

**PENERAPAN METODE *NEWTON* PADA MODEL MATEMATIKA
INTERAKSI SISTEM IMUN DENGAN *MYCOBACTERIUM
TUBERCULOSIS***

SKRIPSI

**OLEH
INTAN TIKA SITTA WAHYUNI
NIM. 11610003**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENERAPAN METODE *NEWTON* PADA MODEL MATEMATIKA
INTERAKSI SISTEM IMUN DENGAN *MYCOBACTERIUM
TUBERCULOSIS***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Intan Tika Sitta Wahyuni
NIM. 11610003**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENERAPAN METODE *NEWTON* PADA MODEL MATEMATIKA
INTERAKSI SISTEM IMUN DENGAN *MYCOBACTERIUM
TUBERCULOSIS***

SKRIPSI

Oleh
Intan Tika Sitta Wahyuni
NIM. 11610003

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 04 Januari 2016

Pembimbing I, Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENERAPAN METODE *NEWTON* PADA MODEL MATEMATIKA
INTERAKSI SISTEM IMUN DENGAN *MYCOBACTERIUM
TUBERCULOSIS***

SKRIPSI

Oleh
Intan Tika Sitta Wahyuni
NIM. 11610003

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 28 Januari 2016

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

Ketua Penguji : Hairur Rahman, S.Pd, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Intan Tika Sitta Wahyuni

NIM : 11610003

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Metode *Newton* pada Model Matematika
Interaksi Sistem Imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Januari 2016
Yang membuat pernyataan,

Intan Tika Sitta Wahyuni
NIM. 11610003

MOTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

“SABAR DAN IKHLAS ADALAH JALAN TERMUDAH MENUJU
KEBAHAGIAAN”



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Teriring dan rasa syukur atas nikmat,

rahmat, berkah, dan karunia Allah Swt.,

maka penulis persembahkan karya tulis ini untuk:

Ayahanda tercinta Alm. bapak Humaidulloh & ibunda tercinta ibu Aisyah, serta kakak tersayang Eva Ermala, Alex Haris Fauzi, Faruq Fauqi serta keluarga dan kerabat yang selalu memberikan doa dan dukungan.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga dengan segenap tenaga dan pikiran yang telah dikaruniakan-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Penerapan Metode *Newton* pada Model Matematika Interaksi Sistem Imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*”.

Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw, yang telah mengantar manusia dari jaman *jahiliyah* menuju jaman *syar'iyah* yakni agama Islam.

Pada akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, yang semuanya tidak lepas dari bimbingan dan arahan juga dukungan beberapa pihak antara lain:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Drs. H. Turmuzi, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan arahan selama penulis menempuh kuliah.
6. Seluruh dosen dan staf administrasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah bersabar dalam memberikan ilmu dan bimbingannya.
7. Keluarga tercinta, ayahanda Alm. Humaidulloh, ibunda Aisyah, serta Eva Ermala, Alex Haris Fauzi, dan Faruq Fauqi yang memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2011, dan adik-adik tingkat yang telah memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman di Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Pagar Nusa Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 04 Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvii
ABSTRACT	xviii
ملخص	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial Biasa	9
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa	10
2.3 Matriks Jacobian	11
2.4 <i>Norm</i>	11
2.4.1 <i>Norm</i> l_2	12
2.4.2 <i>Norm</i> l_∞	12
2.5 Metode <i>Newton</i>	13
2.6 <i>Mycobacterium Tuberculosis</i>	26
2.7 Sistem Imun	27

2.8 Makrofag	28
2.9 Sel T CD4 ⁺	28
2.10 Sel T CD8 ⁺	29
2.11 Bakteri Ekstraseluler dan Bakteri Intraseluler	30
2.11.1 Bakteri Ekstraseluler	30
2.11.2 Bakteri Intraseluler	30
2.12 Kajian Agama	30

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Analisis Struktur Model	33
3.2 Nilai Awal dan Parameter Model	40
3.3 Penerapan Metode <i>Newton</i> pada Model Matematika	42
3.4 Pandangan Islam tentang Penerapan Metode <i>Newton</i> pada Model Matematika Interaksi Sistem Imun dengan <i>Mycobacterium</i> <i>tuberculosis</i>	85

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	87
4.2 Saran	88

DAFTAR PUSTAKA	89
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

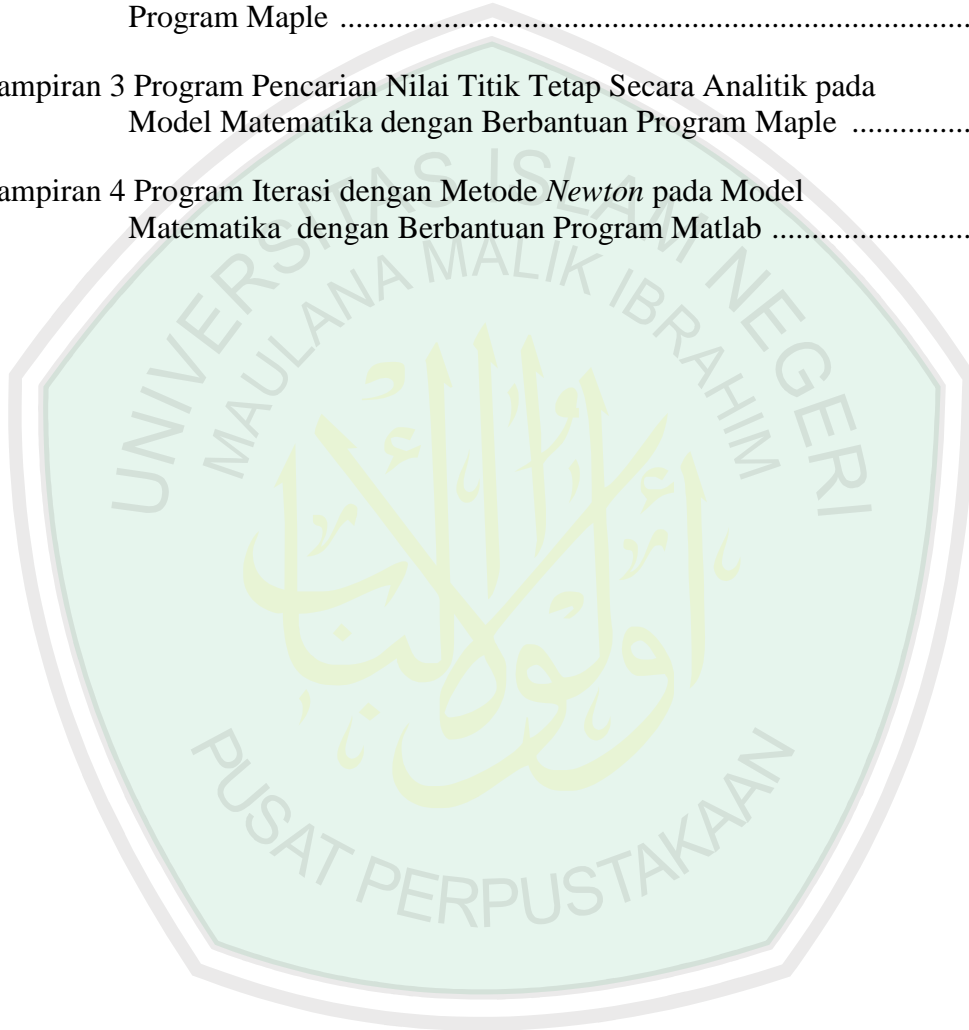
Tabel 2.1 Tabel Parameter pada Model Dinamik SIRC	15
Tabel 2.2 Tabel Nilai Awal.....	15
Tabel 2.3 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> Sampai Iterasi Kedua pada Saat $k = 1, 2$	24
Tabel 2.4 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> Sampai Iterasi Kelima pada Saat $k = 1, 2, 3, 4, 5$	25
Tabel 2.5 Tabel Perbandingan Nilai Titik Tetap dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> dan Nilai Eksak	26
Tabel 3.1 Tabel Nilai Awal.....	40
Tabel 3.2 Tabel Nilai Parameter	41
Tabel 3.3 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> Sampai Iterasi Ketiga pada Saat $k = 1, 2, 3$	80
Tabel 3.4 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> Sampai Iterasi Keenam pada Saat $k = 1, 2, 3, \dots, 6$	81
Tabel 3.5 Tabel Perbandingan Nilai Titik Tetap dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> dan Nilai Eksak	85

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> pada Variabel x_1 dengan Nilai Awal 200	82
Gambar 3.2 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> pada Variabel x_2 dengan Nilai Awal 1800	82
Gambar 3.3 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> pada Variabel x_3 dengan Nilai Awal 500	83
Gambar 3.4 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> pada Variabel x_4 dengan Nilai Awal 140	83
Gambar 3.5 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> pada Variabel x_5 dengan Nilai Awal 1000	84
Gambar 3.6 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> pada Variabel x_6 dengan Nilai Awal 36000	84

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Daftar Istilah	Error! Bookmark no
Lampiran 2 Program Pencarian Matriks Jacobian dengan Berbantuan Program Maple	Error! Bookmark no
Lampiran 3 Program Pencarian Nilai Titik Tetap Secara Analitik pada Model Matematika dengan Berbantuan Program Maple	Error! Bookmark no
Lampiran 4 Program Iterasi dengan Metode <i>Newton</i> pada Model Matematika dengan Berbantuan Program Matlab	Error! Bookmark no



DAFTAR SIMBOL

- α_{19} : Laju pertumbuhan bakteri intraseluler
- α_{20} : Laju pertumbuhan bakteri ekstraseluler
- α_T : Laju rekrutmen oleh makrofag terinfeksi
- $B_E(t)$: Jumlah populasi bakteri ekstraseluler pada waktu t ($B_E(t)$)
- $B_I(t)$: Jumlah populasi bakteri intraseluler pada waktu t ($B_I(t)$)
- c_4 : Setengah saturasi, rasio T/MI untuk melisis makrofag terinfeksi
- c_9 : Setengah saturasi, bakteri ekstraseluler pada infeksi makrofag *resting*
- k_2 : Laju infeksi pada makrofag *resting*
- k_3 : Laju aktivasi pada makrofag *resting*
- k_{3A} : Laju aktivasi pada makrofag terinfeksi
- k_4 : Laju deaktivasi pada makrofag teraktivasi
- k_5 : Laju pengambilan B_E oleh makrofag teraktivasi
- k_{14a} : Fas-FasL induksi apoptosis dari makrofag terinfeksi
- k_{14b} : Induksi apoptosis dari makrofag terinfeksi
- k_{17} : Kematian maksimal pada makrofag terinfeksi akibat bakteri intraseluler
- $M_A(t)$: Jumlah populasi makrofag teraktivasi pada waktu t ($M_A(t)$)
- $M_I(t)$: Jumlah populasi makrofag terinfeksi pada waktu t ($M_I(t)$)
- M_R : Populasi makrofag *resting*
- μ_{M_A} : Laju kematian pada makrofag teraktivasi
- μ_{M_I} : Laju kematian pada makrofag terinfeksi
- μ_C : Laju kematian pada sel T CD8⁺
- μ_I : Pergantian bakteri intraseluler pada bakteri ekstraseluler yang seharusnya untuk kematian makrofag terinfeksi

- μ_T : Laju kematian pada sel T CD4⁺
 n_3 : Batas ambang makrofag *resting* menjadi terinfeksi
 N : Kapasitas maksimum bakteri pada makrofag terinfeksi
 N_{fracc} : Rata-rata jumlah bakteri pada makrofag terinfeksi tunggal yang dilepaskan pada Fas-FasL apoptosis
 p_1 : Proliferasi sel T CD4⁺
 p_2 : Proliferasi sel T CD8⁺
 S_1 : Laju sumber sel T CD4⁺
 S_2 : Laju sumber sel T CD8⁺
 S_C : Konstanta saturasi sel T CD8⁺
 S_T : Konstanta saturasi sel T CD4⁺
 $T_4(t)$: Jumlah populasi sel T CD4⁺ pada waktu t ($T_4(t)$)
 $T_8(t)$: Jumlah populasi sel T CD8⁺ pada waktu t ($T_8(t)$)
 w_3 : Persentase maksimal untuk Fas-FasL kontribusi oleh Th1 apoptosis dari makrofag terinfeksi

ABSTRAK

Wahyuni, Intan Tika Sitta. 2016. **Penerapan Metode *Newton* pada Model Matematika Interaksi Sistem Imun dengan *Mycobacterium tuberculosis***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: model *Mycobacterium tuberculosis*, makrofag, sel T, bakteri, metode *Newton*.

Model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis* berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier. Model tersebut terdiri dari enam variabel bergantung yaitu dua populasi makrofag (makrofag teraktivasi dan makrofag terinfeksi), dua populasi sel T (sel T CD4⁺ dan sel T CD8⁺), dua populasi bakteri (bakteri ekstraseluler dan bakteri intraseluler), dan tanpa melibatkan enam sitokin yaitu IL-2, IL-4, IL-10, IL-12, TNF- α , dan IFN- γ . Selanjutnya model tersebut dianalisis menggunakan metode *Newton* untuk mengetahui *norm* maksimal yang lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan sehingga didapatkan nilai titik tetap yang mendekati nilai eksaknya. Dalam penelitian ini toleransi yang ditentukan sebesar 10^{-6} .

Dalam pembahasan ini, telah didapatkan hasil bahwa nilai *norm* maksimal $4.92590743306209 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ pada iterasi kelima sehingga didapatkan nilai titik tetap dengan menggunakan metode *Newton* yaitu

$$x_1 = 3623.46219625819, x_2 = 1858.60898734694,$$

$$x_3 = 10084.0896747896, x_4 = 250.186962193356,$$

$$x_5 = 18830.0715887508, x_6 = 95947.4578256026$$

yang mendekati nilai eksaknya yaitu

$$x_1 = 3623.462196, x_2 = 1858.608987, x_3 = 10084.08967,$$

$$x_4 = 250.1869622, x_5 = 18830.07159, x_6 = 95947.45783.$$

ABSTRACT

Wahyuni, Intan Tika Sitta. 2016. **Application of the Newton's Method on the Immune System Interaction Mathematical Models with Mycobacterium Tuberculosis**. Thesis. Department Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Key Words: Mycobacterium tuberculosis models, macrophages, T cells, bacterium, Newton's Method.

Mathematical models of interaction of the immune system with Mycobacterium tuberculosis is in the form of nonlinear system of ordinary differential equations. The models consists of six dependent variables namely two populations of macrophages (macrophage activation and macrophage infection), two populations of T cells (T CD4⁺ cells and T CD8⁺ cells), two populations of bacteria (extracellular and intracellular), and without involving six cytokines, namely IL-2, IL-4, IL-10, IL-12, TNF- α , and IFN- γ . The next step is to analyze the models using Newton's method for determine the maximum norm smaller than the given tolerance to obtain the value of the fixed point approaching its exact value. In this study the value of tolerance is 10^{-6} .

In this discussion, it has been showed that the maximum value of norm $4.92590743306209 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ on the fifth iteration to obtain the value of the fixed point with Newton's method namely

$$x_1 = 3623.46219625819, x_2 = 1858.60898734694,$$

$$x_3 = 10084.0896747896, x_4 = 250.186962193356,$$

$$x_5 = 18830.0715887508, x_6 = 95947.4578256026$$

has been approaching its exact value namely

$$x_1 = 3623.462196, x_2 = 1858.608987, x_3 = 10084.08967,$$

$$x_4 = 250.1869622, x_5 = 18830.07159, x_6 = 95947.45783.$$

ملخص

وحيوني، إنتان تيك ستة. ٢٠١٦ . تطبيق طريقة نيوتن على نماذج رياضي للتفاعل الجهاز المناعي بـ *Mycobacterium tuberculosis*. بحث جامعي. شعبة الرياضية كلية العلوم و تكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. مشرف (١) الدكتور عثمان فاجالي الماجستير. (٢) الدكتور عبدالشكر الماجستير.

الكلمة الرئيسية: نماذج *Mycobacterium tuberculosis*، macrophages، خلايا تي T، والبكتيريا، طريقة نيوتن.

نموذج رياضي للتفاعل الجهاز المناعي مع نسلية نظام المعادلة التفاضلية العادية غير خطيم. تتكون نماذج من ستة متغيرات المتعمدة وهي سكانا macrophages (macrophages منشط و مصابة)، و سكانا الخلايا T (خلايا $CD4^+$ و خلايا $CD8^+$)، سكانا البكتيريا (بكتيرية الخلية الخاجة والراخلة)، ودون إشراك ستة السيتوكينات وهي $IL-2$ ، $IL-4$ ، $IL-10$ ، $IL-12$ ، $TNF-\alpha$ ، و $IFN-\alpha$. ثم تم تحليل نماذج المقبل با استخدام طريقة نيوتن لتحديد الحد الأقصى عادي أصغر من التسامح نظرا إلى الحصول على قيمة نقطة ثابتة تقترب قيمتها بالضبط. في هذه الدراسة تحديد قيمة التسامح هي 10^{-6} .

في هذه المناقشة، وقد أظهرت أن الحد الأقصى لقيمة نورم $10^{-6} < 4.92590743306209 \times 10^{-7}$ على التكرار الخامس للحصول على قيمة النقطة الثابتة باستخدام طريقة نيوتن، وهي

$$\begin{aligned}x_2 &= 1858.60898734694 & x_1 &= 3623.46219625819 \\x_4 &= 250.186962193356 & x_3 &= 10084.0896747896 \\x_6 &= 95947.4578256026 & x_5 &= 18830.0715887508\end{aligned}$$

تقترب قيمتها بالضبط هي

$$\begin{aligned}x_3 &= 10084.08967 & x_2 &= 1858.608987 & x_1 &= 3623.462196 \\x_6 &= 95947.45783 & x_5 &= 18830.07159 & x_4 &= 250.1869622\end{aligned}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

وَوَضَعَ الْمِيزَانَ ﴿٧﴾ أَلَّا تَطْغَوْا فِي الْمِيزَانِ ﴿٨﴾

“Dan Dia meletakkan neraca (keadilan). Supaya kamu jangan melampaui batas tentang neraca itu” (Qs. ar-Rahman/55:7-8).

وَوَضَعَ الْمِيزَانَ (Dan meletakkan neraca) yaitu menetapkan keadilan.

أَلَّا تَطْغَوْا (Supaya kalian jangan melampaui batas) agar kalian jangan berbuat curang, فِي الْمِيزَانِ (dalam timbangan itu) maksudnya dalam menimbang sesuatu dengan menggunakan timbangan itu (Al-Mahalli dan Al-Suyuthi, 2009:2338). Kata keadilan pada ayat di atas dapat diartikan sebagai ketetapan Allah Swt. yang tidak dapat diubah oleh suatu apapun. Manusia hanya dapat mengupayakan atau berusaha, dan Allah Swt. tidak akan memberikan suatu ketetapan di luar kemampuan manusia. Maka yang harus dilakukan manusia adalah berupaya mendekati diri kepada-Nya, dan manusia dilarang untuk berlebihan melampaui batas.

Merujuk pada ayat di atas, penelitian ini menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan suatu fenomena masalah yang dimodelkan sebagai model matematika. Metode numerik adalah suatu cara yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*). Operasi hitungan dilakukan dengan iterasi dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Hasil dari

penyelesaian numerik tersebut merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitis atau eksak. Karena merupakan nilai pendekatan, maka terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan (Triatmodjo, 2002:1). Salah satu metode numerik yang digunakan untuk mencari titik tetap adalah metode *Newton*.

الأَتَطْعَوَا dimaknai sebagai nilai kesalahan atau *norm* maksimal yang tidak boleh melebihi tingkat kesalahan atau toleransi yang ditetapkan. Dengan kata lain, perhitungan dalam metode *Newton* adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang sehingga didapatkan nilai titik tetap yang mendekati nilai eksaknya ketika *norm* maksimal lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan.

Model yang dimaksud dalam penelitian ini adalah model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis* yang berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Model ini disajikan dalam enam variabel yang bergantung dengan waktu yaitu $M_A(t), M_I(t), T_4(t), T_8(t), B_E(t), B_I(t)$. Sementara parameter yang digunakan diantaranya adalah S_1 (laju sumber sel T CD4⁺) sebesar 100, S_2 (laju sumber sel T CD8⁺) sebesar 100, S_C (konstanta saturasi sel T CD8⁺) sebesar 1500000, S_T (konstanta saturasi sel T CD4⁺) sebesar 1500000, p_1 (proliferasi sel T CD4⁺) sebesar 0.03, p_2 (proliferasi sel T CD8⁺) sebesar 0.01, α_T (laju rekrutmen oleh makrofag terinfeksi) sebesar 0.3, μ_C (laju kematian pada sel T CD8⁺) sebesar 0.68, μ_T (laju kematian pada sel T CD4⁺) sebesar 0.01 (Magombedze, dkk, 2006:674), M_R (populasi makrofag *resting*) sebesar 5000 (Friedman, dkk, 2008:23), c_4 (setengah saturasi, rasio T/MI untuk melisis makrofag terinfeksi) sebesar 40, c_9 (setengah saturasi, bakteri ekstraseluler pada infeksi makrofag *resting*) sebesar 2000000, k_2 (laju infeksi pada makrofag

resting) sebesar 0.4, k_3 (laju aktivasi pada makrofag *resting*) sebesar 0.1, k_{3A} (laju aktivasi pada makrofag terinfeksi) sebesar 0.023415, k_4 (laju deaktivasi pada makrofag teraktivasi) sebesar 0.08, k_5 (laju pengambilan B_E oleh makrofag teraktivasi) sebesar 0.000081301, k_{14a} (Fas-FasL induksi apoptosis dari makrofag terinfeksi) sebesar 0.1, k_{14b} (induksi apoptosis dari makrofag terinfeksi) sebesar 0.1, k_{17} (kematian maksimal pada makrofag terinfeksi akibat bakteri intraseluler) sebesar 0.02, α_{19} (laju pertumbuhan bakteri intraseluler) sebesar 0.4, α_{20} (laju pertumbuhan bakteri ekstraseluler) sebesar 0.05, μ_{MA} (laju kematian pada makrofag teraktivasi) sebesar 0.07, μ_{MI} (laju kematian pada makrofag terinfeksi) sebesar 0.0011, μ_I (pergantian bakteri intraseluler pada bakteri ekstraseluler yang seharusnya untuk kematian makrofag terinfeksi) sebesar 0.004, w_3 (persentase maksimal untuk Fas-FasL kontribusi oleh Th1 apoptosis dari makrofag terinfeksi) sebesar 0.4, n_3 (batas ambang makrofag *resting* menjadi terinfeksi) sebesar 10, N (kapasitas maksimum bakteri pada makrofag terinfeksi) sebesar 20, N_{frac} (rata-rata jumlah bakteri pada makrofag terinfeksi tunggal yang dilepaskan pada Fas-FasL apoptosis) sebesar 0.1 (Pagalay, dkk, 2014:12-14).

