

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA  
REAKTOR MENGGUNAKAN METODE *LAX WENDROFF***

**SKRIPSI**

**OLEH  
YULIAS MITA ROSANTI  
NIM. 10610039**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2016**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA  
REAKTOR MENGGUNAKAN METODE *LAX WENDROFF***

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Yulias Mita Rosanti  
NIM. 10610039**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2016**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA  
REAKTOR MENGGUNAKAN METODE *LAX WENDROFF***

**SKRIPSI**

Oleh  
**Yulias Mita Rosanti**  
**NIM. 10610039**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 08 Januari 2016

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004

Dr. H. Ahmad Barizi, MA  
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA  
REAKTOR MENGGUNAKAN METODE *LAX WENDROFF***

**SKRIPSI**

Oleh  
**Yulias Mita Rosanti**  
**NIM. 10610039**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 28 Januari 2016

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si .....

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si .....

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Anggota Penguji : Dr. H. Ahmad Barizi, MA .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 00

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yulias Mita Rosanti

NIM : 10610039

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Numerik Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor  
Menggunakan Metode *Lax Wendroff*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau hasil pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Januari 2016  
Yang membuat pernyataan,

Yulias Mita Rosanti  
NIM. 10610039

## MOTO

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اسْتَعِينُوا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةِ إِنَّ اللَّهَ مَعَ الصَّابِرِينَ ﴿١٥٣﴾

“Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu. Sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar” ( Q.S. al-Baqarah/2:153).

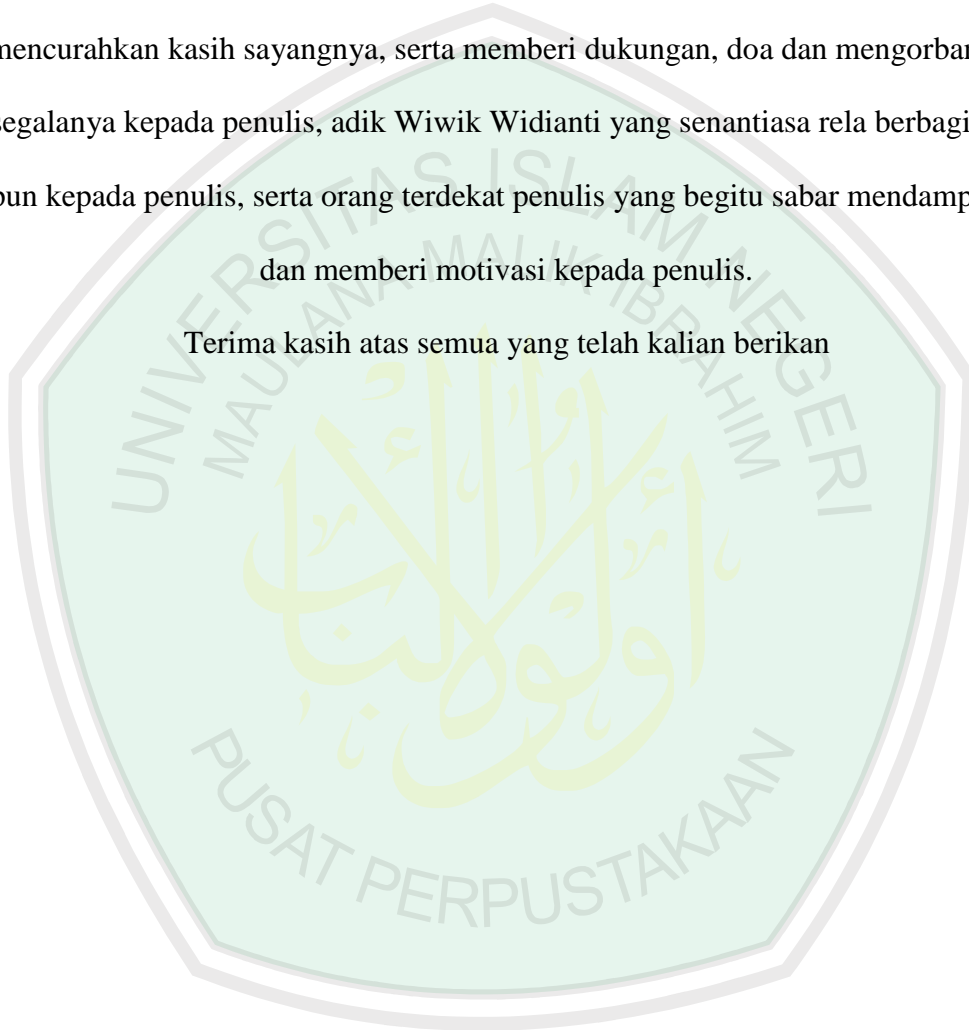


## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini dipersembahkan kepada:

Kedua orang tua tercinta ayah Sunardi dan ibu Buati yang telah sabar mencurahkan kasih sayangnya, serta memberi dukungan, doa dan mengorbankan segalanya kepada penulis, adik Wiwik Widianti yang senantiasa rela berbagi apa pun kepada penulis, serta orang terdekat penulis yang begitu sabar mendampingi dan memberi motivasi kepada penulis.

Terima kasih atas semua yang telah kalian berikan



## KATA PENGANTAR

*Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Swt. atas limpahan rahmat, nikmat serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw. yang telah menuntun umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman ilmiah.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu serta membimbing penulis dalam penyelesaian skripsi ini. Untuk itu penulis ucapkan banyak terima kasih terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan, Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat dan arahan yang terbaik kepada penulis selama penyelesaian skripsi ini.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, MA, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan membimbing penulis dalam penyelesaian skripsi ini.



6. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan nasihat dan dukungan kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. Kedua orang tua penulis, ayah Sunardi dan ibu Buati yang selama ini mengorbankan dan memberikan segalanya yang terbaik untuk penulis.
9. Adik tersayang Wiwik Widianti dan kakak Muhammad Sayyid Asrori yang selalu memberikan dukungan, motivasi serta semangatnya yang tiada kira kepada penulis.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010, khususnya KC, Laila Fitia dan Nurhasanah yang rela meluangkan waktunya untuk bertukar pikiran, dan memberi pengalaman berharga.
11. Adik-adik angkatan 2011 Risca Wulandari, Anis Mukibatul Badi', Ifa Ulil, May Lion, Sisca, Wahyuni, dan Khoir, yang telah memberi semangat serta bantuannya kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca serta dapat menambah wawasan keilmuan khususnya bidang matematika. Amiin.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, Januari 2016

