ

“Maka Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, ayahanda tercinta Alm. Agus Wannto dan Ibunda tercinta Pi'ani, serta segenap keluarga penulis yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai kepada penulis, dan sahabat-sahabat penulis yang senantiasa menemani dan membantu di kala senang dan sedih.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin MA selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Almarhum Bapak Agus Wanto dan Ibu Pi'ani serta keluarga yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Orang orang terdekat penulis, Yuni, Dina, Iffat, Sofi dan teman teman yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 (MATH EIGEN), khususnya Matematika-A yang berjuang bersama-sama untuk meraih cita-cita.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 07 Mei2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Jenis
$\overrightarrow{...}$	Simbol suatu vektor	Operator
$...^{-1}$	Invers	Operator
$...'$	Transpose	Operator
a	Elemen pada matriks A	Skalar
a_i	Koefisien pada SPL	Skalar
a_{ij}	Elemen pada matriks A	Skalar
A	Simbol suatu matriks	Matriks
A_B	*Augmented matrix*	Matriks
α	Taraf signifikansi	Skalar
b_i	Koefisien pada SPL	Skalar
b_{ij}	Elemen pada matriks B	Skalar
μ	Mean	Skalar
σ^2	Variansi	Skalar
${\sigma^2}_1$	Variansi yang terdapat pada persamaan pertama	Vektor
σ	Standart deviasi	Skalar
t	Obeservasi pada periode waktu ke-t	Skalar
N	Banyaknya observsi 1, 2, ..., n	Vektor
M	Jumlah variabel endogen di dalam sistem persamaan simultan	Indeks

m	Jumlah variabel endogen di dalam sebuah persamaan tertentu	Indeks
K	Jumlah variabel *predetermined*di dalam sistem persamaan simultan	Indeks
k	Jumlah variabel *predetermined*di dalam sebuah persamaan tertentu	Indeks
B	Matriks koefisien variabel endogen pada sistem persamaan simultan	Matriks
Γ	Matriks koefisien variabel *predetermined* pada sistem persamaan simultan	Matriks
Y	Variabel endogen	Matriks
y_1	Vektor observasi variabel endogen yang terdapat pada persamaan pertama	Vektor
$\mathrm{y}_{1\mathrm{t}}$	Vektor observasi variabel endogen yang terdapat pada persamaan pertama pada periode waktu ke-*t*	Vektor
Y_1	Matriks observasi variabel endogen lain yang terdapat pada persamaan pertama	Matriks
X	Variabel *predetermined*	Matriks
$\mathrm{x}_{1\mathrm{t}}$	Vektor observasi variabel *predetermined* yang terdapat pada persamaan pertama pada periode waktu ke-*t*	Vektor
Z_1	Matriks variabel *predetermined* dan endogen	Matriks
δ_1	Matriks koefisien parameter variabel *predetermined* dan endogen	Vektor
β_{10}	Konstanta pada persamaan pertama	Skalar

β_{12}	Parameter variabel endogen pada persamaan pertama	Skalar
γ_{11}	Parameter variabel *predetermined* pada persamaan pertama	Skalar
u_1	Vektor observasi variabel galat yang terdapat pada persamaan ke-1	Vektor
$\mathrm{u}_{1\mathrm{t}}$	Vektor observasi variabel galat yang terdapat pada persamaan ke-1 pada periode waktu ke-*t*	Vektor
R^2	Koefisien determinasi	Skalar
r^2	Koefisien korelasi	Skalar

ABSTRAK

Salamah, Ummatus. 2021**. Penerapan Estimasi Metode Full Information Maximum Likelihood Pada Data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan Kemiskinan di Indonesia Secara Simultan**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Achmad Nasichuddin, M.A

Kata Kunci: Estimasi Parameter, Sistem Persamaan Simultan, *Overidentified, Full Information Maximum Likelihood.*

Sistem persamaan simultan merupakan model yang terdiri dari dua atau lebih persamaan, yang variabelnya saling berkaitan atau memiliki hubungan dua arah. Variabel sistem persamaan simultan disebut variabel endogen dan variabel *predetermined*. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui hasil estimasi parameter dan implementasinya pada sistem persamaan simultan dengan metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML). Metode FIML digunakan untuk mengestimasi parameter sistem persamaan simultan yang teridentifikasi secara *overidentified*. Metode FIML juga disebut metode persamaan tunggal, yaitu mengestimasi parameter setiap persamaan dalam sistem persamaan simultan secara individu. Hasil estimasi metode FIML diimplementasikan pada data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan Kemiskinan di Indonesia pada tahun 2000-2013, yang diperoleh model:

$$\text{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \text{KE} + 8{,}755515\ \text{EX} - 18{,}166159\ \text{IM}$$
$$\text{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \text{PD} + 0{,}547844\ \text{TP} + 0{,}455393\ \text{KP}$$

Persamaan PDRB diperoleh variabel kemiskinan berpengaruh negatif terhadap PDRB. Hal tersebut berarti bahwa jika kemiskinan naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB turun sebesar 118810,47. Jika kemiskinan, impor dan ekspor bernilai tetap, maka kemiskinan akan naik sebesar 5228183. Persamaan Kemiskinan diperoleh variabel PDRB berpengaruh negatif terhadap kemiskinan, Hal tersebut berarti jika PDRB naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka kemiskinan turun $1{,}486\ \times 10^{-8}$. Jika PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk bernilai tetap, maka kemiskinan akan naik sebesar 83,6719.

Koefisien determinasi menunjukan pengaruh model persamaan PDRB dapat dijelaskan oleh variabel kemiskinan, ekspor, impor sebesar 86% sedangkan 14% dipengaruhi oleh variabel lain. Koefisien determinasi menunjukan pengaruh dalam model persamaan kemiskinan dapat dipengaruhi oleh variabel PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk sebesar 80% sedangkan 20% dipengaruhi oleh variabel lain.

ABSTRACT

Salamah, Ummatus. 2021. **Application Estimation the Full Information Maximum Likelihood Method On Simultaneous Economic Growth Data. Thesis. Department of Mathematics.** Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Abdul Aziz, M.Sc. (II) Achmad Nasichuddin, M.A.

Keywords: Parameter Estimation, Simultaneous Equation System, Overidentified, Full Information Maximum Likelihood.

A simultaneous equation system is a model consisting of two or more equations, whose variables are interrelated or have a two-way relationship. Simultaneous equation system variables are called endogenous variables and predetermined variables. This study aims to find out the results of parameter estimation and its implementation in simultaneous equation system with Full Information Maximum Likelihood (FIML) method. The FIML method is used to estimate the parameters of an overidentified system of overidentified simultaneous equations. The FIML method is also called the single equation method, which is to estimate the parameters of each equation in the system of simultaneous equations individually. The results of the estimated of the FIML method were implemented in the data of Gross Regional Domestic Product (GDP) and Poverty in Indonesia in 2000-2013, obtained by the model:

$$\mathrm{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \mathrm{KE} + 8{,}755515\ \mathrm{EX} - 18{,}166159\ \mathrm{IM}$$
$$\mathrm{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \mathrm{PD} + 0{,}547844\ \mathrm{TP} + 0{,}455393\ \mathrm{KP}$$

The GRDP equation shows that the poverty variable has a negative effect on GRDP. This means that if poverty increases by 1 point and other variables are constant, then GRDP decreases by 118810.47. If poverty, imports and exports have a fixed value, then poverty will increase by 5228183. The Poverty Equation shows that the GRDP variable has a negative effect on poverty. This means that if GRDP increases by 1 point and other variables are constant, then poverty decreases by $1{,}486 \times 10^{-8}$. If the GDP, unemployment rate and population density are fixed, poverty will increase by 83.6719.

The coefficient of determination shows the effect of the GRDP equation model can be explained by the variables of poverty, exports, imports of 86% while 14% is influenced by other variables. The coefficient of determination shows the influence in the poverty equation model can be influenced by the GRDP variable, unemployment rate and population density by 80% while 20% is influenced by other variables.

الملخص

سلامة, أمة. 2021. **تقدير التطبيق طريقة أقصى احتمال للمعلومات الكاملة على بيانات النمو الاقتصادي المتزامنة**. البحث العلمي جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. مولانا مالك إبراهيم جامعة الدولة الإسلامية في مالانج. المشرف الأول (١) عبد العزيز، الماجستيرالمشرف (٢) أحمد ناصح الدين.أ

الكلمات الرئيسية: تقدير المعلمة، نظام المعادلة المتزامنة، تم تحديدها بشكل مفرط، أقصى احتمال للمعلومات الكاملة.

نظام المعادلة المتزامن هو نموذج يتكون من معادلتين أو أكثر، تكون متغيراتهما مترابطة أو لها علاقة ثنائية الاتجاه. تسمى متغيرات نظام المعادلة المتزامنة المتغيرات الذاتية والمتغيرات المحددة مسبقا. في هذه الدراسة يتكون نموذج المعادلة المتزامنة من متغيرين داخليين و4 متغيرات محددة مسبقا. تهدف هذه الدراسة إلى معرفة نتائج تقدير المعلمة وتنفيذها في نظام معادلة متزامن مع طريقة Full Information Maximum Likelihood (FIML). يتم استخدام أسلوب FIML لتقدير معلمات نظام تم تحديدها بشكل مفرط من المعادلات المتزامنة المحددة بشكل مفرط. وتسمى طريقة FIML أيضا طريقة المعادلة الواحدة ، وهي تقدير معلمات كل معادلة في نظام المعادلات المتزامنة بشكل فردي. 10- ونفذت نتائج البارامترات المقدرة لطريقة مكافحة غسل الأموال في بيانات الناتج المحلي الإجمالي الإقليمي والفقر في إندونيسيا في الفترة 2000-2013، وتم الحصول على نماذج معادلة متزامنة على النحو التالي:

$$PD = 5228183 - 118810{,}47\ KE + 8{,}755515\ EX - 18{,}166159\ IM$$
$$KE = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ PD + 0{,}547844\ TP + 0{,}455393\ KP$$

توضح معادلة GRDP أن متغير الفقر له تأثير سلبي على GRDP. هذا يعني أنه إذا زاد الفقر بمقدار نقطة واحدة وثابت المتغيرات الأخرى ، فإن GRDP ينخفض بمقدار 118810.47. إذا كان للفقر والواردات والصادرات قيمة ثابتة ، فإن الفقر سيرتفع بمقدار 5228183. توضح معادلة الفقر أن متغير GRDP له تأثير سلبي على الفقر. وهذا يعني أنه إذا زاد إجمالي الناتج المحلي الإجمالي بمقدار نقطة واحدة وكانت المتغيرات الأخرى ثابتة ، فإن الفقر ينخفض بمقدار $1{,}486 \times 10^{-8}$.1 . إذا تم إصلاح الناتج المحلي الإجمالي ومعدل البطالة والكثافة السكانية ، سيزداد الفقر بمقدار 83.6719.

يوضح معامل التحديد أن تأثير نموذج معادلة GRDP يمكن تفسيره من خلال متغيرات الفقر والصادرات والواردات بنسبة 86٪ بينما يتأثر 14٪ بمتغيرات أخرى. يوضح معامل التحديد أن التأثير في نموذج معادلة الفقر يمكن أن يتأثر بمتغير GRDP ومعدل البطالة والكثافة السكانية بنسبة 80٪ بينما يتأثر 20٪ بمتغيرات أخرى.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Model yang paling sering ditemui dalam berbagai kasus biasanya berupa model persamaan tunggal. Selain model persamaan tunggal ada juga model persamaan simultan sistem persamaan simultan. Model persamaan tunggal adalah model dimana hanya terdapat satu variabel tak bebas Y dan satu atau lebih variabel bebas X. Sedangkan model sistem persamaan simultan yaitu ketika dalam beberapa model sering terdapat saling ketergantungan antar variabel, dimana bukan hanya variabel X yang bisa mempengaruhi variabel Y, tetapi juga variabel Y bisa mempengaruhi variabel X, sehinggadalam model tersebut terjadi hubungan dua arah. Model yang seperti itu disebut dengan sistem persamaan simultan (Gujarati, 1999).

Pendugaan/ estimasi telah disinggung dalam Al-Qur’an, yaitu dalam Q. S. Luqman ayat 34 yang berbunyi:

اِنَّ اللّٰهَ عِنْدَهٗ عِلْمُ السَّاعَةِۚ وَيُنَزِّلُ الْغَيْثَۚ وَيَعْلَمُ مَا فِى الْاَرْحَامِۗ وَمَا تَدْرِيْ نَفْسٌ مَّاذَا
تَكْسِبُ غَدًاۗ وَمَا تَدْرِيْ نَفْسٌۢ بِاَيِّ اَرْضٍ تَمُوْتُۗ اِنَّ اللّٰهَ عَلِيْمٌ خَبِيْرٌ

Artinya: Sesungguhnya Allah, hanya pada sisi-Nya sajalah pengetahuan tentang hari Kiamat, dan Dia lah yang menurunkan hujan dan mengetahui apa yang ada dalam rahim. Dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui (dengan pasti) apa yang akan diusahakannya besok dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui di bumi mana dia akan mati. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal. (Luqmann: 34).

Dari Q. S. Lukman ayat 34 ini menjelaskan tentang hanya Allah yang tahu pasti kapan datangnya hari Kiamat, Dialah Allah yang menurunkan hujan dari langit, tidak ada manusia atau makhlukNya yang mampu melakukan itu. Dia mengetahui kandungan rahim kaum wanita, Dia juga tahu apa yang didapatkan oleh seseorang berkat usahanya dihari esok, dan tiada manusia satupun yang mengetahui, bahkan tidak mengetahui dimana dia akan mati. Allahlah yang mengetahui segala apapun yang akan terjadi karena Allah Maha Mengetahui lagi Maha Teliti segala sesuatu yang tampak dan tidak tampak (Katsir,2017).

Persamaan simultan merupan dua atau lebih persamaan yang dijadikan dalam satu sistem dan diselesaikan secara bersamaan didalam sistem tersebut. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh nilai estimasi parameter dari model persamaan tunggal adalah metode Kuadrat Terkecil Biasa (*Ordinary Least Squares* _ OLS). Dibawah asumsi $E(X_i u_i) = 0$, maka penaksir yang diperoleh dengan metode OLS akan bersifat *Best Linier Unbiased Estimator* (BLUE). Namun, karena pada model persamaan simultan terjadi hubungan dua arah yang mengakibatkan adanya korelasi antara variabel bebas debngan galat $E(X_i u_i) \neq 0$, maka metode OLS tidak dapat digunakan pada sistem persamaan simultan. Hal ini dikarenakan metode OLS tidak mampu memberikan penaksir yang bersifat tak bias serta konsisten. Oleh karena itu, pada persamaan simultan perlu metode khusus untuk memperoleh penaksiran yang bersifat tak bias dan juga konsisten (Romika,2009).

Ada dua metode estimasi parameter pada sistem persamaan simultan, yaitu *Limited Information Method* (Metode Informasi Terbatas)dan *Full Information Method* (Metode Informasi Lengkap). Metode informasi terbatas disebut juga sebagai metode persamaan tunggal sedangkan metode informasi lengkap disebut juga sebagai metode sistem (Gujarati, 1999).

Ghofur (2018) pada skripsinya yang berjudul “Penerapan *Metode Limited Information Maximum Likelihood* Pada sistem persamaah simultan” . Penelitian ini menggunakan metode LIML dengan tujuan untuk mengetahui hasil estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML dan nilai-nilai parameter dengan metode LIML pada sistem persamaan simultan studi kasus PDRB dan kemiskinan. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa estimasi parameter sistem parameter sistem persamaan simultan dengan metode LIML, adalah:

$$\hat{\delta}_{1_{liml}} = (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'y_1 \text{ dan } \hat{\delta}_{2_{liml}} = (Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'y_2$$

Hasil estimasi parameter metode LIML diimplementasikan pada data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan kemiskinan tahun 2000-2013 di Indonesia, sehingga diperoleh model persamaan simultan PDRB dan kemiskinan sebagai berikut:

$$\text{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \text{KE} + 8{,}755515\ \text{EX} - 18{,}166159\ \text{IM}$$
$$\text{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \text{PD} + 0{,}547844\ \text{TP} + 0{,}455393\ \text{KP}$$

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti akan melanjutkan penelitian terdahulu pada kasus hubungan antara pendapatan domestik regional bruto (PDRB) dan pertumbuhan ekonomi dengan metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML). Berdasarkan uraian di atas didapatkan judul: **“**Penerapan Estimasi Metode Full Information Maximum Likelihood Pada Data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan Kemiskinan di Indonesia Secara Simultan*”*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dari penelitian ini adalah bagaimana hasil penerapan metode FIML pada data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan Kemiskinan di Indonesia Secara Simultan?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil penerapan metode FIML pada data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) dan Kemiskinan di Indonesia secara simultan.

1.4. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Sistem persamaan simultan bersifat linier dan berdistribusi normal.
2. Identifikasi sistem persamaan simutan adalah terlalu teridentifikasi (*overidentified*).
3. Parameter yang diteliti adalah δ.
4. Data yang digunakan tahun 2000 – 2013.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain:

1. Bagi Peneliti

   Menambah wawasan di bidang aktuaria khususnya metode FIML pada sistem persamaan simultan
2. Bagi Mahasiswa

   Dapat digunakan sebagai bahan referensi bagi pihak yang berkepentingan dalam melaksanakan penelitian selanjutnya pada bidang yang sama.

3. Bagi Pihak Lain
   a. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan matematika, khususnya bidang statistik.
   b. Dapat dijadikan bahan referensi untuk diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

1.6. Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran menyeluruh mengenai estimasi parameter pada sistem persamaan simultan metode FIML, penelitian ini terdiri dari:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II : KAJIAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan tentang teori dasar yang menunjang materi pokok pembahasan, yaitu matriks dan vektor, korelasi dan regresi, sistem persamaan linier, teori peluang, sistem persamaan simultan, estimasi parameter sistem persamaan simultan, produk domestik regional bruto,pertumbuhan ekonomim, penelitian terdahulu, dan kajian estimasi dalam Islam.

Bab III : METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang masalah yang akan dikaji oleh peneliti antara lain adalah tentang pendekatan penelitian, sumber data, variabel penelitian, dan tahap analisis.

Bab IV : PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang estimasi parameter pada sistem persamaan simultan dengan menggunakan metode FIML dan contoh penerapan metode FIML pada data pertumbuhan ekonomi secara simultan.

Bab V : PENUTUP

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dan saran dari pembahasan.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Vektor Matriks

2.1.1 Definisi Vektor

Menurut Imrona (2013), vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor dilambangkan oleh huruf kecil tebal atau huruf kecil dengan panah diatasnya, sehingga vektor$a$ dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{a}$ atau $\vec{a}$. Secara analitis, sebuah vektor pada bidang dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan terurut, misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$. Sedangkan vektor dalam ruang (R^3) secara analitis dinyatakan sebagai tiga bilangan terurut, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Sebuah vektor dapat ditulis sebagai sebuah matriks satu kolom, yaitu:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{bmatrix} = (a_1, a_2) \text{ dan } \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \end{bmatrix} = (a_1, a_2, a_3)$$

Menurut Anton (2004) sebuah vektor $\boldsymbol{b}$ dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}$**,** jika vektor tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} \dots + k_r\boldsymbol{a_r} \tag{2.1}$$

dimana $k_1, k_2, \dots, k_r$ adalah skalar.

Jika $S = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor:

$$k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} \dots + k_r\boldsymbol{a_r} = 0 \tag{2.2}$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yaitu:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan himpunan bebas linier. Tetapi jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linier.

2.1.2 Operasi Vektor

a. Penjumlahan Vektor

Menurut Anton (2004) jika $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah dua vektor sebarang, maka jumlah $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut: Tempatkan vektor $\boldsymbol{b}$ sedemikian sehingga titik awalnya berhimpitan dengan titik akhir $\boldsymbol{a}$. Vektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ diwakili oleh anak panah dari titik awal $\boldsymbol{a}$ hingga titik akhir $\boldsymbol{b}$.

Untuk $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$, berlaku (Imrona, 2013):

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

b. Pengurangan Vektor

Menurut Anton (2004) jika $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah dua vector sebarang, maka selisih $\boldsymbol{b}$ dari $\boldsymbol{a}$ di definisikan oleh $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

Untuk $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$, berlaku (Imrona, 2013):

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$

c. Perkalian Vektor

Menurut Anton (2004) jika $\boldsymbol{a}$ adalah vektor tidak nol dan k bilangan riil tidak nol (skalar), maka hasil kali $k\boldsymbol{a}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $|k|$ kali panjang $\boldsymbol{a}$ dan arahnya sama seperti arah $\boldsymbol{a}$ jika $k>0$ dan berlawanan dengan arah $\boldsymbol{a}$ jika $k<0$. Definisikan $k\boldsymbol{a}=0$, dimana $k=0$ atau $\boldsymbol{a}=0$.

Untuk $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$dan $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$, berlaku (Imrona, 2013):

$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, hasil kali silang antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ adalah:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} \hat{k}$$

dimana $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\jmath}$, dan $\hat{k}$ merupakan vektor-vektor satuan dalam R^3.

2.1.3 Definisi Metriks

Anton (2004) menyatakan bahwa “suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks”. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis hoizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Matriks adalah susunan bilangan atau fungsi yang tersusun dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku. Bilangan atau fungsi tersebut dinamakan elemen atau elemen dari matriks. Matriks dilambangkan dengan huruf besar sedangkan elemen (elemen) dilambangkan dengan huruf kecil. Dalam matriks dikenal dengan ukuran matriks yang disebut ordo, yaitu banyak baris × banyak kolom (tanda × bukan menyatakan perkalian, tetapi hanya sebagai tanda pemisah), seperti contoh berikut (Imrona, 2013):

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \boldsymbol{a_{12}} \boldsymbol{a_{13}} \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \boldsymbol{a_{22}} \boldsymbol{a_{23}} \boldsymbol{a_{24}} \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 2×4, dengan elemen $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$dan a_{24}.