Penyakit TB hingga kini masih menjadi masalah kesehatan utama di dunia yang dapat menyerang semua golongan umur, dan dapat menular melalui udara. Akan tetapi Allah Swt. menurunkan al-Quran sebagai penawar (obat) bagi orang-orang yang beriman. Seperti yang telah dijelaskan pada al-Quran surat al-Isra'/17:82, yaitu:

وَنُنَزِّلُ مِنَ الْقُرْآنِ مَا هُوَ شِفَاءٌ وَرَحْمَةٌ لِّلْمُؤْمِنِينَ وَلَا يَزِيدُ الظَّالِمِينَ إِلَّا

خَسَارًا

“Dan Kami turunkan dari al-Quran (sesuatu) yang menjadi penawar dan rahmat bagi orang yang beriman, sedangkan bagi orang yang zalim (al-Quran itu) hanya akan menambah kerugian” (QS. al-Isra’/17:82).

Penelitian ini berusaha menyelesaikan model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis* dengan menggunakan penerapan metode *Newton* untuk mengetahui nilai *norm* maksimal yang lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan pada iterasi yang berulang-ulang sehingga didapatkan nilai titik tetap yang mendekati nilai eksaknya. Manfaat dari penelitian ini adalah pembaca mampu memahami mengenai penerapan metode *Newton* pada model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji tentang model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis* yang melibatkan dua populasi makrofag yaitu makrofag teraktivasi dan makrofag terinfeksi, dua populasi sel T yaitu sel T CD4⁺ dan sel T CD8⁺, dua populasi bakteri yaitu bakteri ekstraseluler dan bakteri intraseluler, dan tanpa melibatkan enam sitokin yaitu IL-12, IL-4, IL-10, IL-2, TNF- α , dan IFN- γ . Dalam model ini konsentrasi sitokin diabaikan karena tidak berpengaruh nyata dan juga sitokin dapat diproduksi oleh makrofag dan limfosit T. Oleh karena itu, penulis mengangkat tema tulisan ini dengan judul “Penerapan Metode *Newton* pada Model Matematika Interaksi Sistem Imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*“.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana penerapan metode *Newton* pada model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penerapan metode *Newton* pada model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi penulis, untuk memperdalam pengetahuan mengenai penerapan metode *Newton* pada model matematika.
2. Bagi pembaca, sebagai tambahan wawasan dan informasi mengenai penerapan metode *Newton* pada model matematika.
3. Bagi lembaga, sebagai bahan informasi tentang pembelajaran mata kuliah pemodelan matematika dan sebagai tambahan bahan kepustakaan.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan yang diselesaikan berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear yaitu:

$$\frac{dM_A(t)}{dt} = k_3 M_R - k_4 M_A(t) + k_{3A} M_I(t) - \mu_{M_A} M_A(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_I(t)}{dt} = & k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17} M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) - k_{14b} M_I(t) \\ & + k_4 M_A(t) - k_{3A} M_I(t) - k_{14a} N \cdot N_{fracc} \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) \\ & - \mu_{M_I} M_I(t) \end{aligned}$$

(Pagalay, dkk, 2014:6).

$$\begin{aligned} \frac{dT_4(t)}{dt} = & S_1 + p_1 \left(\frac{M_A(t) + \alpha_T M_I(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_T} \right) T_4(t) - \mu_T T_4(t) \\ \frac{dT_8(t)}{dt} = & S_2 + p_2 \left(\frac{(M_A(t) + \alpha_T M_I(t)) T_4(t) T_8(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_C} \right) - \mu_C T_8(t) \end{aligned}$$

(Magombedze, dkk, 2006:666).

$$\begin{aligned} \frac{dB_E(t)}{dt} = & \alpha_{20} B_E(t) - k_5 M_A(t) B_E(t) - n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) + k_{14a} N \cdot N_{fracc} \\ & \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) + k_{17} N \cdot M_I(t) \\ & \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + k_{14b} N \cdot M_I(t) + \mu_I B_I(t) \\ \frac{dB_I(t)}{dt} = & \alpha_{19} B_I(t) \left(1 - \frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17} N \\ & \cdot M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) - k_{14a} N \\ & \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) - k_{14b} N \cdot M_I(t) - \mu_I B_I(t) \end{aligned}$$

(Pagalay, dkk, 2014:8-9).

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian ini mengikuti pada langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menganalisis struktur model.

2. Menerapkan metode *Newton* pada model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*.
3. Interpretasi dan pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah dan mudah untuk dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab pendahuluan membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab dua memberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang dibahas, yaitu persamaan diferensial biasa, sistem persamaan diferensial biasa, matriks Jacobian, *norm*, metode *Newton*, *Mycobacterium tuberculosis*, sistem imun, makrofag, sel T CD4⁺, sel T CD8⁺, bakteri ekstraseluler dan bakteri intraseluler, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini membahas tentang analisis struktur model, nilai awal dan parameter model, penerapan metode *Newton* pada model matematika, dan pandangan Islam tentang penerapan metode *Newton* pada model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*.

Bab IV Penutup

Pada bab empat menjelaskan tentang kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian dalam skripsi ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang mengandung turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984:4). Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial biasa:

$$\frac{dM_A(t)}{dt} = k_3 M_R - k_4 M_A(t) \quad (2.1)$$

dengan M_A merupakan variabel bebas sedangkan t merupakan variabel terikat. Sedangkan k_3 , M_R dan k_4 merupakan nilai parameter yang diberikan. Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial biasa linear. Persamaan diferensial biasa linear merupakan persamaan diferensial biasa yang berpangkat satu dalam variabel bebas dan turunan-turunannya. Sedangkan persamaan diferensial biasa nonlinear merupakan persamaan diferensial biasa yang bukan persamaan diferensial biasa linear (Ross, 1984:6). Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial biasa nonlinear:

$$\frac{dB_I(t)}{dt} = \alpha_{19} B_I(t) \left(1 - \frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dikatakan nonlinear karena mengandung B_I^2 yang berarti peubah tak bebas B_I berderajat lebih dari satu.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Sistem persamaan diferensial biasa adalah sistem yang memuat n persamaan diferensial biasa, dengan n fungsi yang tidak diketahui, dengan $n \geq 2$ (Finizio dan Ladas, 1988:132). Sistem persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial biasa linear dan nonlinear. Sistem persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan biasa yang terdiri atas lebih dari satu persamaan biasa yang saling terikat (Aliyah, 2007:12). Sistem persamaan diferensial biasa nonlinear memiliki bentuk sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dM_A(t)}{dt} &= k_3 M_R - k_4 M_A(t) + k_{3A} M_I(t) - \mu_{M_A} M_A(t) \\ \frac{dM_I(t)}{dt} &= k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17} M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) - k_{14b} M_I(t) \\ &\quad + k_4 M_A(t) - k_{3A} M_I(t) - k_{14a} N \cdot N_{fracc} \\ &\quad \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) - \mu_{M_I} M_I(t) \\ \frac{dT_4(t)}{dt} &= S_1 + p_1 \left(\frac{M_A(t) + \alpha_T M_I(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_T} \right) T_4(t) - \mu_T T_4(t) \\ \frac{dT_8(t)}{dt} &= S_2 + p_2 \left(\frac{(M_A(t) + \alpha_T M_I(t)) T_4(t) T_8(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_C} \right) - \mu_C T_8(t) \\ \frac{dB_E(t)}{dt} &= \alpha_{20} B_E(t) - k_5 M_A(t) B_E(t) - n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) + k_{14a} N \cdot N_{fracc} \\ &\quad \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) + k_{17} N \cdot M_I(t) \\ &\quad \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + k_{14b} N \cdot M_I(t) + \mu_I B_I(t) \\ \frac{dB_I(t)}{dt} &= \alpha_{19} B_I(t) \left(1 - \frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) \end{aligned}$$

$$-k_{17}N \cdot M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) - k_{14a}N$$

$$\left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3T_8(t))}{c_4M_I(t) + (T_4(t) + w_3T_8(t))} \right) - k_{14b}N \cdot M_I(t) - \mu_I B_I(t)$$

2.3 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial pertama dari beberapa fungsi. Misalkan terdapat tiga persamaan dengan tiga variabel sebagai berikut:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

maka bentuk dari matriks Jacobian berukuran 3×3 dari persamaan di atas adalah:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

(Anggraini, dkk, 2013:13-14).

2.4 Norm

Norm vektor pada \mathbb{R}^n adalah suatu fungsi, $\|\cdot\|$, dari \mathbb{R}^n ke \mathbb{R} yang memiliki sifat-sifat berikut:

- (1) $\|x\| \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}^n$
- (2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{R}^n$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^n$

Vektor di \mathbb{R}^n adalah vektor kolom dan akan lebih mudah untuk menggunakan notasi *transpose*. Sebagai contoh, vektor

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

akan ditulis $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ (Burden, 2005:432). Ada dua jenis *norm* vektor yaitu *norm* l_2 dan l_∞ .

2.4.1 Norm l_2

Norm l_2 untuk vektor x disebut *Norm Euclidean* karena mewakili panjang vektor yang dilambangkan oleh

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

(Remani, 2013:5).

Contoh 1: Menentukan *norm* l_2 pada vektor *norm* $x = (-1, 1, -2)^T$.

Penyelesaian: Vektor $x = (-1, 1, -2)^T$ di \mathbb{R}^3 memiliki *norm*

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

(Burden, 2005:434).

2.4.2 Norm l_∞

Norm l_∞ merupakan nilai absolut dari komponen terbesar dalam vektor x . *Norm* l_∞ memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(Remani, 2013:5).

Contoh 2: Menentukan *norm* l_∞ pada vektor *norm* $x = (-1, 1, -2)^T$.

Penyelesaian: Vektor $x = (-1, 1, -2)^T$ di \mathbb{R}^3 memiliki *norm*

$$\|x\|_{\infty} = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2$$

(Burden, 2005:434).

2.5 Metode Newton

Untuk menurunkan metode *Newton* untuk sistem, ambil $x^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ sebagai nilai awal pendekatan untuk penyelesaian dan ekspansi kedua komponen fungsi dalam deret Taylor pada titik tersebut:

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + (x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ + (x_2 - x_2^{(0)}) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + R_1$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + (x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ + (x_2 - x_2^{(0)}) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + R_2$$

Diberikan $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$, maka:

$$0 = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + (x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ + (x_2 - x_2^{(0)}) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \tag{2.3}$$

$$0 = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + (x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ + (x_2 - x_2^{(0)}) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

Sehingga persamaan (2.3) dapat ditulis dalam suatu persamaan matriks vektor sebagai berikut:

$$0 = f(x^{(0)}) + J(x^{(0)})(x - x^{(0)})$$

dengan

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T, x = (x_1, x_2)^T, J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk menyelesaikan x dapat dilakukan dengan mengalikan J^{-1} :

$$x = x^{(0)} - \left((J(x^{(0)}))^{-1} f(x^{(0)}) \right) \text{ atau}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \left((J(x^{(n)}))^{-1} f(x^{(n)}) \right)$$

(Epperson, 2013:469-470).

Adapun langkah-langkah dalam metode *Newton* adalah sebagai berikut:

- Langkah 1 Diberikan $k = 1$.
- Langkah 2 Ketika ($k \leq N$) lakukan langkah-langkah (3-7).
- Langkah 3 Menghitung $F(x)$ dan $J(x)$, dengan $J(x)_{i,j} = (\partial f_i(x) / \partial x_j)$ untuk $1 \leq i, j \leq n$.
- Langkah 4 Menyelesaikan sistem linear $J(x)y = -F(x)$.
- Langkah 5 Diberikan $x = x + y$.
- Langkah 6 Jika $\|y\|$ lebih besar dari toleransi yang ditetapkan maka iterasi dilanjutkan dan jika $\|y\|$ lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan maka iterasi dihentikan.
- Langkah 7 Diberikan $k = k + 1$.
- Langkah 8 Jika $\|y\|$ lebih kecil dari toleransi, maka iterasi dihentikan.

(Burden, 2005:641).

Contoh 3: Diberikan

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \gamma C(t) \quad (2.4)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) + \sigma\beta C(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \quad (2.5)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = (1 - \sigma)\beta C(t)I(t) + \alpha I(t) - (\mu + \delta)R(t) \quad (2.6)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta R(t) - \beta C(t)I(t) - (\mu + \gamma)C(t) \quad (2.7)$$

Tabel 2.1 Tabel Parameter pada Model Dinamik SIRC

Parameter	Nilai	Satuan
μ	0.025	Pertahun
α	182.5	Pertahun
δ	1	Pertahun
γ	0.5	Pertahun
σ	1	Pertahun
β	100	Pertahun

Tabel 2.2 Tabel Nilai Awal

Variabel	Nilai
$S(0)$	0.15
$I(0)$	0.001
$R(0)$	0.409
$C(0)$	0.44

(Novitasari, dkk, 2013:2-5).

Model dinamik SIRC berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Oleh karena itu diasumsikan $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0$. Variabel yang digunakan pada model tersebut dapat dimisalkan dengan $S = x_1, I = x_2, R = x_3, C = x_4$ dan parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 2.1, maka persamaan (2.4-2.7) dapat ditulis sebagai berikut:

$$0.025 - 0.025x_1 - 100x_1x_2 + 0.5x_4 = 0 \quad (2.8)$$

$$100x_1x_2 + 1 \cdot 100x_4x_2 - (0.025 + 182.5)x_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$(1 - 1)100x_4x_2 + 182.5x_2 - (0.025 + 1)x_3 = 0 \quad (2.10)$$

$$1x_3 - 100x_4x_2 - (0.025 + 0.5)x_4 = 0 \quad (2.11)$$

Karena persamaan (2.8-2.11) tersebut mengandung empat variabel x_1, x_2, x_3 dan x_4 , maka dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = [f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)]^T$$

atau

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix}$$

dengan

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.025 - 0.025x_1 - 100x_1x_2 + 0.5x_4 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 100x_1x_2 + 1 \cdot 100x_4x_2 - (0.025 + 182.5)x_2 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 1)100x_4x_2 + 182.5x_2 - (0.025 + 1)x_3 = 0$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1x_3 - 100x_4x_2 - (0.025 + 0.5)x_4 = 0$$

Matriks Jacobian dari persamaan (2.8-2.11) adalah sebagai berikut:

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.025 - 100I & -100S & 0 & 0.5 \\ 100I & 100S + 100C - 182.525 & 0 & 100I \\ 0 & 182.5 & -1.025 & 0 \\ 0 & -100C & 1 & -100I - 0.525 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai titik tetap dengan menggunakan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya dapat dilakukan dengan iterasi dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Karena merupakan nilai pendekatan, maka terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan (Triatmodjo, 2002:1). Untuk iterasi pertama yang dilakukan yaitu pada saat $k = 1$, iterasi kedua pada saat $k = 2$, dan seterusnya.

Iterasi pertama, $k = 1$

Diberikan nilai awal $x^{(0)} = (0.15, 0.001, 0.409, 0.44)^T$ atau

$$= \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.001 \\ 0.409 \\ 0.44 \end{bmatrix}$$

Nilai awal di atas dapat disubstitusikan ke dalam masing-masing persamaan (2.8-2.11). Didefinisikan

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ f_2(x^{(0)}) \\ f_3(x^{(0)}) \\ f_4(x^{(0)}) \end{bmatrix}$$

dengan

$$f_1(0.15, 0.001, 0.409, 0.44)$$

$$= 0.025 - 0.025(0.15) - 100(0.15)(0.001) + 0.5(0.44)$$

$$= 0.226250000000000$$

$$f_2(0.15, 0.001, 0.409, 0.44)$$

$$= 100(0.15)(0.001) + 1 \cdot 100(0.44)(0.001) - (0.025 + 182.5)(0.001)$$

$$= -0.123525000000000$$

$$f_3(0.15, 0.001, 0.409, 0.44)$$

$$= (1 - 1)100(0.44)(0.001) + 182.5(0.001) - (0.025 + 1)(0.409)$$

$$= -0.2367250000000000$$

$$f_4(0.15, 0.001, 0.409, 0.44)$$

$$= 1(0.409) - 100(0.44)(0.001) - (0.025 + 0.5)(0.44)$$

$$= 0.1340000000000000$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2262500000000000 \\ -0.1235250000000000 \\ -0.2367250000000000 \\ 0.1340000000000000 \end{bmatrix}$$

Nilai awal di atas juga disubstitusikan pada matriks Jacobian dari persamaan (2.8-

2.11). Matriks Jacobian tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.025 - 100(0.001) & & -100(0.15) & & 0 & & 0.5 \\ 100(0.001) & & 100(0.15) + 100(0.44) - 182.525 & & 0 & & 100(0.001) \\ 0 & & 182.5 & & -1.025 & & 0 \\ 0 & & -100(0.44) & & 1 & & -100(0.001) - 0.525 \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{1,1} = -0.0012500000000000$$

$$a_{3,1} = 0$$

$$a_{1,2} = -0.1500000000000000$$

$$a_{3,2} = 1.8250000000000000$$

$$a_{1,3} = 0$$

$$a_{3,3} = -0.0102500000000000$$

$$a_{1,4} = 0.0050000000000000$$

$$a_{3,4} = 0$$

$$a_{2,1} = 0.0010000000000000$$

$$a_{4,1} = 0$$

$$a_{2,2} = -1.2352500000000000$$

$$a_{4,2} = -0.4400000000000000$$

$$a_{2,3} = 0$$

$$a_{4,3} = 0.0100000000000000$$

$$a_{2,4} = 0.0010000000000000$$

$$a_{4,4} = -0.0062500000000000$$

Sedangkan invers dari hasil matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

$$a_{1,1} = -28.870051089698009$$

$$a_{3,1} = -5.035676561253751$$

$$a_{1,2} = -26.087563862122511$$

$$a_{3,2} = -6.294595701567188$$

$$a_{1,3} = -26.604927892388304$$

$$a_{3,3} = -5.888464937808537$$

$$a_{1,4} = -27.270051089698011$$

$$a_{3,4} = -5.035676561253750$$

$$a_{2,1} = -0.028282566987864$$

$$a_{4,1} = -6.065989782060409$$

$$a_{2,2} = -0.035353208734829$$

$$a_{4,2} = -7.582487227575510$$

$$a_{2,3} = -0.027592748280842$$

$$a_{4,3} = -7.479014421522351$$

$$a_{2,4} = -0.028282566987864$$

$$a_{4,4} = -7.665989782060408$$

Setelah diperoleh hasil dari masing-masing persamaan $(F(x^{(0)}))$ dan matriks Jacobian $(J(x^{(0)}))$ dari persamaan (2.8-2.11), kemudian dibuktikan dengan sistem linear berikut:

$$J(x^{(0)}) \cdot y^{(0)} = -F(x^{(0)}).$$

Karena yang dicari adalah $y^{(0)}$, maka yang dihitung adalah invers dari matriks

Jacobian $(J(x^{(0)}))^{-1}$ dikalikan dengan $(-F(x^{(0)}))$, atau dapat dituliskan seperti

di bawah ini:

$$y^{(0)} = (J(x^{(0)}))^{-1} \cdot (-F(x^{(0)}))$$

$$= \begin{bmatrix} 0.665518023669404 \\ -0.000710103688374 \\ -0.357384315247149 \\ -0.307423604733881 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) pada saat $k = 1$ yaitu nilai awal ($x^{(0)}$) ditambah dengan $y^{(0)}$, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} + y^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.001 \\ 0.409 \\ 0.44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.665518023669404 \\ -0.000710103688374 \\ -0.357384315247149 \\ -0.307423604733881 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.815518023669404 \\ 0.000289896311626 \\ 0.051615684752851 \\ 0.132576395266119 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$), langkah selanjutnya yaitu mencari *norm* maksimal pada iterasi pertama pada saat $k = 1$. Untuk mencari *norm* maksimal tersebut yaitu dengan cara memutlakkan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) dikurangi dengan nilai awal ($x^{(0)}$). Karena pada metode *Newton* ini yang dicari adalah *norm* maksimal dan sistem pada contoh ini ada empat variabel, maka nilai dari harga mutlak dari keempat variabel tersebut dicari nilai yang terbesar, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} = 0.665518023669404.$$

Karena dari keempat variabel tersebut nilai terbesarnya adalah 0.665518023669404 dan nilai *norm* maksimal tersebut lebih besar dari toleransi yang ditetapkan yaitu sebesar 10^{-6} maka iterasi dilanjutkan.