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1. 1 Latar Belakang .....	1
1. 2 Rumusan Masalah .....	5
1. 3 Tujuan Penelitian .....	5
1. 4 Manfaat Penelitian .....	5
1. 5 Batasan Masalah .....	6
1. 6 Metode Penelitian .....	6
1. 7 Sistematika Penulisan .....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Model Keseimbangan Massa Reaktor .....	9
2.2 Deret Taylor .....	13
2.3 Metode Godunov .....	14
2.4 Metode Beda Hingga .....	15
2.5 Metode <i>Lax Wendroff</i> .....	19
2.6 Modulus Kompleks .....	20
2.7 Analisis Konvergensi Solusi .....	21
2.7.1 Analisis Kestabilan .....	21
2.7.2 Analisis Konsistensi .....	21
2.8 Galat ( <i>Error</i> ) .....	22

2.8.1 Sumber Utama Penyebab Galat .....	22
2.8.2 Cara Menganalisis Galat .....	22
2.9 Konsep Keseimbangan dalam Islam .....	23

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Diskritisasi .....	27
3.2 Analisis Kestabilan .....	31
3.3 Analisis Konsistensi .....	36
3.4 Simulasi dan Interpretasi .....	43
3.5 Analisis Galat ( <i>Error</i> ) .....	47
3.6 Solusi Keseimbangan Massa Reaktor dalam Islam .....	48

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	54
4.2 Saran .....	55

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	56
-----------------------------	----

### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Reaktor Silindris dengan Titik Masuk dan Keluar Tunggal .....	10
Gambar 3.1	Kestabilan pada Persamaan (3.22) .....	35
Gambar 3.2	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 1 .....	44
Gambar 3.3	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 2 .....	44
Gambar 3.4	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 3 .....	44
Gambar 3.5	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 4 .....	44
Gambar 3.6	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 5 .....	44
Gambar 3.7	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 6 .....	44
Gambar 3.8	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 7 .....	45
Gambar 3.9	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 8 .....	45
Gambar 3.10	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 9 .....	45
Gambar 3.11	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 10 .....	45
Gambar 3.12	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 11 .....	45
Gambar 3.13	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 12 .....	45
Gambar 3.14	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 13 .....	46
Gambar 3.15	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 14 .....	46
Gambar 3.16	Konsentrasi Massa Zat pada Detik ke 15 .....	46
Gambar 3.17	Grafik Tiga Dimensi untuk Solusi Analitik .....	46
Gambar 3.18	Grafik Tiga Dimensi untuk Solusi Numerik .....	46
Gambar 3.19	Grafik Galat ( <i>Error</i> ) .....	46

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna sebagai berikut:

$c$	: Konsentrasi massa zat
$c_t$	: Konsentrasi massa zat terhadap waktu
$c_x$	: Konsentrasi massa zat terhadap ruang
$c(x)$	: Konsentrasi massa zat yang tidak bergantung pada variabel $t$ , yaitu solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi <i>steady-state</i>
$c(x, t)$	: Konsentrasi massa zat yang bergantung pada variabel $x$ dan $t$ , yaitu solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi non <i>steady-state</i>
$D$	: Koefisien penyebaran massa zat
$L$	: Panjang reaktor
$t$	: Waktu
$U$	: Kecepatan zat yang mengalir di dalam reaktor
$\Delta t$	: Jarak reaktor terhadap waktu
$\Delta x$	: Jarak reaktor terhadap ruang
$\gamma$	: Koefisien reaksi
$\rho$	: Bilangan yang dihasilkan dari metode von-Neumann

## ABSTRAK

Rosanti, Yulias Mita. 2016. **Penyelesaian Numerik Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor Menggunakan Metode *Lax Wendroff***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA.

**Kata kunci:** persamaan keseimbangan massa reaktor, syarat kestabilan, analisis konsistensi, metode *Lax Wendroff*

Persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan konsentrasi massa zat yang masuk dan keluar pada suatu sistem tertutup. Ada beberapa langkah dalam penyelesaian persamaan keseimbangan massa reaktor, di antaranya yaitu melakukan diskritisasi pada persamaan tersebut menggunakan metode *Lax Wendroff*, selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi serta analisis *error* untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut memiliki solusi yang dapat mendekati solusi analitiknya. Setelah diperoleh syarat kestabilan dan konsistensi serta analisis *error* dari metode yang digunakan, maka simulasi dapat dilakukan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan metode *Lax Wendroff* pada persamaan keseimbangan massa reaktor stabil dengan syarat tertentu, dan memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol. Karena metode tersebut memenuhi syarat kestabilan dan konsistensi maka metode tersebut konvergen. Bagi peneliti selanjutnya disarankan untuk membahas persamaan non linier atau persamaan-persamaan lain yang belum ada solusi analitiknya.

## ABSTRACT

Rosanti, Yulias Mita. 2016. **Numerical Solution of Reactor Mass Balance Equation Using *Lax Wendroff* Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA.

**Keyword:** reactor mass balance equation, condition of stability, consistency analysis, *Lax Wendroff* method

Reactor mass balance equation is the mass concentration of substances in and out of a closed system. There are several steps in the resolution of the equation mass balance reactor, one of them is the discretization of the equation using the *Lax Wendroff* method, then determining the stability and consistency condition, and error analysis to indicate that the method used produces a solution that approaches the analytic solution. After obtaining the stability and consistency condition as well as the analytical error of the method used, the simulation can be performed. The simulation results showed that the use of *Lax Wendroff* methods the reactor mass balance equation is stable under certain conditions, if also met consistency condition because truncation error towards zero. Because these methods meet the stability and consistency condition, we conclude that the method is convergent. For further research it is recommended to discuss the non linear equations or other equations that there is no analytical solution.

## ملخص

راسنتي، يولياس ميتا. ٢٠١٦. حل عددي لمعادلة توازن كتلة مفاعل بطريق *Lax Wendroff*.  
بحث جامعي. الشعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية  
مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (I) محمد جمهوري، الماجستير. (II) الدكتور الحاج  
أحمد بارزي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: معادلة توازن كتلة مفاعل، شروط الاستقرار، تحليل الاتساق، طريقة *Lax Wendroff*