Menurut Anton (2004), dua matriks dikatakan samaatau setara jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan entri-entriyang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut sama. Anggota pada baris *i* dan kolom *j* dari sebuah matriks A dinyatakan dengan a_{ij}. Jadi, sebuah matriks yang berdimensi *m x n* secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{21}} & \cdots & \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix} \text{atau } A_{mxn} = \{a_{ij}\} \qquad (2.3)$$

2.1.4 Operasi Matriks

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Anton (2004) menyatakan bahwajika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada Bdengan entri-entri yang bersesuaian pada A. Selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada Adengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuranberbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Misalkan $A = [\boldsymbol{a_{ij}}]$, $B = [\boldsymbol{b_{ij}}]$, dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Jumlah matriks A dan B, dinyatakan oleh $C = A + B$, yang memenuhi (Imrona, 2013):

Syarat : ordo *A* = ordo *B*

Aturan : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (elemen yang seletak dijumlahkan).

b. Perkalian Matriks dengan Skalar

Anton (2004) menyatakan bahwa jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan$c$. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar dari A.

Misalkan $A = [\boldsymbol{a_{ij}}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Perkalian matriks A dengan skalar k dinyatakan oleh $C = kA$, yang memenuhi (Imrona, 2013):

Syarat : tidak ada

Aturan : $c_{ij} = k\ a_{ij}$ (setiap elemen pada matriks A dikalikan dengan skalar k).

c. Perkalian Dua Matriks

Anton (2004) menyatakan bahwa jika A adalah matriks $m\ x\ r$ dan B adalah matriks $r\ x\ n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m\ x\ n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Hasil entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang diperoleh.

Jika $A = [\boldsymbol{a_{ij}}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ dan $B = [\boldsymbol{b_{jk}}]$ dengan $k = 1,2, \dots, r$, perkalian matriks A dan B yang dinyatakan oleh $C = AB$ memenuhi (Imrona, 2013:5):

Syarat : banyak kolom A = banyak baris B

Aturan : $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ (jumlah dari semua perkalian antara elemen A pada baris ke-i dengan elemen B pada kolom ke-k).

Pada umumnya berlaku sifat $AB \neq BA$ (perkalian matriks tidak bersifat komutatif).

d. Transpos Matriks

Anton (2004) menyatakan bahwa jika A adalah matriks $m\ x\ n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n\ x\ m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Misalkan $A = [\boldsymbol{a_{ij}}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Transpos matriks A, dinyatakan oleh $B = A^T$, didefinisikan sebagai berikut (Imrona, 2013):

Syarat : tidak ada

Aturan : $b_{ij} = a_{ij}$ (kolom matriks A menjadi baris matriks A^T).

Menurut Anton (2004), jika ukuran matriks seperti operasi yang diberikan dapat dilakukan, maka:

a. $(A^T)^T = A$
b. $(A + B)^T = A^T + B^T$
c. $(kA)^T = (kA)^T$, dimana k adalah sebarang skalar
d. $(AB)^T = B^T A^T$

e. *Trace* Matriks

Misalkan $A = [\boldsymbol{a_{ij}}]$, dengan $i = 1, 2, \dots, p$ dan $j = 1, 2, \dots, q$. *Trace* matriks A, dinyatakan oleh *trace* (A), didefinisikan sebagai berikut (Imrona, 2013):

Syarat : matriks bujur sangkar

Aturan : trace (A)=$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mn}$ (penjumlahan semua elemen diagonal utama).

f. Invers Matriks

Anton (2004) menyatakan bahwajika A adalah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Matriks$A$ dapat dibalik, jika $\det(A) \neq 0$,maka inversnya dapat dihitung dengan rumus (Anton, 2004):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \tag{2.4}$$

Matriks bujur sangkar, $A = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$, disebut mempunyai invers apabila terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga (Imrona, 2013):

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

dimana I merupakan matriks satuan.

g. Determinan Matriks

Anton (2004) menyatakan bahwa misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan det dan kita mendefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari hasil kali elementer bertanda dari A. Angka det (A) disebut determinan dari A.

Lambang determinan matriks A adalah det (A) atau $|A|$. Determinan dari matriks 2×2 sebagai berikut (Imrona, 2013):

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \mathrm{a}_{11}\mathrm{a}_{22} - \mathrm{a}_{12}\mathrm{a}_{21} \quad (2.5)$$

Lambang $|...|$ di sini bukanlah lambang nilai mutlak, akan tetapi lambang determinan. Untuk matriks 3×3, determinan didefinisikan sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \quad (2.6)$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Anton (2004) menyatakan bahwa jika A dan B adalah matriks bujur sangkar yang ukurannya sama, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Jika A dapat dibalik, maka:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (2.7)$$

h. *Rank* Matriks

Anton (2004) menyatakan bahwa “dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut *rank* dari A dan dinyatakan sebagairank(A)". *Rank* suatu matriks merupakan ordo atau dimensi dari submatriks bujur sangkar terbesar dan mempunyai determinan tidak sama dengan nol.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

Hasil dari $|A| = 0$, sehingga A adalah matriks singular karena mempunyai determinan sama dengan nol. Jadi, meskipun ordonya $3 \text{ x } 3$, *rank*nya adalah kurang dari 3. Diperoleh *rank* sama dengan 2 karena submatriks yang berukuran $2 \text{ x } 2$ didapatkan determinan yang tidak nol (Gujarati, 1999).

Misalnya saja dengan menghilangkan baris pertama dan kolom pertama dari A, diperoleh matriks $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, dengan $\det(A) = -6$ yang tidak sama dengan 0. Oleh karena itu, tingkat atau rank dari **A** adalah 2 (Gujarati, 1999).

i. Turunan Matriks

Menurut Gujarati (1999), jika $A' = [\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2} \cdots \quad \boldsymbol{a_n}]$ adalah suatu vektor baris dari angka-angka dan $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X_n} \end{bmatrix}$ adalah vektor kolom dari variabel $X_1, X_2, \dots, X_n$, sehingga:

$$\frac{\partial(A'X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{bmatrix} = A \qquad (2.8)$$

Bukti:

$$\frac{\partial(A'X)}{\partial X} = \frac{\partial(A'X)}{\partial\begin{bmatrix}\boldsymbol{X_1}\\ \boldsymbol{X_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{X_n}\end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\partial(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)}{\partial\begin{bmatrix}\boldsymbol{X_1}\\ \boldsymbol{X_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{X_n}\end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{\partial(A'X)}}{\boldsymbol{\partial X_1}}\\ \frac{\boldsymbol{\partial(A'X)}}{\boldsymbol{\partial X_2}}\\ \vdots\\ \frac{\boldsymbol{\partial(A'X)}}{\boldsymbol{\partial X_n}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{a_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a_n}\end{bmatrix} = A$$

Perhatikan matriks $X'AX$ sedemikian rupa, jika

$$X'AX = [\boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2}\cdots \quad \boldsymbol{X_n}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_{11}}\,\boldsymbol{a_{12}}\cdots\boldsymbol{a_{1n}}\\ \boldsymbol{a_{21}}\,\boldsymbol{a_{22}}\cdots\boldsymbol{a_{2n}}\\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots\\ \boldsymbol{a_{n1}}\,\boldsymbol{a_{n2}}\cdots\boldsymbol{a_{nn}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X_1}\\ \boldsymbol{X_2}\\ \vdots\\ \boldsymbol{X_n}\end{bmatrix}$$

maka diferensial matriks tersebut adalah (Gujarati, 1999):

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = 2AX \tag{2.9}$$

X merupakan vektor kolom dari n elemen, atau

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = 2X'A \tag{2.10}$$

X merupakan vektor baris dari n elemen.

Bukti:

$$X'AX = [\boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \dots \quad \boldsymbol{X_n}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X_n} \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{a_{11}X_1} + \cdots + \boldsymbol{a_{n1}X_n} \quad \boldsymbol{a_{12}X_1} + \cdots + \boldsymbol{a_{n2}X_n}$$

$$\dots \quad \boldsymbol{a_{1n}X_1} + \cdots + \boldsymbol{a_{nn}X_n}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X_n} \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}X_1 + \cdots + a_{n1}X_n)X_1 + (a_{12}X_1 + \cdots + a_{n2}X_n)X_2 +$$

$$\dots + (a_{1n}X_1 + \cdots + \quad a_{nn}X_n)X_n$$

$$= a_{11}X_1^2 + \cdots + a_{n1}X_nX_1 + a_{12}X_1X_2 + \cdots + a_{n2}X_nX_2$$

$$+a_{1n}X_1X_n + \cdots + a_{nn}X_n^2$$

$$\frac{\partial(X'AX)}{\partial X} = \frac{\partial(X'AX)}{\partial \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X_n} \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\partial(X'AX)}}{\boldsymbol{\partial X_1}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\partial(X'AX)}}{\boldsymbol{\partial X_2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\boldsymbol{\partial(X'AX)}}{\boldsymbol{\partial X_n}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{2(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n)} \\ \boldsymbol{2(a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{2(a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + a_{3n}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n)} \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \cdots + a_{1n}X_n} \\ \boldsymbol{a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \cdots + a_{2n}X_n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + a_{3n}X_3 + \cdots + a_{nn}X_n} \end{bmatrix}$$

$$= 2\sum a_{ij}X_i$$

$$= 2AX$$

2.1.5 Bentuk Kuadrat

Bentuk kuadrat pada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat ditulis sebagai berikut (Anton, 2004):

$$x'Ax$$

dimana x adalah vektor kolom yang memuat variabel-variabel, dan A adalah sebuah matriks simetrik yang entri-entri diagonalnya adalah koefisien-koefisien pada suku-suku yang dikuadratkan, sedangkan entri-entri di luar diagonal utama adalah setengah dari koefisien-koefisien pada suku-suku hasil kali silang.

Misalkan A adalah sebuah matriks simetrik $n \times n$ yang nilai eigennya, dalam urutan yang semakin mengecil adalah $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Jika x dibatasi sedemikiansehingga $\|x\| = 1$ relatif terhadap hasil kali dalam Euclidian pada R^n, maka (Anton, 2004):

a) $\lambda_1 \geq x'Ax \geq \lambda_n$.
b) $x'Ax = \lambda_n$ jika x adalah vektor eigen A yang diasosiasikan dengan λ_n dan $x'Ax = \lambda_1$ jika x adalah vektor eigen A yang diasosiasikan dengan λ_1.

Menurut Anton (2004) bahwa bentuk kuadrat $x'Ax$ disebut definit positif jika $x'Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$, sedangkan matriks simetrik A disebut matriks definit positif jika $x'Ax$ adalah bentuk kuadrat definit positif. Matriks simetrik A adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen A adalah positif.

Menurut Anton (2004) bahwa matriks simetrik A dan bentuk kuadrat $x'Ax$ disebut:

a. Semi definit positif apabila $x'Ax \geq 0$ untuk semua x.
b. Definit negatif apabila$x'Ax < 0$ untuk $x \neq 0$.
c. Semi definit negatif apabila$x'Ax \leq 0$ untuk semua x.
d. Jika $x'Ax$ mempunyai nilai positif maupun nilai negatif, maka disebut tidak definit (*Indefinit*).

2.2 Sistem Persamaan Linier

Sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk (Anton, 2004):

$$a_1 x + a_2 y = b \tag{2.11}$$

dimana a_1, a_2, dan b merupakan konstanta real, dan a_1, a_2 tidak sama dengan nol. Persamaan ini disebut persamaan linier dengan variabel x dan y. Secara umum, bentuk persamaan linier didefinisikan dengan$n$ variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai berikut (Anton, 2004):

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b \tag{2.12}$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$dan b merupakan konstanta real, $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan variabel bebas, dan b disebut suku konstan.

Imrona (2013) menyatakan bahwa “sistem persamaan linier (SPL) adalah sehimpunan persamaan linieryang menjadi satu kesatuan, antar persamaan linier saling terikat”. Bentuk umum sistem persamaan linear adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2.1 Sistem Persamaan Linier Sederhana

Perhatikan suatu sistem yang terdiri dari dua persamaan linier dengan dua variabel tidak diketahui x dan y, dapat dinyatakan sebagai berikut (Imrona, 2013):

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \qquad (a_1, b_1 \neq 0) \\ a_2x + b_2y &= c_2, \qquad (a_2, b_2 \neq 0) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Solusi umum dari sistem persamaan linear mempunyai tiga kemungkinan banyaknya penyelesaian, yaitu (Imrona, 2013):

a. Penyelesaian tunggal

Kedua garis berpotongan di satu titik, terjadi jika garis-garis memiliki kemiringan yang berbeda atau koefisien dari x dan y tidak sebanding (Imrona, 2013):

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{atau ekuivalen dengan } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Metode yang digunakan untuk menentukan solusi penyelesaiannya adalah metode substitusi. Sebagai contoh, diketahui sistem persamaan berikut:

$$x - y = -1$$

$$3x + 2y = 12$$

maka:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$$

Untuk mencari solusi, dari persamaan pertama diperoleh:

$$x - y = -1$$

$$x = y - 1$$

Dari persamaan diatas, selanjutnya disubstitusikan pada persamaan kedua:

$$3(y-1) + 2y = 12$$

$$3y - 3 + 2y = 12$$

$$5y = 15$$

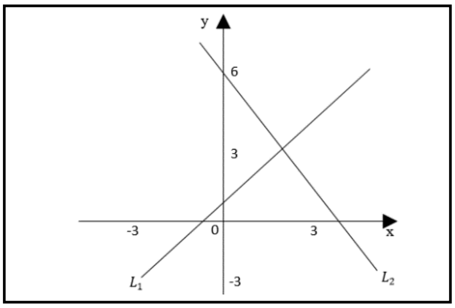
$$y = 3$$

Selanjutnya substitusi nilai y pada persamaan pertama dan diperoleh:

$$x - 3 = -1$$

$$x = 2$$

Didapatkan solusi $x = 2$ dan $y = 3$. Artinya kedua persamaan tersebut saling berpotongan di titik $(2, 3)$.



Gambar 2.1 Grafik Solusi SPL Tepat Satu Penyelesaian

b. Penyelesaian tak hingga banyaknya

Kedua garis berhimpitan, terjadi jika kedua garis memiliki kemiringan yang sama dan titik potong pada sumbu y yang sama atau koefisien-koefisien dan konstanta-konstantanya sebanding (Imrona, 2013):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Sebagai contoh, diketahui sistem persamaan berikut:

$$x + 2y = 4$$

$$2x + 4y = 8$$

maka:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \to \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Metode yang digunakan untuk menentukan solusi penyelesaiannya adalah metode substitusi. Untuk mencari solusi, dari persamaan pertama diperoleh:

$$x + 2y \ = 4$$

$$x \ = -2y + 4$$

Dari persamaan diatas, selanjutnya disubstitusikan pada persamaan kedua dan diperoleh:

$$2(-2y + 4) + 4y = 8$$

$$-4y + 8 + 4y = 8$$

$$0 = \ 0$$

Pada kedua ruas didapatkan nol, misal $x = 1$ jika disubstitusikan pada persamaan pertama maka:

$$x + 2y = 4$$

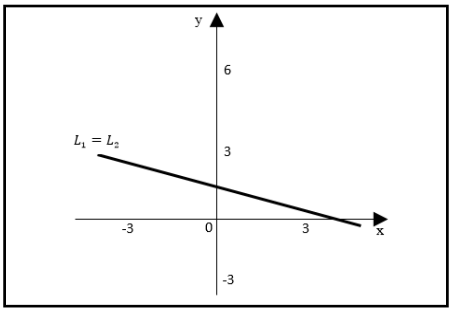
$$1 + 2y = 4$$

Jika disubstitusikan pada persamaan kedua, maka:

$$2x + 4y = 8$$

$$2(1) + 4y = 8$$

$$y = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$$



Gambar 2.2 Graik SPL Tak Hingga Banyaknya Penyelesaian

c. Tak ada penyelesaian

Kedua garis saling sejajar terjadi jika dua garis memiliki kemiringan yang sama tetapi dengan titik potong pada sumbu Y yang berbeda (Imrona, 2013):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Sebagai contoh, diketahui sistem persamaan berikut:

$$x + 3y \quad = 3$$

$$2x + 6y = -8$$

maka:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \neq -\frac{3}{8}$$

Metode yang digunakan untuk menentukan solusi penyelesaiannya adalah metode substitusi. Untuk mencari solusi, dari persamaan pertama diperoleh:

$$x + 3y = 3$$

$$x = -3y + 3$$

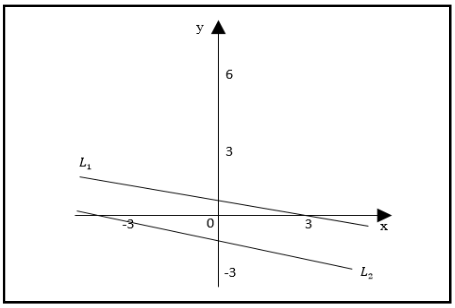
Dari persamaan diatas, selanjutnya disubstitusikan pada persamaan kedua

$$2(-3y + 3) + 6y = -8$$

$$-6y + 6 + 6y \ = -8$$

$$0 \ = -14$$

Karena pada ruas kiri didapatkan nol, sehingga sistem persamaan linier tersebut tidak mempunyai penyelesaian.



Gambar 2.3 Grafik SPL Tidak Memiliki Penyelesaian

2.2.2 Sistem Persamaan Linier Berganda

Bentuk umum persamaan linier dengan m persamaan dengan n variabel pada persamaan (2.13) dapat dirubah dalam bentuk matriks sebagai berikut (Imrona, 2013):

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_m} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$AX = B$$

Sekarang perhatikan suatu matriks yang diperbesar (*augmented*) A_B yaitu matriks dimana kolom yang pertama terdiri dari matriks A sedangkan kolom yang ke $(n + 1)$ terdiri dari vektor B.

$$A_B = [\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} & \boldsymbol{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} & \boldsymbol{b_m} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Matriks A_B mempunyai arti yang sangat penting di dalam penyelesaian persamaan linier, khususnya mengenai $rank(A_B) = s$ dan juga $rank(A) = s$sangat menentukan apakah persamaan yang bersangkutan mempunyai penyelesaian atau tidak. Matriks A_B disebut *augmented* matriks dari sistem persamaan. Suatu sistem persamaan linier dengan m persamaan dan n variabel akan mempunyai tiga kemungkinan sebagai berikut (Supranto, 2009):

a) Sistem persamaan tidak mempunyai penyelesaian, jika $rank(A) < rank(A_B)$.
b) Sistem persamaan dikatakan mempunyai tepat satu penyelesaian, jika $rank(A) = rank(A_B) = n$.
c) Sistem persamaan mempunyai penyelesaian yang tak hingga, jika $rank(A) = rank(A_B) = s < n$.

Sebagai contoh, diberikan sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = -11$$

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -16$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 21$$

atau ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{21} \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Perhatikan pertama-tama mengecek apakah $rank(A) = rank(A_B)$, untuk meyakinkan bahwa ada penyelesaian. Perhatikan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Menurut Gujarati (2012) *rank* dari suatu matriks ditentukan oleh ordo dari submatriks bujursangkar yang terbesar yang determinannya tidak nol. Determinan dari matriks A yaitu

$$\det(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix} = 30 + (-16) + 3 - 20 - 12 - 6 = -21$$

Karena didapatkan determinan dari matriks A yang berordo 3×3 tidak sama dengan nol, maka $rank(A) = 3$. Sedangkan untuk matriks yang diperluas A_B, ordo submatriks bujursangkar terbesarnya adalah berordo 3×3.

$$A_B = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} & \mathbf{21} \end{bmatrix}$$

Submatriks bujursangkar berordo 3×3 yang berada di sebelah kiri determinannya sama dengan determinan matriks A, sedangkan determinan dari submatriks sebelah kanan yaitu

$$\det A_{B_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{5} & \mathbf{21} \end{bmatrix} = 38$$

Didapatkan determinan dari submatriks yang berordo 3×3 yang berada di sebelah kanan maupun sebelah kiri tidak sama dengan nol, dapat dikatakan bahwa $rank(A_B) = 3$. Karena $rank(A) = rank(A_B) = n$ dimana n adalah banyaknya persamaan yaitu 3, sehingga sistem persamaan tersebut mempunyai tepat satu penyelesaian, Penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah dengan menggunakan metode invers, yaitu:

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{21} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-23} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{14} & \mathbf{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-11} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh penyelesainnya adalah $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, dan $x_3 = 1$.

Metode invers digunakan apabila matriks A adalah matriks bujur sangkar $(n \times n)$ dan non singular. Jika matriks A bukan matriks bujur sangkar atau matriks singular maka metode yang digunakan adalah invers semu (*pseudoinverse)*, sehingga solusi untuk sistem persamaannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ (A^T A)X &= A^T B \\ (A^T A)^{-1}(A^T A)X &= (A^T A)^{-1} A^T B \\ X &= (A^T A)^{-1} A^T B \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3 Korelasi dan Regresi Linier

2.3.1 Korelasi

Menurut Algifari (2000) bahwa analisis korelasi adalah alat statistik yang dapat digunakan untuk mengetahui derajat hubungan linier antara satu variabel dengan variabel lain. Umumnya analisis korelasi digunakan dalam hubungannya dengan analisis regresi, untuk mengukur ketepatan garis regresi dalam menjelaskan variasi nilai variabel terikat. Ukuran statistik yang dapat menggambarkan hubungan antara suatu variabel dengan variabel lain adalah koefisien determinasi dan koefisien korelasi.

Koefisien determinasi adalah salah satu nilai statistik yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah ada hubungan pengaruh antara dua variabel. Nilai koefisien determinasi menunjukkan persentase variasi nilai variabel dependen yang dapat dijelaskan oleh persamaan regresi yang dihasilkan (Algifari, 2000):

$$R^2 = \frac{(n\sum xy - \sum x \sum y)^2}{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]} \tag{2.17}$$

dan rumus untuk menghitung koefisien relasinya (Algifari, 2000:53):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{[n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)]^2}{[n(\sum x^2) - (\sum x)^2][n(\sum y^2) - (\sum y)^2]}} \\ &= \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sifat-sifat koefisien korelasi (Algifari, 2000):

a. Koefisien korelasi dapat positif atau negatif, tanda bergantung dari tanda kovarian dari dua variabel tersebut.
b. Besarnya koefisien korelasi dari -1 sampai dengan 1, jadi dapat ditulis $-1 \leq r \leq 1$.
c. Koefisien memiliki sifat simetris, artinya koefisien korelasi antara X dan Y sama dengan koefisien korelasi y dan x.

d. Koefisien memiliki korelasi bebas dari pengaruh nilai asli dan nilai skala. Artinya, jika $x^* = ax + c$ dan $y^* = by + d$, dimana $a > 0, b > 0$, dan c, d adalah konstan, maka koefisien korelasi antara x^* dan y^* sama dengan korelasi antara variabel aslinya, yaitu antara x dan y.
e. Koefisien korelasi hanya ukuran derajat hubungan linier saja, tidak mampu memberikan gambaran mengenai derajat hubungan non linier.