Iterasi kedua, $k = 2$

Setelah didapatkan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) pada saat $k = 1$, selanjutnya pada iterasi kedua pada saat $k = 2$ ini untuk nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) tersebut disubstitusikan ke dalam masing-masing

persamaan (2.8-2.11). Untuk nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) adalah sebagai berikut:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.815518023669404 \\ 0.000289896311626 \\ 0.051615684752851 \\ 0.132576395266119 \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.8-2.11) dapat didefinisikan sebagai

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} f_1(x^{(1)}) \\ f_2(x^{(1)}) \\ f_3(x^{(1)}) \\ f_4(x^{(1)}) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} & f_1(0.815518023669404, 0.000289896311626, 0.051615684752851, \\ & \quad 0.132576395266119) \\ & = 0.025 - 0.025(0.815518023669404) - 100(0.815518023669404) \\ & \quad \cdot (0.000289896311626) + 0.5(0.132576395266119) \\ & = 0.047258680328728 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_2(0.815518023669404, 0.000289896311626, 0.051615684752851, \\ & \quad 0.132576395266119) \\ & = 100(0.815518023669404)(0.000289896311626) + 1 \\ & \quad \cdot 100(0.132576395266119) \cdot (0.000289896311626) \\ & \quad - (0.025 + 182.5)(0.000289896311626) \\ & = -0.025428416767240 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_3(0.815518023669404, 0.000289896311626, 0.051615684752851, \\ & \quad 0.132576395266119) \\ & = (1 - 1)100(0.132576395266119)(0.000289896311626) + 182.5 \\ & \quad \cdot (0.000289896311626) - (0.025 + 1)(0.051615684752851) \end{aligned}$$

$$= 1 \times 10^{-17}$$

$$f_4(0.815518023669404, 0.000289896311626, 0.051615684752851, \\ 0.132576395266119)$$

$$= 1(0.051615684752851) - 100(0.132576395266119)$$

$$(0.000289896311626) - (0.025 + 0.5)(0.132576395266119)$$

$$= -0.021830263561488$$

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0.047258680328728 \\ -0.025428416767240 \\ 1 \times 10^{-17} \\ -0.021830263561488 \end{bmatrix}$$

Nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) di atas juga disubstitusikan pada matriks Jacobian pada persamaan (2.8-2.11). Hasil dari matriks Jacobian ($J(x^{(1)})$) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{1,1} = -0.000539896311626$$

$$a_{3,1} = 0$$

$$a_{1,2} = -0.815518023669404$$

$$a_{3,2} = 1.8250000000000000$$

$$a_{1,3} = 0$$

$$a_{3,3} = -0.0102500000000000$$

$$a_{1,4} = 0.0050000000000000$$

$$a_{3,4} = 0$$

$$a_{2,1} = 0.000289896311626$$

$$a_{4,1} = 0$$

$$a_{2,2} = -0.877155581064478$$

$$a_{4,2} = -0.132576395266119$$

$$a_{2,3} = 0$$

$$a_{4,3} = 0.0100000000000000$$

$$a_{2,4} = 0.000289896311626$$

$$a_{4,4} = -0.005539896311626$$

Sedangkan invers dari hasil matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

$$a_{1,1} = -34.052539554979099$$

$$a_{3,1} = -2.222272843031029$$

$$a_{1,2} = -28.923584643764116$$

$$a_{3,2} = -4.138710508768816$$

$$a_{1,3} = -31.460928408549869$$

$$a_{3,3} = -3.143680822469297$$

$$a_{1,4} = -32.247451618763620$$

$$a_{3,4} = -2.222272843031029$$

$$a_{2,1} = -0.012481258433462$$

$$a_{4,1} = -3.712706343556399$$

$$a_{2,2} = -0.023244812446510$$

$$a_{4,2} = -6.914460035020537$$

$$a_{2,3} = -0.012176837496060$$

$$a_{4,3} = -5.383213931484760$$

$$a_{2,4} = -0.012481258433462$$

$$a_{4,4} = -5.517794279771879$$

Setelah diperoleh hasil dari masing-masing persamaan $(F(x^{(1)}))$ dan matriks Jacobian $(J(x^{(1)}))$ dari persamaan (2.8-2.11), kemudian dibuktikan dengan sistem linear berikut:

$$J(x^{(1)}) \cdot y^{(1)} = -F(x^{(1)}).$$

Karena yang dicari adalah $y^{(1)}$, maka yang dihitung adalah invers dari matriks Jacobian $(J(x^{(1)}))^{-1}$ dikalikan dengan $(-F(x^{(1)}))$, atau dapat dituliskan seperti di bawah ini:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (J(x^{(1)}))^{-1} \cdot (-F(x^{(1)})) \\ &= \begin{bmatrix} 0.169826748462006 \\ -0.000273700137340 \\ -0.048731975672817 \\ -0.120821072651846 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai titik tetap pada iterasi kedua $(x^{(2)})$ pada saat $k = 2$ yaitu nilai titik tetap pada iterasi pertama $(x^{(1)})$ ditambah dengan $y^{(1)}$, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + y^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.815518023669404 \\ 0.000289896311626 \\ 0.051615684752851 \\ 0.132576395266119 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.169826748462006 \\ -0.000273700137340 \\ -0.048731975672817 \\ -0.120821072651846 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.985344772131410 \\ 0.000016196174285 \\ 0.002883709080033 \\ 0.011755322614272 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$), langkah selanjutnya yaitu mencari *norm* maksimal pada iterasi kedua pada saat $k = 2$. Untuk mencari *norm* maksimal tersebut yaitu dengan cara memutlakkan nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) dikurangi dengan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$). Karena pada metode *Newton* ini yang dicari adalah *norm* maksimal dan sistem pada contoh ini ada empat variabel, maka nilai harga mutlak dari keempat variabel tersebut dicari nilai yang terbesar, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} = \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_{\infty} = 0.169826748462006.$$

Karena dari keempat variabel tersebut nilai terbesarnya adalah 0.169826748462006 dan nilai *norm* maksimal tersebut lebih besar dari toleransi yang ditetapkan yaitu sebesar 10^{-6} maka iterasi dilanjutkan.

Dari perhitungan dua iterasi pada saat $k = 1, 2$ di atas dapat dituliskan dalam Tabel di bawah ini:

Tabel 2.3 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode *Newton* Sampai Iterasi Kedua pada Saat $k = 1, 2$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.15	0.001	0.409
1	0.815518023669404	0.000289896311626	0.051615684752851
2	0.985344772131410	0.000016196174285	0.002883709080033

Tabel 2.3 (Lanjutan)

k	$x_4^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	0.44	
1	0.132576395266119	0.665518023669404
2	0.011755322614272	0.169826748462006

Untuk mencari iterasi ketiga dan seterusnya dapat dilakukan dengan berbantuan program Matlab. Hasil dari perhitungan tersebut dapat diiterasikan sampai iterasi kelima dan dapat dituliskan pada Tabel di bawah ini:

Tabel 2.4 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode *Newton* Sampai Iterasi Kelima pada Saat $k = 1, 2, 3, 4, 5$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.150000	0.001000	0.409000
1	0.815518023669404	0.000289896311626	0.051615684752851
2	0.985344772131410	0.000016196174285	0.002883709080033
3	0.999934745797650	0.000000056515711	0.000010062553420
4	0.999999999047403	0.000000000000693	0.000000000123382
5	1.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Tabel 2.4 (Lanjutan)

k	$x_4^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	0.440000	
1	0.132576395266119	0.665518023669404
2	0.011755322614272	0.169826748462006
3	0.000055135133219	0.014589973666240
4	0.000000000828522	0.000065253249753
5	0.000000000000000	0.000000000952597

Pada Tabel 2.4 di atas dapat dilihat bahwa hasil dari iterasi yang berulang-ulang didapatkan nilai kesalahan atau nilai *norm* maksimal yang lebih

kecil dari tingkat kesalahan atau toleransi yang ditetapkan yaitu sebesar 10^{-6} pada iterasi kelima. Sehingga pada iterasi kelima tersebut didapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya. Untuk mencari titik tetap secara eksak dapat dilakukan dengan berbantuan program Maple. Perbandingan nilai titik tetap dengan menggunakan metode *Newton* dan nilai eksak dapat ditunjukkan pada Tabel di bawah ini:

Tabel 2.5 Tabel Perbandingan Nilai Titik Tetap dengan Menggunakan Metode *Newton* dan Nilai Eksak

Perbandingan Nilai Titik Tetap Dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> Dan Nilai Eksak		
Variabel	Nilai Titik Tetap Dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i>	Nilai Eksak
x_1	1.0000000000000000	1
x_2	0.0000000000000000	0
x_3	0.0000000000000000	0
x_4	0.0000000000000000	0

2.6 *Mycobacterium Tuberculosis*

Mycobacterium tuberculosis merupakan bakteri yang dapat menyebabkan TB. Bakteri *Mycobacterium tuberculosis* memiliki panjang sekitar 1-4 mikron dan lebar sekitar 0,2-0,8 mikron dengan bentuk batang tipis, lurus atau agak bengkok, berganular atau tidak mempunyai selubung, tetapi mempunyai lapisan luar tebal yang terdiri dari lipoid. *Mycobacterium tuberculosis* adalah bakteri yang berbentuk batang bersifat tahan asam. Bakteri ini pertama kali ditemukan pada tanggal 24 Maret 1882 oleh Robert Koch. Bakteri ini juga disebut Baksil Koch (Subagyo, 2006:7).

Pada seseorang yang belum pernah kemasukan basil TB, tes tuberkulin akan negatif karena sistem imunitas seluler belum mengenal basil TB. Bila orang

ini mengalami infeksi oleh basil TB, walaupun segera difagositosis oleh makrofag, basil TB tidak akan mati, bahkan makrofagnya dapat mati. Dengan demikian, basil TB ini lalu dapat berkembang biak secara leluasa dalam 2 minggu pertama di alveolus paru, dengan kecepatan 1 basil menjadi 2 basil setiap 20 jam, sehingga dengan infeksi oleh 1 basil saja, setelah 2 minggu basil bertambah menjadi 100.000 (HOLM,1970 dalam Danusantoso, 2012:105-106).

2.7 Sistem Imun

Sistem imun adalah semua mekanisme yang merupakan reaksi tubuh terhadap masuknya substansi asing untuk mempertahankan keutuhan tubuh dari berbagai bahaya yang dapat ditimbulkan oleh lingkungan hidup. Imunitas adalah keadaan kebal (imun) terhadap satu infeksi atau efek *patologic* suatu substansi. Kekebalan (imunitas) itu merupakan daya ketahanan tubuh terhadap segala sesuatu yang asing bagi tubuh. Imunitas itu bukan suatu pelindung yang statis, seperti halnya tengkorak yang melindungi otak, akan tetapi suatu daya ketahanan yang dinamis. Setiap kali ada bahaya unsur-unsur tertentu dari tubuh diaktifkan untuk mengadakan perlawanan atau pembelaan. Reaksi tubuh tersebut disebut reaksi imunologik dan respon imunologik (Abadiyah, 2009:37).

Tubuh manusia mempunyai suatu sistem imun yang bertujuan melindungi tubuh dari serangan benda asing seperti kuman, virus, dan jamur. Sistem tersebut terdiri atas berbagai macam sel dan molekul protein yang sanggup membedakan antara *self antigen* dan *nonself antigen*. Setelah sistem imun dibangkitkan terhadap suatu antigen asing, sistem tersebut akan mempunyai *memory* atau daya

ingat dan akan melakukan respons yang lebih spesifik serta lebih aktif jika antigen tersebut masuk ke dalam tubuh untuk kedua kalinya (Subagyo, 2006:6).

2.8 Makrofag

Populasi makrofag terdiri dari makrofag *resting*, makrofag teraktivasi, dan makrofag terinfeksi. Makrofag *resting* dapat menjadi aktif pada respon IFN- γ juga dapat menjadi infeksi kronis. Makrofag teraktivasi cukup efektif membunuh *Mycobacterium tuberculosis*. Di samping menghasilkan oksigen radikal dan molekul antimikroba, makrofag teraktivasi juga memproduksi phagosom dan lisosom. Sedangkan populasi makrofag terinfeksi merupakan populasi kelas makrofag yang penting karena berisi sejumlah besar bakteri tetapi belum menerima stimulasi yang cukup untuk pengaktifan, sehingga makrofag tersebut dapat teraktivasi kembali dan membersihkan bakteri (Pagalay, 2009:59-60).

Makrofag mempunyai peran penting dalam respon imun. Fungsi utama makrofag dalam sistem imun adalah: makrofag memfagositosis partikel asing seperti mikroorganisme, makromolekul termasuk antigen bahkan sel atau jaringan sendiri yang mengalami kerusakan atau mati. Makrofag juga mengekspresikan MHC-II pada permukaannya dan ekspresi MHC-II meningkat bila makrofag diaktivasi (Kresno, 2003:33-34).

2.9 Sel T CD4⁺

Sel T limfosit dibagi menjadi dua yaitu sel T CD4⁺ dan sel T CD8⁺. Sel CD4⁺ yang berproliferasi dan berdiferensiasi berkembang menjadi subset sel Th1

dan Th2, mensintesis sitokin yang mengaktifkan fungsi sel imun lain seperti CD8⁺, sel B, makrofag, dan sel NK (Batarawidjaja dan Rengganis, 2010:121).

Sel T CD4⁺ memainkan dua peran utama di dalam infeksi *Mycobacterium tuberculosis*. Pertama adalah dalam produksi sitokin dalam memerintahkan respon yang diperantarai oleh sel, kedua adalah mengeliminasi makrofag yang sudah terinfeksi melalui apoptosis (Pagalay, 2009:48). Berdasarkan fungsinya sel T CD4⁺ dibedakan menjadi dua sub populasi yaitu sel Th1 dan Th2. Baik Th1 dan Th2 berpengaruh terhadap manifestasi infeksi oleh bakteri intraseluler (Subagyo, 2006:14).

2.10 Sel T CD8⁺

Sel T CD8⁺ dapat juga menghancurkan sel yang terinfeksi bakteri intraseluler. Sel T CD8⁺ mengenal kompleks antigen MHC-I yang dipresentasikan APC. Molekul MHC-I ditemukan pada semua sel tubuh yang bernukleus. Fungsi utama sel T CD8⁺ yaitu dapat menyingkirkan sel terinfeksi virus, menghancurkan sel ganas dan sel histoin kompatibel yang menimbulkan penolakan pada transplantasi. Dalam keadaan tertentu, sel T CD8⁺ menimbulkan sitolisis melalui perforin granzim, FasL/Fas (apoptosis), TNF- α , dan memacu produksi sitokin Th1 dan Th2 (Batarawidjaja dan Rengganis, 2010:127).

Sel T CD8⁺ mengekspresikan koreseptor sel T CD8⁺ dan menghancurkan sel terinfeksi antara antigen spesifik yang MHC-I dependen. Sel T CD8⁺ dapat membunuh sel secara direk dan melalui induksi apoptosis (Batarawidjaja dan Rengganis, 2010:127).

2.11 Bakteri Ekstraseluler dan Bakteri Intraseluler

2.11.1 Bakteri Ekstraseluler

Bakteri ekstraseluler dapat hidup serta berkembangbiak misalnya dalam sirkulasi, jaringan ikat dan rongga-rongga seperti lumen, saluran nafas, dan saluran pencernaan. Penyakit yang ditimbulkan bakteri ekstraseluler dapat berupa inflamasi yang menimbulkan destruksi jaringan di tempat infeksi dengan membentuk nanah.

2.11.2 Bakteri Intraseluler

Bakteri intraseluler mempunyai ciri utama mampu hidup dan berkembangbiak dalam fagosit. Bakteri ini mendapat tempat yang sangat tersembunyi dan tidak dapat ditemukan oleh antibodi dalam sirkulasi, sehingga untuk eliminasinya memerlukan mekanisme imun seluler (Adhimah, 2011:23).

2.12 Kajian Agama

Kajian agama yang telah dibahas pada bab I yaitu mengenai nilai kesalahan atau *norm* maksimal yang tidak boleh melebihi tingkat kesalahan atau toleransi yang ditetapkan, jika disangkutpautkan dengan agama yaitu **أَلَّا تَطْغَوْا** dalam surat ar-Rahman/55:8. Sedangkan dalam bab II ini penulis memfokuskan terhadap penentuan tingkat kesalahan atau toleransi untuk mendapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya. Untuk mendapatkan nilai pendekatan tersebut maka harus dilakukan perhitungan secara berulang-ulang hingga mendapatkan nilai kesalahan atau nilai *norm* maksimal yang lebih kecil dari toleransi yang telah ditetapkan.

Dari pernyataan di atas dapat dikatakan bahwa ada suatu solusi yang menyelesaikan suatu masalah untuk mendapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksak. Hal tersebut dikatakan seimbang karena ada suatu masalah yang memiliki suatu solusi. Di dalam kajian Islam, Allah Swt. juga mengatur dengan indah mengenai keseimbangan. Sebagaimana dijelaskan dalam firman Allah Swt. dalam surat al-Mulk/67:3-4 yaitu sebagai berikut:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۗ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفْوُوتٍ ۗ
فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ۗ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ
إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ۗ

“Yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang cacat? Kemudian ulangi pandanganmu sekali lagi (dan) sakali lagi, niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu tanpa menemukan cacat dan ia (pandanganmu) dalam keadaan letih” (QS. al-Mulk/67:3-4).

Dalam tafsir al-Maraghi secara jelas mengatakan bahwa Dia-lah yang telah menciptakan tujuh langit yang sebagiannya di atas sebagian yang lain di udara kosong, tanpa tiang dan tanpa pengikat yang mengikatnya, serta keistimewaan setiap langit dengan cakupan tertentu, dan dengan sistem yang tetap dan tidak berubah-ubah. Bahkan dengan sistem daya tarik yang indah di antara benda-benda bumi dan langit. Wahai orang yang melihat, engkau tidak akan melihat kekacauan dan ketidakseimbangan, sehingga tidak ada satupun dari ciptaan-Nya yang melampaui batas yang telah ditentukan-Nya baik dengan menambah maupun mengurangi. Sesungguhnya jika engkau mengulangi penglihatanmu, maka penglihatanmu itu tidak akan mengembalikan keadaanmu

kekacauan dan cacat yang engkau cari. Bahkan penglihatanmu itu akan kembali kepadamu dalam keadaan hina dan rendah, tidak terlihat apa yang terjadi dari keduanya itu. Sehingga penglihatanmu itu seakan-akan diusir oleh keadaan payah karena banyak melihat dan memperhatikan (Al-Maraghi, 1989:11-13).