معادلة توازن كتلة مفاعل هي تركيز كتلة من المواد داخل وخارج نظام مغلق. هناك العديد من الخطوات في حل معادلة توازن كتلة مفاعل، الذي هو أن تفعل تفريد في المعادلة باستخدام طريقة *Lax Wendroff*، مواصلة تحديد شروط الاستقرار وشروط الاتساق والخطأ التحليلي للإشارة إلى أن الطريقة المستخدمة ليكون الحل الذي يمكن الاقتراب من الحل التحليلي. بعد الحصول على الاستقرار المطلوب والاتساق فضلا عن الخطأ التحليلي النظر عن الطريقة المستخدمة، ومحاكاة يمكن أن يؤديها. وأظهرت نتائج المحاكاة أن استخدام طريقة *Lax Wendroff* معادلة توازن كتلة مفاعل مستقرة في شروط معينة، والاتساق مؤهلة لذبح خطأ نحو الصفر، لأن هذه الطريقة التأهل للاستقرار والاتساق في طريقة غير متقاربة. لمزيد من البحث ويوصى لمناقشة المعادلات غير الخطية أو غيرها من المعادلات التي لا يوجد حل التحليليها.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pentingnya membahas tentang keseimbangan telah dijelaskan dalam firman Allah Swt. dalam al-Quran (QS. al-Baqarah/2:164) yaitu:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأَخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَّاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيْحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu dia hidupakan bumi sesudah mati (kering)-nya dan dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan” (QS. al-Baqarah/2:164).*

Dalam tafsir Ibnu Katsir juz 2, dijelaskan bahwa pada surat al-Baqarah/2: 164 di atas, Allah Swt. berfirman “Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi yang dapat dilihat sekarang, ketinggian, keindahan, keluasan, bintang-bintang yang beredar tetap serta perputarannya, gunung-gunungnya, lautannya, padang saharanya, hutan belantaranya, pergantian siang dan malam hari secara silih berganti tanpa ada keterlambatan sedikit pun, serta segala sesuatu yang ada padanya berupa berbagai macam manfaat (Isma’il & Ad-Dimasyqi, 2000).

Keberadaan alam dan seluruh benda-benda yang terkandung di dalamnya merupakan suatu kesatuan yang tidak terpisahkan. Secara keseluruhan saling membutuhkan, dan saling melengkapi kekurangannya. Seluruh kejadian yang ada di alam dan apa saja yang ada di dalamnya, saling mendukung sehingga dapat disebut alam secara keseluruhan. Alam dan apa saja yang ada di dalamnya seperti tumbuh-tumbuhan dan binatang termasuk manusia dan benda mati yang ada di sekitarnya, serta kekuatan alam lainnya seperti angin, udara dan iklim hakikatnya adalah bagian dari keberadaan alam, misalnya saja manusia, hewan dan tumbuhan dapat membentuk rantai makanan, sehingga mereka dapat bertahan hidup, kemudian seluruh planet yang ada di tata surya beredar melalui porosnya dan tidak pernah bergeser sedikit pun serta iklim yang terdapat di alam raya ini sesuai dengan kondisi makhluk hidupnya.

Dengan mengingat kutipan ayat di atas dapat diketahui bahwa keseimbangan massa reaktor merupakan salah satu fenomena yang terjadi di alam. Pengertian dari keseimbangan massa reaktor adalah keseimbangan massa yang terjadi pada suatu reaksi kimia di mana telah mencapai kondisi tidak ada perubahan antara volume maupun konsentrasi, sehingga dapat disusun neraca massa dan persamaan keseimbangan reaksi pada reaktor tersebut. Pada umumnya persamaan keseimbangan massa reaktor adalah persamaan diferensial parsial (Hudaya, dkk, 2011).

Sumarni (2009) mengatakan bahwa ada beberapa bentuk reaktor di antaranya, *Continous Stirred Tank Reactors (CSTR)*, *Plug Flow Reactors (PFR)*, *Packed Bed Reactors (PBR)*, dan lain-lain. Dalam hal ini penulis menggunakan model reaktor alir pipa *continous stirred tank reactors (CSTR)*, yaitu suatu wadah

yang umumnya berbentuk silinder dengan diameter tertentu, di mana sekeliling reaktor dapat dibiarkan terbuka sehingga terjadi konveksi bebas antar reaktor dengan udara sekelilingnya, dapat diisolasi dengan bahan isolator tertentu, atau dapat juga sekelilingnya dikelilingi dengan cairan pendingin atau pemanas untuk menyerap panas yang timbul. Sebagai salah satu reaktor kimia, di dalam CSTR terjadi reaksi kimia pembentukan atau penguraian, di mana aliran masuk atau keluar berlangsung secara terus-menerus. Reaksi yang terjadi dalam CSTR dapat berupa reaksi satu arah, reaksi bolak-balik, atau reaksi berantai.

Banyak peneliti yang telah menyelesaikan persamaan diferensial parsial mengenai persamaan reaktor, di antaranya yaitu Hidayat, dkk (2012) menggunakan metode skema *central upwind* semidiskrit. Kemudian diselesaikan juga oleh Sulistyarso, dkk (2004) menggunakan Skema Richtmyer, serta diselesaikan oleh Emy Mutholi'ah (2008) menggunakan metode eksplisit FTCS (*Forward Time Central Space*) dan Crank Nicholson, ia menjelaskan bahwa metode implisit FTCS lebih mudah dari pada metode Crank-Nicholson, dan galat yang diperoleh dari keduanya hampir sama, sehingga kedua metode tersebut dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada kasus persamaan keseimbangan massa reaktor, persamaan keseimbangan massa reaktor tersebut diselesaikan juga oleh Caldwell dan Ng (2004) secara analitik menggunakan hukum pertama *Fick's* dan secara numerik menggunakan metode beda hingga FTCS.

Selanjutnya, penulis juga akan menggunakan persamaan keseimbangan massa reaktor untuk menyelesaikan solusi numerik dari persamaan tersebut menggunakan metode *Lax Wendroff* dengan skema FTCS. Di mana skema FTCS

dalam penelitian ini digunakan untuk mengaproksimasikan turunan ruang pada metode *Lax Wendroff* dengan cara menurunkan persamaan  $c_t$  terhadap  $t$  untuk mendapatkan  $c_{tt}$  pada orde dua metode *Lax Wendroff*. Selain itu menggunakan metode Godunov untuk mengatasi index setengah yang muncul akibat pendiskritan. Skema tersebut merupakan salah satu contoh dari skema numerik yang dalam penurunannya dilakukan dengan mengaproksimasi penyelesaian sebagai jumlah dari fungsi linear atau polinomial sepotong-sepotong yang didefinisikan atas setiap sel-grid (LeVeque, 1992).

Penelitian ini juga dilanjutkan pada analisis kestabilan skema *Lax Wendroff*. Analisis kestabilan adalah solusi dari persamaan diferensial yang nilai awalnya dapat diubah-ubah (Flaherty, 1966). Analisis kestabilan ini menggunakan metode *von Neumann* dengan syarat kestabilan yaitu  $|\rho| \leq 1$ .

Selain analisis kestabilan, pada penelitian ini juga digunakan analisis konsistensi skema *Lax Wendroff*. Analisis konsistensi adalah pendekatan persamaan beda yang paling baik dari persamaan diferensial (Flaherty, 1966).