Untuk memastikan apakah keeratan hubungan antar dua variabel, diperlukan pengujian terhadap koefisien korelasi tersebut. Pengujian terhadap koefisien korelasi dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Algifari, 2000):

1. Perumusan Hipotesis

Rumusan hipotesis dibuat berdasarkan hipotesis yang digunakan dalam pengujian. Jika diduga bahwa suatu variabel mempunyai korelasi dengan variabel lain, pengujian dilakukan dua sisi yang rumusan hipotesisnya adalah:

$$H_0 : \rho = 0, \qquad \text{(hubungan yang tidak signifikan)}$$

$$H_1 : \rho \neq 0, \qquad \text{(hubungan yang signifikan)}$$

Jika diduga bahwa suatu variabel mempunyai korelasi positif dengan variabel lain, pengujian dilakukan pada sisi kanan yang rumusan hipotesisnya adalah:

$$H_0 : \rho = 0, \qquad \text{(hubungan yang tidak signifikan)}$$

$$H_1 : \rho > 0, \qquad \text{(hubungan yang signifikan)}$$

Jika diduga bahwa suatu variabel mempunyai korelasi negatif dengan variabel lain, pengujian dilakukan pada sisi kiri yang rumusan hipotesisnya:

$$H_0 : \rho = 0, \qquad \text{(hubungan yang tidak signifikan)}$$

$$H_1 : \rho < 0, \qquad \text{(hubungan yang signifikan)}$$

2. Distribusi yang digunakan dalam pengujian koefisien korelasi adalah distribusi t. Nilai t_{tabel} ditentukan berdasarkan tingkat signifikansi (α) yang digunakan dan derajat kebebasan $(\text{d.f.} = \text{n} - 2)$ yang besarnya tergantung sampel (n). Menghitung nilai t_{tabel} dengan pengujian satu sisi baik sisi kanan maupun sisi kiri adalah

$$t_{\text{tabel}} = t_{\alpha;\text{d.f}}$$

Dan menghitung nilai t_{tabel} dengan pengujian dua sisi adalah

$$t_{\text{tabel}} = t_{\alpha/2\,;\text{d.f}}$$

3. Nilai t_{hitung} ditentukan dengan formula sebagai berikut:

$$t_{\text{hitung}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (2.19)$$

Nilai *P-value* ditentukan dengan formula sebagai berikut:

Pada uji hipotesa sisi kiri

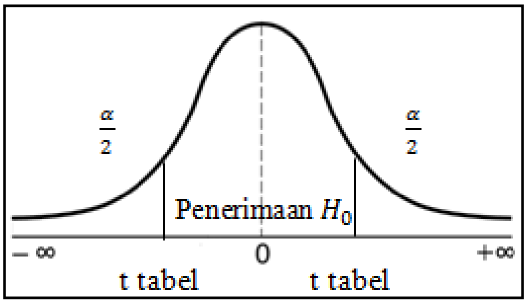
$$P\ value = \int_{-\infty}^{-t_{hitung}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \qquad (2.20)$$

Pada uji hipotesa sisi kanan

$$P\ value = \int_{t_{hitung}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \qquad (2.21)$$

4. Keputusan diambil dengan 2 solusi yaitu dengan t_{hitung} banding t_{tabel} atau *P-value* banding daerah penerimaan hipotesis alernatif. Ketika pengujian 2 sisi:
   a. Membandingkan nilai t_{hitung} dengan t_{tabel}, jika $-t_{\text{tabel}} \leq t_{\text{hitung}} \leq t_{\text{tabel}}$, maka keputusan menerima hipotesis nol (H_0).

b. Membandingkan *P-value* dengan daerah penerimaan hipotesis alternatif, Jika nilai *P-value*> $\frac{\alpha}{2}$ maka keputusan menerima hipotesis nol (H_0). Sebaliknya, jika *P-value*≤ $\frac{\alpha}{2}$, maka keputusan menolak hipotesis nol (H_0).

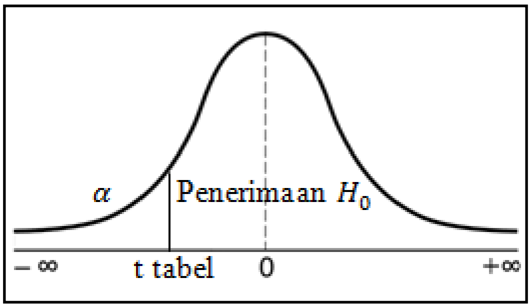


Gambar 2.4 Grafik Uji hipotesis Dua Arah

Keputusan diambil dengan 2 solusi pada uji hipotesis sisi kiri:

a. Membandingkan nilai t_{hitung} dengan t_{tabel}, jika $t_{\text{hitung}} \geq -t_{\text{tabel}}$, maka keputusan menerima hipotesis nol (H_0).

b. Membandingkan *P-value* dengan daerah penerimaan hipotesis alternatif, Jika nilai *P-value*> α maka keputusan menerima hipotesis nol (H_0). Sebaliknya, jika *P-value* $\leq \alpha$, maka keputusan menolak hipotesis nol (H_0).

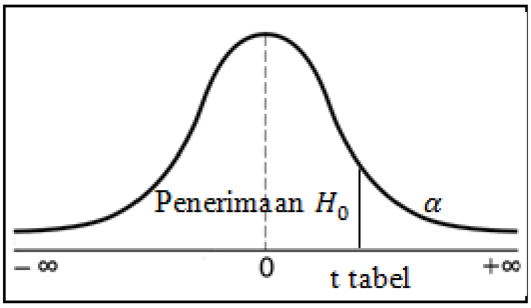


Gambar 2.5 Grafik Uji Hipotesis Sisi Kiri

Keputusan diambil dengan 2 solusi pada uji hipotesis sisi kanan:

a. Membandingkan nilai t_{hitung} dengan t_{tabel}, jika $t_{\text{hitung}} \leq t_{\text{tabel}}$, maka keputusan menerima hipotesis nol (H_0).

b. Membandingkan *P-value* dengan daerah penerimaan hipotesis alternatif, Jika nilai *P-value*$> \alpha$ maka keputusan menerima hipotesis nol (H_0). Sebaliknya, jika *P-value*$\leq \alpha$, maka keputusan menolak hipotesis nol (H_0)



Gambar 2.6 Grafik Uji Hipotesis Sisi Kanan

5. Jika keputusan menerima H_0, kesimpulannya adalah tidak ada korelasi antara kedua variabel. Sebaliknya, jika keputusan menerima H_1 maka terdapat korelasi antara kedua variabel (Algifari, 2000).

2.3.2 Regresi Linier Sederhana

Analisis regresi adalah suatu analisis yang bertujuan untuk menunjukkan hubungan matematis antara variabel terikat dengan variabel bebas. Secara umum, model regresi dengan satu variabel adalah sebagai berikut (Supranto, 2009):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \tag{2.22}$$

dimana:

y : variabel terikat

x : variabel bebas

β: parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan harus diestimasi

u : galat

2.3.3 Regresi Linier Berganda

Menentukan nilai variabel terikat (y) perlu diperhatikan variabel bebas (x) yang mempengaruhinya terlebih dahulu, dengan demikian harus diketahui hubungan antara satu variabel terikat dengan beberapa variabel bebas. Untuk meramalkan y, jika semua variabel bebas diketahui, maka dapat dipergunakan model persamaan regresi linier berganda sebagai berikut (Supranto, 2009):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + u_i \qquad (2.23)$$

dimana:

y = variabel terikat

x = variabel bebas

β = parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan harus diestimasi

u = galat

$$i = 1,2, \dots, n$$

2.3.4 Pendekatan Matriks dalam Model Regresi Linier

Menurut Sumodiningrat (1994) model regresi dengan variabel terikat y dan k variabel bebas $x_1, x_2, \dots, x_k$ dengan $i = 1,2, \dots, n$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$$

Oleh karena *i* menunjukkan banyaknya observasi, sehingga terdapat *n* persamaan sebagai berikut (Sumodiningrat, 1994):

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{13} + \cdots + \beta_k x_{1k} + u_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{23} + \cdots + \beta_k x_{2k} + u_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + \cdots + \beta_k x_{nk} + u_n$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$y = X\beta + u \tag{2.24}$$

dimana:

$$y_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{y_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix} \quad x_{n\times(k+1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_{11}} & \boldsymbol{x_{12}} & \boldsymbol{x_{13}} & \cdots & \boldsymbol{x_{1k}} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_{21}} & \boldsymbol{x_{22}} & \boldsymbol{x_{23}} & \cdots & \boldsymbol{x_{2k}} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_{31}} & \boldsymbol{x_{32}} & \boldsymbol{x_{33}} & \cdots & \boldsymbol{x_{3k}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_{n1}} & \boldsymbol{x_{n2}} & \boldsymbol{x_{n3}} & \cdots & \boldsymbol{x_{nk}} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{(k+1)\times 1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_0} \\ \boldsymbol{\beta_1} \\ \boldsymbol{\beta_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta_k} \end{bmatrix} \qquad u_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_n} \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan estimasi β, maka ditentukan dua vektor ($\hat{\beta}$ dan u) sebagai berikut (Sumodiningrat, 1994):

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{2}} \\ \vdots \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_n} \end{bmatrix}$$

Persamaan hasil estimasi dapat ditulis:

$$y = X\hat{\beta} + u$$

$$u = y - X\hat{\beta}$$

Sekarang meminimumkan:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \cdots + u_n^{\,2}$$

$$= [\boldsymbol{u_1} \quad \boldsymbol{u_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{u_n}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_n} \end{bmatrix}$$

$$= u'u \tag{2.25}$$

Jadi:

$$u^2 = u'u$$

$$= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$

$$= y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Oleh karena $\hat{\beta}'X'Y$ adalah skalar (1×1), sehingga matriks transposnya adalah Sumodiningrat (1994):

$$\hat{\beta}'X'y = y'X\hat{\beta}$$

Jadi

$$u'u = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \tag{2.26}$$

2.4 Teori Peluang

2.4.1 Distribusi Normal

Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham DeMoivre seorang ahli metematika berkebangsaan Perancis yang melarikandiri ke Inggris sekitar tahun 1685. Distribusi Normal mempunyai modelkurva berbentuk simetris setangkup, menyerupai genta di sekitar satu nilaiyang bertepatan dengan puncak kurva yang menjulur ke kiri dan menjulurke kanan mendekati sumbu datar sebagai asimtotnya (Wibisono, 2005).

Sebuah variabel random X mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan varian $\sigma^2 > 0$ dapat dilambangkan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal dapat ditulis dalam bentuk (Sumodiningrat ,1994):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.27)$$

untuk $-\infty < X < \infty$, dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$.

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka $\mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mengikuti distribusi normal standar dengan fungsi kepadatan peluang Sumodiningrat (1994):

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \quad (2.28)$$

untuk $-\infty < z < \infty$. Mempunyai mean 0 dan varian 1 atau dapat ditulis

$\mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

2.4.2 Distribusi Peluang Berganda

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, maka distribusipeluang terjadinya secara serentak atau bersamaan dinyatakan dengan fungsi $f(x,y)$ dan disebut sebagai distribusi peluang gabungan X dan Y. Fungsi dikatakan distribusi peluang gabungan peubah acak diskrtit$X$ dan$Y$ bila memenuhi:

1. $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y)
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \sum_A \sum f(x,y)$ untuk setiap daerah A di bidang xy

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, maka distribusipeluang terjadinya secara serentak atau bersamaan dinyatakan denganfungsi$f(x,y)$ dan disebut sebagai distribusi peluang gabungan X dan Y. Fungsi $f(x,y)$ dikatakan fungsi peluang atau distribusi peluang gabungan peubah acak kontinu X dan Y bila memenuhi:

1. $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

$$P[(X,Y) \in A] = \int\int f(x,y)\,dxdy$$

2.5 Sistem Persamaan Simultan

Menurut Ekananda (2015), sistem persamaan simultan atau model persamaan simultan adalah suatu himpunan persamaan dengan variabel terikat dalam satu atau lebih persamaan juga merupakan variabel bebas dalam beberapa persamaan lainnya, yaitu satu variabel sekaligus mempunyai dua peranan yaitu sebagai variabel terikat dan variabel bebas.

Ada situasi di mana hubungan satu arah antara Y dan X seperti itu tidak bisa dipertahankan. Sangat mungkin bahwa X tidak hanya memepengaruhi Y, tetapi Y juga bisa mempengaruhi satu X atau lebih.Oleh karena itu, dalam sistem persamaan simultan ini hubungan sebab akibat yang terjadi berlangsung dua arah. Selain itu, dalam sistem persamaan simultan terdapat lebih dari satu persamaan. Hal ini jelas berbeda dengan model persamaan tunggal yang hanya memiliki satu persamaan saja. Jumlah persamaan dalam sistem persamaan simultan tersebut adalah sama dengan jumlah variabel tak bebas (Gujarati, 1999).

2.5.1 Notasi Umum Sistem Persamaan Simultan

Secara umum, bentuk persamaan struktural sistem persamaan simultan dapat ditulis sebagai berikut (Kmenta, 1990):

$$\beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \cdots + \beta_{1M}y_{Mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \cdots + \gamma_{1K}x_{Kt} = u_{1t}$$

$$\beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \cdots + \beta_{2M}y_{Mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \cdots + \gamma_{2K}x_{Kt} = u_{2t}$$

$$\vdots \tag{2.29}$$

$$\beta_{M1}y_{1t} + \beta_{M2}y_{2t} + \cdots + \beta_{MM}y_{Mt} + \gamma_{M1}x_{1t} + \gamma_{M2}x_{2t} + \cdots + \gamma_{MK}x_{Kt} = u_{Mt}$$

Misalkan:

$$Y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_{1t}} \\ \boldsymbol{y_{2t}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_{Mt}} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{1t}} \\ \boldsymbol{x_{2t}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_{Kt}} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_{1t}} \\ \boldsymbol{u_{2t}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_{Mt}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_{11}} & \boldsymbol{\beta_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{1M}} \\ \boldsymbol{\beta_{21}} & \boldsymbol{\beta_{21}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{2M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\beta_{M1}} & \boldsymbol{\beta_{M1}} & \cdots & \boldsymbol{\beta_{MM}} \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma_{11}} & \boldsymbol{\gamma_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{1K}} \\ \boldsymbol{\gamma_{21}} & \boldsymbol{\gamma_{21}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{2K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\gamma_{M1}} & \boldsymbol{\gamma_{M1}} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_{MK}} \end{bmatrix}$$

Maka ditulis menjadi:

$$BY + \Gamma Y = U \tag{2.30}$$

Keterangan:

Y : Vektor variabel endogen berukuran *M* x 1

X : Vektor variabel *predetermined* berukuran *K* x 1

U : Vektor galat berukuran *M* x 1

B : Matriks koefisien variabel endogen berukuran *M* x *M*

Γ : Matriks koefisien variabel *predetermined* berukuran *M* x *K*

M : Banyaknya variabel endogen dalam sistem

K : Banyaknya variabel *predetermined* dalam sistem

Menurut Gujarati (1999), model sistem persamaan umum dalam M variabel endogen dapat ditulis sebagai persamaan:

$$y_{1t} = \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} + \cdots + \beta_{1M}y_{Mt} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + \cdots$$
$$+\gamma_{1K}x_{Kt} + u_{1t}$$
$$y_{2t} = \beta_{21}y_{1t} + \beta_{23}y_{3t} + \cdots + \beta_{2M}y_{Mt} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} + \cdots$$
$$+\gamma_{2K}x_{Kt} + u_{2t}$$
$$y_{3t} = \beta_{31}y_{1t} + \beta_{32}y_{2t} + \cdots + \beta_{3M}y_{Mt} + \gamma_{31}x_{1t} + \gamma_{32}x_{2t} + \cdots$$
$$+\gamma_{3K}x_{Kt} + u_{3t}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_{Mt} = \beta_{M1}y_{1t} + \beta_{M2}y_{2t} + \cdots + \beta_{M,(M-1)}y_{(M-1),t} + \gamma_{M1}x_{1t} + \gamma_{M2}x_{2t}$$
$$+ \cdots + \gamma_{Mk}x_{Kt} + u_{Mt} \qquad (2.31)$$

dimana:

$y_1, y_2, \dots y_M$: *M* variabel endogen pada sistem persamaan simultan

$x_1, x_2, \dots, x_K$: *K* variabel *predetermined*pada sistem persamaan simultan

$u_1, u_2, \dots, u_M$: *M* galat pada sistem persamaan simultan

$t = 1,2, \dots, n$: Banyaknya observasi total pada periode ke-*t*

β : Koefisien variabel endogen

γ : Koefisien variabel *predetermined*

Gujarati (1999) memberikan contoh model sistem persamaan simultan dalam 2 variabel endogen dan 1 variabel *predetermined* sebagai berikut:

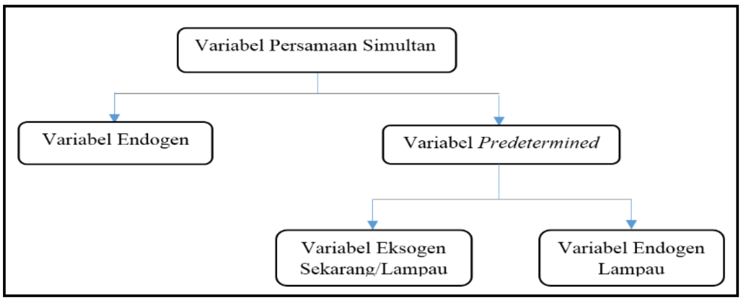
a) $y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + u_{1t}$ (2.32)

b) $y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{21}x_{1t} + u_{2t}$

$y_1$dan y_2 merupakan variabel bersifat endogen, dan x_1 merupakan variabel *predetermined* dan u_1 dan u_2 adalah variabel galat, variabel y_1 dan y_2 kedua-duanya stokastik. Oleh karena itu, dapat ditunjukkan bahwa variabel yang menjelasakan y_2 yang bersifat stokastik dalam persamaan (2.32)(a) didistribusikan secara bebas dari u_1 dan variabel yang menjelaskan y_1 yang bersifat stokastik dalam persamaan (2.32)(b) didistribusikan secara bebas dari u_2, penerapan OLS klasik untuk persamaan-persamaan ini secara individual akan membawa ke estimasi parameter yang tak konsisten.

2.5.2 Variabel Sistem Persamaan Simultan

Menurut Gujarati (1999), variabel-variabel yang masuk dalam sistem persamaan simultan ada dua jenis yaitu bersifat endogen (yaitu variabel-variabel yang nilainya ditetapkan di dalam sistem) dan ditetapkan lebih dulu (*predetermined*) (yaitu variabel-variabel yang nilainya ditetapkan di luar sistem).



Gambar 2.7 Variabel Sistem Persamaan Simultan

Variabel endogen diperlakukan sebagai variabel stokastik, dan nilai-nilainya ditentukan dengan memasukkan nilai variabel-variabel lain di dalam sistem. Variabel *predetermined* diperlakukan sebagai variabel non-stokastik yang nilai-nilainya sudah tertentu atau sudah ditentukan. Umumnya, notasi y dipakai sebagai simbol variabel endogen, sedangkan notasi x untuk variabel *predetermined* (Gujarati, 1999).

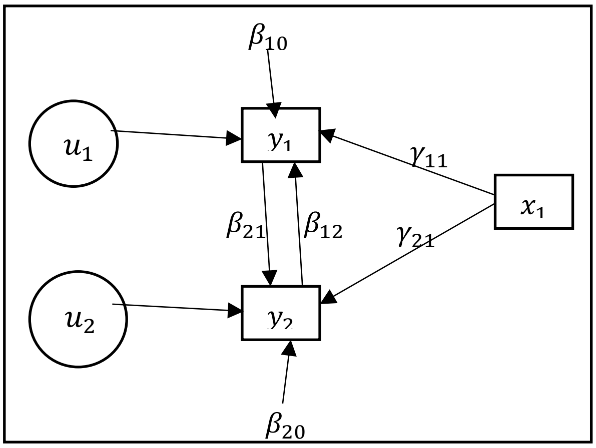
Menurut Ekananda (2015), variabel endogen adalah variabel terikat di dalam sistem persamaan simultan yang nilainya ditentukan didalam model, walaupun variabel tersebut mungkin juga muncul sebagai variabel bebas di dalam sistem persamaan simultan. Sedangkan variabel *predetermined* adalah variabel yang nilainya tidak ditentukan secara langsung di dalam model. Variabel *predetermined* dibagi menjadi dua, yaitu variabel eksogen dan variabel lag endogen. Variabel lag diasumsikan tidak ada korelasi serial dengan galat di dalam persamaan yang mengandung variabel lag tersebut.

Variabel *predetermined* digolongkan lagi menjadi dua, yaitu (Gujarati, 1999):

1. Variabel eksogen, baik yang merupakan eksogen sekarang maupun eksogen waktu lampau. Misalnya, x_t adalah variabel eksogen sekarang, dan x_{t-1} merupakan variabel eksogen waktu lampau.
2. Variabel endogen waktu lampau. Misalnya y_{t-1}.

Jadi, x, x_{t-1}, dan y_{t-1} adalah variabel *predetermined*, yang nilai-nilainya tidak ditentukan oleh sistem dalam periode waktu sekarang. Setiap variabel yang akan dipakai dalam sistem persamaan simultan terlebih dahulu harus digolong-golongkan secara jelas sebelum sampai pada langkah estimasi.

Sistem persamaan simultan pada persamaan (2.32) secara skematis dapat digambar seperti berikut (Gujarati, 1999):



Gambar 2.8 Sistem Persamaan Simultan

dimana y adalah variabel endogen, x adalah variabel *predetermined*, dan u adalah galat.