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Struktur Model

Identifikasi dimulai dengan menganalisis pembentukan model pada populasi makrofag teraktivasi. Populasi makrofag teraktivasi berasal dari makrofag *resting* yang teraktivasi dengan laju k_3 , perkembangannya yaitu:

$$k_3 M_R \quad (3.1)$$

Makrofag ini juga akan mengalami deaktivasi makrofag aktif dengan laju k_4 , perkembangannya yaitu:

$$k_4 M_A(t) \quad (3.2)$$

Makrofag teraktivasi juga berasal dari makrofag yang terinfeksi dengan laju k_{3A} , perkembangannya yaitu:

$$k_{3A} M_I(t) \quad (3.3)$$

Makrofag teraktivasi mengalami kematian secara alami pada laju μ_{M_A} , perkembangannya yaitu:

$$\mu_{M_A} M_A(t) \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.1-3.4) maka persamaan model untuk dinamika populasi makrofag teraktivasi yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dM_A(t)}{dt} = k_3 M_R - k_4 M_A(t) + k_{3A} M_I(t) - \mu_{M_A} M_A(t) \quad (3.5)$$

Populasi makrofag terinfeksi berasal dari makrofag *resting* yang terinfeksi oleh bakteri ekstraseluler, bakteri ini akan masuk ke dalam tubuh dan berkembangbiak. Sehingga diperoleh perkembangannya yaitu:

$$k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) \quad (3.6)$$

Bakteri yang masuk akan terus menerus berkembangbiak di dalam makrofag, ketika jumlah bakteri mencapai kapasitas maksimal N , makrofag terinfeksi ini akan mengalami kematian maksimal akibat bakteri intraseluler dengan perkembangannya yaitu:

$$k_{17}M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \quad (3.7)$$

Induksi apoptosis yang berasal dari makrofag terinfeksi dengan laju k_{14b} , perkembangannya yaitu:

$$k_{14b}M_I(t) \quad (3.8)$$

Makrofag ini juga akan mengalami deaktivasi makrofag aktif dengan laju k_4 , perkembangannya yaitu:

$$k_4M_A(t) \quad (3.9)$$

Makrofag teraktivasi juga berasal dari makrofag yang terinfeksi dengan laju k_{3A} , perkembangannya yaitu:

$$k_{3A}M_I(t) \quad (3.10)$$

Fas-FasL induksi apoptosis, kapasitas maksimum bakteri, dan rata-rata jumlah bakteri berasal dari makrofag terinfeksi dengan perkembangannya yaitu:

$$k_{14a}N \cdot N_{fracc} \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3T_8(t))}{c_4M_I(t) + (T_4(t) + w_3T_8(t))} \right) \quad (3.11)$$

Makrofag terinfeksi mengalami kematian secara alami pada laju μ_{M_I} , perkembangannya yaitu:

$$\mu_{M_I}M_I(t) \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.6-3.12) maka persamaan model untuk dinamika populasi makrofag terinfeksi yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dM_I(t)}{dt} = & k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17} M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \\ & - k_{14b} M_I(t) + k_4 M_A(t) - k_{3A} M_I(t) - k_{14a} N \\ & \cdot N_{fracc} \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) - \mu_{M_I} M_I(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dinamika populasi sel T CD4⁺ tergantung pada banyaknya sel T CD4⁺ yang dihasilkan timus. Sitokin yang dilepaskan makrofag terinfeksi dan teraktivasi berdiferensiasi ke dalam respon Th1 atau respon Th2. Selain itu dinamika populasi sel T CD4⁺ juga tergantung pada poliferasi dan rekrutmen sel T CD4⁺ dengan laju p_1 , perkembangannya yaitu:

$$S_1 + p_1 \left(\frac{M_A(t) + \alpha_T M_I(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_T} \right) T_4(t) \quad (3.14)$$

Dinamika populasi sel T CD4⁺ juga dihambat oleh kematian sel T CD4⁺ sendiri secara alami dengan laju μ_T , perkembangannya yaitu:

$$\mu_T T_4(t) \quad (3.15)$$

Dari persamaan (3.14-3.15) maka persamaan model untuk dinamika populasi sel T CD4⁺ yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dT_4(t)}{dt} = S_1 + p_1 \left(\frac{M_A(t) + \alpha_T M_I(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_T} \right) T_4(t) - \mu_T T_4(t) \quad (3.16)$$

Dinamika populasi sel T CD8⁺ tergantung pada banyaknya sel T CD8⁺ yang dihasilkan timus dengan laju S_2 . Selain itu juga karena adanya poliferasi yang tergantung pada jumlah makrofag terinfeksi dan teraktivasi yang mengeluarkan sitokin yang memicu sel respon yang dimediasi, perkembangannya yaitu:

$$S_2 + p_2 \left(\frac{(M_A(t) + \alpha_T M_I(t)) T_4(t) T_8(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_C} \right) \quad (3.17)$$

Dinamika populasi sel T CD8⁺ juga dihambat oleh kematian sel T CD8⁺ sendiri secara alami dengan laju μ_C , perkembangannya yaitu:

$$\mu_C T_8(t) \quad (3.18)$$

Dari persamaan (3.17-3.18) maka persamaan model untuk dinamika populasi sel T CD8⁺ yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dT_8(t)}{dt} = S_2 + p_2 \left(\frac{(M_A(t) + \alpha_T M_I(t)) T_4(t) T_8(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_C} \right) - \mu_C T_8(t) \quad (3.19)$$

Bakteri ekstraseluler tumbuh pada laju maksimal α_{20} . Sehingga diperoleh pertumbuhannya yaitu:

$$\alpha_{20} B_E(t) \quad (3.20)$$

Pengambilan bakteri ekstraseluler oleh makrofag teraktivasi menyebabkan berkurangnya bakteri dengan laju k_5 , perkembangannya yaitu:

$$k_5 M_A(t) B_E(t) \quad (3.21)$$

Berkurangnya makrofag *resting* juga mempengaruhi pertumbuhan dari bakteri ekstraseluler. Makrofag ini akan menjadi terinfeksi oleh bakteri ketika bakteri ekstraseluler masuk dan makrofag gagal untuk membunuhnya. Sehingga diperoleh pertumbuhannya yaitu:

$$n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) \quad (3.22)$$

Fas-FasL induksi apoptosis, kapasitas maksimum bakteri, dan rata-rata jumlah bakteri berasal dari makrofag terinfeksi dengan perkembangannya yaitu:

$$k_{14a} N \cdot N_{fracc} \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) \quad (3.23)$$

Dinamika bakteri ekstraseluler dipengaruhi oleh bakteri yang pecah dari makrofag yang terinfeksi. Dimana makrofag akan mengalami kematian maksimal pada makrofag terinfeksi akibat bakteri intraseluler, perkembangannya yaitu:

$$k_{17} \cdot N \cdot M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \quad (3.24)$$

Makrofag terinfeksi juga dipengaruhi oleh induksi apoptosis dari makrofag terinfeksi dan kapasitas maksimum bakteri pada makrofag terinfeksi, maka perkembangannya yaitu:

$$k_{14b} \cdot N \cdot M_I(t) \quad (3.25)$$

Bakteri intraseluler akan mengalami kematian secara alami pada laju μ_I , perkembangannya yaitu:

$$\mu_I B_I(t) \quad (3.26)$$

Dari persamaan (3.20-3.26) maka persamaan model untuk dinamika populasi bakteri ekstraseluler yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dB_E(t)}{dt} = & \alpha_{20} B_E(t) - k_5 M_A(t) B_E(t) - n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) \\ & + k_{14a} N \cdot N_{fracc} \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) \\ & + k_{17} N \cdot M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + k_{14b} N \\ & \cdot M_I(t) + \mu_I B_I(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Diasumsikan bahwa bakteri intraseluler tumbuh pada laju maksimal α_{19} .

Bakteri ini tumbuh dengan berkurangnya persamaan Hill, yaitu pada koefisien Hill dan $N M_I$. $N M_I$ merupakan jumlah bakteri pada bakteri intraseluler yang sudah mencapai kapasitas maksimum N dalam makrofag yang terinfeksi. Makrofag inilah yang akan meledak dan melepaskan bakteri. Sehingga diperoleh pertumbuhannya yaitu:

$$\alpha_{19} B_I(t) \left(1 - \frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \quad (3.28)$$

Ketika bakteri ekstraseluler masuk dan makrofag gagal untuk membunuh bakteri, maka makrofag *resting* akan menjadi terinfeksi oleh bakteri ekstraseluler. Jumlah bakteri pada makrofag yang terinfeksi akan tergantung pada populasi bakteri ekstraseluler yang menginfeksi makrofag *resting*. Sehingga diperoleh perkembangannya yaitu:

$$n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) \quad (3.29)$$

Dinamika bakteri ekstraseluler dipengaruhi oleh bakteri yang pecah dari makrofag yang terinfeksi. Dimana makrofag akan mengalami kematian maksimal pada makrofag terinfeksi akibat bakteri intraseluler, perkembangannya yaitu:

$$k_{17} \cdot N \cdot M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \quad (3.30)$$

Fas-FasL induksi apoptosis, kapasitas maksimum bakteri, dan rata-rata jumlah bakteri berasal dari makrofag terinfeksi dengan perkembangannya yaitu:

$$k_{14a} N \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) \quad (3.31)$$

Makrofag terinfeksi juga dipengaruhi oleh induksi apoptosis dari makrofag terinfeksi dan kapasitas maksimum bakteri pada makrofag terinfeksi, maka perkembangannya yaitu:

$$k_{14b} \cdot N \cdot M_I(t) \quad (3.32)$$

Bakteri intraseluler akan mengalami kematian secara alami pada laju μ_I , perkembangannya yaitu:

$$\mu_I B_I(t) \quad (3.33)$$

Dari persamaan (3.28-3.33) maka persamaan model untuk dinamika populasi bakteri intraseluler yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dB_I(t)}{dt} = & \alpha_{19}B_I(t) \left(1 - \frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \\
& + n_3 k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17} N \\
& \cdot M_I(t) \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) \\
& - k_{14a} N \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) - k_{14b} N \\
& \cdot M_I(t) - \mu_I B_I(t)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dari analisis struktur model di atas didapatkan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dM_A(t)}{dt} = k_3 M_R - k_4 M_A(t) + k_{3A} M_I(t) - \mu_{M_A} M_A(t) \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_I(t)}{dt} = & k_2 M_R \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17} M_I(t) \\
& \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) - k_{14b} M_I(t) + k_4 M_A(t) \\
& - k_{3A} M_I(t) - k_{14a} N \cdot N_{fracc}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3 T_8(t))}{c_4 M_I(t) + (T_4(t) + w_3 T_8(t))} \right) - \mu_{M_I} M_I(t)$$

$$\frac{dT_4(t)}{dt} = S_1 + p_1 \left(\frac{M_A(t) + \alpha_T M_I(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_T} \right) T_4(t) - \mu_T T_4(t) \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_8(t)}{dt} = & S_2 + p_2 \left(\frac{(M_A(t) + \alpha_T M_I(t)) T_4(t) T_8(t)}{M_A(t) + \alpha_T M_I(t) + S_C} \right) \\
& - \mu_C T_8(t)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dB_E(t)}{dt} = & \alpha_{20} B_E(t) - k_5 M_A(t) B_E(t) - n_3 k_2 M_R \\
& \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) + k_{14a} N \cdot N_{fracc}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3T_8(t))}{c_4M_I(t) + (T_4(t) + w_3T_8(t))} \right) + k_{17}N \cdot M_I(t) \\
& \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + k_{14b}N \cdot M_I(t) \\
& + \mu_I B_I(t) \\
\frac{dB_I(t)}{dt} = & \alpha_{19} B_I(t) \left(1 - \frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) + n_3 k_2 M_R \\
& \left(\frac{B_E(t)}{B_E(t) + c_9} \right) - k_{17}N \cdot M_I(t) \\
& \left(\frac{B_I^2(t)}{B_I^2(t) + (N \cdot M_I(t))^2} \right) - k_{14a}N \\
& \left(\frac{M_I(t)(T_4(t) + w_3T_8(t))}{c_4M_I(t) + (T_4(t) + w_3T_8(t))} \right) - k_{14b}N \cdot M_I(t) \\
& - \mu_I B_I(t)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.2 Nilai Awal dan Parameter Model

Nilai awal dan parameter yang digunakan pada persamaan (3.35-3.40) merujuk pada karya tulis Gesham Magombedze, dkk, (2006), Avner Friedman, dkk, (2008), dan Usman Pagalay, dkk, (2014) yaitu sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Nilai Awal

Variabel	Nilai	Satuan
$M_A(0)$	200	Sel/mililiter
$M_I(0)$	1800	Sel/mililiter
$T_4(0)$	500	Sel/mililiter
$T_8(0)$	140	Sel/mililiter
$B_E(0)$	1000	Sel/mililiter
$B_I(0)$	36000	Sel/mililiter

Tabel 3.2 Tabel Nilai Parameter

Simbol	Nilai	Satuan
c_4	40	T ₄ /MI
c_9	2×10^6	BE
k_2	0.4	Perhari
k_3	0.1	Perhari
k_{3A}	0.023415	Perhari
k_4	0.08	Perhari
k_5	0.000081301	ml/sel hari
k_{14a}	0.1	Perhari
k_{14b}	0.1	Perhari
k_{17}	0.02	Perhari
α_{19}	0.4	Perhari
α_{20}	0.05	Perhari
α_T	0.3	Perhari
μ_{MA}	0.07	Perhari
n_3	10	Sel/ml
N	20	BI/MI
N_{frac}	0.1	Skalar
μ_I	0.004	Perhari
μ_T	0.01	Perhari
M_R	5000	Sel/ml
S_1	100	Perhari
S_2	100	T ₈ cm ⁻³ perhari
S_C	1500000	T ₈ cm ⁻³ perhari
μ_{M_I}	0.0011	Perhari
μ_C	0.68	Perhari
S_T	1500000	T ₄ cm ⁻³ perhari

Tabel 3.2 (Lanjutan)

p_1	0.03	Perhari
p_2	0.01	Perhari
w_3	0.4	Estimasi

3.3 Penerapan Metode *Newton* pada Model Matematika

Model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis* berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear. Oleh karena itu diasumsikan $\frac{dM_A}{dt} = 0, \frac{dM_I}{dt} = 0, \frac{dT_4}{dt} = 0, \frac{dT_8}{dt} = 0, \frac{dB_E}{dt} = 0, \frac{dB_I}{dt} = 0$. Variabel yang digunakan pada model tersebut dapat dimisalkan dengan $M_A = x_1, M_I = x_2, T_4 = x_3, T_8 = x_4, B_E = x_5, B_I = x_6$ dan parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 3.2 halaman 41-42, maka persamaan (3.35-3.40) dapat ditulis sebagai berikut:

$$0.1 \times 5000 - 0.08x_1 + 0.023415x_2 - 0.07x_1 = 0 \quad (3.41)$$

$$0.4 \times 5000 \left(\frac{x_5}{x_5 + 2000000} \right) - 0.02x_2 \left(\frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2} \right) - 0.1x_2 + 0.08x_1 - 0.023415x_2 - 0.1 \times 20 \times 0.1 \left(\frac{x_2(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + (x_3 + 0.4x_4)} \right) - 0.0011x_2 = 0 \quad (3.42)$$

$$100 + 0.03 \left(\frac{x_1 + 0.3x_2}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} \right) x_3 - 0.01x_3 = 0 \quad (3.43)$$

$$100 + 0.01 \left(\frac{(x_1 + 0.3x_2)x_3x_4}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} \right) - 0.68x_4 = 0 \quad (3.44)$$

$$0.05x_5 - 0.000081301x_1x_5 - 10 \times 0.4 \times 5000 \left(\frac{x_5}{x_5 + 2000000} \right) + 0.1 \times 20 \times 0.1 \left(\frac{x_2(x_3 + 0.4x_5)}{40x_2 + (x_3 + 0.4x_4)} \right) + 0.02 \times 20x_2 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2} \right) + 0.1 \times 20x_2 + 0.004x_6 = 0 \\
& 0.4x_6 \left(1 - \frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2} \right) + 10 \times 0.4 \times 5000 \left(\frac{x_5}{x_5 + 2000000} \right) \\
& - 0.02 \times 20x_2 \left(\frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2} \right) - 0.1 \times 20 \left(\frac{x_2(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + (x_3 + 0.4x_4)} \right) \quad (3.46) \\
& - 0.1 \times 20x_2 - 0.004x_6 = 0
\end{aligned}$$

Karena persamaan (3.41-3.46) tersebut mengandung enam variabel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 dan x_6 , maka dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = [& f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\
& f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\
& f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)]^T
\end{aligned}$$

atau

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{bmatrix}$$

dengan

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.1 \times 5000 - 0.08x_1 + 0.023415x_2 - 0.07x_1$$

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = & 0.4 \times 5000 \left(\frac{x_5}{x_5 + 2000000} \right) - 0.02x_2 \left(\frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2} \right) \\
& - 0.1x_2 + 0.08x_1 - 0.023415x_2 - 0.1 \times 20 \times 0.1 \\
& \left(\frac{x_2(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + (x_3 + 0.4x_4)} \right) - 0.0011x_2
\end{aligned}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 100 + 0.03 \left(\frac{x_1 + 0.3x_2}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} \right) x_3 - 0.01x_3$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 100 + 0.01 \left(\frac{(x_1 + 0.3x_2)x_3x_4}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} \right) - 0.68x_4$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.05x_5 - 0.000081301x_1x_5 - 10 \times 0.4 \times 5000$$

$$\left(\frac{x_5}{x_5 + 2000000}\right) + 0.1 \times 20 \times 0.1 \left(\frac{x_2(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + (x_3 + 0.4x_4)}\right) \\ + 0.02 \times 20x_2 \left(\frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2}\right) + 0.1 \times 20x_2 + 0.004x_6$$

$$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.4x_6 \left(1 - \frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2}\right) + 10 \times 0.4 \times 5000$$

$$\left(\frac{x_5}{x_5 + 2000000}\right) - 0.02 \times 20x_2 \left(\frac{x_6^2}{x_6^2 + (20x_2)^2}\right) - 0.1 \times 20 \\ \left(\frac{x_2(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + (x_3 + 0.4x_4)}\right) - 0.1 \times 20x_2 - 0.004x_6$$

Matriks Jacobian dari persamaan (3.41-3.46) adalah sebagai berikut:

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -0.15$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0.023415$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0.08$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = & -\frac{0.02x_6^2}{x_6^2 + 400x_2^2} + \frac{16x_2^2x_6^2}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} - 0.124515 - \frac{0.20(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} \\ & + \frac{8x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\frac{0.20x_2}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} + \frac{0.20x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -\frac{0.080x_2}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} + \frac{0.080x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5} = \frac{2000}{x_5 + 2000000} - \frac{2000x_5}{(x_5 + 2000000)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6} = -\frac{0.04x_2x_6}{x_6^2 + 400x_2^2} + \frac{0.04x_2x_6^3}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{0.03x_3}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} - \frac{0.03(x_1 + 0.3x_2)x_3}{(x_1 + 0.3x_2 + 1500000)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{0.009x_3}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} - \frac{0.009(x_1 + 0.3x_2)x_3}{(x_1 + 0.3x_2 + 1500000)^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{0.03(x_1 + 0.3x_2)}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} - 0.01$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{0.01x_3x_4}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} - \frac{0.01(x_1 + 0.3x_2)x_3x_4}{(x_1 + 0.3x_2 + 1500000)^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{0.003x_3x_4}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} - \frac{0.003(x_3 + 0.3x_2)x_3x_4}{(x_1 + 0.3x_2 + 1500000)^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{0.01(x_1 + 0.3x_2)x_4}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{0.01(x_1 + 0.3x_2)x_3}{x_1 + 0.3x_2 + 1500000} - 0.68$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = -0.000081301x_5$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} = \frac{0.20(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} - \frac{8x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2} + \frac{0.40x_6^2}{x_6^2 + 400x_2^2} - \frac{320x_2^2x_6^2}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} + 2$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = \frac{0.20x_2}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} - \frac{0.20x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = \frac{0.080x_2}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} - \frac{0.080x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = 0.05 - 0.000081301x_1 - \frac{20000}{x_5 + 2000000} + \frac{20000}{(x_5 + 2000000)^2}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_6} = \frac{0.80x_2x_6}{x_6^2 + 400x_2^2} - \frac{0.80x_2x_6^3}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} + 0.004$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_2} = \frac{320x_2x_6^3}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} - \frac{0.40x_6^2}{x_6^2 + 400x_2^2} + \frac{320x_2^2x_6^2}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} - \frac{2(x_3 + 0.4x_4)}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} + \frac{80x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2} - 2$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3} = -\frac{2x_2}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} + \frac{2x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_4} = -\frac{0.80x_2}{40x_2 + x_3 + 0.4x_4} + \frac{0.80x_2(x_3 + 0.4x_4)}{(40x_2 + x_3 + 0.4x_4)^2}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5} = \frac{20000}{x_5 + 2000000} - \frac{20000x_5}{(x_5 + 2000000)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_6}{\partial x_6} &= 0.396 - \frac{0.4x_6^2}{x_6^2 + 400x_2^2} + 0.4x_6 \left(-\frac{2x_6}{x_6^2 + 400x_2^2} + \frac{2x_6^3}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} \right) \\ &\quad - \frac{0.80x_2x_6}{x_6^2 + 400x_2^2} + \frac{0.80x_2x_6^3}{(x_6^2 + 400x_2^2)^2} \end{aligned}$$

Iterasi pertama, $k = 1$

Diberikan nilai awal $x^{(0)} = (200, 1800, 500, 140, 1000, 36000)^T$ atau

$$= \begin{bmatrix} 200 \\ 1800 \\ 500 \\ 140 \\ 1000 \\ 36000 \end{bmatrix}$$

Nilai awal di atas dapat disubstitusikan ke dalam masing-masing persamaan (3.41-

3.46). Didefinisikan

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ f_2(x^{(0)}) \\ f_3(x^{(0)}) \\ f_4(x^{(0)}) \\ f_5(x^{(0)}) \\ f_6(x^{(0)}) \end{bmatrix}$$

dengan

$$f_1(200, 1800, 500, 140, 1000, 36000)$$

$$= 0.1 \times 5000 - 0.08 \times (200) + 0.023415 \times (1800) - 0.07 \times (200)$$

$$= 512.147$$

$$f_2(200, 1800, 500, 140, 1000, 36000)$$

$$= 0.4 \times 5000 \times \left(\frac{(1000)}{(1000) + 2000000} \right) - 0.02 \times (1800)$$

$$\times \left(\frac{(36000)^2}{(36000)^2 + (20 \times (1800))^2} \right) - 0.1 \times (1800) + 0.08 \times (200)$$

$$- 0.023415 \times (1800) - 0.1 \times 20 \times 0.1$$

$$\times \left(\frac{(1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{40 \times (1800) + ((500) + 0.4 \times (140))} \right) - 0.0011 \times (1800)$$

$$= -227.886196480926$$

$$f_3(200,1800,500,140,1000,36000)$$

$$= 100 + 0.03 \times \left(\frac{(200) + 0.3 \times (1800)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000} \right) \times (500) - 0.01 \times (500)$$

$$= 95.0073963511334$$

$$f_4(200,1800,500,140,1000,36000)$$

$$= 100 + 0.01 \times \left(\frac{((200) + 0.3 \times (1800)) \times (500) \times (140)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000} \right) - 0.68 \times (140)$$

$$= 5.14516305289391$$

$$f_5(200,1800,500,140,1000,36000)$$

$$= 0.05 \times (1000) - 0.000081301 \times (200) \times (1000) - 10 \times 0.4 \times 5000$$

$$\times \left(\frac{(1000)}{(1000) + 2000000} \right) + 0.1 \times 20 \times 0.1$$

$$\times \left(\frac{(1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{40 \times (1800) + ((500) + 0.4 \times (140))} \right) + 0.02 \times 20 \times (1800)$$

$$\times \left(\frac{(36000)^2}{(36000)^2 + (20 \times (1800))^2} \right) + 0.1 \times 20 \times (1800) + 0.004 \times (36000)$$

$$= 4130.50349423205$$

$$f_6(200,1800,500,140,1000,36000)$$

$$= 0.4 \times (36000) \times \left(1 - \frac{(36000)^2}{(36000)^2 + (20 \times (1800))^2} \right) + 10 \times 0.4 \times 5000$$

$$\times \left(\frac{(1000)}{(1000) + 2000000} \right) - 0.02 \times 20 \times (1800)$$

$$\times \left(\frac{(36000)^2}{(36000)^2 + (20 \times (1800))^2} \right) - 0.1 \times 20$$

$$\times \left(\frac{(1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{40 \times (1800) + ((500) + 0.4 \times (140))} \right) - 0.1 \times 20 \times (1800) - 0.004$$

$$\times (36000)$$

$$= 3078.40803519074$$

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 512.147 \\ -227.886196480926 \\ 95.0073963511334 \\ 5.14516305289391 \\ 4130.50349423205 \\ 3078.40803519074 \end{bmatrix}$$