Selain analisis kestabilan dan analisis konsistensi, pada penelitian ini juga digunakan analisis konvergensi skema *Lax Wendroff*. Dikatakan konvergensi jika persamaan beda mendekati solusi persamaan diferensial parsial (Flaherty, 1966).

Kelebihan dari metode *Lax Wendroff* yaitu untuk menghasilkan solusi eksplisit pada persamaan diferensial parsial linear maupun nonLinear. Metode tersebut menggunakan skema FTCS, karena dengan menggunakan skema FTCS dapat mengaproksimasikan turunan ruang pada hampiran deret Taylor orde dua.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis mengambil judul “Penyelesaian Numerik Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor Menggunakan Metode *Lax Wendroff*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana hasil penyelesaian numerik persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode *Lax Wendroff*?
2. Bagaimana analisis kestabilan dari metode *Lax Wendroff*?
3. Bagaimana analisis konsistensi dari metode *Lax Wendroff*?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui hasil penyelesaian numerik persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode *Lax Wendroff*.
2. Untuk mengetahui analisis kestabilan dari metode *Lax Wendroff*.
3. Untuk mengetahui analisis konsistensi dari metode *Lax Wendroff*.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diharapkan dapat memberi pengetahuan tentang penyelesaian persamaan keseimbangan masa reaktor menggunakan metode *Lax Wendroff*, serta dapat menentukan analisis konvergensi dan *error* menggunakan metode tersebut.

### 1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan keseimbangan massa reaktor yang dibahas pada penelitian ini diambil dari Caldwell & Ng (2004). Adapun persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

dengan syarat awal dan kondisi batas sebagai berikut:

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$c(x, t) = 100, \quad 0 < x < L$$

$$c(L, t) = 0, \quad t > 0$$

2. Skema yang digunakan yaitu skema FTCS.

### 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif atau kajian pustaka. Langkah langkah yang digunakan penulis dalam membahas penelitian ini merujuk pada Jamhuri (2014) yaitu:

1. Diskritisasi pada variabel yang tidak diketahui dengan deret Taylor sampai orde dua terhadap waktu di sekitar  $c^n$ .
2. Menurunkan persamaan  $c_t$  terhadap  $t$  untuk mendapatkan  $c_{tt}$  pada hampiran deret Taylor orde dua.
3. Mengganti  $c_{tt}$  dengan turunan ruang, dan menggunakan beda hingga pusat untuk mengaproksimasi turunan ruang pada hampiran deret Taylor orde dua tersebut.

4. Menentukan syarat kestabilan dengan metode *von Neumann*.
5. Melakukan analisis konsistensi.
6. Simulasi.
7. Analisis *error*.
8. Interpretasi hasil.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam penelitian ini terdiri dari beberapa poin, yaitu:

#### Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori yang mendasari pembahasan di antaranya yaitu penjelasan tentang persamaan keseimbangan masa reaktor, deret Taylor, metode beda hingga, metode *Lax Wendroff*, metode Godunov, analisis kestabilan, analisis konvergensi dan *error*, serta penjelasan tentang kajian keagamaan pada kasus keseimbangan alam.

#### Bab III Pembahasan

Bab ini memaparkan langkah-langkah untuk mendapatkan solusi numerik dengan melakukan diskritisasi menggunakan metode *Lax Wendroff*, kemudian menerapkan stabilitas von Neumann terhadap skema eksplisit

yang digunakan untuk mengetahui konvergensi solusi serta *error* yang didapatkan dengan menggunakan metode tersebut.

#### Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari masalah yang dibahas serta saran untuk penelitian selanjutnya.





## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Model Keseimbangan Reaktor

Keseimbangan massa selalu berkaitan dengan hukum kekekalan massa. Hukum kekekalan massa disebut juga dengan hukum *Lomonosov-Lavasier*. Hukum kekekalan massa adalah suatu hukum yang menyatakan massa dalam suatu sistem tertutup yang tidak akan berubah meskipun terjadi bergai macam reaksi di dalam sistem tersebut. Kuantitas massa tidak dapat berubah jika tidak ditambah atau dikurangi secara sengaja. Tempat atau alat yang digunakan pada proses reaksi disebut reaktor (Barnes & Fulford, 2009).

Suatu zat pada ruangan tertutup dikatakan seimbang jika banyaknya massa yang berubah terhadap waktu sama dengan banyaknya massa yang masuk ke dalam ruangan, dikurangi dengan banyaknya massa yang ke luar dari ruangan (Barnes & Fulford, 2009). Prinsip tersebut dinyatakan sebagai keseimbangan massa yang menerangkan semua sumber dan akumulasi material yang masuk dan ke luar dari suatu sistem tertutup. Sering waktu, ide ini dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{akumulasi} \\ \text{massa zat di} \\ \text{dalam sistem} \\ \text{tertutup} \\ \text{(mol/waktu)} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{massa zat} \\ \text{yang masuk} \\ \text{ke dalam} \\ \text{sistem} \\ \text{(mol/waktu)} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{pertambahan} \\ \text{massa di} \\ \text{dalam sistem} \\ \text{tertutup} \\ \text{(mol/waktu)} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{massa zat} \\ \text{yang keluar} \\ \text{dari sistem} \\ \text{tertutup} \\ \text{(mol/waktu)} \end{array} \right)$$

atau dapat dinyatakan dengan

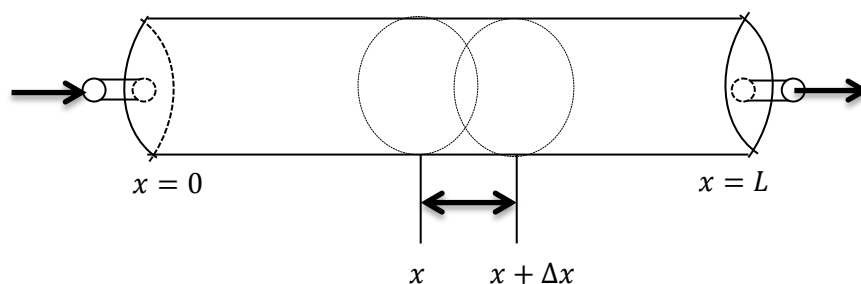
$$Akumulasi = Input - Output$$

Di mana akumulasi adalah rata-rata akumulasi massa zat di dalam sistem tertutup yang dinyatakan dalam satuan (mol/waktu), input adalah rata-rata massa zat yang masuk ke dalam sistem yang dinyatakan dalam satuan (mol/waktu), output adalah rata-rata massa zat yang keluar dari sistem tertutup yang dinyatakan dalam satuan (mol/waktu) ditambah rata-rata pertambahan massa di dalam sistem tertutup yang dinyatakan dalam satuan (mol/waktu).