2.5.3 Masalah Identifikasi Sistem Persamaan Simultan

Gujarati (1999) mendefinisikan bahwa masalah identifikasi adalah apakah estimasi angka dari parameter persamaan struktural dapat diperoleh dari koefisien bentuk reduksi yang diestimasi. Jika hal ini dapat dilakukan, maka dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut teridentifikasi (*identified*). Jika tidak dapat dilakukan, maka dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi (*unidentified*) atau kurang teridentifikasi (*underidentified*).

Suatu sistem persamaan dikatakan *exactly identified* apabilanilai parameter yang unik dapat diperoleh, artinya hanya ada satu nilai untuk setiap koefisien parameter struktural. *Overidentified* apabila dapat diperoleh lebih dari satu nilai parameter persamaan struktural. *Under identified* apabila tidak dapat diperoleh nilai parameter persamaan struktural. *Identified* apabila mungkin untuk mendapatkan nilai parameter dari estimasi persamaan reduksi (Ekananda, 2015).

2.5.4 Aturan Identifikasi Sistem Persamaan Simultan

Menurut Sumodiningrat (1994) bahwa cara lain yang dapat dikembangkan untuk melakukan identifikasi persamaan adalah identifikasi kondisi *order* dan *rank*. Oleh karena itu, sebelum menguji kondisi identifikasi, terlebih dahulu harus dibuat kerangka bentuk umum dari sistem persamaan simultan.

Kondisi *order* dan *rank,* diberikan notasi-notasi sebagai berikut (Gujarati, 1999):

M = Banyaknya variabel endogen dalam sistem

m = Banyaknya variabel endogen dalam sebuah persamaan tertentu

K = Banyaknya variabel *predetermined* dalam sistem

k = Banyaknya variabel *predetermined* dalam sebuah persamaan tertentu.

1. Identifikasi Kondisi Order

Sumodiningrat (1994) menyatakan bahwa kondisi *order* merupakan kondisi yang diperlukan tetapi belum cukup untuk memastikan kondisi identifikasi. Kondisi *order* menyatakan bahwa syarat identifikasi dari suatu persamaan struktural adalah jumlah variabel *predetermined* dan tidak dimasukkan dalam persamaan, sekurang-kurangnya harus sebanyak jumlah variabel endogen yang terdapat dalam persamaan dikurangi satu.

Gujarati (1999) menjelaskan bahwa identifikasi terhadap kondisi *order*, dapat dinyatakan dengan dua cara yang berbeda namun merupakan cara yang sama, yaitu:

1. Sebuah model yang terdiri dari M persamaan simultan, sebuah persamaan teridentifikasi, apabila jumlah variabel yang harus dikeluarkan atau yang tidak dimasukkan, paling sedikit adalah $M - 1$ variabel, baik variabel endogen maupun variabel *predetermined* dari model itu. Jika variabel yang dikeluarkan

tepat $M-1$ variabel, maka persamaan itu tepat teridentifikasi. Tetapi, jika variabel yang dikeluarkan lebih dari $M-1$variabel, maka persamaan itu terlalu teridentifikasi.

2. Sebuah model yang terdiri dari M persamaan simultan, agar sebuah persamaan teridentifikasi, apabila jumlah variabel *predetermined* yang dikeluarkan dari persamaan itu, harus tidak lebih dari jumlah variabel endogen yang dimasukkan di dalam persamaan itu dikurangi satu, yaitu:

$$\mathrm{K}-\mathrm{k} \geq \mathrm{m}-1 \tag{2.33}$$

Jika $\mathrm{K}-\mathrm{k}=\mathrm{m}-1$, maka persamaan itu tepat, tetapi jika $\mathrm{K}-\mathrm{k}>m-1$, maka persamaan itu terlalu teridentifikasi.

Sebagai gambaran terhadap identifikasi kondisi *order* dan *rank*, anggaplah sistem persamaan simultan hipotesis berikut di bawah ini (Ekananda, 2015):

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{10}+\beta_{12}y_{2t}+\beta_{13}y_{3t}+\gamma_{11}x_{1t}+u_{1t}\\
y_{2t} &= \beta_{20}+\beta_{23}y_{3t}+\gamma_{21}x_{1t}+\gamma_{22}x_{2t}+u_{2t}\\
y_{3t} &= \beta_{30}+\beta_{31}y_{1t}+\gamma_{31}x_{1t}+\gamma_{32}x_{2t}+u_{3t}\\
y_{4t} &= \beta_{40}+\beta_{41}y_{1t}+\beta_{42}y_{2t}+\gamma_{43}x_{3t}+u_{4t}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Pertama, menentukan identifikasi sistem persamaan simultan terhadap kondisi *order* seperti tabeldibawah ini (Ekananda, 2015):

Tabel 2.1 Identifikasi Kondisi Order

No. Persamaan	$(K-k)$	$(m-1)$	Keterangan
1	$3-1=2$	$3-1=2$	Tepat
2	$3-2=1$	$2-1=1$	Tepat
3	$3-2=1$	$2-1=1$	Tepat
4	$3-1=2$	$3-1=2$	Tepat

Hasil identifikasi menunjukkan bahwa masing-masing persamaan tepat teridentifikasi.

2. Identifiksai Kondisi Rank

Suatu persamaan sudah bisa teridentifikasi menurut kondisi *order*, tetapi bisa saja terjadi bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi jika diuji dengan kondisi *rank* (Sumodiningrat, 1994). Kriteria identifikasi yang ke dua adalah kriteria kondisi *rank*. Istilah tingkat (*rank*) berkenaan dengan *rank* suatu matriks dan diberikan oleh ordo terbesar matriks bujur sangkar yang determinannya tidak nol. Secara alternatif tingkat suatu matriks adalah jumah terbesar dari kolom yang secara linier bebas dari matriks itu (Ekananda, 2015).

Sebuah sistem persamaan simultan yang terdiri dari M persamaan dengan M variabel endogen, suatu persamaan dikatakan teridentifikasi jika dan hanya jika paling sedikit ada satu determinan tidak nol. Determinan tersebut adalah determinan dari suatu susunan matriks berukuran $(\mathrm{M}-1)\ \mathrm{x}\ (\mathrm{M}-1)$ yang dapat dibentuk melalui koefisien-koefisien variabel, baik endogen maupun *predetermined*, yang tidak tercakup di dalam persamaan tertentu namun tercakup di dalam persamaan-persamaan yang lain di dalam model itu (Gujarati, 1999).

Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam menentukan kondisi *rank* adalah sebagai berikut (Gujarati, 1999):

1. Tuliskan sistem persamaan simultan dalam suatu bentuk tabel.
2. Coret koefisien-koefisien pada baris yang muncul di dalam persamaan yang sedang diidentifikasi.
3. Coret kolom yang sesuai dengan koefisien yang terdapat dalam langkah 2 yang tidak sama dengan nol.

4. Catat angka yang tertinggal dalam tabel kemudian akan diketahui koefisien dari variabel yang dimasukkan dalam sistem persamaan tetapi tidak dalam persamaan yang sedang diidentifikasi. Dari catatan ini, bentuklah semua matriks (seperti matriks A), dari ordo $M - 1$ dan dapatkan determinan yang bersangkutan. Jika sekurang-kurangnya satu determinan yang tidak nol dapat diperoleh, persamaan yang diidentifikasi adalah (tepat atau terlalu) teridentifikasi. *Rank* dari matriks A, dalam kasus ini adalah tepat sama dengan $M - 1$. Jika semua determinan $(M - 1) \times (M - 1)$ yang mungin adalah nol, *rank* dari matriks A adalah kurang dari $(M - 1)$, maka persamaan yang diidentifikasi adalah tidak teridentifikasi.

Berdasarkan pembahasan pada identifikasi terhadap kondisi *order* dan *rank* di atas, maka dapat disimpulkan mengenai prinsip-prinsip identifikasi sebuah persamaan struktural dalam suatu sistem persamaan simultan, yaitu (Gujarati, 1999):

1. Jika $\mathrm{K} - \mathrm{k} > m - 1$ dan *rank* dari matriks A adalah $\mathrm{M} - 1$, maka persamaan itu terlalu teridentifikasi.
2. Jika $\mathrm{K} - \mathrm{k} = \mathrm{m} - 1$ dan *rank* dari matriks A adalah $\mathrm{M} - 1$, maka persamaan itu tepat teridentifikasi.
3. Jika $\mathrm{K} - \mathrm{k} \geq \mathrm{m} - 1$ dan *rank* dari matriks A lebih kecil dari pada $\mathrm{M} - 1$, maka persamaan itu kurang teridentifikasi.
4. Jika $\mathrm{K} - \mathrm{k} < m - 1$ dan *rank* dari matriks A lebih kecil dari pada $\mathrm{M} - 1$, maka persamaan itu tidak teridentifikasi.

Menurut Maddala (2009) menyatakan bahwa ada cara yang lebih praktis untuk melihat kondisi identifikasi pada persamaan simultan. Misalkan pada persamaan simultan tertentu yang terdiri dari 3 persamaan. y_1, y_2, dan y_3 sebagai variabel endogen, sedangkan x_1, x_2, dan x_3 sebagai variabel *predetermined*. Untuk melihat kondisi identifikasi maka dibuat sebuah tabel sebagai berikut:

Tabel 2.2 Koefisien - Koefisien Identifikasi Kondisi Rank

Pers.	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3
1	√	0	√	√	0	√
2	√	0	0	√	0	√
3	0	√	√	√	√	0

Tanda 0 berarti variabel pada kolom tidak terdapat pada persamaan baris, sedangkan tanda √ berarti variabel pada kolom terdapat pada persamaan baris.

Sebuah persamaan dikatakan *over identified* bila banyaknya tanda $0 > (m - 1)$, sedangkan persamaan dikatakan *exactly identified* bila banyaknya tanda $0 = (m - 1)$, dan persamaan dikatakan *under identified* bila banyaknya tanda $0 < (m - 1)$ (Maddala, 2009).

Untuk menyelediki kondisi *rank*, sistempersamaan simultan (2.34) harus diubah kedalam bentuk struktural sebagai berikut (Ekananda, 2015):

$$\begin{aligned}
-\beta_{10} + y_{1t} - \beta_{12}y_{2t} - \beta_{13}y_{3t} - \gamma_{11}x_{1t} &= u_{1t} \\
-\beta_{20} + y_{2t} - \beta_{23}y_{3t} - \gamma_{21}x_{1t} - \gamma_{22}x_{2t} &= u_{2t} \\
-\beta_{30} - \beta_{31}y_{1t} + y_{3t} - \gamma_{31}x_{1t} - \gamma_{32}x_{2t} &= u_{3t} \\
-\beta_{40} - \beta_{41}y_{1t} - \beta_{42}y_{2t} + y_{4t} - \gamma_{43}x_{3t} &= u_{4t}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Untuk memudahkan identifikasi, tuliskan bentuk struktural sistem persamaan simultan tersebut ke dalam sebuah tabel berikut (Ekananda, 2015):

Tabel 2.3 Koefisien-Koefisien Persamaan Struktural

Koefisien-koefisien								
No.	C	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
1	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$	0	$-\gamma_{11}$	0	0
2	$-\beta_{20}$	0	1	$-\beta_{23}$	0	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0
3	$-\beta_{30}$	$-\beta_{31}$	0	1	0	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	0
4	$-\beta_{40}$	$-\beta_{41}$	$-\beta_{42}$	0	1	0	0	$-\gamma_{43}$

Perhatikan persamaan pertama, tidak memasukkan variabel y_4, x_2 dan x_3 (ini dinyatakan dengan 0 dalam baris pertama pada tabel 2.3 Diketahui dari sistem persamaan simultan di atas bahwa $M = 4$. Agar persamaan ini dapat teridentifikasi, harus didapatkan sekurang-kurangnya satu determinan tidak nol dari ordo 3 x 3 (diperoleh dari $(M-1)(\ M-1)$) dari koefisien variabel yang tidak dimasukkan dalam persamaan ini, tetapi dimasukkan di dalam persamaan lain. Untuk mendapatkan determinan, mula-mula cari matriks yang relevan dari koefisien variabel y_4, x_2 dan x_3 yang dimasukkan di dalam persamaan lain. Dalam kasus ini, hanya ada matriks yang didefinisikan sebagai berikut(Ekananda, 2015):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{22}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{32}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{43}} \end{bmatrix}$$

Dapat dihitung bahwa determinan dari matriks ini adalah:

$$\det(A) = (0)(-\gamma_{32})(-\gamma_{43}) + (-\gamma_{22})(0)(1) + (0)(0)(0) -$$
$$(1)(-\gamma_{32})(0) - (0)(0)(0) - (-\gamma_{43})(0)(-\gamma_{22})$$
$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0$$
$$= 0$$

Jika $\det(A) = 0$, maka $rank(A)$ adalah kurang dari 3. Oleh karena itu, jika persamaan pertama tidak memenuhi kondisi *rank*, maka dikatakan bahwa persamaan pertama tidak teridentifikasi.

Meskipun kondisi *order* menunjukkan persamaan pertama teridentifikasi, akan tetapi kondisi *rank* menunjukkan bahwa persamaan pertama tidak teridentifikasi. Ternyata, kolom atau baris dari matriks A tidak bebas secara linier, berarti bahwa ada suatu hubungan antara variabel-variabel y_4, x_2 dan x_3. Sebagai hasilnya, mungkin tidak mempunyai cukup informasi untuk mengestimasi parameter dari persamaan pertama, persamaan bentuk reduksi untuk model tadi akan menunjukkan bahwa tidak mungkin untuk mendapatkan koefisien struktural dari persamaan pertama dari koefisien bentuk reduksi (Gujarati, 1999).

Persamaan kedua dan ketiga juga tidak memenuhi kondisi *rank*, sehingga belum bisa dikatakan teridentifikasi, meskipun sudah memenuhi kondisi *order*. Perhatikan persamaan keempat, variabel y_3, x_1 dan x_2 tidak terkandung di dalamnya. Menurut kondisi *rank* harus ada sekurang-kurangnya satu determinan tidak sama dengan nol yang berdimensi 3 dari matriks koefisien variabel-variabel y_3, x_1 dan x_2 pada persamaan pertama, kedua, dan ketiga. Matriks tersebut katakanlah matriks B sebagai berikut (Ekananda, 2015):

$$B = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\beta_{13}} & -\boldsymbol{\gamma_{11}} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\beta_{23}} & -\boldsymbol{\gamma_{21}} & -\boldsymbol{\gamma_{22}} \\ \mathbf{1} & -\boldsymbol{\gamma_{31}} & -\boldsymbol{\gamma_{32}} \end{bmatrix}$$

Dapat dihitung bahwa determinan dari matriks ini adalah:

$$\det(B) = (-\beta_{13})(-\gamma_{21})(-\gamma_{32}) + (-\gamma_{11})(-\gamma_{22})(1) + (0)(-\beta_{23})(-\gamma_{31}) -$$

$$(1)(-\gamma_{21})(0) - (-\gamma_{31})(-\gamma_{22})(-\beta_{13}) - (-\gamma_{32})(-\beta_{23})(-\gamma_{11})$$

$$= -\beta_{13}\gamma_{21}\gamma_{32} + \gamma_{11}\gamma_{22}1 + \gamma_{31}\gamma_{22}\beta_{13} + \gamma_{32}\beta_{23}\gamma_{11}$$

$$\neq 0$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka$rank(A)$adalah sama dengan 3. Oleh karena itu, jika persamaan keempat memenuhi kondisi *order* dan *rank*, maka persamaan keempat tepat teridentifikasi.

Selanjutnya, menentukan hasil identifikasi terhadap kondisi *order* dan *rank* sepertitabel dibawah ini (Ekananda, 2015):

Tabel 2.4 Hasil Identifikasi Kondisi Order dan Rank

No.	$(K-k)$	$(m-1)$	Identifikasi *Order*	Identifikasi *Rank*	Kesimpulan
1	$3-1=2$	$3-1=2$	Tepat	*Rank* <$M-1=3$	Tidak Teridentifikasi
2	$3-2=1$	$2-1=1$	Tepat	*Rank* <$M-1=3$	Tidak Teridentifikasi
3	$3-2=1$	$2-1=1$	Tepat	*Rank* <$M-1=3$	Tidak Teridentifikasi
4	$3-1=2$	$3-1=2$	Tepat	*Rank* =$M-1=3$	Tepat Teridentifikasi

Parameter-parameter persamaan struktural dapat diestimasi jika persamaan tersebut dalam kondisi tepat atau terlalu teridentifikasi. Jika persamaan struktural dalam kondisi kurang atau tidak teridentifikasi, makatidak pernah dapat diestimasi(Sumodiningrat, 1994).

2.5.5 Metode Estimasi Sistem Persamaan Simultan

Menurut Gujarati (1999) menyatakan bahwa jika model M persamaan umum dalam M variabel endogen yang diberikan dalam persamaan(2.31) dapat menggunakan dua pendekatan untuk mengestimasi persamaan yaitu metode persamaan tunggal dan metode sistem.

1. Metode Persamaan Tunggal

Metode yang mengestimasi setiap persamaan dalam sistem persamaan simultan secara individual dengan memperhitungkan setiap pembatasan yang ditempatkan pada persamaan itu (seperti tidak dimasukkannya beberapa variabel), tanpa mengkhawatirkan mengenai pembatasan atas persamaan lain dalam sistem. Karena itu, disebut metode informasi terbatas(Gujarati, 1999).

Terdapat beberapa metode yang termasuk dalam metode persamaan tunggal ini, yaitu (Kmenta, 1990):

a. Kuadrat terkecil tak langsung (*IndirectLeastSquare* / ILS)
b. Kuadrat terkecil dua tahap (*Two Stage Least Square* / 2SLS)
c. Penduga *k*-kelas (*k-class Estimators*)
d. Metode informasi terbatas kemungkinan terbesar (*Limited Information Maximum Likelihood* / LIML)

2. Metode Sistem

Metode yang mengestimasi semua persamaan dalam model secara simultan, dengan memperhitungkan semua pembatasan pada persamaan tadi dengan mengabaikan atau tidak adanya beberapa variabel (Gujarati, 1999).

Terdapat beberapa metode yang termasuk dalam metode sistem ini, yaitu (Kmenta, 1990):

a. Kuadrat terkecil tiga tahap (*Three Stage Least Squares* / 3SLS)
b. Informasi penuh kemungkinan terbesar (*Full Information Maximum Likelihood* / FIML).

Jika model persamaan simultan tepat teridentifikasi maka persamaan terebut dapat diestimasi dengan menggunakan ILS, tetapi jika menghasilkan identifikasi yang berlebih, maka metode tersebut tidak tepat lagi karena dengan menggunakan metode ILS akan memberikan taksiran majemuk dalam persamaan yang teralu didentifikasi, dan biasanya diestimasi dengan menggunakan 2SLS, 3SLS, LIML, FIML, dan GLS (Ekananda, 2015).

2.6 Estimasi Parameter

2.6.1 Definisi Estimasi Parameter

Estimasi adalah proses yang menggunakan sampel (statistik) untuk mengestimasi hubungan parameter dengan populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan dari sampel, dalam hal ini peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002).

Murray dan Larry (1999) menyatakan terdapat dua jenis estimasi parameter, yaitu:

1. Estimasi titik

   Estimasi dari sebuah parameter populasi yang dinyatakan oleh bilangan tunggal disebut sebagai estimasi titik dari parameter tersebut. Sebuahnilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai estimasi dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari X, maka statistik yangberkaitan dengan θ dinamakan estimasi dari θ. Setelah sampel diambil,nilai-nilai yang dihitung dari sampel itu digunakan sebagai taksiran titikbagi θ.Menurut Sumodiningrat (1994) bahwa tujuan penaksir titik adalah untuk mendapatkan nilai tunggal yang merupakan taksiran terbaik bagi parameter yang di selidiki.

2. Estimasi Interval

Estimasi dari parameter populasi yang dinyatakan dengan dua buah bilangan. diantara posisi parameternya diperkirakan berbeda disebutestimasi interval. Estimasi interval mengindikasikan tingkat kepresisianatau akurasi dari sebuah estimasi sehingga estimasi interval akandianggap semakin baik jika mendekati estimasi titik.Menurut Sumodiningrat (1994) bahwa tujuan penaksir interval adalah untuk mendapatkan nilai parameter yang sebenarnya terletak antara batas bawah dan batas atas suatu interval.

2.6.2 Metode *Maximum Likelihood*

Estimasi parameter*maximum likelihood* adalah menentukan parameter sedemikian sehingga jumlah probabilitas paling besar. Metode yang diperkenalkan disini menggunakan distribusi normal pada *maximum likelihood,* yang akan dijelaskan sebagai berikut. Jika pada distribusi normal, fungsi distribusi (*probability distribution function*- PDF) dinyatakan dengan (Ekananda, 2015):

$$\begin{aligned} f(x|\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] \end{aligned} \tag{2.36}$$

dimana μ adalah rata-rata,x adalah data, dan σ adalah standart deviasi.

Menurut persamaan (2.24), misalkan X_i vektor $1 \times (k+1)$, untuk $i = 1,2,\dots,n$. Maka $y_i = X_i\beta + u_i$ sehingga$y_i \sim N(X_i\beta, \sigma^2)$. Jika diberikan X_i, β dan σ^2 dan diasumsikan bahwa $y_1, y_2, \cdots, y_n$ saling bebas, maka fungsidistribusi peluang dari $y_i$adalah (Aziz, 2010):

$$f(y_i|X_i\beta,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - X_i\beta)^2\right] \quad (2.37)$$

dimana $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)$ sehingga fungsi distribusi peluang gabungan dari y adalah(Aziz, 2010):

$$\begin{aligned}
f(y|X,\beta,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= \left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i\beta)^2\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}u'u\right] \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right] \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Karena nilai β dan σ^2 tidak diketahui tetapi nilai data X dan y sudah diketahui maka persamaan di atas menjadi fungsi *likelihood* sebagai berikut(Aziz, 2010):

$$l(\beta,\sigma^2|X,y) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right] \quad (2.39)$$

Untuk mempermudah perhitungan nilai turunan dari fungsi *likelihood* maka fungsi *likelihood* akan diubah ke bentuk logaritma. Sehingga fungsi *log-likelihood*-nya adalah(Aziz, 2010):

$$L = \ln l = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y' - \beta'X')(y - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta) \qquad (2.40)$$

Untuk mengestimasi parameterβ yaitu dengan cara mendeferensialkan fungsi *log-likelihood* terhadap β:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + (\beta'X'X)')$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + X'X\beta)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + 2X'X\beta)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta)$$

Kemudian disama dengankan 0:

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(X'y) - \frac{1}{\sigma^2}(X'X\beta)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}(X'X\beta) = \frac{1}{\sigma^2}(X'y)$$

$$(X'X\beta) = X'y$$

$$(X'X)^{-1}(X'X)\beta = (X'X)^{-1}X'y$$

$$I\beta = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Jadi estimasi parameter dari β adalah (Aziz, 2010):

$$\hat{\beta}_{ml} = (X'X)^{-1}X'y \qquad (2.41)$$

Sedangkan turunan kedua dari β selalu bernilai negatif yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\beta'\partial\beta} = -\frac{X'X}{\sigma^2} \qquad (2.42)$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa turunan kedua β merupakan matriks definit negatif, sehingga β merupakan nilai yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* (Aziz, 2010).