Nilai awal $x^{(0)}$ di atas juga disubstitusikan pada matriks Jacobian dari persamaan

(3.41-3.46). Matriks Jacobian tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -0.15$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0.023415$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0.08$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{0.02 \times (36000)^2}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} + \frac{16 \times (1800)^2 \times (36000)^2}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2}$$

$$-0.124515 - \frac{0.20 \times ((500) + 0.4 \times (140))}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)}$$

$$+ \frac{8 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2}$$

$$= -0.124526744456254$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -\frac{0.20 \times (1800)}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)}$$

$$+ \frac{0.20 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2}$$

$$= -0.00492366314666187$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -\frac{0.080 \times (1800)}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)}$$

$$+ \frac{0.080 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2}$$

$$= -0.00196946525866475$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5} = \frac{2000}{(1000) + 2000000} - \frac{2000 \times (1000)}{((1000) + 2000000)^2}$$

$$= 0.000999000749500312$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6} = -\frac{0.04 \times (1800) \times (36000)}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} + \frac{0.04 \times (1800) \times (36000)^3}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2}$$

$$= -0.0005$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{0.03 \times (500)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000} - \frac{0.03 \times ((200) + 0.3 \times (1800)) \times (500)}{((200) + 0.3 \times (1800) + 1500000)^2}$$

$$= 0.00000999014062986697$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{0.009 \times (500)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000} - \frac{0.009 \times ((200) + 0.3 \times (1800)) \times (500)}{((200) + 0.3 \times (1800) + 1500000)^2}$$

$$= 0.00000299704218896009$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{0.03 \times ((200) + 0.3 \times (1800))}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000} - 0.01$$

$$= -0.00998520729773312$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{0.01 \times (500) \times (140)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000}$$

$$- \frac{0.01 \times ((200) + 0.3 \times (1800)) \times (500) \times (140)}{((200) + 0.3 \times (1800) + 1500000)^2}$$

$$= 0.000466206562727125$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{0.003 \times (500) \times (140)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000}$$

$$- \frac{0.003 \times ((200) + 0.3 \times (1800)) \times (500) \times (140)}{((200) + 0.3 \times (1800) + 1500000)^2}$$

$$= 0.000139861968818138$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{0.01 \times ((200) + 0.3 \times (1800)) \times (140)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000}$$

$$= 0.000690326105787811$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{0.01 \times ((200) + 0.3 \times (1800)) \times (500)}{(200) + 0.3 \times (1800) + 1500000} - 0.68$$

$$= -0.677534549622186$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = -0.000081301 \times (1000)$$

$$= -0.081301$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_5}{\partial x_2} &= \frac{0.20 \times ((500) + 0.4 \times (140))}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)} - \frac{8 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2} \\ &\quad + \frac{0.40 \times (36000)^2}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} - \frac{320 \times (1800)^2 \times (36000)^2}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2} + 2 \\ &= 2.00001174445625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_5}{\partial x_3} &= \frac{0.20 \times (1800)}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)} - \frac{0.20 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2} \\ &= 0.00492366314666187\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_5}{\partial x_4} &= \frac{0.080 \times (1800)}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)} \\ &\quad - \frac{0.080 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2} \\ &= 0.00196946525866475\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_5}{\partial x_5} &= 0.05 - 0.000081301 \times (200) - \frac{20000}{(1000) + 2000000} + \frac{20000}{((1000) + 2000000)^2} \\ &= 0.0237497925049969\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_5}{\partial x_6} &= \frac{0.80 \times (1800) \times (36000)}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} - \frac{0.80 \times (1800) \times (36000)^3}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2} + 0.004 \\ &= 0.014\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_6}{\partial x_2} &= \frac{320 \times (1800) \times (36000)^3}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2} - \frac{0.40 \times (36000)^2}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} \\ &\quad + \frac{320 \times (1800)^2 \times (36000)^2}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2} - \frac{2 \times ((500) + 0.4 \times (140))}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)} \\ &\quad + \frac{80 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2} - 2 \\ &= 1.99988255543746\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3} = - \frac{2 \times (1800)}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)}$$

$$+ \frac{2 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2}$$

$$= -0.0492366314666187$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_4} = - \frac{0.80 \times (1800)}{40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140)} + \frac{0.80 \times (1800) \times ((500) + 0.4 \times (140))}{(40 \times (1800) + (500) + 0.4 \times (140))^2}$$

$$= -0.0196946525866475$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5} = \frac{20000}{(1000) + 2000000} - \frac{20000 \times (1000)}{((1000) + 2000000)^2}$$

$$= 0.00999000749500312$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_6} = 0.396 - \frac{0.4 \times (36000)^2}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} + 0.4 \times (36000) \times \left(- \frac{2 \times (36000)}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} + \frac{2 \times (36000)^3}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2} \right) - \frac{0.80 \times (1800) \times (36000)}{(36000)^2 + 400 \times (1800)^2} + \frac{0.80 \times (1800) \times (36000)^3}{((36000)^2 + 400 \times (1800)^2)^2}$$

$$= -0.014$$

Hasil perhitungan matriks Jacobian di atas dari persamaan (3.41-3.46)

dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{1,1} = -0.15$$

$$a_{4,1} = 0.000466206562727125$$

$$a_{1,2} = 0.023415$$

$$a_{4,2} = 0.000139861968818138$$

$$a_{1,3} = 0$$

$$a_{4,3} = 0.000690326105787811$$

$$a_{1,4} = 0$$

$$a_{4,4} = -0.677534549622186$$

$$a_{1,5} = 0$$

$$a_{4,5} = 0$$

$$a_{1,6} = 0$$

$$a_{4,6} = 0$$

$$a_{2,1} = 0.08$$

$$a_{5,1} = -0.081301$$

$$a_{2,2} = -0.124526744456254$$

$$a_{5,2} = 2.00001174445625$$

$$a_{2,3} = -0.00492366314666187$$

$$a_{5,3} = 0.00492366314666187$$

$$\begin{aligned}
 a_{2,4} &= -0.00196946525866475 & a_{5,4} &= 0.00196946525866475 \\
 a_{2,5} &= 0.000999000749500312 & a_{5,5} &= 0.0237497925049969 \\
 a_{2,6} &= -0.0005 & a_{5,6} &= 0.014 \\
 a_{3,1} &= 0.00000999014062986697 & a_{6,1} &= 0 \\
 a_{3,2} &= 0.00000299704218896009 & a_{6,2} &= 1.99988255543746 \\
 a_{3,3} &= -0.00998520729773312 & a_{6,3} &= -0.0492366314666187 \\
 a_{3,4} &= 0 & a_{6,4} &= -0.0196946525866475 \\
 a_{3,5} &= 0 & a_{6,5} &= 0.00999000749500312 \\
 a_{3,6} &= 0 & a_{6,6} &= -0.014
 \end{aligned}$$

Sedangkan invers dari hasil matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} &= -6.99386155475147 & a_{4,1} &= -0.00525288031523468 \\
 a_{1,2} &= -0.601870198489925 & a_{4,2} &= -0.00121185277068454 \\
 a_{1,3} &= 0.140002904717327 & a_{4,3} &= -0.101757006544672 \\
 a_{1,4} &= 0.000824984360384678 & a_{4,4} &= -1.47593783241441 \\
 a_{1,5} &= 0.0114562009736276 & a_{4,5} &= 0.0000230668156128051 \\
 a_{1,6} &= 0.0329515652054106 & a_{4,6} &= 0.0000663472717086788 \\
 a_{2,1} &= -2.0960595008636 & a_{5,1} &= 231.624889677894 \\
 a_{2,2} &= -3.85567071422117 & a_{5,2} &= 455.641207616378 \\
 a_{2,3} &= 0.896879594601712 & a_{5,3} &= -237.573677278425 \\
 a_{2,4} &= 0.0052849734810037 & a_{5,4} &= -1.39993215561848 \\
 a_{2,5} &= 0.0733901407663526 & a_{5,5} &= 20.9657581779045 \\
 a_{2,6} &= 0.211092666274251 & a_{5,6} &= 4.69285790589103 \\
 a_{3,1} &= -0.00762644549700568 & a_{6,1} &= -134.104249491814 \\
 a_{3,2} &= -0.00175944025970409 & a_{6,2} &= -225.637073273654 \\
 a_{3,3} &= -100.147736902 & a_{6,3} &= 310.945165849764 \\
 a_{3,4} &= 0.00000241166733450093 & a_{6,4} &= 1.83228268928571 \\
 a_{3,5} &= 0.0000334897811313795 & a_{6,5} &= 25.4441171698919
 \end{aligned}$$

$$a_{3,6} = 0.0000963269332611547$$

$$a_{6,6} = -37.925987356049$$

Setelah diperoleh hasil dari masing-masing persamaan ($F(x^{(0)})$) dan matriks Jacobian ($J(x^{(0)})$) dari persamaan (3.41-3.46), kemudian dibuktikan dengan sistem linear berikut:

$$J(x^{(0)}) \cdot y^{(0)} = -F(x^{(0)}).$$

Karena yang dicari adalah $y^{(0)}$, maka yang dihitung adalah invers dari matriks Jacobian ($J(x^{(0)})$)⁻¹ dikalikan dengan ($-F(x^{(0)})$), atau dapat dituliskan seperti di bawah ini:

$$y^{(0)} = (J(x^{(0)}))^{-1} \cdot (-F(x^{(0)}))$$

$$= \begin{bmatrix} 3282.66350598173 \\ -843.36852883792 \\ 9517.84576687885 \\ 19.3761698953713 \\ -93258.8601097633 \\ -635.354015973993 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) pada saat $k = 1$ yaitu nilai awal ($x^{(0)}$) ditambah dengan $y^{(0)}$, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + y^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 200 \\ 1800 \\ 500 \\ 140 \\ 1000 \\ 36000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3282.66350598173 \\ -843.36852883792 \\ 9517.84576687885 \\ 19.3761698953713 \\ -93258.8601097633 \\ -635.354015973993 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3482.66350598173 \\ 956.63147116208 \\ 10017.8457668788 \\ 159.376169895371 \\ -92258.8601097633 \\ 35364.645984026 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$), langkah selanjutnya yaitu mencari *norm* maksimal pada iterasi pertama pada saat $k = 1$. Untuk mencari *norm* maksimal tersebut yaitu dengan cara memutlakkan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) dikurangi dengan nilai awal ($x^{(0)}$). Karena pada metode *Newton* ini yang dicari adalah *norm* maksimal dan sistem pada penelitian ini ada enam variabel, maka nilai dari harga mutlak dari keenam variabel tersebut dicari nilai yang terbesar, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} = \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} = 9517.84576687885.$$

Karena dari keenam variabel tersebut nilai terbesarnya adalah 9517.84576687885 dan nilai *norm* maksimal tersebut lebih besar dari toleransi yang ditetapkan yaitu sebesar 10^{-6} maka iterasi dilanjutkan.

Iterasi kedua, $k = 2$

Setelah didapatkan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) pada iterasi pertama pada saat $k = 1$, selanjutnya pada iterasi kedua pada saat $k = 2$ ini untuk nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) tersebut disubstitusikan ke dalam masing-masing persamaan (3.41-3.46). Untuk nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) adalah sebagai berikut:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3482.66350598173 \\ 956.63147116208 \\ 10017.8457668788 \\ 159.376169895371 \\ -92258.8601097633 \\ 35364.645984026 \end{bmatrix}$$

Persamaan (3.41-3.46) dapat didefinisikan sebagai

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} f_1(x^{(1)}) \\ f_2(x^{(1)}) \\ f_3(x^{(1)}) \\ f_4(x^{(1)}) \\ f_5(x^{(1)}) \\ f_6(x^{(1)}) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= (3482.66350598173, 956.63147116208, 10017.8457668788, \\ &\quad 159.376169895371, -92258.8601097633, 35364.645984026) \\ &= 0.1 \times 5000 - 0.08 \times (3482.66350598173) + 0.023415 \times (956.63147116208) \\ &\quad - 0.07 \times (3482.66350598173) \\ &= -1.13686837721616 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= (3482.66350598173, 956.63147116208, 10017.8457668788, \\ &\quad 159.376169895371, -92258.8601097633, 35364.645984026) \\ &= 0.4 \times 5000 \times \left(\frac{(-92258.8601097633)}{(-92258.8601097633) + 2000000} \right) - 0.02 \\ &\quad \times (956.63147116208) \times \left(\frac{(35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + (20 \times (956.63147116208))^2} \right) \\ &\quad - 0.1 \times (956.63147116208) + 0.08 \times (3482.66350598173) - 0.023415 \\ &\quad \times (956.6314707) - 0.1 \times 20 \times 0.1 \\ &\quad \times \left(\frac{(956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{40 \times (956.63147116208) + ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))} \right) \\ &\quad - 0.0011 \times (956.63147116208) \\ &= 8.08039374233858 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= (3482.66350598173, 956.63147116208, 10017.8457668788, \\ &\quad 159.376169895371, -92258.8601097633, 35364.645984026) \\ &= 100 + 0.03 \times \left(\frac{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} \right) \\ &\quad \times (10017.8457668788) - 0.01 \times (10017.8457668788) \end{aligned}$$

$$= 0.574925040065921$$

$$f_4 = (3482.66350598173, 956.63147116208, 10017.8457668788, \\ 159.376169895371, -92258.8601097633, 35364.645984026)$$

$$= 100 + 0.01$$

$$\times \left(\frac{((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (10017.8457668788) \times (159.376169895371)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} \right)$$

$$- 0.68 \times (159.376169895371)$$

$$= 31.6479546720178$$

$$f_5 = (3482.66350598173, 956.63147116208, 10017.8457668788, \\ 159.376169895371, -92258.8601097633, 35364.645984026)$$

$$= 0.05 \times (-92258.8601097633) - 0.000081301 \times (3482.66350598173)$$

$$\times (-92258.8601097633) - 10 \times 0.4 \times 5000 \times$$

$$\left(\frac{(-92258.8601097633)}{(-92258.8601097633) + 2000000} \right) + 0.1 \times 20 \times 0.1$$

$$\times \left(\frac{(956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{40 \times (956.63147116208) + ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))} \right)$$

$$+ 0.02 \times 20 \times (956.63147116208)$$

$$\times \left(\frac{(35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + (20 \times (956.63147116208))^2} \right) + 0.1 \times 20$$

$$\times (956.63147116208) + 0.004 \times (35364.645984026)$$

$$= 24867.4376053634$$

$$f_6 = (3482.66350598173, 956.63147116208, 10017.8457668788,$$

$$159.376169895371, -92258.8601097633, 35364.645984026)$$

$$= 0.4 \times (35364.64590) \times \left(1 - \frac{(35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + (20 \times (956.63147116208))^2} \right)$$

$$+ 10 \times 0.4 \times 5000 \times \left(\frac{(-92258.8601097633)}{(-92258.8601097633) + 2000000} \right) - 0.02 \times 20$$

$$\begin{aligned}
& \times (956.63147116208) \times \left(\frac{(35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + (20 \times (956.63147116208))^2} \right) \\
& - 0.1 \times 20 \\
& \times \left(\frac{(956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{40 \times (956.63147116208) + ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))} \right) \\
& - 0.1 \times 20 \times (956.63147116208) - 0.004 \times (35364.645984026) \\
& = -513.993081829475
\end{aligned}$$

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -1.13686837721616 \times 10^{-13} \\ 8.08039374233858 \\ 0.574925040065921 \\ 31.6479546720178 \\ 24867.4376053634 \\ -513.993081829475 \end{bmatrix}$$

Nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) di atas juga disubstitusikan pada matriks Jacobian dari persamaan (3.41-3.46). Matriks Jacobian tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -0.15$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0.023415$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0.08$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\frac{0.02 \times (35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2} \\ &+ \frac{16 \times (956.63147116208)^2 \times (35364.645984026)^2}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} - 0.124515 \\ &- \frac{0.20 \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{8 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2} \\ &= -0.141677074376931 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= \frac{0.20 \times (956.63147116208)}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)} \\ &+ \frac{0.20 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2} \\ &= -0.00313215220033961 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_4} &= \frac{0.080 \times (956.63147116208)}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)} \\ &+ \frac{0.080 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2} \\ &= -0.00125286088013584 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5} = \frac{2000}{(-92258.8601097633) + 2000000} - \frac{2000 \times (-92258.8601097633)}{((-92258.8601097633) + 2000000)^2}$$

$$= 0.00109905923757402$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_6} &= -\frac{0.04 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2} \\ &\quad + \frac{0.04 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)^3}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} \\ &= -0.000189520407523602 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= \frac{0.03 \times (10017.8457668788)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} \\ &\quad - \frac{0.03 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (10017.8457668788)}{((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000)^2} \\ &= 0.00019935366411335 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= \frac{0.009 \times (10017.8457668788)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} \\ &\quad - \frac{0.009 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (10017.8457668788)}{((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000)^2} \\ &= 0.000059806099234005 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= \frac{0.03 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208))}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} - 0.01 \\ &= -0.00992479593653306 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= \frac{0.01 \times (10017.8457668788) \times (159.376169895371)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} \\ &\quad - \frac{0.01 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (10017.8457668788) \times (159.376169895371)}{((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000)^2} \\ &= 0.010590741146998 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{0.003 \times (10017.8457668788) \times (159.376169895371)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000}$$

$$\frac{-0.003 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (10017.8457668788) \times (159.376169895371)}{((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000)^2}$$

$$= 0.00317722234409941$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} =$$

$$\frac{0.01 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (159.376169895371)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000}$$

$$= 0.00399524519864315$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} =$$

$$\frac{0.01 \times ((3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208)) \times (10017.8457668788)}{(3482.66350598173) + 0.3 \times (956.63147116208) + 1500000} - 0.68$$

$$= -0.428872430381873$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = -0.000081301 \times (-92258.8601097633)$$

$$= 7.50073758578386$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} =$$

$$\frac{0.20 \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)}$$

$$\frac{8 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2}$$

$$+ \frac{0.40 \times (35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2}$$

$$\frac{320 \times (956.63147116208)^2 \times (35364.645984026)^2}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} + 2$$

$$= 2.17800508199839$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = \frac{0.20 \times (956.63147116208)}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)}$$

$$- \frac{0.20 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2}$$

$$= 0.00313215220033961$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = \frac{0.080 \times (956.63147116208)}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)}$$

$$- \frac{0.080 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2}$$

$$= 0.00125286088013584$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = 0.05 - 0.000081301 \times (3482.66350598173)$$

$$- \frac{20000}{(-92258.8601097633) + 2000000}$$

$$+ \frac{20000}{((-92258.8601097633) + 2000000)^2}$$

$$= -0.244134618075561$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_6} = \frac{0.80 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2}$$

$$- \frac{0.80 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)^3}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} + 0.004$$

$$= 0.00779040815047205$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_2} = \frac{320 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)^3}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2}$$

$$- \frac{0.40 \times (35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{320 \times (956.63147116208)^2 \times x_6^2}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} \\
& - \frac{2 \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)} \\
& + \frac{80 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2} - 2 \\
& = 2.92379087078132
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_6}{\partial x_3} &= \\
& - \frac{2 \times (956.63147116208)}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)} \\
& + \frac{2 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2} \\
& = -0.0313215220033961
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_6}{\partial x_4} &= \\
& - \frac{0.80 \times (956.63147116208)}{40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371)} \\
& + \frac{0.80 \times (956.63147116208) \times ((10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))}{(40 \times (956.63147116208) + (10017.8457668788) + 0.4 \times (159.376169895371))^2} \\
& = -0.0125286088013584
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_6}{\partial x_5} &= \frac{20000}{(-92258.8601097633) + 2000000} - \frac{20000 \times (-92258.8601097633)}{((-92258.8601097633) + 2000000)^2} \\
& = 0.0109905923757402
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_6} = 0.396 - \frac{0.4 \times (35364.645984026)^2}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2} + 0.4$$

$$\times (35364.645984026)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(- \frac{2 \times (35364.645984026)}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2} \right. \\
& \left. + \frac{2 \times (35364.645984026)^3}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{0.80 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)}{(35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2} \\ & + \frac{0.80 \times (956.63147116208) \times (35364.645984026)^3}{((35364.645984026)^2 + 400 \times (956.63147116208)^2)^2} \\ & = -0.0573456123261897 \end{aligned}$$

Hasil perhitungan matriks Jacobian di atas dari persamaan (3.41-3.46)

dapat dituliskan sebagai berikut:

$a_{1,1} = -0.15$	$a_{4,1} = 0.010590741146998$
$a_{1,2} = 0.023415$	$a_{4,2} = 0.00317722234409941$
$a_{1,3} = 0$	$a_{4,3} = 0.00399524519864315$
$a_{1,4} = 0$	$a_{4,4} = -0.428872430381873$
$a_{1,5} = 0$	$a_{4,5} = 0$
$a_{1,6} = 0$	$a_{4,6} = 0$
$a_{2,1} = 0.08$	$a_{5,1} = 7.50073758578386$
$a_{2,2} = -0.141677074376931$	$a_{5,2} = 2.17800508199839$
$a_{2,3} = -0.00313215220033961$	$a_{5,3} = 0.00313215220033961$
$a_{2,4} = -0.00125286088013584$	$a_{5,4} = 0.00125286088013584$
$a_{2,5} = 0.00109905923757402$	$a_{5,5} = -0.244134618075561$
$a_{2,6} = -0.000189520407523602$	$a_{5,6} = 0.00779040815047205$
$a_{3,1} = 0.00019935366411335$	$a_{6,1} = 0$
$a_{3,2} = 0.000059806099234005$	$a_{6,2} = 2.92379087078132$
$a_{3,3} = -0.00992479593653306$	$a_{6,3} = -0.0313215220033961$
$a_{3,4} = 0$	$a_{6,4} = -0.0125286088013584$
$a_{3,5} = 0$	$a_{6,5} = 0.0109905923757402$
$a_{3,6} = 0$	$a_{6,6} = -0.0573456123261897$