Jika tingkat masuk massa zat ke dalam sistem tertutup (*input*) lebih besar dari pada laju ke luar sistem, maka massa di dalam sistem tertutup tersebut akan meningkat. Jika tingkat masuk massa zat ke dalam sistem tertutup lebih kecil dari pada massa zat yang keluar sistem maka massa zat akan berkurang. Jika suatu massa zat yang masuk dan ke luar sistem pada tingkat yang sama, maka akumulasi massa di dalam sistem akan menjadi nol (tidak berubah). Kondisi tersebut adalah proses reaksi zat pada suatu reaktor sampai kondisi menjadi stabil (Caldwell & Ng, 2004), hal ini dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\text{Aliran masuk} = \text{Aliran keluar}$$

Teori terkait dengan kekekalan massa dijadikan sebagai dasar kajian untuk menentukan konsentrasi massa zat pada suatu sistem tertutup (reaktor). Aliran masuk dan ke luar suatu zat dijadikan sebagai variabel dan parameter yang dapat diukur (Caldwell & Ng, 2004). Reaktor yang digunakan yaitu reaktor berbentuk silindris atau pipa seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Reaktor Silindris dengan Satu Titik Masuk dan Satu Titik Keluar.

Berdasarkan penjelasan di atas, untuk merumuskan suatu model matematika pada persamaan keseimbangan suatu reaktor, dibuat beberapa asumsi awal yaitu:

- Massa zat yang dijadikan model adalah subjek untuk menghilangkan atau mengurangi order pertama.
- Di dalam sistem tertutup, massa zat bergerak secara vertikal dan ke samping.
- Penyebaran massa zat dalam sistem tertutup (reaktor) tidak mempengaruhi rata-rata aliran massa zat yang keluar.
- Kondisi awal pada waktu  $t = 0$ , reaktor dipenuhi dengan air yang tidak mengandung zat kimia.
- Pada awal waktu  $t = 0$ , massa zat mengalir masuk ke dalam aliran reaktor pada tingkat konstan  $c_{in}$ .

Gambar 2.1 menunjukkan sebuah reaktor silinder dengan satu jalan masuk dan satu jalan keluar. Jika selama proses reaksi diasumsikan bahwa massa zat bergerak secara vertikal dan ke samping (massa zat tidak bergerak memutar), maka keseimbangan massa zat pada sistem tertutup dapat ditunjukkan pada sebuah persamaan dengan pendekatan  $\Delta x$  yaitu:

$$\begin{aligned}
 V \frac{\Delta c}{\Delta t} = & \underbrace{F c(x)}_{\text{aliran masuk}} - \underbrace{F \left[ c(x) + \frac{\partial c(x)}{\partial x} \Delta x \right]}_{\text{aliran keluar}} - \underbrace{DA_c \frac{\partial c(x)}{\partial x}}_{\text{penyebaran masuk}} + \\
 & \underbrace{DA_c \left[ \frac{\partial c(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial c(x)}{\partial x} \Delta x \right]}_{\text{penyebaran keluar}} - \underbrace{\gamma V c}_{\text{pembusukan reaksi}}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

(Caldwell & Ng 2004)

Istilah penyebaran berdasarkan hukum pertama *Fick's* yaitu:

$$J = \text{Fluks (moles/hm}^2) = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.2)$$

Di mana secara langsung dapat disamakan dengan hukum *Fourier* untuk kondisi panas. Ini menentukan bahwa pencampuran massa cenderung bergerak dari konsentrasi tinggi menuju konsentrasi yang rendah. Oleh karena itu parameter  $D$  mencerminkan adanya pencampuran massa tersebut.

Gunakan keseimbangan massa di sekitar segmen yang terbatas sepanjang sumbu longitudinal. Tangki silinder yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 untuk merumuskan persamaan diferensial parsial parabola setiap asumsi pemodelan dibuat dalam formulasi. Kemudian mempertimbangkan solusi *steady state* dari persamaan ini.

Jika nilai  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  mendekati nol, serta dengan menggunakan asumsi a dan b, maka persamaan keseimbangan massa reaktor dengan bergantung waktu dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

atau dapat ditulis dengan

$$c_t = Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c \quad (2.4)$$

Asumsi c menunjukkan aliran zat yang keluar dari reaktor tidak dipengaruhi dengan penyebaran zat pada sistem tertutup, sehingga syarat awal dan kondisi batas yang digunakan sebagai berikut:

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$c(x, t) = 100, \quad 0 < x < L$$

$$c(L, t) = 0, \quad t > 0$$

## 2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial (Chapra & Canale, 2012). Deret Taylor untuk fungsi multivariabel sebagai berikut:

Misalkan diberikan fungsi  $f$  dengan variabel bebas  $x$  dan  $t$  diekspansi dengan deret Taylor di sekitar  $(x)$  diperoleh:

$$\begin{aligned}
 f(x_{i+1}, t_{i+1}) = & f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_{i+1} - t_i) \\
 & + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x_{i+1} - x_i)(t_{i+1} - t_i) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_{i+1} - t_i)^2 \right) + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_{i+1} - x_i)^3 + \right. \\
 & \left. 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2}(x_{i+1} - x_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t_{i+1} - t_i)^3 \right) \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Sehingga untuk fungsi  $f(x + \Delta x, t)$ ,  $f(x - \Delta x, t)$ ,  $f(x + 2\Delta x, t)$ ,  $f(x, t - \Delta t)$ ,  $f(x, t + \Delta t)$  dan  $f(x + \Delta x, t + \Delta t)$  diekspansi ke dalam deret Taylor di sekitar  $(x, t)$  sebagai berikut,:

$$f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + f_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x, t) - f_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{1}{6} f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots$$

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + f_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} f_{tt}(x, t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} f_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots$$

$$f(x, t - \Delta t) = f(x, t) - f_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} f_{tt}(x, t) \Delta t^2 - \frac{1}{6} f_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots$$

Strauss (1992) menyebutkan bahwa terdapat dua jenis galat (*error*) dalam sebuah komputasi yang menggunakan aproksimasi tersebut yaitu *truncation error*

(*error* pemotongan) yaitu *error* yang terjadi karena pemotongan dari suatu deret tak hingga menjadi deret berhingga dan *roundoff error* (*error* pembulatan) yaitu *error* yang terjadi akibat pembulatan suatu bilangan sampai pada digit tertentu. Pendekatan yang sering dipakai pada penyelesaian numerik adalah deret Taylor.