2.6.3 Metode Full *Maximum Likelihood*

Metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML) adalah metode sistem yang diaplikasikan pada seluruh persamaan model dan menghasilkan penaksiran dari seluruh parameter struktural secara bersama sama. Dengan metode ini persamaan struktural pada model persamaan simultan tidak lagi dipandang secara terpisah pisah seperti model informasi terbatas (*limited information*), namun persamaan dipandang sebagai suatu kesatuan dan berhubungan satu dengan yang lainnya. Penggunaan metode FIML diterpkan, jika pengujian kondisi orde dan kondisi rank merupakan persamaan yang terlalu teridentifikasi (*overidentified*) (Koutsoyiannis, 1977).

Notasi umum bentuk persamaan structural dari M persamaan simultan adalah

$$Y= By+Tx+U \tag{2.43}$$

dimana:

Y : Vektor variabel endogen yang berukuran Mx1

X : Vektor variabel predetermine yang berukuran Kx1

U : Vektor variabel galat acak yang berukuran Mx1

T : Matriks koefisien variabel endogen yang tidak diketahui berukuran MxM

B : Matriks koefisien variabel predetermine yang tidak diketahui berukuran KxM

Bentuk persamaan persamaan structural diatas dapat dituliskan sebagai :

$$y_i = Y_i\beta_i + X_i\gamma_i + u_i \tag{2.44}$$

dengan i= 1,2,…, M

Persamaan diatas dapat dituliskan Kembali kedalam bentuk lain menjadi :

$$y_i = (Y_i \quad X_i)\begin{pmatrix}\beta_i \\ \gamma_i\end{pmatrix} + u_i \tag{2.45}$$

$y_i = Z_i\beta_i + u_i$, dimana i= 1,2, … , M

$$Z_i = (Y_i \quad X_i) \tag{2.46}$$

$$\beta_i = \begin{pmatrix}\beta_i \\ \gamma_i\end{pmatrix} \tag{2.47}$$

dimana :

y_i : Variabel endogen yang terdapat dalam persamaan ke i

Y_i : Variabel endogen lainnya yang menjadi variabel penjelas pada persamaan ke i

X_i : Veriabel predetermine yang terdapat dalam persamaan ke i

γ_i : Parameter variabel endogen yang terdapat dalam persamaan ke i

β_i : Parameter variabel predetermine yang terdapat dalam persamaan ke i

u_i : galat yang terdapat dalam persamaan ke i

Persamaan dapat ditulis untuk keseluruhan model sebagai berikut :

$$y = Z\beta + u \tag{2.48}$$

denngan :

$$\mathrm{y}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_M} \end{bmatrix} \quad \mathrm{Z}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z_1} \\ \boldsymbol{Z_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z_M} \end{bmatrix} \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta_1} \\ \boldsymbol{\beta_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta_M} \end{bmatrix} \quad \mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_M} \end{bmatrix}$$

dan vektor skokastik galat u untuk semua persamaan yaitu :

$$E[\boldsymbol{u_i}] = 0, i = 1,2, \dots, M$$

sehingga

$$\mathrm{E}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E(u_1)} \\ \boldsymbol{E(u_2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{E(u_M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

atau $\mathrm{E}[u] = 0$.

Matriks varian – Kovarian :

$$var - cov(u) = E(uu') = E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{u_N} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \vdots \\ \mathbf{u_N} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_{11}I} & \boldsymbol{\sigma_{21}I} & \cdots & \boldsymbol{\sigma_{n1}I} \\ \boldsymbol{\sigma_{12}I} & \boldsymbol{\sigma_{22}I} & \cdots & \boldsymbol{\sigma_{n1}I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\sigma_{1n}I} & \boldsymbol{\sigma_{2n}I} & \cdots & \boldsymbol{\sigma_{nn}I} \end{bmatrix} = \Sigma$$

dengan i = 1,2, ... , M

Berdasarkan diatas, metode FIML digunakan untuk menaksir kasus dimana variabel acak dari galat persamaan struktural adalah berdistribusi normal.

$$u \sim N(0, \Sigma)$$

Langkah langkah penaksiran menggunakan metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML) sebagai berikut (Basuki, 2013) :

1. Formulasikan fungsi kemungkinan (*likelihood function*) untuk variabel acak u dari seluruh persamaan struktural.

   Fungsi kepadatan peluang dari u yaitu $u_1, u_2, \dots, u_N$

$$f(u_1) = (2\pi(\Sigma))^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2(\Sigma)})(y - Z\beta)^2$$

$$f(u_2) = (2\pi(\Sigma))^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2(\Sigma)})(y - Z\beta)^2$$

$$\vdots$$

$$f(u_N) = (2\pi(\Sigma))^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2(\Sigma)})(y - Z\beta)^2$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1})(u_M)^2$$

Fungsi kedapatan peluang u yaitu $u_1, u_2, \dots, u_N$ dari N persamaan simultan adalah

$$f(u_1, u_2, \dots, u_N) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1})(u)^2$$

$$f(u) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(u)^2 \qquad (2.49)$$

2. Mengaplikasikan aturan tranformasi untuk mendapatkan fungsi kemungkinan variabel endogen y dari fungsi kemungkinan variabel endogen y dari fungsi kemungkinan dari galat acak u. Dengan cara menghitung deterinan Jacobian untuk u dari seluruh persamaa truktural.

$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ menyatakan nilai absolute dari bentuk determinan dari matriks turunan parsial yang diselesaikan untuk u yang berkaitan dengan variabel endogen y.

$$f(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u_1}}{\partial \boldsymbol{y_1}} & \frac{\partial \boldsymbol{u_1}}{\partial \boldsymbol{y_2}} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{u_1}}{\partial \boldsymbol{y_n}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{u_2}}{\partial \boldsymbol{y_1}} & \frac{\partial \boldsymbol{u_2}}{\partial \boldsymbol{y_2}} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{u_2}}{\partial \boldsymbol{y_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{u_n}}{\partial \boldsymbol{y_1}} & \frac{\partial \boldsymbol{u_n}}{\partial \boldsymbol{y_2}} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{u_n}}{\partial \boldsymbol{y_n}} \end{bmatrix}$$

$$f(y) = f(u)\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|$$

dimana $\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|=|\Gamma|$

Lalu subtitusikan persamaan (2.8) kedalam persamaan (2.10) serta $\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|=|\Gamma|$ maka diperoleh

$$f(y\ ) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1})(u)^2\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|$$

$$f(y) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}|\Gamma|\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1})(u)^2$$

Fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dari sampel acak berukuran n adalah

$$L(y) = \prod_{1}^{n}\left((2\pi)^{-\frac{N}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}|\Gamma|\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1})(u)^2\right)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}}(\Sigma)^{\frac{n}{2}}|\Gamma|^n\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(u)^2)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}}(\Sigma)^{\frac{n}{2}}|\Gamma|^n\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}(u'u)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}}(\Sigma)^{\frac{n}{2}}|\Gamma|^n\exp(-\frac{1}{2}u'(\Sigma)^{-1}u$$

$$= (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}}(\Sigma)^{\frac{n}{2}}|\Gamma|^n\exp\left(-\frac{1}{2}(y-Z\beta)'(\Sigma)^{-1}(y-Z\beta)\right)$$

Fungsi kemungkinan L(y) diberi ln, agar memudahkan perhitungan, sehingga logaritma fungsi kemungkinan adalah :

$$LnL(y) = -\frac{Nn}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\Sigma) + n|\Gamma| - \frac{1}{2}(y - Z\beta)'(\Sigma)^{-1}(y - Z\beta) \qquad (2.50)$$

3. Memaksimumkan *likelihood function* dengan cara turunan parsial dari fungsi kemungkinan terhadap parameter struktural.

$$\frac{\partial lnL(y)}{\partial\beta} = -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(2Z'y + 2Z'\beta Z)$$

$$= -\Sigma^{-1}(Z'y + Z'\beta Z)$$

$$= -\frac{n}{2}\Sigma^{-1} + \frac{1}{2}\Sigma^{-2}(y - Z\beta)'(y - Z\beta) \qquad (2.51)$$

4. Menyamadengankan nol turunan parsial dari *likelihood function*dan solusikan hasil dari persamaan untuk parameter struktural sehingga diperoleh penaksir yang memaksimumkan *likelihood function.*)

$$-\Sigma^{-1}(Z'y + Z'\beta Z) = 0$$

$$= -\frac{n}{2}\Sigma^{-1} + \frac{1}{2}\Sigma^{-2}(y - Z\beta)'(y - Z\beta) = 0$$

Dengan asumsi Z matriks nonsingular, maka ada $(Z'Z)^{-1}$

$$(Z'y + Z'\beta Z) = 0$$

$$Z'Z\beta = Z'y$$

$$(Z'Z)^{-1}Z'Z\beta = (Z'Z)^{-1}Z'y$$

$$\beta = (Z'Z)^{-1}Z'y$$

$$-\frac{n}{2}\Sigma^{-1} + \frac{1}{2}\Sigma^{-2}(y - Z\beta)'(y - Z\beta) = 0$$

$$\Sigma = \frac{1}{n}(y - Z\beta)'(y - Z\beta)$$

Sehingga diperoleh $\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'y$

$$\Sigma = \frac{1}{n}(y - Z\beta)'(y - Z\beta)$$

dengan $Z = [\boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{X}]$ dan $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = (Z'Z)^{-1}Z'y \tag{2.52}$$

dan $\hat{\beta}$ merupakan penaksiran dari FIML

2.6.4 Sifat- Sifat Estimasi Parameter

1. Tidak Bias (*Unibiasedness*)

Satu hal yang menjadi tujuan dalam estimasi adalah estimator harusmendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diestimasi tersebut.Misalkan terdapat parameter θ. Yusuf Wibisono (2005) menyatakan bahwa estimator tak bias bagi parameter θ, jika:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

dan dikatakan estimator bias bagi parameter θ, jika:

$$E(\hat{\theta}) \neq \theta$$

Namun estimator bias dapat diubah menjadi estimator tak bias jika ruaskanan dikalikan atau ditambahkan dengan konstanta tertentu.

2. Konsisten

Gujarati (2007) menerangkan bahwa penaksirparameter$\hat{\theta}$ dikatakan konsisten bila nilai nilainya mendekati nilaiparameter yang sebenarnya meskipun ukuran sampelnya semakin besar.Suatu statistik $\hat{\theta}$disebut penaksir yang konsisten untuk parameter θ jika dan hanya jika $\hat{\theta}$ konvergen dalam probabilitas ke parameter θ atau

$$\text{plim}\ \hat{\theta} = \theta$$

Jika $\hat{\theta}_n$adalah penaksir untuk θ yang didasarkan pada sampel acakberukuran n, maka $\hat{\theta}_n$dikatakan konsisten bagi parameter θ, jika

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon = 1\right)$$

Penentuan penaksir konsisten ini dapat dilakukan dengan menggunakan ketidaksamaan Chebyshev's

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < k\sigma \geq 1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

3. Efisiensi

Jika distribusi sampling dari dua statistik memiliki mean ataueekspektasi yang sama, maka statistik dengan varians yang lebih kecildisebut sebagai estimator efisien dari mean, sementara statistik yang laindisebut estimator tak efisien. Adapun nilai-nilai yang berkorespondensidengan statistik-statistik ini masing-masing disebut sebagai estimasiefisien dan estimasi tak efisien (Sarwoko,2005).

Jika $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ adalah dua estimasi tak bias dari θ, dan varian $\hat{\theta}_1$ lebih kecil atau sama dengan varian $\hat{\theta}_2$, maka $\hat{\theta}_1$ dikatakan estimasi varian minimum tak bias atau penafsir efisien. Dapat dinyatakan dengan:

$$var\hat{\theta}_1 \leq var\ \hat{\theta}_2$$

2.7 Produk Domsitik Regional Bruto

Kuncoro (2014) menjelaskan bahwa Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) adalah jumlah nilai tambah bruto yang muncul dari seluruhsektor perekonomian diseluruh wilayah. Nilai tambah adalah nilai yang ditambahkan darikombinasi faktor produksi bahan baku dalam proses produksi dikurangi biaya. PDRB digunakan untuk berbagai tujuan tetapi yang terpenting adalah untuk mengukur kinerja keseluruhan.

Untuk menghitung angka-angka PDRB ada tiga pendekatan yang dapat digunakan dan dijelaskan berikut ini (Kuncoro, 2014):

a. Pendekatan produksi

Pendekatan produksi produk nasional atau produk domestik bruto diperoleh dengan menjumlahkan nilai pasar dari seluruh barang dan jasa yang dihasilkan oleh berbagai sektor dalam perekonomian. PDRB adalah jumlah nilai tambah atas barang dan jasa yang dihasilkan oleh berbagai unit produksi di suatu wilayah daerah dalam jangka waktu tertentu (biasanya satu tahun).

b. Pendekatan pendapatan

Pendekatan pendapatan adalah suatu pendekatan pendapatan nasional yang diperoleh dengan cara menjumlahkan pendapatan dari berbagi dari faktor produksi yang menyumbang terhadap proses produksi.

c. Pendekatan pengeluaran

Pendekatan pengeluaran adalah pendekatan pendapatan nasional atau produk domestik regional bruto yang diperoleh dengan cara menjumlahkan nilai pasar dari seluruh pemintaan akhir atas output yang dihasilkan dalam perekonomian, diukur pada harga pasar yang berlaku. Dengan kata lain, produk nasional atau produk domestik regional bruto adalah penjumlahan nilai pasar dari permintaan sektor rumah tangga untuk barang-barang konsumsi dan jasa-jasa (C), permintaan sektor bisnis barang-barang investasi (I), pengeluaran pemerintah untuk barang-barangdan jasa-jasa (G), dan pengeluaran sektor luar negeri untuk kegiatan ekspor dan impor $(X - M)$.

2.8 Pertumbuhan Ekonomia

Menurut Adisasmita (2013) bahwa pertumbuhan ekonomi merupakan masalah perekonomian dalam jangka panjang pada suatu daerah dan merupakan fenomena penting yang dialami dunia pada dua abad belakangan ini. Pertumbuhan ekonomi juga berhubungan dengan proses peningkatan produksi barang dan jasa dalam kegiatan ekonomi masyarakat. Dapat dikatakan, bahwa pertumbuhan menyangkut perkembangan yang berdimensi tunggal dan diukur dengan meningkatnya hasil produksi dan pendapatan. Dalam hal ini berarti terdapatnya kenaikan dalam pendapatan daerah yang ditunjukkan oleh besarnya nilai PDRB.

Masalah pertumbuhan ekonomi disuatu daerah disebabkan karena banyak faktor, seperti kebijakan pemerintah itu sendiri. Ini harus dikenali dandiidentifikasi secara tepat supaya faktor tersebut dapat mempengaruhi laju pertumbuhan ekonomi. Pertumbuhan ekonomi suatu daerah dapat diukur dengan melihat PDRB dan laju pertumbuhannya atas dasar harga konstan. Pertumbuhan ekonomi yang cepat akanberdampak terhadap ketimpangan dalam distribusi pendapatan. Pada dasarnya, pertumbuhan ekonomi diartikan sebagai suatu proses pertumbuhan output perkapita dalam jangka panjang. Hal ini berarti, bahwa dalam jangka panjang, kesejahteraan tercermin pada peningkatan output perkapita yang sekaligus memberikan banyak alternatif dalam mengkonsumsi barang dan jasa, serta diikuti oleh daya beli masyarakat yang semakin meningkat (Adisasmita, 2013).

2.9 Penelitian Terdahulu

Penelitian ini mengacu pada penelitian sebelumnya oleh Ghofur (2018) yang berjudul "Penerapan *Metode Limited Information Maximum Likelihood* Pada sistem persamaah simultan". Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder tahunan yang diperoleh dari BPS Indonesia pada tahun 2000-2013. Variabel yang digunakan pada penelitian ini ada dua, yaitu variabel endogen dan variabel *predetermined*. Variabel endogenmeliputi PDRB (y_{1t}) dan pertumbuhan ekonomi (y_{2t}). Sedangkan variabel *predetermined* meliputi ekspor(x_{1t}), impor(x_{2t}), pengangguran(x_{3t}), dan kepadatan penduduk(x_{4t}).

Model persamaan simultan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t} \\ &\text{b)}\ \ y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + \gamma_{24}x_{4t} + u_{2t} \end{aligned} \tag{2.53}$$

Persamaan (2.53) keduanya merupakan persamaan yang *overidentified* sehingga bisa menggunakan metode *FIML*.

Penelitian tersebut menyatakan bahwa estimasi dengan metode 2SLS menghasilkan model sistem persamaan simultan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 11.023 - 0.021\,y_{2t} + 0.003\,x_{1t} - 0.311\,x_{2t} \\ y_{2t} &= -76.225 + 5.392\,y_{1t} + 0.509\,x_{3t} - 0.007\,x_{4t} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Hasil estimasi menunjukkan bahwa dengan menggunakan $a = 0.05$ dalam persamaan pertama, pengaruh dalam model persamaan PDRB dapat dijelaskan oleh variabel kemiskinan, ekspor, dan impor sebesar 86% sedangkan 14% dipengaruhi oleh faktor lain. Koefisien determinasi menunjukkan bahwa pengaruh dalam model persamaan kemiskinan dapat dijelaskan oleh variabel PDRB, tingkat pengangguran, dan kepadatan penduduk secara bersama-sama sebesar 80% sedangkan 20% dipengaruhi oleh faktor lain.

2.10 Kajian Estimasi Parameter Dalam Islam

اِنْ اَحْسَنْتُمْ اَحْسَنْتُمْ لِاَنْفُسِكُمْ ۗوَاِنْ اَسَأْتُمْ فَلَهَاۗ فَاِذَا جَاۤءَ وَعْدُ الْاٰخِرَةِ لِيَسُـٗۤـْٔوْا وُجُوْهَكُمْ
وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوْهُ اَوَّلَ مَرَّةٍ وَّلِيُتَبِّرُوْا مَا عَلَوْا تَتْبِيْرًا

Artinya : "*Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai.*" (Q.S. Al-Isra'/17:7).

Menurut Tafsir Al-Muyassar Kementerian Agama Saudi Arabia Wahai Bani Israil! Seandainya kalian memperbaiki amalan kalian, dan mengerjakannya sesuai tata cara yang diperintahkan, niscaya ganjaran amalan tersebut pasti kembali pada diri kalian, sebab Allah tidak membutuhkan amalan-amalan tersebut. Sebaliknya, andai kalian berbuat keburukan maka balasannya juga akan kembali kepada kalian, sebab kebaikan amalan kalian sama sekali tidaklah memberikan manfaat kepada Allah, dan keburukan kalian tidak pula mendatangkan kerugian bagi-Nya. Apabila masa kerusakan yang kedua telah tiba, Kami akan memberikan kekuasaan pada musuh-musuh kalian agar merendahkan, menginjak-injak harga diri dan menyuramkan wajah kalian dengan menimpakan atas kalian ragam penghinaan dan siksa. Mereka juga pasti akan memasuki Baitul Maqdis lalu menghancurkannya sebagaimana yang mereka lakukan pada penguasaan mereka yang pertama, lalu menghancurkan semua negeri yang mereka kuasai secara menyeluruh (Katsir,2017).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur dan deskriptif kuantitatif. Pada studi literatur yaitu dengan mengumpulkan bahan-bahan pustaka yang dibutuhkan oleh peneliti sebagai acuan dalam menyelesaikan penelitian. Sedangkan pendekatan deskriptif kuantitatif yaitu dengan menganalisis data sekunder yang sesuai dengan kebutuhan peneliti.

3.2 Sumber Data

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah data sekunder yang merupakandata tahunan dalam selang waktu 2000 – 2013 bersumber dari Badan Pusat Statistik Indonesia tahun 2010 dalam Ghofur (2018).

3.3 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini ada dua jenis yaitu:

1. Variabel Endogen yaitu PDRB (y_{1t}) dan Kemiskinan (y_{2t})
2. Variabel *Predetermined* yaitu meliputi ekspor (x_{1t}), impor (x_{2t}), pengangguran (x_{3t}), dan kepadatan penduduk (x_{4t}).