Sedangkan invers dari hasil matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

$a_{1,1} = -7.62470712651153$	$a_{4,1} = -0.235526141837741$
-------------------------------	--------------------------------

$a_{1,2} = -1.27442974902168$	$a_{4,2} = -0.0926509140532862$
$a_{1,3} = 0.390986424382549$	$a_{4,3} = -0.910203797304745$
$a_{1,4} = 0.00360578503696576$	$a_{4,4} = -2.33143355566494$
$a_{1,5} = -0.00558182726544447$	$a_{4,5} = -0.000405798278506906$
$a_{1,6} = 0.0034535463959306$	$a_{4,6} = 0.000251072474221533$
$a_{2,1} = -6.13735079977489$	$a_{5,1} = -300.836893737092$
$a_{2,2} = -8.16418801423239$	$a_{5,2} = -126.043848863069$
$a_{2,3} = 2.5047176449875$	$a_{5,3} = 39.1374174172448$
$a_{2,4} = 0.0230991994680702$	$a_{5,4} = 0.360936097286356$
$a_{2,5} = -0.0357580222001566$	$a_{5,5} = -4.67336052207698$
$a_{2,6} = 0.0221239359124317$	$a_{5,6} = -0.218316690520244$
$a_{3,1} = -0.190136333935111$	$a_{6,1} = -370.417175332015$
$a_{3,2} = -0.0747955407258577$	$a_{6,2} = -440.35054167368$
$a_{3,3} = -100.734792375076$	$a_{6,3} = 190.424064649385$
$a_{3,4} = 0.000211621426593419$	$a_{6,4} = 1.75614343663027$
$a_{3,5} = -0.000327594195661038$	$a_{6,5} = -2.71854512016692$
$a_{3,6} = 0.000202686629297346$	$a_{6,6} = -16.3521344338681$

Setelah diperoleh hasil dari masing-masing persamaan ($F(x^{(1)})$) dan matriks Jacobian ($J(x^{(1)})$) dari persamaan (3.41-3.46), kemudian dibuktikan dengan sistem linear berikut:

$$J(x^{(1)}) \cdot y^{(1)} = -F(x^{(1)}).$$

Karena yang dicari adalah $y^{(1)}$, maka yang dihitung adalah invers dari matriks Jacobian ($J(x^{(1)})$)⁻¹ dikalikan dengan ($-F(x^{(1)})$), atau dapat dituliskan seperti di bawah ini:

$$y^{(1)} = (J(x^{(1)}))^{-1} \cdot (-F(x^{(1)}))$$

$$= \begin{bmatrix} 150.539830764576 \\ 964.380722386777 \\ 66.7632423219103 \\ 85.277271197199 \\ 117086.847878633 \\ 62591.5150314596 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) pada saat $k = 2$ yaitu nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$) ditambah dengan $y^{(1)}$, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + y^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3482.66350598173 \\ 956.63147116208 \\ 10017.8457668788 \\ 159.376169895371 \\ -92258.8601097633 \\ 35364.645984026 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 150.539830764576 \\ 964.380722386777 \\ 66.7632423219103 \\ 85.277271197199 \\ 117086.847878633 \\ 62591.5150314596 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3633.20333674631 \\ 1921.01219354886 \\ 10084.6090092008 \\ 244.65344109257 \\ 24827.9877688694 \\ 97956.1610154856 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$), langkah selanjutnya yaitu mencari *norm* maksimal pada iterasi kedua pada saat $k = 2$. Untuk mencari *norm* maksimal tersebut yaitu dengan cara memutlakkan nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) dikurangi dengan nilai titik tetap pada iterasi pertama ($x^{(1)}$). Karena pada metode *Newton* ini yang dicari adalah *norm* maksimal dan sistem pada penelitian ini ada enam variabel, maka nilai dari harga mutlak dari keenam variabel tersebut dicari nilai yang terbesar, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} = \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_{\infty} = 117086.847878633.$$

Karena dari keenam variabel tersebut nilai terbesarnya adalah 117086.847878633 dan nilai *norm* maksimal tersebut lebih besar dari toleransi yang ditetapkan yaitu sebesar 10^{-6} maka iterasi dilanjutkan.

Iterasi ketiga, $k = 3$

Pada iterasi ketiga pada saat $k = 3$ langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada iterasi kedua pada saat $k = 2$. Setelah didapatkan nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) pada saat $k = 2$, selanjutnya pada iterasi ketiga pada saat $k = 3$ ini untuk nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) tersebut disubstitusikan ke dalam masing-masing persamaan (3.41-3.46). Untuk nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) adalah sebagai berikut:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3633.20333674631 \\ 1921.01219354886 \\ 10084.6090092008 \\ 244.65344109257 \\ 24827.9877688694 \\ 97956.1610154856 \end{bmatrix}$$

Persamaan (3.41-3.46) dapat didefinisikan sebagai

$$F(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} f_1(x^{(2)}) \\ f_2(x^{(2)}) \\ f_3(x^{(2)}) \\ f_4(x^{(2)}) \\ f_5(x^{(2)}) \\ f_6(x^{(2)}) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} & f_1(3633.20333674631, 1921.01219354886, 10084.6090092008, \\ & \quad 244.65344109257, 24827.9877688694, 97956.1610154856) \\ &= 0.1 \times 5000 - 0.08 \times (3633.20333674631) + 0.023415 \\ & \quad \times (1921.01219354886) - 0.07 \times (3633.20333674631) \\ &= -5.6843418860808 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_2(3633.20333674631, 1921.01219354886, 10084.6090092008, \\
& \quad 244.65344109257, 24827.9877688694, 97956.1610154856) \\
&= 0.4 \times 5000 \times \left(\frac{(24827.9877688694)}{(24827.9877688694) + 2000000} \right) - 0.02 \\
& \quad \times (1921.01219354886) \\
& \quad \times \left(\frac{(97956.1610154856)^2}{(\times (97956.1610154856))^2 + (20 \times (1921.01219354886))^2} \right) - 0.1 \\
& \quad \times (1921.01219354886) + 0.08 \times (3633.20333674631) - 0.023415 \\
& \quad \times (1921.01219354886) - 0.1 \times 20 \times 0.1 \\
& \quad \times \left(\frac{(1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{40 \times (1921.01219354886) + ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))} \right) \\
& \quad - 0.0011 \times (1921.01219354886) \\
&= -2.26801227576759
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_3(3633.20333674631, 1921.01219354886, 10084.6090092008, \\
& \quad 244.65344109257, 24827.9877688694, 97956.1610154856) \\
&= 100 + 0.03 \times \left(\frac{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000} \right) \\
& \quad \times (10084.6090092008) - 0.01 \times (10084.6090092008) \\
&= 0.000558568968685336
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_4(3633.20333674631, 1921.01219354886, 10084.6090092008, \\
& \quad 244.65344109257, 24827.9877688694, 97956.1610154856) \\
&= 100 + 0.01 \\
& \quad \times \left(\frac{((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (10084.6090092008) \times (244.65344109257)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000} \right) \\
& \quad - 0.68 \times (244.65344109257) \\
&= 2.68082949180578
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_5(3633.20333674631, 1921.01219354886, 10084.6090092008, \\
& \quad 244.65344109257, 24827.9877688694, 97956.1610154856)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.05 \times (24827.9877688694) - 0.000081301 \times (3633.20333674631) \\
&\quad \times (24827.9877688694) - 10 \times 0.4 \times 5000 \times \left(\frac{(24827.9877688694)}{(24827.9877688694) + 2000000} \right) \\
&\quad + 0.1 \times 20 \times 0.1 \\
&\quad \times \left(\frac{(1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{40 \times (1921.01219354886) + ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))} \right) \\
&\quad + 0.02 \times 20 \times (1921.01219354886) \\
&\quad \times \left(\frac{(97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + (20 \times (1921.01219354886))^2} \right) \\
&\quad + 0.1 \times 20 \times (1921.01219354886) + 0.004 \times (97956.1610154856) \\
&= -1392.84205866968 \\
&f_6(3633.20333674631, 1921.01219354886, 10084.6090092008, \\
&\quad 244.65344109257, 24827.9877688694, 97956.1610154856) \\
&= 0.4 \times (97956.1610154856) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{(97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + (20 \times (1921.01219354886))^2} \right) \\
&\quad + 10 \times 0.4 \times 5000 \times \left(\frac{(24827.9877688694)}{(24827.9877688694) + 2000000} \right) - 0.02 \times 20 \\
&\quad \times (1921.01219354886) \times \left(\frac{(97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + (20 \times (1921.01219354886))^2} \right) \\
&\quad - 0.1 \times 20 \\
&\quad \times \left(\frac{(1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{40 \times (1921.01219354886) + ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))} \right) \\
&\quad - 0.1 \times 20 \times (1921.01219354886) - 0.004 \times (97956.1610154856) \\
&= 119.894648589498
\end{aligned}$$

$$F(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -5.6843418860808 \times 10^{-14} \\ -2.26801227576759 \\ 0.000558568968685336 \\ 2.68082949180578 \\ -1392.84205866968 \\ 119.894648589498 \end{bmatrix}$$

Nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) di atas juga disubstitusikan pada matriks Jacobian dari persamaan (3.41-3.46). Matriks Jacobian tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -0.15$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0.023415$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0.08$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{0.02 \times (97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2} + \frac{16 \times (1921.01219354886)^2 \times (97956.1610154856)^2}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2}$$

$$-0.124515$$

$$-\frac{0.20 \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$+\frac{8 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$= -0.139964725666392$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} =$$

$$-\frac{0.20 \times (1921.01219354886)}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$+\frac{0.20 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$= -0.00389836542101541$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} =$$

$$-\frac{0.080 \times (1921.01219354886)}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$+\frac{0.080 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$= -0.00155934616840617$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5} =$$

$$\frac{2000}{(24827.9877688694) + 2000000}$$

$$-\frac{2000 \times (24827.9877688694)}{((24827.9877688694) + 2000000)^2}$$

$$= 0.000975626798619624$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6} =$$

$$-\frac{0.04 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2}$$

$$+\frac{0.04 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)^3}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2}$$

$$= -0.0000906415332871979$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} =$$

$$\frac{0.03 \times (10084.6090092008)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$\frac{0.03 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (10084.6090092008)}{((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000)^2}$$

$$= 0.000200564894858152$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{0.009 \times (10084.6090092008)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$\frac{0.009 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (10084.6090092008)}{((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000)^2}$$

$$= 0.0000601694684574455$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{0.03 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886))}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$-0.01$$

$$= -0.0099160454649056$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{0.01 \times (10084.6090092008) \times (244.65344109257)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$\frac{0.01 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (10084.6090092008) \times (244.65344109257)}{((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000)^2}$$

$$= 0.0163562972298055$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{0.003 \times (10084.6090092008) \times (244.65344109257)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$\frac{0.003 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (10084.6090092008) \times (244.65344109257)}{((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000)^2}$$

$$= 0.00490688916894164$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} =$$

$$\frac{0.01 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (244.65344109257)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$= 0.00684658863539081$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{0.01 \times ((3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886)) \times (10084.6090092008)}{(3633.20333674631) + 0.3 \times (1921.01219354886) + 1500000}$$

$$-0.68$$

$$= -0.397783779674577$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_6} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = -0.000081301 \times (24827.9877688694)$$

$$= -2.01854023359685$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} =$$

$$\frac{0.20 \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$- \frac{8 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$+ \frac{0.40 \times (97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2}$$

$$- \frac{320 \times (1921.01219354886)^2 \times (97956.1610154856)^2}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2} + 2$$

$$= 2.25696829920331$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} =$$

$$\frac{0.20 \times (1921.01219354886)}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$- \frac{0.20 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$= 0.00389836542101541$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} =$$

$$\frac{0.080 \times (1921.01219354886)}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$- \frac{0.080 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$= 0.00155934616840617$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_5} = 0.05 - 0.000081301 \times (3633.20333674631)$$

$$- \frac{20000}{(24827.9877688694) + 2000000}$$

$$+ \frac{20000}{((24827.9877688694) + 2000000)^2}$$

$$= -0.255139332467008$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_6} = \frac{0.80 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2}$$

$$- \frac{0.80 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)^3}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2} + 0.004$$

$$= 0.00581283066574396$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_2} = \frac{320 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)^3}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2}$$

$$- \frac{0.40 \times (97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2}$$

$$+ \frac{320 \times (1921.01219354886)^2 \times (97956.1610154856)^2}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2}$$

$$- \frac{2 \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)}$$

$$+ \frac{80 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2}$$

$$-2$$

$$= 2.4320721853359$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_6}{\partial x_3} &= \\ &= \frac{2 \times (1921.01219354886)}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)} \\ &+ \frac{2 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2} \\ &= -0.0389836542101541 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_6}{\partial x_4} &= \\ &= \frac{0.80 \times (1921.01219354886)}{40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257)} \\ &+ \frac{0.80 \times (1921.01219354886) \times ((10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))}{(40 \times (1921.01219354886) + (10084.6090092008) + 0.4 \times (244.65344109257))^2} \\ &= -0.0155934616840617 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_6}{\partial x_5} &= \frac{20000}{(24827.9877688694) + 2000000} - \frac{20000 \times (24827.9877688694)}{((24827.9877688694) + 2000000)^2} \\ &= 0.00975626798619624 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_6}{\partial x_6} &= 0.396 - \frac{0.4 \times (97956.1610154856)^2}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2} + 0.4 \\ &\times (97956.1610154856) \\ &\times \left(- \frac{2 \times (97956.1610154856)}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2} \right. \\ &\left. + \frac{2 \times (97956.1610154856)^3}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2} \right) \\ &- \frac{0.80 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)}{(97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2} \\ &+ \frac{0.80 \times (1921.01219354886) \times (97956.1610154856)^3}{((97956.1610154856)^2 + 400 \times (1921.01219354886)^2)^2} \\ &= -0.0449224556196491 \end{aligned}$$

Hasil perhitungan matriks Jacobian di atas dari persamaan (3.41-3.46)

dapat dituliskan sebagai berikut:

$a_{1,1} = -0.15$	$a_{4,1} = 0.0163562972298055$
$a_{1,2} = 0.023415$	$a_{4,2} = 0.00490688916894164$
$a_{1,3} = 0$	$a_{4,3} = 0.00684658863539081$
$a_{1,4} = 0$	$a_{4,4} = -0.397783779674577$
$a_{1,5} = 0$	$a_{4,5} = 0$
$a_{1,6} = 0$	$a_{4,6} = 0$
$a_{2,1} = 0.08$	$a_{5,1} = -2.01854023359685$
$a_{2,2} = -0.139964725666392$	$a_{5,2} = 2.25696829920331$
$a_{2,3} = -0.00389836542101541$	$a_{5,3} = 0.00389836542101541$
$a_{2,4} = -0.00155934616840617$	$a_{5,4} = 0.00155934616840617$
$a_{2,5} = 0.000975626798619624$	$a_{5,5} = -0.255139332467008$
$a_{2,6} = -0.0000906415332871979$	$a_{5,6} = 0.00581283066574396$
$a_{3,1} = 0.000200564894858152$	$a_{6,1} = 0$
$a_{3,2} = 0.0000601694684574455$	$a_{6,2} = 2.4320721853359$
$a_{3,3} = -0.0099160454649056$	$a_{6,3} = -0.0389836542101541$
$a_{3,4} = 0$	$a_{6,4} = -0.0155934616840617$
$a_{3,5} = 0$	$a_{6,5} = 0.00975626798619624$
$a_{3,6} = 0$	$a_{6,6} = -0.0449224556196491$

Sedangkan invers dari hasil matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

$a_{1,1} = -7.27333361936705$	$a_{4,1} = -0.349947942690455$
$a_{1,2} = -1.25936505352185$	$a_{4,2} = -0.152583728012319$
$a_{1,3} = 0.489004954091392$	$a_{4,3} = -1.67650844691405$
$a_{1,4} = 0.00484267064631155$	$a_{4,4} = -2.51334181451295$
$a_{1,5} = -0.00474197929260729$	$a_{4,5} = -0.000574534664591345$
$a_{1,6} = 0.0019274649076233$	$a_{4,6} = 0.000233530206666957$

$$\begin{aligned}
 a_{2,1} &= -3.88639944074557 & a_{5,1} &= 18.4630083950115 \\
 a_{2,2} &= -8.06768131660377 & a_{5,2} &= -71.7087248935513 \\
 a_{2,3} &= 3.13263903966298 & a_{5,3} &= 28.3024846034741 \\
 a_{2,4} &= 0.0310228740955256 & a_{5,4} &= 0.280282664337411 \\
 a_{2,5} &= -0.0303778301896686 & a_{5,5} &= -4.20892694528162 \\
 a_{2,6} &= 0.0123476291327574 & a_{5,6} &= -0.399933409587016 \\
 a_{3,1} &= -0.170694858871918 & a_{6,1} &= -206.127705760801 \\
 a_{3,2} &= -0.0744260924038412 & a_{6,2} &= -452.235121109968 \\
 a_{3,3} &= -100.817754122352 & a_{6,3} &= 263.817232856805 \\
 a_{3,4} &= 0.00028619267463062 & a_{6,4} &= 2.61261150599307 \\
 a_{3,5} &= -0.000280242006098009 & a_{6,5} &= -2.55828871420004 \\
 a_{3,6} &= 0.000113909529980021 & a_{6,6} &= -21.6791268614449
 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh hasil dari masing-masing persamaan $(F(x^{(2)}))$ dan matriks Jacobian $(J(x^{(2)}))$ dari persamaan (3.41-3.46), kemudian dibuktikan dengan sistem linear berikut:

$$J(x^{(2)}) \cdot y^{(2)} = -F(x^{(2)})$$

Karena yang dicari adalah $y^{(2)}$, maka yang dihitung adalah invers dari matriks Jacobian $(J(x^{(2)}))^{-1}$ dikalikan dengan $(-F(x^{(2)}))$, atau dapat dituliskan seperti di bawah ini:

$$\begin{aligned}
 y^{(2)} &= (J(x^{(2)}))^{-1} \cdot (-F(x^{(2)})) \\
 &= \begin{bmatrix} -9.7054318461935 \\ -62.1744512888731 \\ -0.51724285179375 \\ 5.56448046964493 \\ -5977.82406291514 \\ -1996.90695488395 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai titik tetap pada iterasi ketiga ($x^{(3)}$) pada saat $k = 3$ yaitu nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$) ditambah dengan $y^{(2)}$, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + y^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3633.20333674631 \\ 1921.01219354886 \\ 10084.6090092008 \\ 244.65344109257 \\ 24827.9877688694 \\ 97956.1610154856 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9.7054318461935 \\ -62.1744512888731 \\ -0.51724285179375 \\ 5.56448046964493 \\ -5977.82406291514 \\ -1996.90695488395 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3623.49790490012 \\ 1858.83774225998 \\ 10084.091766349 \\ 250.217921562215 \\ 18850.1637059543 \\ 95959.2540606016 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan nilai titik tetap pada iterasi ketiga ($x^{(3)}$), langkah selanjutnya yaitu mencari *norm* maksimal pada iterasi ketiga pada saat $k = 3$. Untuk mencari *norm* maksimal tersebut yaitu dengan cara memutlakan nilai titik tetap pada iterasi ketiga ($x^{(3)}$) dikurangi dengan nilai titik tetap pada iterasi kedua ($x^{(2)}$). Karena pada metode *Newton* ini yang dicari adalah *norm* maksimal dan sistem pada penelitian ini ada enam variabel, maka nilai dari harga mutlak dari keenam variabel tersebut dicari nilai yang terbesar, atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} = \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_{\infty} = 5.56448046964493.$$

Karena dari keenam variabel tersebut nilai terbesarnya adalah 5.56448046964493 dan nilai *norm* maksimal tersebut lebih besar dari toleransi yang ditetapkan yaitu sebesar 10^{-6} maka iterasi dilanjutkan.