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktik hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan. Untuk menyederhanakan permasalahan biasanya hanya ditunjukkan pada beberapa suku deret Taylor tersebut, sedangkan suku yang lainnya diabaikan (Triatmodjo, 2002).

### 2.3 Metode Godunov

Skema Godunov merupakan salah satu contoh dari skema numerik yang dalam penurunannya dilakukan dengan mengaproksimasi penyelesaian sebagai jumlah dari fungsi linear atau polinomial sepotong-sepotong yang didefinisikan atas setiap sel-grid (LeVeque, 1992). Skema tersebut merupakan aproksimasi masalah Reimann pada setiap batas *cell*. Dalam metode beda hingga pada kasus persamaan keseimbangan massa reaktor untuk  $c_{j+\frac{1}{2}}^n$ ,  $c_{j-\frac{1}{2}}^n$ ,  $c_{j+\frac{1}{2}}^n$  dan  $c_{j-\frac{1}{2}}^n$  tidak dapat dicari karena terdapat indeks setengah. Oleh sebab itu digunakan skema Godunov untuk menangani indeks setengah yang muncul akibat pendiskritan, sehingga berlaku:

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(c_j^n, c_{j+1}^n), & c_j^n < c_{j+1}^n \\ \max(c_j^n, c_{j+1}^n), & c_j^n > c_{j+1}^n \end{cases}$$

$$c_{j-\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(c_{j-1}^n, c_j^n), & c_{j-1}^n < c_j^n \\ \max(c_{j-1}^n, c_j^n), & c_{j-1}^n > c_j^n \end{cases}$$

dan

$$c_{j+1\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(c_{j+1}^n, c_{j+2}^n), & c_{j+1}^n < c_{j+2}^n \\ \max(c_{j+1}^n, c_{j+2}^n), & c_{j+1}^n > c_{j+2}^n \end{cases}$$

$$c_{j-1\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(c_{j-1}^n, c_{j+2}^n), & c_{j-1}^n < c_{j+2}^n \\ \max(c_{j-1}^n, c_{j+2}^n), & c_{j-1}^n > c_{j+2}^n \end{cases}$$

#### 2.4 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan metode yang sangat umum dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa, maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor dalam penelitian ini menggunakan metode beda hingga pusat sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \quad (2.6)$$

(Strauss, 1992)

Persamaan (2.6) dapat diperoleh dari ekspansi deret Taylor, misalkan diberikan fungsi  $c(x + \frac{1}{2}\Delta x, t)$ ,  $c(x - \frac{1}{2}\Delta x, t)$ ,  $c(x + \Delta x, t)$ ,  $c(x - \Delta x, t)$ ,  $c(x + 1\frac{1}{2}\Delta x, t)$ ,  $c(x - 1\frac{1}{2}\Delta x, t)$ ,  $c(x + 2\Delta x, t)$ ,  $c(x - 2\Delta x, t)$ ,  $c(x, t + \Delta t)$ , dan  $c(x, t - \Delta t)$  diaproksimasikan ke dalam deret Taylor di sekitar  $(x, t)$  sebagai berikut:

$$c\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, t\right) = c(x, t) + \frac{1}{2}c_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{8}c_{xx}(x, t)\Delta x^2 +$$

$$\frac{1}{48} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$c\left(x - \frac{1}{2} \Delta x, t\right) = c(x, t) - \frac{1}{2} c_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{8} c_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{1}{48} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.8)$$

$$c(x + \Delta x, t) = c(x, t) + c_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} c_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{1}{6} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.9)$$

$$c(x - \Delta x, t) = c(x, t) - c_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} c_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{1}{6} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.10)$$

$$c\left(x + 1\frac{1}{2} \Delta x, t\right) = c(x, t) + \frac{3}{2} c_x(x, t) \Delta x + \frac{9}{8} c_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{9}{16} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.11)$$

$$c\left(x - 1\frac{1}{2} \Delta x, t\right) = c(x, t) - \frac{3}{2} c_x(x, t) \Delta x + \frac{9}{8} c_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{9}{16} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.12)$$

$$c(x + 2\Delta x, t) = c(x, t) + 2c_x(x, t) \Delta x + 2c_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{4}{3} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.13)$$

$$c(x - 2\Delta x, t) = c(x, t) - 2c_x(x, t) \Delta x + 2c_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{4}{3} c_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots \quad (2.14)$$

$$c\left(x, t + \frac{1}{2} \Delta t\right) = c(x, t) + \frac{1}{2} c_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{8} c_{tt}(x, t) \Delta t^2 + \frac{1}{48} c_{ttt}(x, t) \Delta t^3 \quad (2.15)$$



$$c\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right) = c(x, t) - \frac{1}{2}c_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{8}c_{tt}(x, t)\Delta t^2 - \frac{1}{48}c_{ttt}(x, t)\Delta t^3 \quad (2.16)$$

(Strauss, 1992)

Hampiran turunan pertama terhadap  $x$  untuk beda maju, beda mundur dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.7) sampai dengan persamaan (2.16) yang dipotong sampai orde tertentu. Turunan hampiran pertama terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.7) dengan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, t\right) - c\left(x - \frac{1}{2}\Delta x, t\right) = 2\frac{1}{2}c_x(x, t)\Delta x - 2\frac{1}{48}c_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta x c_x(x, t) = c\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, t\right) - c\left(x - \frac{1}{2}\Delta x, t\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^3$$

Jika disederhanakan akan menjadi:

$$c_x(x, t) = \frac{c\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, t\right) - c\left(x - \frac{1}{2}\Delta x, t\right)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (2.17)$$

Sedangkan hampiran turunan pertama terhadap  $t$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.15) dengan persamaan (2.16), sehingga diperoleh:

$$c\left(x, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - c\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right) = 2\frac{1}{2}c_t(x, t)\Delta t - 2\frac{1}{48}c_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Delta t c_t(x, t) = c\left(x, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - c\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right) + \mathcal{O}(\Delta t)^3$$

Jika disederhanakan akan menjadi:

$$c_t(x, t) = \frac{c\left(x, t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - c\left(x, t - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (2.18)$$

Jika digunakan indeks subskrip  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$  dan superskrip  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $t$ , maka persamaan (2.17) dan (2.18) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c_{j+1}^n - c_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{c_j^{n+1} - c_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

(Strauss, 1992)

Adapun aproksimasi turunan kedua terhadap  $x$  untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.9) dengan persamaan (2.10), sehingga menjadi:

$$c(x + \Delta x, t) + c(x - \Delta x, t) = 2c(x, t)\Delta x - 2\frac{1}{2}c_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \dots$$