3.4 Penerapan Metode FIML Pada Sistem Persamaan PDRB dan Kemiskinan

Langkah-langkah penerapan metode FIML pada sistem persamaan PDRB dan pertumbuhan ekonomi adalah sebagai berikut:

1. Menentukan sistem persamaan PDRB dan Kemiskinan di Indonesia.
2. Menentukan variabel pada sistem persamaan simultan yaitu variabel endogen dan variabel *predetermined*.
3. Melakukan uji distribusi normal pada setiap persamaan.
4. Mengidentifikasi persamaan PDRB dan Kemiskinan di Indonesia dengan melakukan identifikasi kondisi *order* dan identifikasi kondisi *rank.*
5. Menghitung estimasi parameter persamaan PDRB dan Kemiskinan di Indonesia dengan metode FIML.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Deskripsi Data

Penelitian ini menggunakan statistika deskriptif dan *scatterplot*. Data pertumbuhan ekonomi yang digunakan pada persamaan simultan yaitu data PDRB dan kemiskinan di Indonesia Tahun 2000 sampai 2013 sebagai berikut :

Tabel 4.1 Data Penelitian Tahun 2000-2013

Tahun	PDRB	Ekspor	Impor	Kemis kinan	Tingkat Pengangguran	Kepadatan Penduduk
2000	1374048,62	62124	33514,8	38,74	5,81	107
2001	1564471,65	56320,9	30962,1	37,87	8,01	109
2002	1750017,54	57158,8	31288,9	38,39	9,13	111
2003	1964592,69	61058,2	32550,7	37,34	9,94	112
2004	2225418,05	71584,6	46524,5	36,15	10,25	114
2005	2686581,71	85660	57700,9	35,10	11,38	115
2006	3138165,94	100798,6	61065,5	39,30	11,02	117
2007	3556333,63	114100,9	74473,4	37,17	10,28	118
2008	4271044,59	137020,4	129197,3	34,96	9,41	120
2009	4653539,25	116510	96829,2	32,53	9,11	121
2010	5295073,58	157779,1	135663,3	31,02	8,46	125
2011	6028802,27	203496,6	177435,6	29,96	7,91	127
2012	6733160,11	190020,3	191689,5	28,86	7,43	128
2013	7578118,87	182551,8	186628,7	28,31	7,28	130

Analisis statistika deskriptif data pertumbuhan ekonomi sebanyak 14 observasi pada tahun 2000 sampai 2013 menggunakan tabel sebagai berikut :

Tabel 4.2 Analisis Statistika Deskriptif

	PDRB (Milyar Rupiah)	Kemiskinan (Juta Orang)	Ekspor (Juta US$)	Impor (Juta US$)	Tingkat Pengangguran (Juta Orang)	Kepadatan Penduduk (Jiwa/km^2)
Rata-rata	3772812.	34.69286	114013.2	91823.17	8.958571	118212.8
Nilai Tengah	3347250.	35.62500	107449.8	67769.45	9.120000	117687.4
Maksimum	2032256.	39.30000	203496.6	191689.5	11.38000	129881.7
Minimum	0.502625	28.31000	56320.90	30962.10	5.810000	105638.8
Total	52819368	485.7000	1596184.	1285524.	125.4200	1654979.

Pada Tabel 4.2 data tahun 2000 sampai 2013 jumlah PDRB atas harga berlaku menurut provinsi di Indonesia yaitu 52.819.368 milyar rupiah dengan rata rata 377.2812 milyar rupiah. Pada tahun 2013 merupakan PDRB tertinggi sebesar 203.2256 milyar rupiah, sedangkan tahun 2000 merupakan PDRB terrendah sebesar 0,502625 milyar rupiah.

Menurut data penduduk miskin di Indonesia tahun 2000 sampai 2013 jumlah nilai ekpor di Indonesia mencapai 485,7 juta orang, dengan rata rata 34,69 juta orang. Pada tahun 2006 merupakan kemiskinan tertinggi berjumlah 39,3 juta orang dan pada tahun 2013 jumlah penduduk miskin sebesar 28,31 juta orang merupakan nilai terendah kemiskinan. Sedangkan nilai ekspor di Indonesia pada tahun 2000 sampai 2013 berjumlah 1.596.184 Juta US$, dan memiliki rata rata 114.013,2 Juta US$. Nilai ekspor tahun 2011 sebesar 203.496,6 Juta US$ adalah nilai ekspor tertinggi dan pada tahun 2001 nilai ekpor 56.320,9 Juta US$ adalah nilai ekspor terendah.

Nilai Impor di Indonesia pada tahun 2000-2013 berjumlah 1.285.524 Juta US$, dan memiliki rata rata sebesar 91.823,17 Juta US$. Nilai impor tertinggi terjadi pada tahun 2012 yaitu sebesar 191.689,5 Juta US$ dan nilai impor terendah terjadi pada tahun 2001 sebesar 30.962,1 Juta US$.

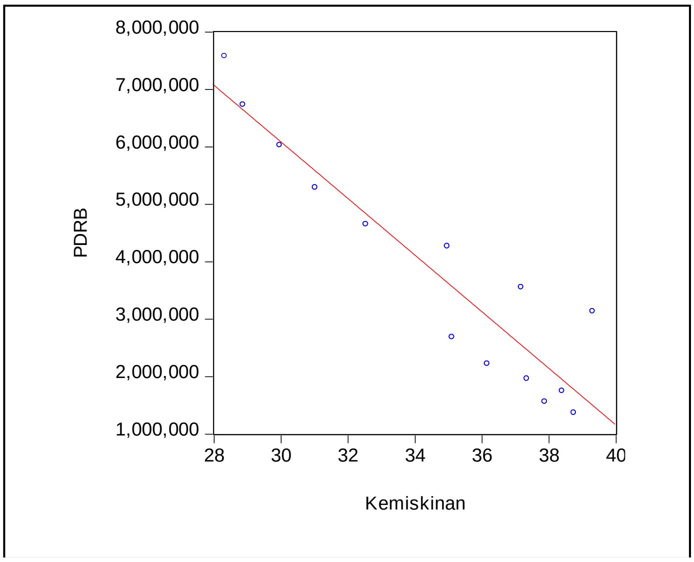
Pengangguran di Indonesia tahun 2000-2013 mencapai 125,42 juta orang, dengan rata rata sebesar 8,95 juta orang. Jumlah pengangguran tertinggi pada

tahun 2005 yaitu sebesar 11,38 juta orang dan pengangguran terendah ada pada tahun 2000 yaitu sebesar 5,81 juta orang.

Kepadatan penduduk di Indonesia pada tahun 2000-2013 berjumlah 1.654.979 Juta/Km^2, dengan rata rata 118.212,8 Juta/Km^2. Kepadatan penduduk tertinggi terjadi pada tahun 2013 sebesar 129.881,7 Juta/Km^2, dan tahun 2000 merupakan kepadatan penduduk terendah sebesar 105.638,8 Juta/Km^2.

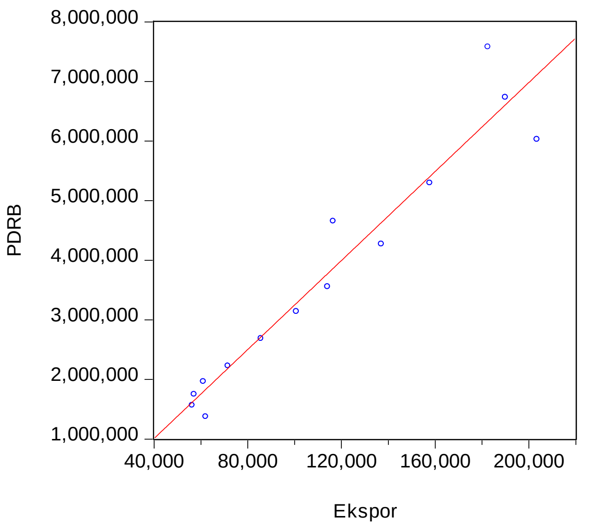
4.2 *Scatterplot*

S*catterplot* digunakan untuk mengetahui apakah hubungan antar variabel linier atau nonlinier. Pada model ini hubungan antar variabelnya harus bersifat linier. Oleh karena ini diperlukan menggambar S*catterplotnya.*



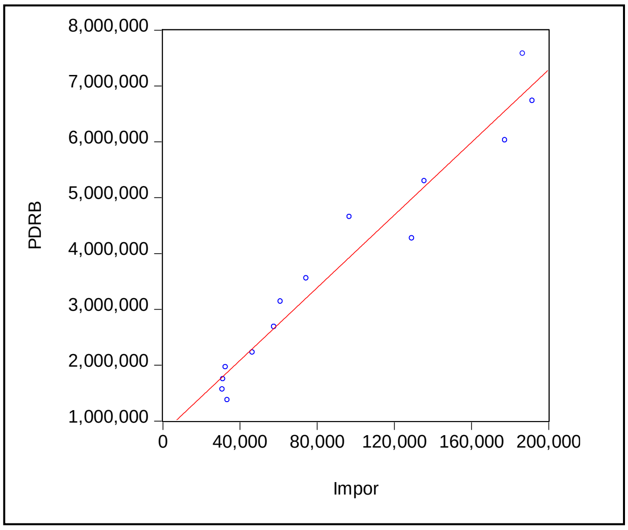
Gambar 4.1 Hubungan Variabel PDRB dengan Kemiskinan

Gambar 4.1 menunjukkan hubungan variabel PDRB dengan kemiskinan bersifat linier dan bernilai negatif. hal tersebut terlihat dari gambar 4.1 yang digambarkan dengan garis lurus. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai PDRB maka akan semakin rendah nilai kemiskinan.



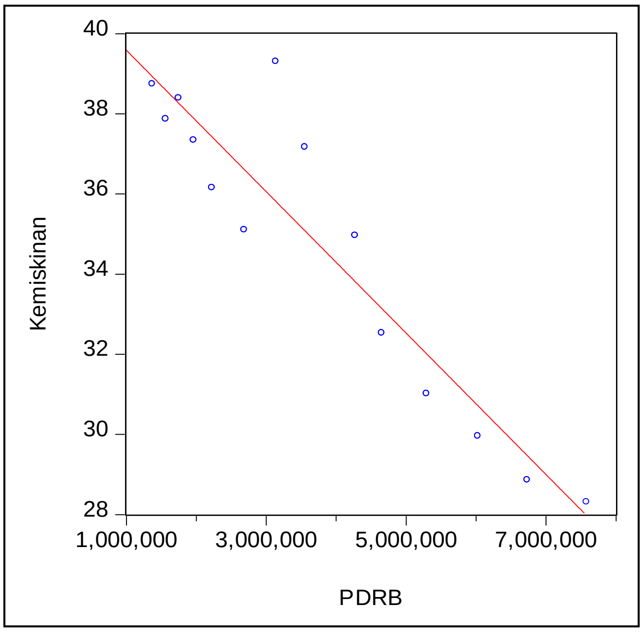
Gambar 4.2 Hubungan Variabel PDRB dengan Ekspor

Gambar 4.2 menunjukkan bahwa hubungan variabel PDRB dengan ekspor bersifat linier dan bernilai positif. hal tersebut terlihat dari gambar 4.2 yang digambarkan dengan garis lurus. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai PDRB maka akan semakin tinggi nilai Ekspor.



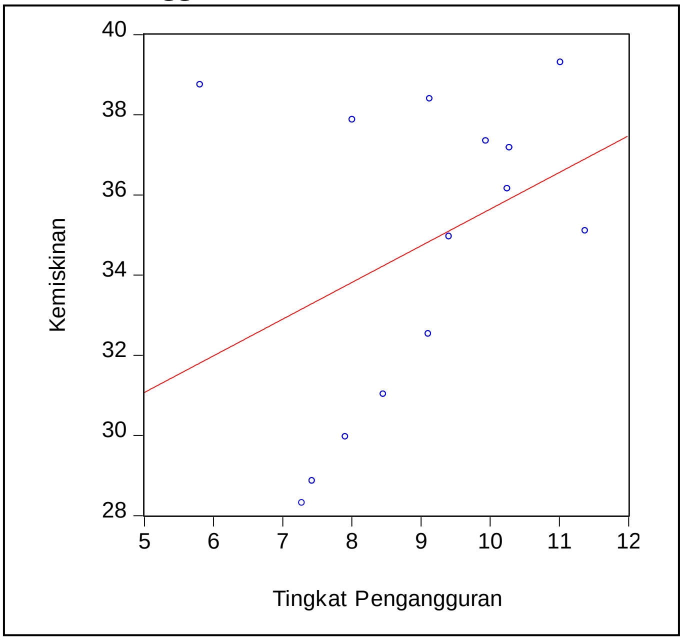
Gambar 4.3 Hubungan Variabel PDRB dengan Impor

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa hubungan variabel PDRB dengan Impor bersifat linier dan bernilai positif. hal tersebut terlihat dari gambar 4.3 yang digambarkan dengan garis lurus. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai PDRB maka akan semakin tinggi nilai impor.



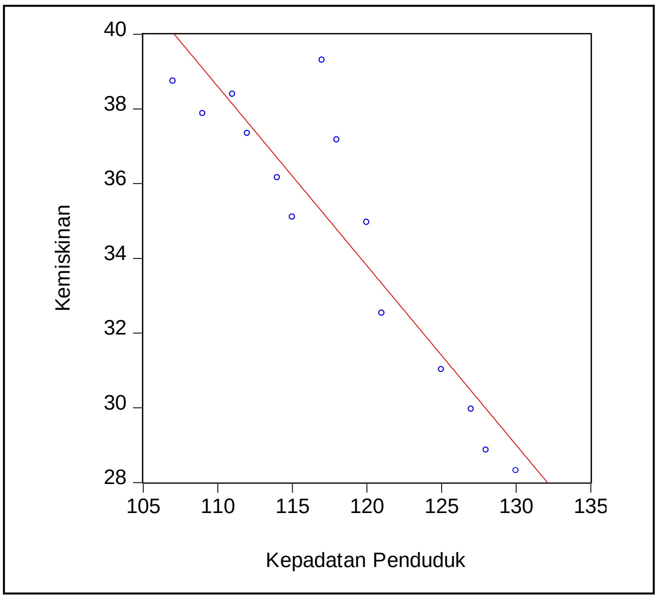
Gambar4.4 Hubungan Variabel Kemiskinan dengan PDRB

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa hubungan variabel kemiskinan dan PDRB bersifat linier dan bernilai negatif. hal tersebut terlihat dari gambar 4.4 yang digambarkan dengan garis lurus. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin rendah kemiskinan maka semakin tinggi nilai PDRB.



Gambar 4.5 Hubungan Variabel Kemiskinan dengan Tingkat Pengangguran

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa hubungan variabel kemiskinan dan PDRB bersifat linier dan bernilai positif. hal tersebut terlihat dari gambar 4.5 yang digambarkan dengan garis lurus. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin tinggi kemiskinan maka semakin tinggi nilai tingkat pengangguran.



Gambar 4.6 Hubungan Variabel Kemiskinan dengan Kepadatan Penduduk

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa hubungan variabel kemiskinan dan kepadata penduduk bersifat linier dan bernilai negatif. hal tersebut terlihat dari gambar 4.6 yang digambarkan dengan garis lurus. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin rendah kemiskinan maka semkin tinggi nilai kepadatan penduduk.

Pada gambar gambar *scatterplot* diatas yang digambarkan dengan garis lurus, dapat disimpulkan bahwa hubungan setiap variabel sistem persamaan simultan PDRB dan kemiskinan adalah bersifat linier.

4.3 Analisis Data

Pada penelitian ini menggunakan uji distribusi normal dan uji korelasi untuk menganalisis data persamaan simultan PDRB dan kemiskinan di Indonesia Tahun 2000-2013.

4.3.1 Uji Distribusi Normal

Pada penelitian ini terlebih dahulu dilakukan uji normalitas sebelum melakukan estimasi parameter. Uji normalitas dilakukan pada setiap variabel unyuk mengetahui data berdistribusi normal atau tidak. Uji normalitas dilakukan dengan uji *probability JB.* Hipotesis yang diberikan sebagai berikut:

H_0 : Data distribusi normal

H_1 : Data tidak berdistribusi normal

Uji Kriteria pengambilan keputusannya adalah berikut :

a. Jika nilai *p-value* $< 0{,}05$ atau JB hitung > dari nilai χ^2 tabel, maka H_0 ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa data tidak berdistribusi normal.

b. Jika nilai *p-value* $> 0{,}05$ atau JB hitung < nilai χ^2 tabel, maka H_0 diterima, sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal.

Penelitian ini menggunakan nilai α 0,05 dan derajat kebebasan (df) 2 menurut X^2 tabel pada lampiran 2 diperoleh 5,99. Pada persamaan (2.23) dapat diketahui nilai JB hitung yang ditunjykkan ditabel berikut:

Tabel 4.3 Nilai Probability Jarque Bera

	PDRB	Kemiskinan	Ekspor	Impor	Tingkat Pengangguran	Kepadatan Penduduk
Probability	0.553510	0.486071	0.518711	0.448874	0.812998	0.717309
Jarque-Bera	1.182949	1.442800	1.312815	1.602024	0.414054	0.664497

Tabel 4.3 data PDRB diperoleh nilai *p-value* 0,553510 dan JB sebesar 1,182949. Karena p-JB > 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga $\mathrm{H_0}$ diterima, artinya data PDRB berdistribusi normal. Pada data kemiskinan diperoleh nilai *p-value* 0,486071 dan JB sebesar 1,4428. Karena p-JB > 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga $\mathrm{H_0}$ diterima, artinya data kemiskinan berdistribusi normal. Pada data ekspor diperoleh nilai *p-value* 0,51871 dan JB sebesar 1,312815. Karena p-JB > 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga $\mathrm{H_0}$ diterima, artinya data ekspor berdistribusi normal. Pada data impor diperoleh nilai *p-value* 0,448874 dan JB sebesar 1,602024. Karena p-JB > 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga $\mathrm{H_0}$ diterima, artinya data impor berdistribusi normal.

Pada tabel 4.4 data pengangguran diperoleh nilai *p-value* 0,812998 dan JB sebesar 1,414054. Karena p-JB > 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga $\mathrm{H_0}$ diterima, artinya data pengangguran berdistribusi normal. Pada data kepadatan penduduk diperoleh nilai *p-value* 0,717309 dan JB sebesar 0,664497. Karena p-JB > 0,05 atau JB hitung < nilai χ^2 tabel sehingga $\mathrm{H_0}$ diterima, artinya data kepadatan penduduk berdistribusi normal. Sehingga dapat disimpulkan semua data yang digunakan dalam penelitian ini berdistribusi normal.

4.3.2 Uji Korelasi

Uji korelasi adalah uji yang digunakan untuk menunjukan arah kuatnya hubungan antar variabel. Arah Uji korelasi dinyatakan dalam bentuk hubungan negatif atau positif, sedangkan kuatnya hubungan korelasi dinyatakan dengan besarnya koefisien korelasi.

Menurut persamaan (2.12) diperoleh koefisien korelasi dari BDRP dan setiap variabel yang ditulis dalam tabel berikut :

Tabel 4.4 Koefisien Korelasi Persamaan PDRB

	PDRB
Kemiskinan	-0,93264
Ekspor	0,963643
Impor	0,976393

Tabel 4.4 diketahui hubungan variabel PDRB dengan kemiskinan memiliki nilai koefisien korelasi -0,93264. Diketahui pada tabel 2.1, bahwa koefisein korelasi yang bernilai negatif dan mendekati 1 memiliki hubungan yang sangat kuat. Hal tersebut menunjukan jika PDRB semakin meningkat, maka jumlah penduduk miskin akan semakin turun.

Tabel 4.4 diketahui hubungan variabel PDRB dengan ekspor memmiliki nilai koefisien korelasi 0,963643. Diketahui pada tabel 2.1, bahwa koefisien korelasi yang bernilai positif dan mendekati 1 memiliki hubungan yang sangat kuat. Hal tersebut menunjukan jika PDRB meningkat, maka nilai ekspor juga meningkat.

Tabel 4.4 diketahui hubungan variabel PDRB dengan impor memmiliki nilai koefisien korelasi 0,976393. Diketahui pada tabel 2.1, bahwa koefisien korelasi yang bernilai positif dan mendekati 1 memiliki hubungan yang sangat kuat. Hal tersebut menunjukan jika PDRB meningkat, maka nilai impor juga meningkat.

Menurut persamaan (2.52) diperoleh koefisien korelasi dari kemiskinan dan setiap variabel yang dituliskan dalam tabel berikut :

Tabel 4.5 Koefisien Korelasi Persamaan Kemiskinan

	Kemiskinan
PDRB	-0,93264
Tingkat Pengangguran	0,373636
Kepadatan Penduduk	-0,91165

Tabel 4.5 diketahui hubungan variabel kemiskinan dengan PDRB memiliki nilai koefisien korelasi -0,93264. Diketahui pada tabel 2.1, bahwa koefisien korelasi yang bernilai negatif dan mendekati 1 memiliki hubungan yang sangat kuat. Hal tersebut menunjukan jika kemiskinan meningkat, maka nilai PDRB akan menurun.

Tabel 4.5 diketahui hubungan variabel kemiskinan dengan tingkat pengangguran memiliki nilai koefisien korelasi 0.373636. Diketahui pada tabel 2.1, bahwa koefisien korelasi yang bernilai positif dan nilainya pada interval kedua memiliki hubungan yang rendah. Hal tersebut menunjukan jika kemiskinan menurun, maka nilai tingkat pengangguran akan menurun.

Tabel 4.5 diketahui hubungan variabel kemiskinan dengan kepadatan penduduk memiliki nilai koefisien korelasi -0.911646. Diketahui pada tabel 2.1, bahwa koefisien korelasi yang bernilai negatif dan mendekati 1 memiliki hubungan yang kuat. Hal tersebut menunjukan jika kemiskinan meningkat, maka nilai kepadatan penduduk akan menurun.

4.4 Sistem Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan

Model ekonomi yang dipakai dalam penelitian ini terdiri dari dua persamaan struktural. Persamaan pertama penyatakan fungsi PDRB dipengaruhi oleh kemiskinan, ekspor dan impor. Sedangkan pada persamaan kedua menyatakan bahwa kemiskinan dipengaruhi oleh besarnya PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk.