Dari perhitungan tiga iterasi pada saat $k = 1, 2, 3$ di atas dapat dituliskan dalam Tabel di bawah ini:

Tabel 3.3 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode *Newton* Sampai Iterasi Ketiga pada Saat $k = 1, 2, 3$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	200	1800	500
1	3482.66350598173	956.63147116208	10017.8457668788
2	3633.20333674631	1921.01219354886	10084.6090092008
3	3623.49790490012	1858.83774225998	10084.091766349

Tabel 3.3 (Lanjutan)

k	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$	$x_6^{(k)}$
0	140	1000	36000
1	159.376169895371	-92258.8601097633	35364.645984026
2	244.65344109257	24827.9877688694	97956.1610154856
3	250.217921562215	18850.1637059543	95959.2540606016

Tabel 3.3 (Lanjutan)

k	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	
1	9517.84576687885
2	117086.847878633
3	5.56448046964493

Untuk mencari iterasi keempat dan seterusnya dapat dilakukan dengan berbantuan program Matlab seperti yang disajikan pada Lampiran 4. Hasil dari perhitungan tersebut dapat diiterasikan sampai iterasi keenam dan dapat dituliskan pada Tabel di bawah ini:

Tabel 3.4 Tabel Perhitungan Iterasi dengan Menggunakan Metode *Newton* Sampai Iterasi Keenam pada Saat $k = 1, 2, 3, \dots, 6$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	200.000000	1800.000000	500.000000
1	3482.66350598173	956.63147116208	10017.8457668788
2	3633.20333674631	1921.01219354886	10084.6090092008
3	3623.49790490012	1858.83774225998	10084.091766349
4	3623.46219668641	1858.60899009016	10084.0896748146
5	3623.46219625819	1858.60898734694	10084.0896747896
6	3623.46219625819	1858.60898734694	10084.0896747896

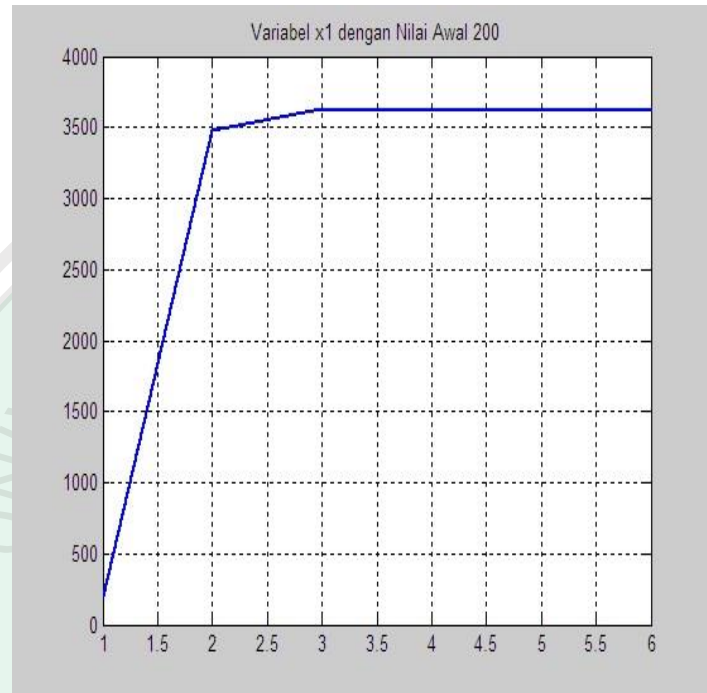
Tabel 3.4 (Lanjutan)

k	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$	$x_6^{(k)}$
0	140.000000	1000.000000	36000.000000
1	159.376169895371	-92258.8601097633	35364.645984026
2	244.65344109257	24827.9877688694	97956.1610154856
3	250.217921562215	18850.1637059543	95959.2540606016
4	250.186961700765	18830.0718376332	95947.458057786
5	250.186962193356	18830.0715887508	95947.4578256026
6	250.186962193356	18830.0715887508	95947.4578256025

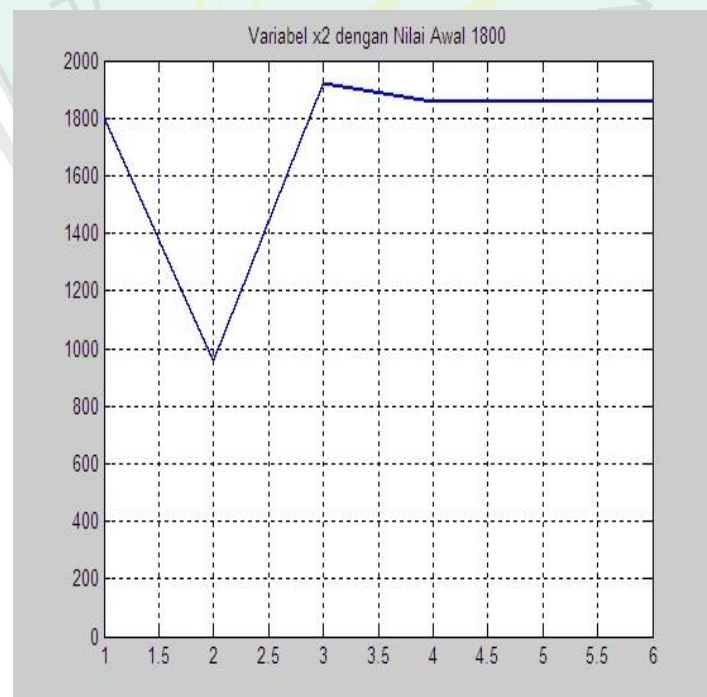
Tabel 3.4 (Lanjutan)

k	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	
1	9517.84576687885
2	117086.847878633
3	5.56448046964493
4	0.00209153432115272
5	0.000000492590743306209
6	0.00000000000363797880709171

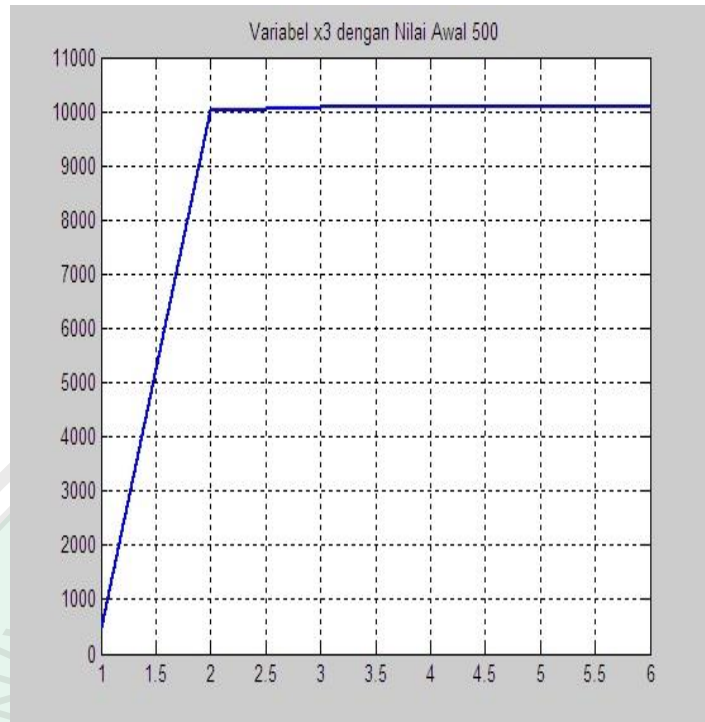
Tabel 3.4 di atas perhitungan dengan menggunakan metode *Newton* diiterasikan sampai iterasi keenam dengan masing-masing variabel dan masing-masing nilai awal yang berbeda dapat digambarkan dengan grafik sebagai berikut:



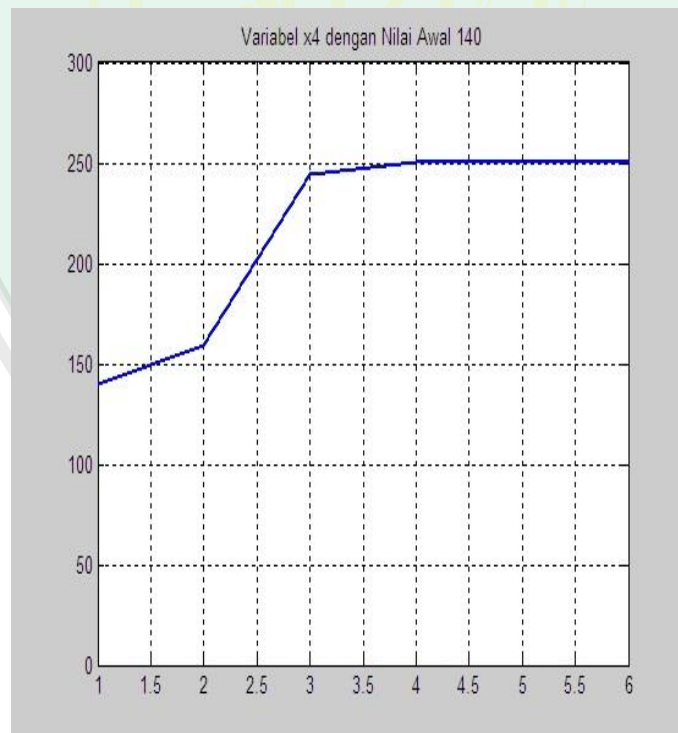
Gambar 3.1 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode *Newton* pada Variabel x_1 dengan Nilai Awal 200



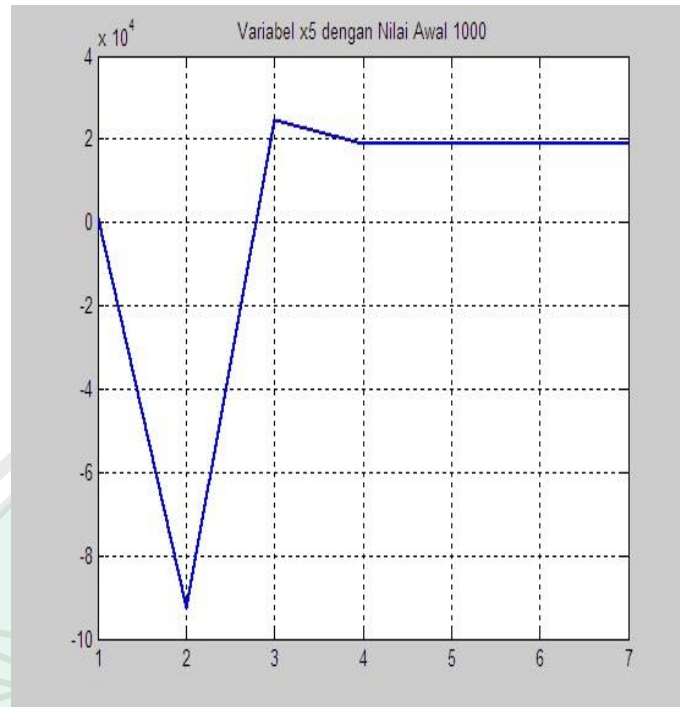
Gambar 3.2 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode *Newton* pada Variabel x_2 dengan Nilai Awal 1800



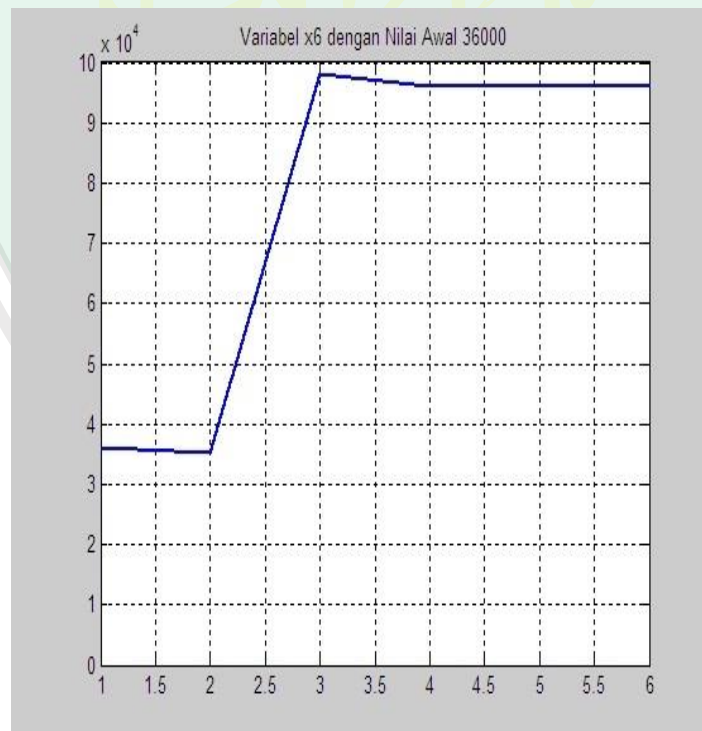
Gambar 3.3 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode *Newton* pada Variabel x_3 dengan Nilai Awal 500



Gambar 3.4 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode *Newton* pada Variabel x_4 dengan Nilai Awal 140



Gambar 3.5 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode *Newton* pada Variabel x_5 dengan Nilai Awal 1000



Gambar 3.6 Grafik Iterasi Sampai Keenam dengan Menggunakan Metode *Newton* pada Variabel x_6 dengan Nilai Awal 36000

Dari Tabel 3.4 di atas dapat dilihat bahwa pada iterasi kelima untuk nilai kesalahan atau *norm* maksimal dari keenam variabel lebih kecil dari tingkat kesalahan atau toleransi yang ditetapkan yaitu 10^{-6} sebesar 0.000000492590743306209 atau $0.000000492590743306209 < 10^{-6}$ sehingga didapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya. Untuk mencari nilai eksak dapat dilakukan dengan berbantuan program Maple seperti yang disajikan pada Lampiran 3. Perbandingan nilai titik tetap dengan menggunakan metode *Newton* dan nilai eksak dapat ditunjukkan pada Tabel di bawah ini:

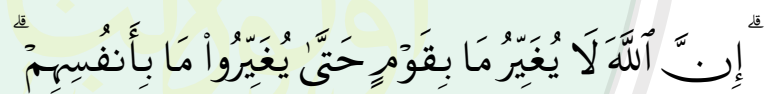
Tabel 3.5 Tabel Perbandingan Nilai Titik Tetap dengan Menggunakan Metode *Newton* dan Nilai Eksak

Perbandingan Nilai Titik Tetap Dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i> Dan Nilai Eksak		
Variabel	Nilai Titik Tetap Dengan Menggunakan Metode <i>Newton</i>	Nilai Eksak
x_1	3623.46219625819	3623.462196
x_2	1858.60898734694	1858.608987
x_3	10084.0896747896	10084.08967
x_4	250.186962193356	250.1869622
x_5	18830.0715887508	18830.07159
x_6	95947.4578256026	95947.45783

3.4 Pandangan Islam tentang Penerapan Metode *Newton* pada Model Matematika Interaksi Sistem Imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*

Kajian al-Quran dalam bab ini adalah menjawab ayat pada bagian bab II, yaitu solusi yang menyelesaikan suatu masalah untuk mendapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya. Solusi tersebut adalah penentuan tingkat kesalahan atau toleransi. Dengan toleransi yang ditetapkan maka

akan didapatkan nilai *norm* maksimal yang lebih kecil dari toleransi dengan perhitungan secara berulang-ulang sehingga didapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya. Pada penelitian ini nilai untuk tingkat kesalahan atau toleransi ditentukan sebesar 10^{-6} . Hasil yang didapatkan pada pembahasan ini adalah $0.000000492590743306209 < 10^{-6}$ pada iterasi kelima hingga didapatkan nilai titik tetap dengan metode *Newton* yang mendekati nilai eksaknya. Tingkat kesalahan atau toleransi tersebut tidak dapat dirubah karena merupakan nilai yang telah ditetapkan untuk mendapatkan nilai *norm* maksimal yang lebih kecil dari toleransi dengan perhitungan secara berulang-ulang hingga akhirnya mendapatkan nilai titik tetap yang mendekati nilai eksaknya. Hal tersebut dapat disangkutpautkan dengan agama yaitu dalam surat ar-Ra'd/13:11 yaitu sebagai berikut:



“*Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri*” (QS. ar-Ra'd/13:11).

Sesungguhnya Allah Swt. tidak mengubah keadaan suatu kaum sampai mereka itu mengubah sesuatu pada diri mereka sendiri, dan apabila Allah Swt. menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tiada yang dapat menolak itu dan tiada pelindung bagi mereka selain Dia.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis* berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear dan terdiri dari enam variabel yang bergantung dengan waktu. Oleh karena itu diasumsikan $\frac{dM_A}{dt} = 0, \frac{dM_I}{dt} = 0, \frac{dT_4}{dt} = 0, \frac{dT_8}{dt} = 0, \frac{dB_E}{dt} = 0, \frac{dB_I}{dt} = 0$. Variabel yang digunakan pada model tersebut dapat dimisalkan dengan $M_A = x_1, M_I = x_2, T_4 = x_3, T_8 = x_4, B_E = x_5, B_I = x_6$. Kemudian model tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode *Newton*. Perhitungan metode *Newton* dilakukan dengan iterasi yang berulang-ulang hingga mendapatkan nilai kesalahan atau *norm* maksimal yang lebih kecil dari toleransi yang ditetapkan sehingga didapatkan nilai titik tetap yang mendekati nilai eksaknya. Pada penelitian ini nilai toleransi yang ditentukan yaitu sebesar 10^{-6} .

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa setelah dilakukan perhitungan iterasi yang berulang-ulang didapatkan nilai $0.000000492590743306209 < 10^{-6}$ pada iterasi kelima sehingga didapatkan nilai titik tetap

$$x_1 = 3623.46219625819, x_2 = 1858.60898734694, x_3 = 10084.0896747896,$$

$$x_4 = 250.186962193356, x_5 = 18830.0715887508, x_6 = 95947.4578256026$$

yang mendekati nilai eksaknya yaitu

$$x_1 = 3623.462196, x_2 = 1858.608987, x_3 = 10084.08967, x_4 = 250.1869622,$$

$$x_5 = 18830.07159, x_6 = 95947.45783.$$

4.2 Saran

Pada pembahasan selanjutnya, ada beberapa hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini di antaranya mencari titik tetap secara analitik dan mengetahui kestabilan titik tetap pada model matematika interaksi sistem imun dengan *Mycobacterium tuberculosis*.



DAFTAR PUSTAKA

- Abadiyah, L.M. 2009. *Analisis Model Matematika pada Pengaruh Sistem Imun terhadap Infeksi Virus HIV*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Adhimah, I. 2011. *Model Matematika pada Sistem Kekebalan Tubuh terhadap Infeksi Mycobacterium Tuberculosis dengan Pengaruh Usia*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Aliyah, I. 2007. *Analisis Model Matematika pada Pengaruh Sistem Imun Terhadap Bakteri Tuberculosis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Al-Mahalli, I.J dan As-Suyuthi, I.J. 2009. *Terjemahan Tafsir Jealalain Berikut Asbaabun Nuzul Jilid 2*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Al-Maraghi, A.M. 1989. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV Tohaputra.
- Anggraini, M.V., Miswanto, dan Fatmawati. 2013. Analisis Model Matematika Jumlah Perokok dengan Dinamika Akar Kuadrat. *Jurnal Matematika*, 2(2): 10-20.
- Bataratawidjaja, K.G. dan Rengganis, I. 2010. *Imunologi dasar Edisi Ke-10*. Jakarta: Fakultas Kedokteran UI.
- Burden, R.L. 2005. *Numerical Analysis Ninth edition*. Belmont: Thomson Brooks.
- Danusantoso, H. 2012. *Buku Saku Ilmu Penyakit Paru*. Jakarta: EGC.
- Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Terjemahan Widiati Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Epperson, J.F. 2013. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis Second Edition*. New Jersey: Hoboken.
- Friedman, A., Turner, J., dan Szomolay, B. 2008. A Model on the Influence of Age on Immunity to Infection with Mycobacterium tuberculosis. *Exp Gerontol*, 43 (4): 275-285.
- Kresno, S.B. 2003. *Imunologi: Diagnosis dan Prosedur Laboratorium*. Jakarta: FKUI.

- Magombedze, G., Garira, W., dan Mwenje, E. 2006. Modelling the Human Immun Response Mechanism to Mycobacterium tuberculosis Infection in the Lungs. *Mathematical Biosciences and Engineering*, (Online), 3(4): 661-682, (<http://www.mbejournal.org/>), diakses 20 Februari 2015.
- Novitasari, I., Winarko, M.S., dan Hanafi, L. 2013. Analisa Kestabilan dan Penyelesaian Numerik Model Dinamik SIRC pada Penyebaran Virus Influenza. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, (Online), 1(1): 1-6, (<http://www.digilib.its.ac.id>), diakses 29 Januari 2016.
- Pagalay, U. 2009. *Mathematical Modelling (Aplikasi pada Kedokteran, Immunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan)*. Malang: UIN Malang Press.
- Pagalay, U., Marjono, dan Handono, K. 2014. A Mathematical Model for Interaction Macrophages, T Lymphocytes and Cytokines at Infection of Mycobacterium tuberculosis with Age Influence. *International Journal of Science and Technology (IJSTE)*, 3(3): 5-14.
- Remani, C. 2013. *Numerical Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations*. Canada: Ontario.
- Ross, S.L. 1984. *Differential Equations Third Edition*. New York: University of New Hampshire.
- Subagyo, A. 2006. Pemeriksaan Interferon-gamma dalam Darah untuk Deteksi Infeksi Tuberkulosis. *Jurnal Tuberkulosis Indonesia*, 3(2): 6-19.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offest.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Daftar Istilah

- Antibodi = Suatu zat yang dibentuk oleh tubuh yang berasal dari protein darah jenis gama-globulin yang diubahnya untuk melawan zat antigen (zat asing) yang masuk ke dalam tubuh.
- Antigen = Zat yang dapat menimbulkan respon imun bila disuntikkan ke dalam tubuh.
- Fagosit = Sel darah putih yang melindungi tubuh dengan menelan partikel asing berbahaya, bakteri, dan sel-sel mati.
- Fagosom = Partikel sitoplasma yang diselubungi membran.
- Limfosit = Leukosit yang berinti satu, tidak bersegmen, pada umumnya tidak berganula, berperan pada imunitas humoral; semacam sel darah putih kelompok agranulosit.
- Lisis = Pemecahan/penguraian suatu sel/substansi lain di bawah pengaruh zat yang spesifik.
- Lisosom = Organel sel berupa kantong terikat membran yang berisi enzim hidrolitik yang berguna untuk mengontrol pencernaan intraseluler pada berbagai keadaan.
- Lumen = Bagian dalam dari organ tubular atau berongga (pembuluh darah, usus, dan rahim).
- Timus = Suatu jaringan limfoid yang terletak di bagian atas jantung dan pembuluh-pembuluh besar; menghasilkan sel T untuk tugas imunitas seluler.