Jika disederhanakan akan menjadi:

$$c(x + \Delta x, t) + c(x - \Delta x, t) = 2c(x, t)\Delta x - c_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \dots$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$c_{xx}(x, t)\Delta x^2 = c(x + \Delta x, t) - 2c(x, t)\Delta x + c(x - \Delta x, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

Dari penyelesaian di atas diperoleh:

$$c_{xx}(x, t) = \frac{c(x + \Delta x, t) - 2c(x, t)\Delta x + c(x - \Delta x, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^4}{\Delta x^2} \quad (2.19)$$

Dengan cara yang sama yaitu dengan menggunakan persamaan (2.11) dengan persamaan (2.12) dapat diperoleh turunan ketiga terhadap  $x$  yaitu

$$\begin{aligned}
& c_{xxx}(x, t) \\
&= \frac{c\left(x + 1\frac{1}{2}\Delta x, t\right) - 3c\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, t\right) + 3c\left(x - \frac{1}{2}\Delta x, t\right) - c\left(x - 1\frac{1}{2}\Delta x, t\right)}{\Delta x^3} \\
&+ \mathcal{O}(\Delta x)^5 \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama yaitu dengan menggunakan persamaan (2.13) dengan persamaan (2.14) dapat diperoleh turunan ke-empat terhadap  $x$  yaitu

$$\begin{aligned}
& c_{xxxx}(x, t) \\
&= \frac{c(x + 2\Delta x, t) - 4c(x + \Delta x, t) + 6c(x, t) - 4c(x - \Delta x, t) - c(x - 2\Delta x, t)}{\Delta x^4} \\
&+ \mathcal{O}(\Delta x)^6 \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Jika digunakan indeks subskrip  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ , dan superskrip  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $t$  maka persamaan (2.19), (2.20) dan (2.21) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^3 c}{\partial x^3} = \frac{c_{j+1\frac{1}{2}}^n - 3c_{j+\frac{1}{2}}^n + 3c_{j-\frac{1}{2}}^n - c_{j-1\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^3} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial^4 c}{\partial x^4} = \frac{c_{j+2}^n - 4c_{j+1}^n + 6c_j^n - 4c_{j-1}^n + c_{j-2}^n}{\Delta x^4} \tag{2.24}$$

(Strauss, 1992)

## 2.5 Metode *Lax Wendroff*

Jamhuri (2013) menyebutkan bahwa metode *Lax Wendroff* diambil dari nama Peter Lax dan Burton Wendroff, yang mendasari metode ini adalah mengekspansikan  $c(x, t)$  ke dalam deret Taylor untuk  $x$  tetap dan  $t$  berada pada orde dua menggunakan PDP (Persamaan Diferensial Parsial) untuk menggantikan

turunan waktu dengan turunan ruang, dan menggunakan beda hingga pusat untuk mengaproksimasi turunan ruang pada orde dua. Persamaan beda hingga kemudian menghasilkan akurasi orde dua. Pada metode ini digunakan hampiran sebagai berikut:

$$c_j^{n+1} = c_j^n + \Delta t c_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_{tt}|_j^n + O(\Delta x)^3 \quad (2.25)$$

karena

$$c_t = Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c \quad (2.26)$$

maka

$$c_{tt} = D^2 c_{xxxx} - 2DUc_{xxx} - 2D\gamma c_{xx} + U^2 c_{xx} + 2U\gamma c_x + \gamma^2 c \quad (2.27)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) ke dalam persamaan (2.25) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} c_j^{n+1} &= c_j^n + \Delta t c_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_{tt}|_j^n + \dots \\ c_j^{n+1} &= c_j^n + \Delta t (Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c)|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (D^2 c_{xxxx} - 2DUc_{xxx} - \\ &\quad 2D\gamma c_{xx} + U^2 c_{xx} + 2U\gamma c_x + \gamma^2 c)|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.6 Modulus Kompleks

Modulus bilangan kompleks  $z = x + iy$  dinotasikan dengan  $|z|$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.29)$$

Jika  $y = 0$  maka  $z$  menjadi riil dan  $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ , yakni nilai mutlak bilangan riil  $x$ . Dengan demikian nilai mutlak suatu bilangan riil merupakan kejadian khusus nilai mutlak bilangan kompleks. Ini akan berakibat bahwa

teorema-teorema yang berlaku untuk nilai nilai mutlak bilangan kompleks berlaku juga untuk nilai mutlak bilangan riil (Soemantri, 1994).

## 2.7 Analisis Konvergensi Solusi

### 2.7.1 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan adalah solusi dari persamaan diferensial yang nilai awalnya dapat diubah-ubah (Flaherty, 1966). Ketidakstabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai analitiknya (Zauderer, 2006).

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas *von Neumann*. Stabilitas *von Neumann* didekati dengan analisis *Fourier*, sehingga dengan menerapkan stabilitas *von Neumann* terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$  ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip  $i$  menunjukkan posisi,  $n$  menunjukkan waktu,  $j$  merupakan vektor dan untuk semua  $\alpha$  dalam interval  $[0, 2\pi]$ . Syarat perlu dan cukup stabilitas *von Neumann* yaitu  $|\rho| \leq 1$  (Zauderer, 2006).

### 2.7.2 Analisis Konsistensi

Analisis konsistensi adalah pendekatan persamaan beda yang paling baik dari persamaan diferensial (Flaherty, 1966). Suatu persamaan beda hingga dikatakan konsisten jika persamaan beda hingga tersebut dapat diubah kembali ke dalam persamaan diferensial parsial pada saat *grid-gridnya* ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , dan  $\Delta t$ )

dibuat semakin mendekati nol. Persoalan kestabilan dalam menyelesaikan solusi numerik sangat perlu dilakukan karena hal ini berhubungan dengan nilai-nilai parameter yang layak digunakan sehingga solusi numerik yang diperoleh merupakan solusi yang konvergen (Zauderer, 2006).

## **2.8 Galat (*Error*)**

### **2.8.1 Sumber Utama Penyebab Galat**

Munir (2008) menyebutkan bahwa secara umum terdapat sumber utama penyebab galat dalam perhitungan numerik yaitu:

1. Galat bawaan adalah galat yang terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala, atau karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fasik dari data yang diukur.
2. Galat pembulatan (*round-off error*), adalah galat yang timbul akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekspresi matematika yang lebih kompleks diganti dengan formula yang lebih sederhana. Contoh, 3.1415926 dapat dibulatkan menjadi 3.14.
3. Galat pemotongan (*truncation error*), terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematika yang benar.

### **2.8.2 Cara Mengalisis Galat**

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, maka semakin teliti solusi numerik yang

didapatkan, sebaliknya semakin besar galatnya maka solusi numerik yang didapatkan semakin tidak teliti (Munir, 2008).