Persamaan simultan pada penelitian ini pengacu pada persamaan (4.1) sebagai berikut :

$$\mathrm{PD_t} = \beta_{10} - \beta_{12}\mathrm{KE_t} + \gamma_{11}\mathrm{EX_t} - \gamma_{12}\mathrm{IM_t} + \mathrm{u_{1t}} \quad (4.1.a)$$

$$\mathrm{KE_t} = \beta_{20} - \beta_{21}\mathrm{PD_t} + \gamma_{23}\mathrm{TP_t} + \gamma_{24}\mathrm{KP_t} + \mathrm{u_{2t}} \quad (4.1.b)$$

dimana:

$\mathrm{PD_t}$ = Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) atas dasar harga berlaku menurut provinsi pada tahun ke-t (Milyar Rupiah)

$\mathrm{KE_t}$ = Jumlah penduduk miskin pada tahun ke-t (Juta Orang)

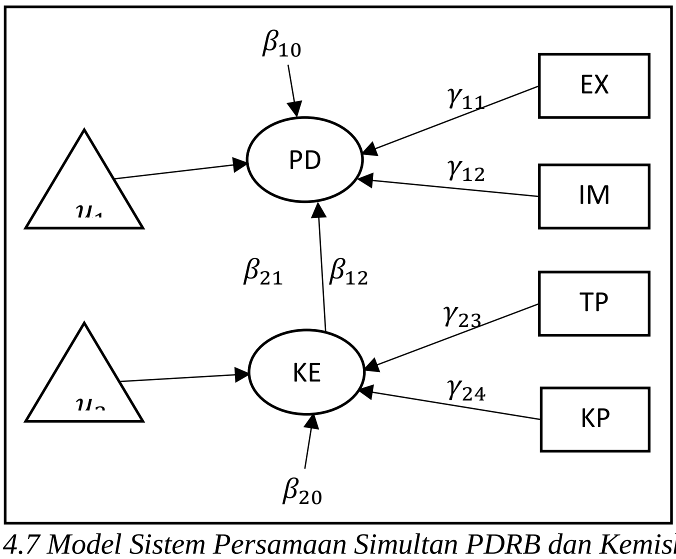
$\mathrm{EX_t}$ = Nilai ekspor migas dan nonmigas pada tahun ke-t (Juta US$)

$\mathrm{IM_t}$ = Nilai impor migas dan nonmigas pada tahun ke-t (Juta US$)

$\mathrm{TP_t}$ = Tingkat pengangguran pada tahun ke-t (Juta Orang)

$\mathrm{KP_t}$ = Kepadatan penduduk pada tahun ke-t (Jiwa/KM^2)

Persamaan (4.1) secara skematis dapat digambar seperti berikut:



Gambar 4.7 Model Sistem Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan

Identifikasi yang digunakan untuk persamaan simultan pada penelitian ini yaitu identifikasi kondisi *order* dan kondisi *rank.*

4.4.1 Identifikasi Kondisi *Order*

Identifikasi terhadap kondisi order dilakukan dengan melihat apakah jumlah variabel *predetermined* yang dikeluarkan dari persamaan tersebut lebih dari jumlah variabel endogen dikurangi dengan 1, sebagai berikut :

a. Persamaan (4.1.a)

   M = 2 (PD_t dan KE_t) m = 2 (PD_t dan KE_t)

   K = 4 (EX_t, IM_t, TP_t, dan TP_t) k = 2 (EX_t dan IM_t)

   Karena

$$K - k \geq m - 1$$

$$4 - 2 \geq 2 - 1$$

$$2 \geq 1$$

   Maka persamaan (4.1.a) merupakan persamaan yang *overidentified*.

b. Persamaan (4.17.b)

   M = 2 (PD_t dan KE_t) m = 2 (PD_t dan KE_t)

   K = 4 (EX_t, IM_t, TP_t, dan TP_t) k = 2 (TP_t dan TP_t)

   Karena

$$K - k \geq m - 1$$

$$4 - 2 \geq 2 - 1$$

$$2 \geq 1$$

   Maka persamaan (4.17.b) merupakan persamaan yang *overidentified*.

Tabel 4.6 Identifikasi Kondisi Order

No. Pers.	$(K-k)$	$(m-1)$	Keterangan
4.17.a	$4-2=2$	$2-1=1$	*Overidentified*
4.17.b	$4-2=2$	$2-1=1$	*Overidentified*

4.4.2 Identifikasi Kondisi *Rank*

Identifikasi persamaan simultan dilakukan dengan 2 identifikasi yaitu identifikasi kondisi *order* dan identifikasi kondisi *rank*. Peneliti telah melakukan identifikasi kondisi *order*, dapat diketahui bahwa pada persamaan (4.17a) dan (4.17b) adalah persamaan *overidentified.* Selanjutnya harus dilakukan identifikasi kondisi *rank* untuk menunjukkan apakah persamaan tersebut teridentifikasi atau tidak. Karena walaupun persamaan tersebut sudah teridentifikasi secara kondisi order, belum tentu teridentifikasi dengan kondisi *rank*.

Menyelediki kondisi *rank*, persamaan (4.1.a) dan (4.17.b) harus diubah kedalam bentuk struktural sebagai berikut:

$$-\beta_{10} + PD_t - \beta_{12}KE_t - \gamma_{11}EX_t - \gamma_{12}IM_t = u_{1t} \qquad (4.1.a)$$

$$-\beta_{20} - \beta_{21}PD_t + KE_t - \gamma_{23}TP_t - \gamma_{24}KP_t = u_{2t} \qquad (4.18.b)$$

Bentuk struktural persamaan (4.18) maka ditulis ke dalam sebuah tabel berikut:

Tabel 4.7 Identifikasi Kondisi Rank

Koefisien-koefisien							
No. Pers	C	PD_t	KE_t	EX_t	IM_t	TP_t	KP_t
4.17.a	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{12}$	$-\gamma_{11}$	$-\gamma_{12}$	0	0
4.17.b	$-\beta_{20}$	$-\beta_{21}$	1	0	0	$-\gamma_{23}$	$-\gamma_{24}$

Menurut tabel 4.8 diketahui bahwa setiap persamaan mempunyai banyak tanda 0 lebih dari (m – 1 = 2 – 1 = 1), sehingga setiap persamaan teridentifikasi secara kondisi *rank.* Identifikasi sistem simultan pada PDRB dan kemiskinan secara kondisi *order* dan kondisi *rank* dapat disimpulakn bahwa setiap persamaan *overidentified*

.

4.4.3 Estimasi Parameter Persamaan Simultan PDRB dan Kemiskinan dengan Model FIML

Berdasarkan identifikasi kondisi *order* dan *rank*, menunjukkan bahwa persamaan (4.1.a) dan (4.1.b) *overidentified*. Oleh karena itu, persamaan (4.1.a) dan (4.1.b) dapat diestimasi dengan menggunakan metode LIML.

a. Memperoleh estimasi parameter pada persamaan (4.1.a), maka perlu diketahui:

$$\mathrm{Z}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{KE_1} & \boldsymbol{EX_1} & \boldsymbol{IM_1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{KE_2} & \boldsymbol{EX_2} & \boldsymbol{IM_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{KE_{14}} & \boldsymbol{EX_{14}} & \boldsymbol{IM_{14}} \end{bmatrix} \qquad y_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{PD_1} \\ \boldsymbol{PD_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{PD_{14}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{38,74} & \mathbf{62124} & \mathbf{33514,8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{37,87} & \mathbf{56320,9} & \mathbf{30962,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{28,31} & \mathbf{182551,8} & \mathbf{186628,7} \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} \mathbf{1374048,62} \\ \mathbf{1564471,65} \\ \vdots \\ \mathbf{7578118,87} \end{bmatrix}$$

Selengkapnya lihat di lampiran 1. Hasil estimasi parameter yang mengacu pada persamaan (2.52) adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = (Z'Z)^{-1}Z'y$$

$$\hat{\beta} = (\mathrm{Z}_1{}'\mathrm{Z}_1)^{-1}\mathrm{Z}_1{}'y_1$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{5,2281830\ 10^6} \\ \mathbf{-1,1881047\ 10^5} \\ \mathbf{8,755515} \\ \mathbf{-18,166159} \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai estimator parameter pada persamaan (4.1.a) sebagai berikut:

β_{10} = 5228183

β_{12} = -118810,47

γ_{11} = 8,755515

γ_{12} = -18,166159

b. Memperoleh estimasi parameter pada persamaan (4.17.b), maka perlu diketahui:

$$\mathrm{Z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{PD_1} & \boldsymbol{TP_1} & \boldsymbol{KP_1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{PD_2} & \boldsymbol{TP_2} & \boldsymbol{KP_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{PD_{14}} & \boldsymbol{TP_{14}} & \boldsymbol{KP_{14}} \end{bmatrix} \qquad y_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{KE_1} \\ \boldsymbol{KE_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{KE_{14}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1374048,62} & \mathbf{5,81} & \mathbf{107} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1564471,65} & \mathbf{8,01} & \mathbf{109} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{7578118,87} & \mathbf{7,28} & \mathbf{130} \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} \mathbf{38,74} \\ \mathbf{37,87} \\ \vdots \\ \mathbf{28,31} \end{bmatrix}$$

Hasil estimasi parameter yang mengacu pada persamaan (2.52) adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = (\mathrm{Z}_2{}'\mathrm{Z}_2)^{-1}\mathrm{Z}_2{}'y_2$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{83.6719} \\ \mathbf{-1,486\ 10^{-8}} \\ \mathbf{0,547844} \\ \mathbf{0,455393} \end{bmatrix}$$

Diperoleh nilai estimator parameter pada persamaan (4.1.b)sebagai berikut:

β_{20} = 83,6719

β_{21} = -0,00000001486

$$\gamma_{23} = 0{,}547844$$

$$\gamma_{24} = 0{,}455393$$

Sehingga pada persamaan (4.1) dapat ditulis menjadi model persamaan simultan sebagai berikut :

$$\text{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \text{KE} + 8{,}755515\ \text{EX} - 18{,}166159\ \text{IM} \qquad (4.2.a)$$

$$\text{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \text{PD} + 0{,}547844\ \text{TP} + 0{,}455393\ \text{KP} \qquad (4.2.b)$$

Persamaan (4.2.a) diperoleh variabel kemiskinan dan impor berpengaruh negatif terhadap PDRB, sedangkan variabel ekspor berpengaruh positif terhadap PDRB. Hal tersebut berarti bahwa jika kemiskinan naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB turun sebesar 118810,47. Jika ekspor naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB naik sebesar 8,755515. Jika impor naik 1 poin dan variabel lain konstan, maka PDRB akan turun sebesar 18,166159. Jika kemiskinan, ekspor dan impor bernilai tetap, maka PDRB naik sebesar 5228183.

Persamaan (4.2.b) diperoleh variabel PDRB berpengaruh negatif terhadap kemiskinan, sedangkan tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk perpengaruh secara positif. Hal tersebut berarti jika PDRB naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka kemiskinan turun $1{,}486 \times 10^{-8}$. Jika tingkat pengangguran naik 1 poin dan variabel lain konstan, maka kemiskinan akan naik 0,547844. Jika kepadatan penduduk naik 1 poin, dan variabel lain konstan, maka kemiskinan akkan naik sebesar 0,455393. Jika PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk bernilai tetap, maka kemiskinan akan naik sebesar 83,6719.

Perhitungan koefisien determinasi PDRB yaitu:

Tabel 4.8 Koefisien Determinasi PDRB

Dependent Variable: PDRB	Nilai	Dependent Variable: Kemiskinan	Nilai
R-squared	0.860374	R-squared	0.804594
Adjusted R-squared	0.818486	Adjusted R-squared	0.745972
S.E. of regression	865831.6	S.E. of regression	1.937981
Durbin-Watson stat	1.486934	Durbin-Watson stat	1.129031

Tabel 4.8 menunjukan pengaruh model persamaan PDRB dapat dijelaskan oleh variabel kemiskinan, ekspor, impor sebesar 86% dan 14% dipengaruhi oleh variabel lain. Sedangkan koefisien determinasi menunjukan pengaruh dalam model persamaan kemiskinan dapat dipengaruhi oleh variabel PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk sebesar 80% dan 20% dipengaruhi oleh variabel lain.

4.5 Kajian Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dalam Islam

Persamaan simultan adalah persamaan yang menyataka adanya hubungan timbal balik antar variabel, sehingga terjadi sebab akibat 2 arah yang terjadi pada variabelnya. Hal tersebut dapat diintegrasikan dalam ayat AL Qur’an Surat Al Isro’ ayat 7 sebagai berikut

اِنْ اَحْسَنْتُمْ اَحْسَنْتُمْ لِاَنْفُسِكُمْ ۗوَاِنْ اَسَأْتُمْ فَلَهَاۗ فَاِذَا جَاۤءَ وَعْدُ الْاٰخِرَةِ لِيَسُوْۤءٗا وُجُوْهَكُمْ وَلِيَدْخُلُوا
الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوْهُ اَوَّلَ مَرَّةٍ وَّلِيُتَبِّرُوْا مَا عَلَوْا تَتْبِيْرًا

Artinya : “*Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (Kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan* *untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai.*" (Q.S. Al-Imran/17:7).

Dari ayat diatas makna persamaan simultan terdapat pada lafadz

اِنْ اَحْسَنْتُمْ اَحْسَنْتُمْ لِاَنْفُسِكُمْ yang artinya "*Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri".* Pada lafadz tersebut menunjukkan bahwa jika kita berbuat baik kepada orang lain maka Allah akan mengembalikan kebaikan itu kepada diri kita. Hal itu menunjukkan adanya hubungan simultan saat kita berbuat baik kepada orang lain maka Allah akan mengembalikan kebaikan tersebut tersebut pada kita.

Dimisalkan:

Y_1 = Berbuat baik

Y_2 = Berbuat baik bagi dirimu sendiri

X_1 = Bersedekah

X_2 = Saling menolong

X_3 = Mendapatkan balasan kebaikan dari Allah SWT

Sehingga diperoleh variabel sistem persamaan simultan sebagai berikut:

Y_1, Y_2 : Variabel endogen

X_1, X_2, X_3 : Variabel *predetermind*

Diperoleh model sistem persamaan simultan sebagai berikut:

$$Y_1 = \beta_{10} + \beta_{12}Y_2 + \gamma_{11}X_1 + \gamma_{12}X_2 + u_1$$

$$Y_2 = \beta_{20} + \beta_{21}Y_1 + \gamma_{23}X_3 + u_2$$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, dapat diambil kesimpulan bahwa dengan penerapan metode FIML pada data PDRB dan Kemiskinan diperoleh hasil model persamaan simultan sebagai berikut:

$$\mathrm{PD} = 5228183 - 118810{,}47\ \mathrm{KE} + 8{,}755515\ \mathrm{EX} - 18{,}166159\ \mathrm{IM}$$

$$\mathrm{KE} = 83{,}6719 - 0{,}00000001486\ \mathrm{PD} + 0{,}547844\ \mathrm{TP} + 0{,}455393\ \mathrm{KP}$$

Persamaan PDRB menunjukkan variabel kemiskinan dan impor berpengaruh negatif terhadap PDRB, sedangkan variabel ekspor berpengaruh positif terhadap PDRB. Hal tersebut berarti bahwa jika kemiskinan naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB turun sebesar 118810,47. Jika ekspor naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka PDRB naik sebesar 8,755515. Jika impor naik 1 poin dan variabel lain konstan, maka PDRB akan turun sebesar 18,166159. Jika kemiskinan, ekspor dan impor bernilai tetap, maka PDRB naik sebesar 5228183.

Persamaan kemiskinan menunjukkan variabel PDRB berpengaruh negatif terhadap kemiskinan, sedangkan tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk perpengaruh secara positif. Hal tersebut berarti jika PDRB naik 1 poin dan variabel yang lain konstan, maka kemiskinan turun $1{,}486 \times 10^{-8}$. Jika tingkat pengangguran naik 1 poin dan variabel lain konstan, maka kemiskinan akan naik 0,547844. Jika kepadatan penduduk naik 1 poin, dan variabel lain konstan, maka kemiskinan akkan naik sebesar 0,455393. Jika PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk bernilai tetap, maka kemiskinan akan naik sebesar 83,6719.

Koefisien determinasi menuunjukan pengaruh model persamaan PDRB dapat dijelaskan oleh variabel kemiskinan, ekspor, impor sebesar 86% sedangkan 14% dipengaruhi oleh variabel lain. Koefisien determinasi menunjukan pengaruh dalam model persamaan kemiskinan dapat dipengaruhi oleh variabel PDRB, tingkat pengangguran dan kepadatan penduduk sebesar 80% sedngkan 20% dipengaruhi oleh variabel lain.

5.2 Saran

Peneliti selanjutnya dapat menggunakan implementasi sistem persamaan simultan dengan 3 variabel endogen atau lebih. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menggunakan metode sistem yaitu *Three Stage Least Squares* (3SLS).

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2014). *Matematika dalam Al-Qur'an.* Malang: UIN Press.

Adisasmita, R. (2013). *Teori-Teori Pembanguan Ekonomi. Pertumbuhan Ekonomi dan Pertumbuhan Wilayah.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Algifari. (2000). *Analisis Regresi Teori, Kasus, dan Solusi. Edisi Kedua.* Yogyakarta: BPFE Yogyakarta.

Al-Mahalli, I. &.-S. (2010). *Tafsir Jalalain Jilid 3.* Surabaya: Pustaka eLBA.

Al-Maraghi, A. (1989). *Terjemahan Tafsir Al-Maraghi.* Semarang: CV Toha Putra.

Anton, H. (2004). *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan Jilid 1.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Anton, H. (2004). *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan Jilid 2.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Ash-Sdiddieqy, T. (2003). *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur 5.* Semarang: PT Pustaka Rizki Putra.

Aziz, A. (2010). *Ekonometrika (Teori & Praktik Eksperimen dengan Matlab).* Malang: UIN-Maliki Pres.

Bain, M. E. (1992). *Introduction To Probability and Mathematical Statistics.* California: Duxbery Press.

Basuki, S. N. (2013). *Penaksiran Parameter Pada Persamaan Simultan Menggunakan Metode Full Information Maximum Likelihood.* Bandung: Perpustakaan.UPI.edu.

Daniantari, T. R. (2011). Estimasi Model Persamaan Simultan dengan Metode Two Stage Least Squares dan Penerapanya. *Skripsi* .

Ekananda, M. (2015). *Ekonometrika Dasar.* jakarta: Mitra Wacana Media.

Gujarati, D. (1999). *Ekonometrika Dasar Terjemahan Sumarno Zain.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Gujarati, D. N. (2006). *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid 2 Edisi Ketiga.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Hasan, I. (2002). *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif).* Jakarta: Bumi Aksara.

Imrona, M. (2013). *Aljabar Linier Dasar*. Edisi 2. Erlangga, Jakarta.

Katsir.2017. *Tafsir Ibnu Katsir*. Kairo: Muassasah Dar Al- Hilal

Kmenta, J. (1990). *Elements of Econometrics Second Edition.* New York: Macmillan Publishing Company.

Koutsoyiannis, A. (1977). *Theory Of Econometrics : An Infropositionof Econometric Methods.ductory E.* London: The MacMillan PressLtd.

Kuncoro, M. (2014). *Otonomi Daerah Menuju Era Baru Pembangunan Daerah Edisi 3.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Maddala, G. S. (2009). *Introduction To Econometrics Fourth Edition.* England: Wiley.

Mahmud, I. (2013). *Aljabar Linear Dasar. Edisi Kedua.* Jakarta: Erlangga.

Marc, S. d. (2006). *Aljabar Linear. Edisi Ketiga.* Jakarta: PT. Gelora Aksara Utama.

Sarwoko. (2005). *Dasar-dasar Ekonometrika.* Yogyakarta: Penerbit Andi.

Serlyana, R. D. (2014). Model Persamaan Simultan Pada Analisis Hubungan Kemiskian dan PDRB. *Mathematics and Statistics Department, School of Computer Science, Binus University* , Vol.5, 810-817.

Simanjuntak, P. J. (2001). *Pengantar Ekonomi Sumber Daya Manusia.* Jakarta: BPFE UI.

Soemartini. (2016). Penerapan Metode Two Stage Least Squares Pada Model Persamaan Simultan Dalam Memprediksi PDRB dan Pertumbuhan Ekonomi. *Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran* , ISSN: 2528-4630.

Sri Harini, T. (2008). *Metode Statistika.* Malang: UIN-Press.

Sumodiningrat, G. (1994). *Pengantar Ekonometrika.* Yogyakarta: BPFE.

Supranto, J. (2004). *Ekonometri. Edisi kedua.* Jakarta: Ghalia Indonesia.

Supranto, J. (2009). *Statistik Teori dan Aplikasi Jilid II.* Jakarta: Erlangga.

Syaikh, A. b. (2008). *Tafsir Ibnu Katsier Jilid 8.* Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Wibisono, Y. (2005). *Metode Statistik.* Yogyakarta: Gajah Mada University.

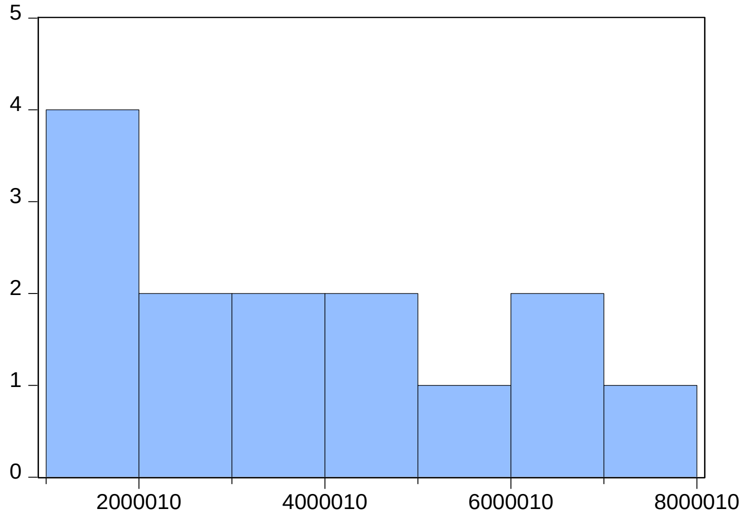
Yetnosumarto, s. (1990). Dasar Dasar Statistika. Jakarta: C.V Rajawali.