Lampiran 2 Program Pencarian Matriks Jacobian dengan Berbantuan Program Maple

```

> restart;with(linalg):
> dma:=0.1*5000-0.08*MA+0.023415*MI-0.07*MA:
> dmi:=0.4*5000*((BE)/(BE+2000000))-
0.02*MI*((BI^2)/(BI^2+(20*MI)^2))-0.1*MI+0.08*MA-
0.023415*MI-
0.1*20*0.1*((MI*(T4+0.4*T8))/(40*MI+(T4+0.4*T8)))-
0.0011*MI:
> dt4:=100+0.03*((MA+0.3*MI)/(MA+0.3*MI+1500000))*T4-
0.01*T4:
>
dt8:=100+0.01*((MA+0.3*MI)*T4*T8/(MA+0.3*MI+1500000
))-0.68*T8:
> dbe:=0.05*BE-0.000081301*MA*BE-
10*0.4*5000*((BE)/(BE+2000000))+0.1*20*0.1*((MI*(T4+0
.4*T8))/(40*MI+(T4+0.4*T8)))+0.02*20*MI*((BI^2)/(BI^2
+(20*MI)^2))+0.1*20*MI+0.004*BI:
> dbi:=0.4*BI*(1-
(BI^2)/(BI^2+(20*MI)^2))+10*0.4*5000*((BE)/(BE+200000
0))-0.02*20*MI*((BI^2)/(BI^2+(20*MI)^2))-
0.1*20*((MI*(T4+0.4*T8))/(40*MI+(T4+0.4*T8)))-
0.1*20*MI-0.004*BI:
>
jacobian([dma,dmi,dt4,dt8,dbe,dbi],[MA,MI,T4,T8,BE,BI
]);

```

Lampiran 2 (Lanjutan)

$$\begin{aligned}
& \left[\left[-0.15, 0.023415, 0, 0, 0, 0 \right] \right. \\
& \left[0.08, -\frac{0.02 BI^2}{BI^2 + 400 MI^2} + \frac{16.00 MI^2 BI^2}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} - 0.124515 - \frac{0.20 (T4 + 0.4 T8)}{40 MI + T4 + 0.4 T8} \right. \\
& + \frac{8.00 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, -\frac{0.20 MI}{40 MI + T4 + 0.4 T8} + \frac{0.20 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, -\frac{0.080 MI}{40 MI + T4 + 0.4 T8} \\
& + \left. \frac{0.080 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, \frac{2000.0}{BE + 2000000} - \frac{2000.0 BE}{(BE + 2000000)^2}, -\frac{0.04 MI BI}{BI^2 + 400 MI^2} + \frac{0.04 MI BI^3}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} \right] \\
& \left[\frac{0.03 T4}{MA + 0.3 MI + 1500000} - \frac{0.03 (MA + 0.3 MI) T4}{(MA + 0.3 MI + 1500000)^2}, \frac{0.009 T4}{MA + 0.3 MI + 1500000} \right. \\
& - \left. \frac{0.009 (MA + 0.3 MI) T4}{(MA + 0.3 MI + 1500000)^2}, \frac{0.03 (MA + 0.3 MI)}{MA + 0.3 MI + 1500000} - 0.01, 0, 0, 0 \right] \\
& \left[\frac{0.01 T4 T8}{MA + 0.3 MI + 1500000} - \frac{0.01 (MA + 0.3 MI) T4 T8}{(MA + 0.3 MI + 1500000)^2}, \frac{0.003 T4 T8}{MA + 0.3 MI + 1500000} \right. \\
& - \left. \frac{0.003 (MA + 0.3 MI) T4 T8}{(MA + 0.3 MI + 1500000)^2}, \frac{0.01 (MA + 0.3 MI) T8}{MA + 0.3 MI + 1500000}, \frac{0.01 (MA + 0.3 MI) T4}{MA + 0.3 MI + 1500000} - 0.68, 0, 0 \right] \\
& \left[-0.000081301 BE, \frac{0.20 (T4 + 0.4 T8)}{40 MI + T4 + 0.4 T8} - \frac{8.00 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2} + \frac{0.40 BI^2}{BI^2 + 400 MI^2} - \frac{320.00 MI^2 BI^2}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} \right. \\
& + 2.0, \frac{0.20 MI}{40 MI + T4 + 0.4 T8} - \frac{0.20 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, \frac{0.080 MI}{40 MI + T4 + 0.4 T8} - \frac{0.080 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, \\
& 0.05 - 0.000081301 MA - \frac{20000.0}{BE + 2000000} + \frac{20000.0 BE}{(BE + 2000000)^2}, \frac{0.80 MI BI}{BI^2 + 400 MI^2} - \frac{0.80 MI BI^3}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} + 0.004 \\
& \left. \left[0, \frac{320.00 MI BI^3}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} - \frac{0.40 BI^2}{BI^2 + 400 MI^2} + \frac{320.00 MI^2 BI^2}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} - \frac{2.0 (T4 + 0.4 T8)}{40 MI + T4 + 0.4 T8} \right. \right. \\
& + \frac{80.0 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2} - 2.0, -\frac{2.0 MI}{40 MI + T4 + 0.4 T8} + \frac{2.0 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, \\
& -\frac{0.80 MI}{40 MI + T4 + 0.4 T8} + \frac{0.80 MI (T4 + 0.4 T8)}{(40 MI + T4 + 0.4 T8)^2}, \frac{20000.0}{BE + 2000000} - \frac{20000.0 BE}{(BE + 2000000)^2}, 0.396 \\
& - \frac{0.4 BI^2}{BI^2 + 400 MI^2} + 0.4 BI \left(-\frac{2 BI}{BI^2 + 400 MI^2} + \frac{2 BI^3}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} \right) - \frac{0.80 MI BI}{BI^2 + 400 MI^2} \\
& \left. \left. + \frac{0.80 MI BI^3}{(BI^2 + 400 MI^2)^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

Lampiran 3 Program Pencarian Nilai Titik Tetap atau Nilai Eksak pada Model Matematika dengan Berbantuan Program Maple

```

> restart;
> dma:=0.1*5000-0.08*MA+0.023415*MI-0.07*MA:
> dmi:=0.4*5000*((BE)/(BE+2000000))-
0.02*MI*((BI^2)/(BI^2+(20*MI)^2))-0.1*MI+0.08*MA-
0.023415*MI-
0.1*20*0.1*((MI*(T4+0.4*T8))/(40*MI+(T4+0.4*T8)))-
0.0011*MI:
> dt4:=100+0.03*((MA+0.3*MI)/(MA+0.3*MI+1500000))*T4-
0.01*T4:
>
dt8:=100+0.01*((MA+0.3*MI)*T4*T8/(MA+0.3*MI+1500000
))-0.68*T8:
> dbe:=0.05*BE-0.000081301*MA*BE-
10*0.4*5000*((BE)/(BE+2000000))+0.1*20*0.1*((MI*(T4+0
.4*T8))/(40*MI+(T4+0.4*T8)))+0.02*20*MI*((BI^2)/(BI^2
+(20*MI)^2))+0.1*20*MI+0.004*BI:
> dbi:=0.4*BI*(1-
(BI^2)/(BI^2+(20*MI)^2))+10*0.4*5000*((BE)/(BE+200000
0))-0.02*20*MI*((BI^2)/(BI^2+(20*MI)^2))-
0.1*20*((MI*(T4+0.4*T8))/(40*MI+(T4+0.4*T8)))-
0.1*20*MI-0.004*BI:
>
fixedpoint:=solve({dma,dmi,dt4,dt8,dbe,dbi},{MA,MI,T4
,T8,BE,BI}):
>
fixedpoint1:=fixedpoint[1];fixedpoint2:=fixedpoint[2]
;fixedpoint3:=fixedpoint[3];fixedpoint4:=fixedpoint[4
];fixedpoint5:=fixedpoint[5];fixedpoint6:=fixedpoint[
6];fixedpoint7:=fixedpoint[7];fixedpoint8:=fixedpoint
[8];fixedpoint9:=fixedpoint[9];fixedpoint10:=fixedpoi
nt[10];fixedpoint11:=fixedpoint[11];fixedpoint12:=fix
edpoint[12];fixedpoint13:=fixedpoint[13];fixedpoint14
:=fixedpoint[14];fixedpoint15:=fixedpoint[15];fixedpo
int16:=fixedpoint[16];fixedpoint17:=fixedpoint[17];fi
xedpoint18:=fixedpoint[18];fixedpoint19:=fixedpoint[1
9];fixedpoint20:=fixedpoint[20];fixedpoint21:=fixedpo
int[21];fixedpoint22:=fixedpoint[22];fixedpoint23:=fi
xedpoint[23];fixedpoint24:=fixedpoint[24];

```

Lampiran 3 (Lanjutan)

$$\text{fixedpoint1} = \{BE = -3152.359715, BI = -1.206623927 \cdot 10^6, MA = 3592.727378, MI = 1661.717132, T4 = 10082.27365, T8 = 246.4544494\}$$

$$\text{fixedpoint2} = \{BE = 18830.07159, BI = 95947.45783, MA = 3623.462196, MI = 1858.608987, T4 = 10084.08967, T8 = 250.1869622\}$$

$$\text{fixedpoint3} = \{BE = 16901.17827, BI = 12506.88260, MA = 3660.201017, MI = 2093.963382, T4 = 10086.26103, T8 = 254.8009349\}$$

$$\text{fixedpoint4} = \{BE = -2.043594886 \cdot 10^6, BI = -6.078161624 \cdot 10^6, MA = 5636.929142, MI = 14757.18007, T4 = 10204.01935, T8 = -1.550099419 \cdot 10^6\}$$

$$\text{fixedpoint5} = \{BE = -2.042635035 \cdot 10^6, BI = 40405.66179, MA = 5636.929404, MI = 14757.18175, T4 = 10204.01937, T8 = -1.548841598 \cdot 10^6\}$$

$$\text{fixedpoint6} = \{BE = -2.042114412 \cdot 10^6, BI = 1.387647025 \cdot 10^6, MA = 5636.929499, MI = 14757.18236, T4 = 10204.01938, T8 = -1.548386522 \cdot 10^6\}$$

$$\text{fixedpoint7} = \{BE = 22559.35417, BI = -6.079544805 \cdot 10^6, MA = 5637.504522, MI = 14760.86604, T4 = 10204.05390, T8 = -5.566076509 \cdot 10^5\}$$

$$\text{fixedpoint8} = \{BE = 93668.78530, BI = 1.388044838 \cdot 10^6, MA = 5637.531978, MI = 14761.04193, T4 = 10204.05555, T8 = -5.400896778 \cdot 10^5\}$$

$$\text{fixedpoint9} = \{BE = 68100.51488, BI = 40415.92584, MA = 5637.640965, MI = 14761.74011, T4 = 10204.06209, T8 = -4.831722927 \cdot 10^5\}$$

$$\text{fixedpoint10} = \{BE = -2.000832356 \cdot 10^6, BI = -6.160291333 \cdot 10^8, MA = 2.589342292 \cdot 10^5, MI = 1.637417655 \cdot 10^6, T4 = -7.052659469 \cdot 10^7, T8 = 0.0004253099171\}$$



Lampiran 3 (Lanjutan)

$$\begin{aligned} \text{fixedpoint11} &:= \{BE = -2.000797937 \cdot 10^6, BI = 3.701940777 \cdot 10^6, MA = 2.589344371 \cdot 10^5, MI = 1.637418986 \cdot 10^6, T4 = \\ &\quad -7.025914549 \cdot 10^7, T8 = 0.0004269286711\} \\ \text{fixedpoint12} &:= \{BE = -2.000776334 \cdot 10^6, BI = 1.696684840 \cdot 10^8, MA = 2.589345244 \cdot 10^5, MI = 1.637419546 \cdot 10^6, T4 = \\ &\quad -7.014730817 \cdot 10^7, T8 = 0.0004276092335\} \\ \text{fixedpoint13} &:= \{BE = 59400.30648, BI = -6.162540167 \cdot 10^8, MA = 2.590276161 \cdot 10^5, MI = 1.638015905 \cdot 10^6, T4 = \\ &\quad -2.602332283 \cdot 10^7, T8 = 0.001152360193\} \\ \text{fixedpoint14} &:= \{BE = 2.080094132 \cdot 10^5, BI = 1.697306694 \cdot 10^8, MA = 2.590281209 \cdot 10^5, MI = 1.638019139 \cdot 10^6, T4 = \\ &\quad -2.593486860 \cdot 10^7, T8 = 0.001156288921\} \\ \text{fixedpoint15} &:= \{BE = 1.482313741 \cdot 10^5, BI = 3.703514876 \cdot 10^6, MA = 2.590433281 \cdot 10^5, MI = 1.638116558 \cdot 10^6, T4 = \\ &\quad -2.352602308 \cdot 10^7, T8 = 0.001274630802\} \\ \text{fixedpoint16} &:= \{BE = -1573.363453 - 327.4700186 \text{ I}, BI = 3158.373235 + 5255.523059 \text{ I}, MA = 3285.737004 \\ &\quad + 0.1479811618 \text{ I}, MI = -304.9092230 + 0.9479895052 \text{ I}, T4 = 10064.15854 + 0.008721693780 \text{ I}, T8 = 214.5286475 \\ &\quad + 0.01337981692 \text{ I}\} \\ \text{fixedpoint17} &:= \{BE = -2.082698808 \cdot 10^6 + 15.69400847 \text{ I}, BI = 2142.706128 - 4645.471707 \text{ I}, MA = 3293.680402 \\ &\quad + 0.000002881548658 \text{ I}, MI = -254.0226226 + 0.00001845963266 \text{ I}, T4 = 10064.62672 + 1.698428834 \cdot 10^{-7} \text{ I}, T8 \\ &\quad = 215.2492910 + 2.623068057 \cdot 10^{-7} \text{ I}\} \\ \text{fixedpoint18} &:= \{BE = -2.083150760 \cdot 10^6, BI = -6.023828093 \cdot 10^5, MA = 3293.680197, MI = -254.0239383, T4 \\ &\quad = 10064.62671, T8 = 215.2492723\} \\ \text{fixedpoint19} &:= \{BE = -12334.55430, BI = -5.902919917 \cdot 10^5, MA = 3285.483799, MI = -306.5312870, T4 = 10064.14361, \\ &\quad T8 = 214.5057571\} \\ \text{fixedpoint20} &:= \{BE = -1.068011792 \cdot 10^6, BI = -1.801259397 \cdot 10^6, MA = 867.8297118, MI = -15794.38579, T4 \\ &\quad = 9922.987713, T8 = 106.7568977\} \\ \text{fixedpoint20} &:= \{BE = -1.068011792 \cdot 10^6, BI = -1.801259397 \cdot 10^6, MA = 867.8297118, MI = -15794.38579, T4 \\ &\quad = 9922.987713, T8 = 106.7568977\} \\ \text{fixedpoint21} &:= \{BE = -1.015214039 \cdot 10^6, BI = -30134.81426, MA = 765.3378120, MI = -16450.96426, T4 = 9917.062100, \\ &\quad T8 = 104.5522394\} \\ \text{fixedpoint22} &:= \{BE = -1.127789213 \cdot 10^6, BI = 6.238785309 \cdot 10^6, MA = 530.0408264, MI = -17958.31202, T4 \\ &\quad = 9903.476091, T8 = 99.82566828\} \\ \text{fixedpoint23} &:= \{BE = -2.082698808 \cdot 10^6 - 15.69400847 \text{ I}, BI = 2142.706128 + 4645.471707 \text{ I}, MA = 3293.680402 \\ &\quad - 0.000002881548658 \text{ I}, MI = -254.0226226 - 0.00001845963266 \text{ I}, T4 = 10064.62672 - 1.698428834 \cdot 10^{-7} \text{ I}, T8 \\ &\quad = 215.2492910 - 2.623068057 \cdot 10^{-7} \text{ I}\} \\ \text{fixedpoint24} &:= \{BE = -1573.363453 + 327.4700186 \text{ I}, BI = 3158.373235 - 5255.523059 \text{ I}, MA = 3285.737004 \\ &\quad - 0.1479811618 \text{ I}, MI = -304.9092230 - 0.9479895052 \text{ I}, T4 = 10064.15854 - 0.008721693780 \text{ I}, T8 = 214.5286475 \\ &\quad - 0.01337981692 \text{ I}\} \end{aligned}$$

Lampiran 4 Program Iterasi dengan Metode *Newton* pada Model Matematika dengan Berbantuan Program Matlab

```

clc,clear

syms x1 x2 x3 x4 x5 x6
format long g
f1=inline('0.1*5000-0.08*x1+0.023415*x2-
0.07*x1','x1','x2','x3','x4','x5','x6');
f2=inline('0.4*5000*((x5)/(x5+2000000))-
0.02*x2*((x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))-0.1*x2+0.08*x1-
0.023415*x2-
0.1*20*0.1*((x2*(x3+0.4*x4))/(40*x2+(x3+0.4*x4)))-
0.0011*x2','x1','x2','x3','x4','x5','x6');
f3=inline('100+0.03*((x1+0.3*x2)/(x1+0.3*x2+1500000))*x3-
0.01*x3','x1','x2','x3','x4','x5','x6');
f4=inline('100+0.01*((x1+0.3*x2)*x3*x4)/(x1+0.3*x2+1500000)
)-0.68*x4','x1','x2','x3','x4','x5','x6');
f5=inline('0.05*x5-0.000081301*x1*x5-
10*0.4*5000*((x5)/(x5+2000000))+0.1*20*0.1*((x2*(x3+0.4*x4)
)/(40*x2+(x3+0.4*x4)))+
0.02*20*x2*((x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))+0.1*20*x2+0.004*x6','x1
','x2','x3','x4','x5','x6');
f6=inline('0.4*x6*(1-
(x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))+10*0.4*5000*((x5)/(x5+2000000))-
0.02*20*x2*((x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))-
0.1*20*((x2*(x3+0.4*x4))/(40*x2+(x3+0.4*x4)))-0.1*20*x2-
0.004*x6','x1','x2','x3','x4','x5','x6');
x(:,1)=[200,1800,500,140,1000,36000]';
jakob=jacobian([0.1*5000-0.08*x1+0.023415*x2-
0.07*x1,0.4*5000*((x5)/(x5+2000000))-
0.02*x2*((x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))-0.1*x2+0.08*x1-
0.023415*x2-
0.1*20*0.1*((x2*(x3+0.4*x4))/(40*x2+(x3+0.4*x4)))-
0.0011*x2,100+0.03*((x1+0.3*x2)/(x1+0.3*x2+1500000))*x3-
0.01*x3,100+0.01*((x1+0.3*x2)*x3*x4)/(x1+0.3*x2+1500000))-
0.68*x4,0.05*x5-0.000081301*x1*x5-
10*0.4*5000*((x5)/(x5+2000000))+0.1*20*0.1*((x2*(x3+0.4*x4)
)/(40*x2+(x3+0.4*x4)))+
0.02*20*x2*((x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))+0.1*20*x2+0.004*x6,0.4*
x6*(1-
(x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))+10*0.4*5000*((x5)/(x5+2000000))-
0.02*20*x2*((x6^2)/(x6^2+(20*x2)^2))-
0.1*20*((x2*(x3+0.4*x4))/(40*x2+(x3+0.4*x4)))-0.1*20*x2-
0.004*x6],[x1,x2,x3,x4,x5,x6]);
i=1;tol=10^(-6);Norm=inf;

disp(' _____
_____')

```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```

fprintf('%5s %15s %20s %20s %23s %25s %25s %25s
\n', 'k', 'x1^(k)', 'x2^(k)', 'x3^(k)', 'x4^(k)', 'x5^(k)', 'x6^(k)
', '||x^(k)-x^(k-1)||')
disp('_____')
_____')
fprintf('%5d %17f %20f %20f %23f %25f %25f
\n', 0, x(1,i), x(2,i), x(3,i), x(4,i), x(5,i), x(6,i))

for i=1:6
x1=x(1,i);x2=x(2,i);x3=x(3,i);x4=x(4,i);x5=x(5,i);x6=x(6,i);
j=eval(jakob);
ff1=f1(x1,x2,x3,x4,x5,x6);
ff2=f2(x1,x2,x3,x4,x5,x6);
ff3=f3(x1,x2,x3,x4,x5,x6);
ff4=f4(x1,x2,x3,x4,x5,x6);
ff5=f5(x1,x2,x3,x4,x5,x6);
ff6=f6(x1,x2,x3,x4,x5,x6);
F=[ff1,ff2,ff3,ff4,ff5,ff6]';
y(:,i)=inv(j)*-F;
x(:,i+1)=x(:,i)+y(:,i);
Norm=abs(max(x(:,i+1)-x(:,i)));

fprintf('%5d %20', i)
disp([x(1,i+1),x(2,i+1),x(3,i+1),x(4,i+1),x(5,i+1),x(6,i+1),
Norm])
i=i+1;
xx=[x]';
figure (1)
plot(1:i,xx(:,1),'LineWidth',2)
grid on
title('Variabel x1 dengan Nilai Awal 200')
axis ([1 6 0 4000]);

figure(2)
plot(1:i,xx(:,2),'LineWidth',2)
grid on
title('Variabel x2 dengan Nilai Awal 1800')
axis ([1 6 0 2000]);

figure(3)
plot(1:i,xx(:,3),'LineWidth',2)
grid on
title('Variabel x3 dengan Nilai Awal 500')
axis ([1 6 0 11000]);

figure(4)
plot(1:i,xx(:,4),'LineWidth',2)
grid on
title('Variabel x4 dengan Nilai Awal 140')
axis ([1 6 0 300]);

```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
figure(5)
plot(1:i,xx(:,5),'LineWidth',2)
grid on
title('Variabel x5 dengan Nilai Awal 1000')
figure(6)
plot(1:i,xx(:,6),'LineWidth',2)
grid on
title('Variabel x6 dengan Nilai Awal 36000')
axis ([1 6 0 10000]);
end
```