LAMPIRAN LAMPIRAN

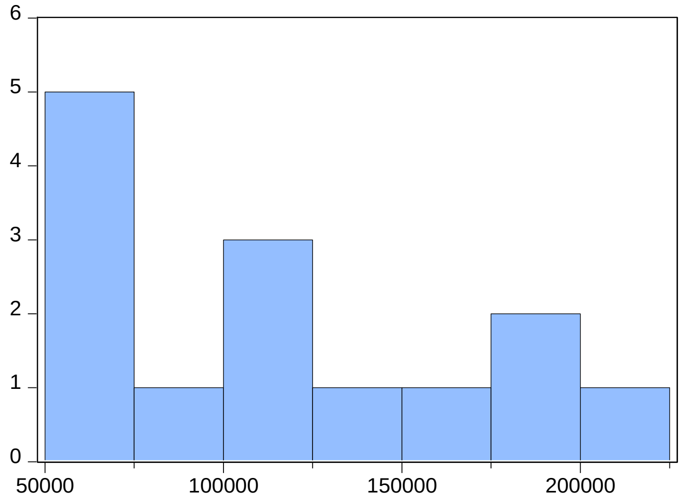
Lampiran 1 Data Penelitian

Tahun	PDRB	Ekspor	Impor	Kemiskinan	Tingkat Pengangguran	Kepadatan Penduduk
2000	1374048,62	62124	33514,8	38,74	5,81	107
2001	1564471,65	56320,9	30962,1	37,87	8,01	109
2002	1750017,54	57158,8	31288,9	38,39	9,13	111
2003	1964592,69	61058,2	32550,7	37,34	9,94	112
2004	2225418,05	71584,6	46524,5	36,15	10,25	114
2005	2686581,71	85660	57700,9	35,10	11,38	115
2006	3138165,94	100798,6	61065,5	39,30	11,02	117
2007	3556333,63	114100,9	74473,4	37,17	10,28	118
2008	4271044,59	137020,4	129197,3	34,96	9,41	120
2009	4653539,25	116510	96829,2	32,53	9,11	121
2010	5295073,58	157779,1	135663,3	31,02	8,46	125
2011	6028802,27	203496,6	177435,6	29,96	7,91	127
2012	6733160,11	190020,3	191689,5	28,86	7,43	128
2013	7578118,87	182551,8	186628,7	28,31	7,28	130

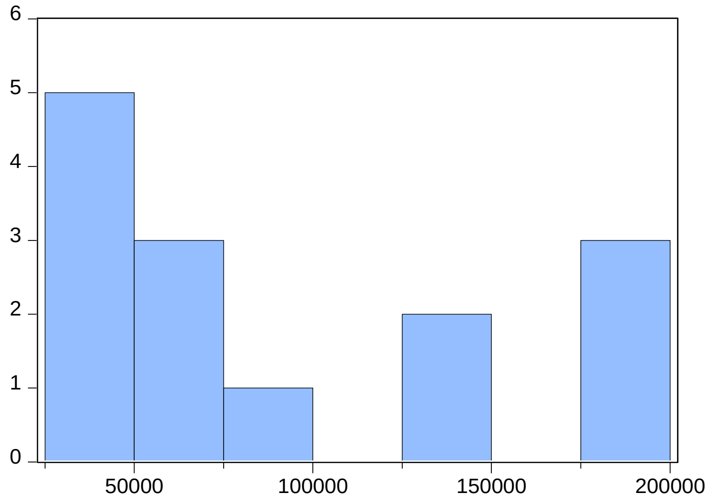
Lampiran 2 Deskriptif Data



Series: PDRB	
Sample 2000 2013	
Observations 14	
Mean	3772812.
Median	3347250.
Maximum	7578119.
Minimum	1374049.
Std. Dev.	2032256.
Skewness	0.502625
Kurtosis	1.991344
Jarque-Bera	1.182949
Probability	0.553510

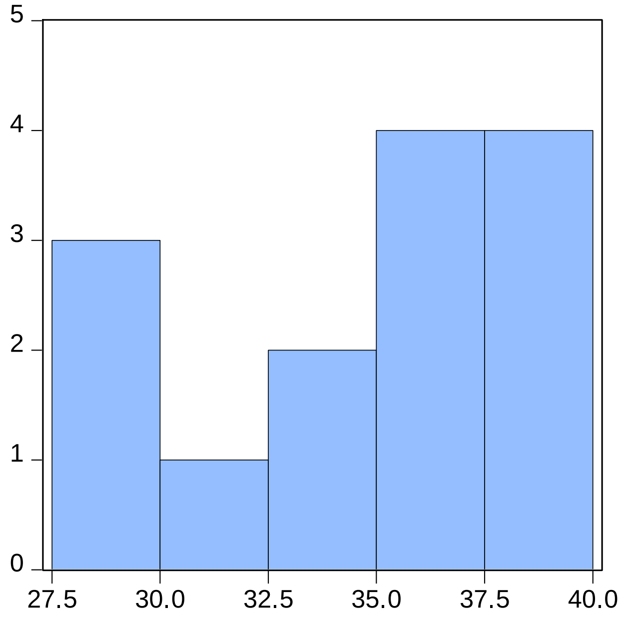


Series: EKSPOR	
Sample 2000 2013	
Observations 14	
Mean	114013.2
Median	107449.8
Maximum	203496.6
Minimum	56320.90
Std. Dev.	52454.51
Skewness	0.446968
Kurtosis	1.795252
Jarque-Bera	1.312815
Probability	0.518711



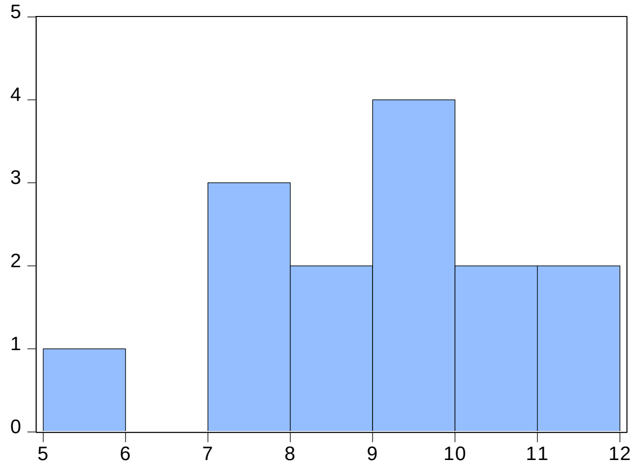
Series: IMPOR	
Sample 2000 2013	
Observations 14	
Mean	91823.17
Median	67769.45
Maximum	191689.5
Minimum	30962.10
Std. Dev.	61004.17
Skewness	0.559587
Kurtosis	1.777798
Jarque-Bera	1.602024
Probability	0.448874

Lampiran 2 (Lanjutan)



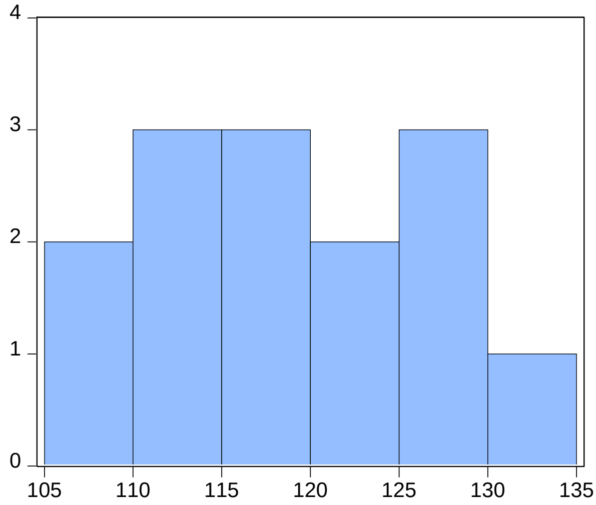
Series: KEMISKINAN
Sample 2000 2013
Observations 14

Mean	34.69286
Median	35.62500
Maximum	39.30000
Minimum	28.31000
Std. Dev.	3.845108
Skewness	-0.478199
Kurtosis	1.751531
Jarque-Bera	1.442800
Probability	0.486071



Series: TINGKAT_PENGANGGURAN
Sample 2000 2013
Observations 14

Mean	8.958571
Median	9.120000
Maximum	11.38000
Minimum	5.810000
Std. Dev.	1.570438
Skewness	-0.271648
Kurtosis	2.356077
Jarque-Bera	0.414054
Probability	0.812998



Series: KEPADATAN_PENDUDUK
Sample 2000 2013
Observations 14

Mean	118.1429
Median	117.5000
Maximum	130.0000
Minimum	107.0000
Std. Dev.	7.336496
Skewness	0.166592
Kurtosis	1.843659
Jarque-Bera	0.844745
Probability	0.655490

Lampiran 3 Korelasi

	PDRB	KEMISKINAN	EKSPOR	IMPOR	KEPADATAN_ PENDUDUK	TINGKAT_PEN GANGGURAN
PDRB	1.000000	-0.932644	0.963643	0.976393	0.986552	-0.298282
KEMISKINAN	-0.932644	1.000000	-0.893220	-0.927836	-0.915443	0.373636
EKSPOR	0.963643	-0.893220	1.000000	0.984438	0.963749	-0.308438
IMPOR	0.976393	-0.927836	0.984438	1.000000	0.960140	-0.369728
KEPADATAN_ PENDUDUK	0.986552	-0.915443	0.963749	0.960140	1.000000	-0.169630
TINGKAT_PEN GANGGURAN	-0.298282	0.373636	-0.308438	-0.369728	-0.169630	1.000000

Lampiran 4 Output Eviews 10

Dependent Variable: PDRB
Method: FIML
Sample: 2000 2013
Included observations: 14
Covariance type: IV
Instrument specification: EKSPOR IMPOR KEPADATAN_PENDUDUK TINGKAT_PENGANGGURAN

R-squared	0.860374	Mean dependent var	3772812.
Adjusted R-squared	0.818486	S.D. dependent var	2032256.
S.E. of regression	865831.6	Sum squared resid	7.50E+12
Durbin-Watson stat	1.486934	FIML min. eigenvalue	1.028707

Dependent Variable: KEMISKINAN
Method: FIML
Sample: 2000 2013
Included observations: 14
Covariance type: IV
Instrument specification: EKSPOR IMPOR TINGKAT_PENGANGGURAN KEPADATAN_PENDUDUK

R-squared	0.804594	Mean dependent var	34.69286
Adjusted R-squared	0.745972	S.D. dependent var	3.845108
S.E. of regression	1.937981	Sum squared resid	37.55770
Durbin-Watson stat	1.129031	FIML min. eigenvalue	1.000337

Lampiran 5 Estimasi Parameter dengan Metode FIML (Maple 8)

> *restart*;
> *with*(*linalg*) :
>

$Z1trans := matrix(4, 14, [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31, 62124.0, 56320.9, 57158.8, 61058.2, 71584.6, 85660.0, 100798.6, 114100.9, 137020.4, 116510.0, 157779.1, 203496.6, 190020.3, 182551.8, 33514.8, 30962.1, 31288.9, 32550.7, 46524.5, 57700.9, 61065.5, 74473.4, 129197.3, 96829.2, 135663.3, 177435.6, 191689.5, 186628.7]);$

$Z1trans := [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],$
$[38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31],$
$[62124.0, 56320.9, 57158.8, 61058.2, 71584.6, 85660.0, 1.007986\ 10^5, 1.141009\ 10^5, 1.370204\ 10^5, 1.165100\ 10^5, 1.577791\ 10^5, 2.034966\ 10^5, 1.900203\ 10^5, 1.825518\ 10^5],$
$[33514.8, 30962.1, 31288.9, 32550.7, 46524.5, 57700.9, 61065.5, 74473.4, 1.291973\ 10^5, 96829.2, 1.356633\ 10^5, 1.774356\ 10^5, 1.916895\ 10^5, 1.866287\ 10^5]]$

> *Z1* := *transpose*(*Z1trans*);

$$Z1 := \begin{bmatrix} 1 & 38.74 & 62124.0 & 33514.8 \\ 1 & 37.87 & 56320.9 & 30962.1 \\ 1 & 38.39 & 57158.8 & 31288.9 \\ 1 & 37.34 & 61058.2 & 32550.7 \\ 1 & 36.15 & 71584.6 & 46524.5 \\ 1 & 35.10 & 85660.0 & 57700.9 \\ 1 & 39.30 & 1.007986\ 10^5 & 61065.5 \\ 1 & 37.17 & 1.141009\ 10^5 & 74473.4 \\ 1 & 34.96 & 1.370204\ 10^5 & 1.291973\ 10^5 \\ 1 & 32.53 & 1.165100\ 10^5 & 96829.2 \\ 1 & 31.02 & 1.577791\ 10^5 & 1.356633\ 10^5 \\ 1 & 29.96 & 2.034966\ 10^5 & 1.774356\ 10^5 \\ 1 & 28.86 & 1.900203\ 10^5 & 1.916895\ 10^5 \\ 1 & 28.31 & 1.825518\ 10^5 & 1.866287\ 10^5 \end{bmatrix}$$

> *Z1trans_Z1* := *multiply*(*Z1trans*, *Z1*);

$$Z1trans\_Z1 := \begin{bmatrix} 14 & 485.70 & 1.5961842\ 10^6 & 1.2855244\ 10^6 \\ 485.70 & 17042.5238 & 5.303415710\ 10^7 & 4.176918989\ 10^7 \\ 1.5961842\ 10^6 & 5.303415710\ 10^7 & 2.177551859\ 10^{11} & 1.875186175\ 10^{11} \\ 1.2855244\ 10^6 & 4.176918989\ 10^7 & 1.875186175\ 10^{11} & 1.664205379\ 10^{11} \end{bmatrix}$$

Lampiran 5 (Lanjutan)

>

$Y1trans := matrix(1, 14, [1374048.62, 1564471.65, 1750017.54, 1964592.69, 2225418.05, 2686581.71, 3138165.94, 3556333.63, 4271044.59, 4653539.25, 5295073.58, 6028802.27, 6733160.11, 7578118.87]);$

$$Y1trans := [1.37404862\ 10^6, 1.56447165\ 10^6, 1.75001754\ 10^6, 1.96459269\ 10^6, 2.22541805\ 10^6, 2.68658171\ 10^6, 3.13816594\ 10^6, 3.55633363\ 10^6, 4.27104459\ 10^6, 4.65353925\ 10^6, 5.29507358\ 10^6, 6.02880227\ 10^6, 6.73316011\ 10^6, 7.57811887\ 10^6]$$

> $Y1 := transpose(Y1trans);$

$$Y1 := \begin{bmatrix} 1.37404862\ 10^6 \\ 1.56447165\ 10^6 \\ 1.75001754\ 10^6 \\ 1.96459269\ 10^6 \\ 2.22541805\ 10^6 \\ 2.68658171\ 10^6 \\ 3.13816594\ 10^6 \\ 3.55633363\ 10^6 \\ 4.27104459\ 10^6 \\ 4.65353925\ 10^6 \\ 5.29507358\ 10^6 \\ 6.02880227\ 10^6 \\ 6.73316011\ 10^6 \\ 7.57811887\ 10^6 \end{bmatrix}$$

> $Z1trans\_Y1 := multiply(Z1trans, Y1);$

$$Z1trans\_Y1 := \begin{bmatrix} 5.281936850\ 10^7 \\ 1.737711967\ 10^9 \\ 7.357532243\ 10^{12} \\ 6.423683642\ 10^{12} \end{bmatrix}$$

> $invZ1trans\_Z1 := inverse(Z1trans\_Z1);$

$$invZ1trans\_Z1 := [[62.11884438, -1.583337791, 0.00004298616983, -0.0001308808309], [-1.583337636, 0.04131371166, -0.000001978826140, 0.000004091115166], [0.00004298613062, -0.000001978825809, 1.000101938\ 10^{-9}, -9.622824020\ 10^{-10}], [-0.0001308809137, 0.000004091117099, -9.622814633\ 10^{-10}, 1.074468717\ 10^{-9}]]$$

Lampiran 5 (Lanjutan)

> delta[1] := *multiply*(*invZ1trans_Z1*, *Z1trans_Y1*);

$$\delta_1 := \begin{bmatrix} 5.2281830\,10^6 \\ -1.1881047\,10^5 \\ 8.755515 \\ -18.166159 \end{bmatrix}$$

>

> *restart*;

> *with*(*linalg*) :

>

Z2trans := *matrix*(4, 14, [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1374048.62, 1564471.65, 1750017.54, 1964592.69, 2225418.05, 2686581.71, 3138165.94, 3556333.63, 4271044.59, 4653539.25, 5295073.58, 6028802.27, 6733160.11, 7578118.87, 5.81, 8.01, 9.13, 9.94, 10.25, 11.38, 11.02, 10.28, 9.41, 9.11, 8.46, 7.91, 7.43, 7.28, 107, 109, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 120, 121, 125, 127, 128, 130]);

$$Z2trans := [[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1.37404862\,10^6, 1.56447165\,10^6, 1.75001754\,10^6, 1.96459269\,10^6, 2.22541805\,10^6, 2.68658171\,10^6, 3.13816594\,10^6, 3.55633363\,10^6, 4.27104459\,10^6, 4.65353925\,10^6, 5.29507358\,10^6, 6.02880227\,10^6, 6.73316011\,10^6, 7.57811887\,10^6], [5.81, 8.01, 9.13, 9.94, 10.25, 11.38, 11.02, 10.28, 9.41, 9.11, 8.46, 7.91, 7.43, 7.28], [107, 109, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 120, 121, 125, 127, 128, 130]]$$

> *Z2* := *transpose*(*Z2trans*);

$$Z2 := \begin{bmatrix} 1 & 1.37404862\,10^6 & 5.81 & 107 \\ 1 & 1.56447165\,10^6 & 8.01 & 109 \\ 1 & 1.75001754\,10^6 & 9.13 & 111 \\ 1 & 1.96459269\,10^6 & 9.94 & 112 \\ 1 & 2.22541805\,10^6 & 10.25 & 114 \\ 1 & 2.68658171\,10^6 & 11.38 & 115 \\ 1 & 3.13816594\,10^6 & 11.02 & 117 \\ 1 & 3.55633363\,10^6 & 10.28 & 118 \\ 1 & 4.27104459\,10^6 & 9.41 & 120 \\ 1 & 4.65353925\,10^6 & 9.11 & 121 \\ 1 & 5.29507358\,10^6 & 8.46 & 125 \\ 1 & 6.02880227\,10^6 & 7.91 & 127 \\ 1 & 6.73316011\,10^6 & 7.43 & 128 \\ 1 & 7.57811887\,10^6 & 7.28 & 130 \end{bmatrix}$$

> $Z2trans\_Z2 := multiply(Z2trans, Z2);$

$$Z2trans\_Z2 := \begin{bmatrix} 14 & 5.281936850\ 10^{7} & 125.42 & 1654 \\ 5.281936850\ 10^{7} & 2.529684093\ 10^{14} & 4.608103909\ 10^{8} & 6.431449911\ 10^{9} \\ 125.42 & 4.608103909\ 10^{8} & 1155.6456 & 14792.07 \\ 1654 & 6.431449911\ 10^{9} & 14792.07 & 196108 \end{bmatrix}$$

>

$Y2trans := matrix(1, 14, [38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31]);$

$Y2trans := [38.74, 37.87, 38.39, 37.34, 36.15, 35.10, 39.30, 37.17, 34.96, 32.53, 31.02, 29.96, 28.86, 28.31]$

> $Y2 := transpose(Y2trans);$

$$Y2 := \begin{bmatrix} 38.74 \\ 37.87 \\ 38.39 \\ 37.34 \\ 36.15 \\ 35.10 \\ 39.30 \\ 37.17 \\ 34.96 \\ 32.53 \\ 31.02 \\ 29.96 \\ 28.86 \\ 28.31 \end{bmatrix}$$

> $Z2trans\_Y2 := multiply(Z2trans, Y2);$

$$Z2trans\_Y2 := \begin{bmatrix} 485.70 \\ 1.737711967\ 10^{9} \\ 4380.5088 \\ 57046.27 \end{bmatrix}$$

> $invZ2trans\_Z2 := inverse(Z2trans\_Z2);$

$invZ2trans\_Z2 := [[1436.685184, 0.00005385155572, 8.969223151, -14.55980515], [0.00005385154966, 2.055230292\ 10^{-12}, 3.585487805\ 10^{-7}, -5.486377442\ 10^{-7}], [8.969215739, 3.585526883\ 10^{-7}, 0.09466716076, -0.09454696806], [-14.55980461, -5.486378318\ 10^{-7}, -0.09454709608, 0.1479287010]]$

Lampiran 5 (Lanjutan)

> delta[2] := *multiply*(*invZ2trans_Z2*, *Z2trans_Y2*);

$$\delta_2 := \begin{bmatrix} 83.6719 \\ -1.486\ 10^{-8} \\ 0.547844 \\ 0.455393 \end{bmatrix}$$

Lampiran 6 Tabel *Chi Square*

Chi-square Distribution Table

d.f.	.995	.99	.975	.95	.9	.1	.05	.025	.01
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	42.58	46.19	49.48	53.49
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	44.90	48.60	51.97	56.06
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	49.51	53.38	56.90	61.16
42	22.14	23.65	26.00	28.14	30.77	54.09	58.12	61.78	66.21

46	25.04	26.66	29.16	31.44	34.22	58.64	62.83	66.62	71.20
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
55	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	68.80	73.31	77.38	82.29
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
65	39.38	41.44	44.60	47.45	50.88	79.97	84.82	89.18	94.42
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43
75	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	91.06	96.22	100.84	106.39
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33
85	55.17	57.63	61.39	64.75	68.78	102.08	107.52	112.39	118.24
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12
95	63.25	65.90	69.92	73.52	77.82	113.04	118.75	123.86	129.97
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81

RIWAYAT HIDUP

Ummatus Salamah, lahir di Malang pada tanggal 08 Oktober 1996, biasa dipanggil Ummah. Anak kedua dari 2 (dua) bersaudara pasangan Bapak Agus Wanto dan Ibu Pi'ani. Mempunyai satu kakak perempuan yang bernama Nande Katrisnawati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Merjosari 1 Malang lulus pada tahun 2008. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMP Negeri 6 Malang lulus tahun 2011. Selanjutnya menempuh pendidikan formal di SMAI Al- Ma'arif dan non-formal di PPQ Nurul Huda lulus tahun 2014. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Penulis dapat dihubungi melalui gmail: salamahummah@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAUALANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ummatus Salamah
NIM : 14610045
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Estimasi Metode Full Information Maximum Likelihood Pada Data Produk Domestik Regional Bruto (PDRB) Dan Keiskinan Di Indonesia Secara Simultan
Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Achmad Nasichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	25 Mei 2021	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	1.
2	26 mei 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	2.
3	01 Juni 2021	Revisi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	3.
4	10 Juni 2021	Revisi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	4.
5	13 Juni 2021	Konsultasi Bab III, Bab IV, Bab V	5.
6	15 Juni 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan & Kepenulisan pada Bab II	6.
7	18 Juni 2021	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV, Bab V dan Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	7.
8	18 Juni 2021	Konsultasi Keseluruhan	8.
9	18 Juni 2021	Revisi Keseluruhan	9.
10	18 Juni 2021	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 23 Juni 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001