Misalkan  $\hat{a}$  adalah nilai hampiran terhadap nilai sejatinya  $a$ , maka diperoleh

$$\varepsilon = a - \hat{a}$$

$\varepsilon$  disebut galat. Contoh, jika  $\hat{a} = 10,5$  adalah nilai hampiran dari  $a = 10,45$ , maka galatnya adalah  $\varepsilon = -0,01$ . Apabila tanda galat positif atau negatif tidak dipertimbangkan (Munir, 2008). Galat dibagi menjadi 3, yang pertama galat mutlak didefinisikan sebagai:

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$$

Galat relatif didefinisikan sebagai:

$$|\varepsilon_R| = \frac{\varepsilon}{a} \times 100\%$$

Galat relatif hampiran didefinisikan sebagai:

$$|\varepsilon_R| = \frac{\varepsilon}{\hat{a}} \times 100\%$$

## 2.9 Konsep Keseimbangan dalam Islam

Prof. George Abel dari *University of California* mengatakan bahwa sekarang telah ada bukti yang menunjukkan bahwa alam semesta bermula miliaran tahun yang lalu, yang diawali dengan dentuman besar. Ia mengakui bahwa tidak memiliki pilihan lain kecuali menerima teori dentuman besar (Munawaroh, 2014).

Banyak ilmuwan yang telah mengakui keberadaan Allah Swt. dalam penciptaan alam semesta. Sang pencipta pastilah Dia yang menciptakan zat, ruang dan waktu, tetapi Allah Swt. tidak bergantung pada ciptaan-Nya. Seorang ahli

teologi protestan dan ahli astrofisika terkenal dari Universitas Toronto Amerika bernama Hugh Ross mengatakan “jika waktu memiliki awal yang bersamaan dengan alam semesta, seperti yang dikatakan teorema-ruang, maka penyebab alam semesta pastilah suatu wujud yang bekerja dalam dimensi waktu yang benar-benar independen” (Munawaroh, 2014).

Allah Swt. memberi tahu bukti-bukti ilmiah tentang kesempurnaan alam semesta dalam firman-Nya yaitu:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۗ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفْوُتٍ ۗ فَإِذْ جِئَ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ۚ ثُمَّ أَرْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ۙ

*“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang maha pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka Lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah” (QS. al-Mulk/67:3-4).*

Ayat al-Quran surat al-Mulk/67:3-4 menjelaskan bahwa alam semesta ini terdiri dari miliaran bintang dan galaksi yang tak terhitung jumlahnya bergerak dalam orbit yang terpisah. Meskipun demikian, semuanya berada dalam keserasian. Bintang, planet, dan bulan beredar pada sumbunya masing-masing dan dalam sistem yang di tempatinya masing-masing. Terkadang galaksi yang terdiri atas 200-300 miliar bintang bergerak melalui satu sama lain. Selama masa peralihan dalam beberapa contoh yang sangat terkenal yang diamati oleh para astronom, tidak terjadi tabrakan yang menyebabkan kekacauan pada keteraturan alam semesta.



Besarnya kecepatan benda-benda langit ini sangat sulit dipahami bila dibandingkan dengan standar bumi. Jarak di ruang angkasa sangatlah besar bila dibandingkan dengan pengukuran yang dilakukan di bumi. Dengan ukuran raksasa yang hanya mampu digambarkan dalam angka saja oleh ahli matematika, bintang dan planet yang bermassa miliaran atau triliunan ton, galaksi, dan gugus galaksi bergerak di ruang angkasa dengan kecepatan yang sangat tinggi. Misalnya, bumi berotasi pada sumbunya dengan kecepatan rata-rata 1.670 km/jam. Dengan mengingat bahwa peluru tercepat memiliki kecepatan rata-rata 1.800 km/jam, jelas bahwa bumi bergerak sangat cepat meskipun ukurannya sangat besar.

Kecepatan yang luar biasa ini menunjukkan bahwa hidup manusia berada di ujung tanduk. Biasanya, pada suatu sistem yang sangat rumit, kecelakaan besar sangat sering terjadi. Namun, seperti diungkapkan Allah Swt. dalam ayat di atas, sistem ini tidak memiliki cacat atau tidak seimbang, seperti juga segala sesuatu yang ada di dalamnya, tidak dibiarkan sendiri dan sistem ini bekerja sesuai dengan keseimbangan yang telah ditentukan Allah Swt., Salah satu sebab utama yang menghasilkan keseimbangan di alam semesta, tidak diragukan lagi adalah beredarnya benda-benda angkasa sesuai dengan orbit atau lintasan tertentu. Firman Allah Swt. yaitu:

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ ۗ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ



*“Dan dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya” (QS. al-Anbiyaa’/21:33).*

Ayat al-Quran surat al-Anbiyaa'/21:33 menjelaskan bahwa bintang, planet, dan bulan berputar pada sumbunya dan dalam sistemnya, dan alam semesta yang lebih besar bekerja secara teratur seperti pada roda gigi suatu mesin. Tata surya dan galaksi juga bergerak mengitari pusatnya masing-masing dan semuanya beredar secara teratur dan seimbang.

Hal ini diperkuat dalam tafsir Ibnu Katsir juz 4, telah dijelaskan bahwa dalam ketinggian, keluasannya, setiap hamparannya, kepadatannya serta tata letaknya, dan semua yang ada pada keduanya berupa tanda-tanda yang dapat disaksikan, bintang-bintang yang beredar dan tetap, lautan, gunung-gunung dan padang pasir, serta berbagai macam manfaat yang beraneka warna, silih bergantinya malam dan siang. Semuanya berjalan seimbang berdasarkan pengaturan dari Allah Swt. yang maha perkasa lagi maha mengetahui (Isma'il & Ad-Dimasyqi, 2000).

### BAB III

#### PEMBAHASAN

##### 3.1 Metode *Lax Wendroff* pada Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Pada bab ini dibahas penyelesaian persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode *Lax Wendroff*. Persamaan yang diselesaikan adalah sebagai berikut:

$$c_t = Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c \quad (3.1)$$

dengan syarat awal dan kondisi batas sebagai berikut:

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$c(x, t) = 100, \quad 0 < x < L$$

$$c(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Pada persamaan (3.1),  $D$  menyatakan koefisien penyebaran zat dengan satuan waktu  $m^2/det$ ,  $U$  menyatakan kecepatan fluida yang mengalir dalam reaktor dengan satuan waktu  $m/det$ , dan  $\gamma$  menyatakan koefisien reaksi dengan satuan waktu  $mol/det$ .

Solusi persamaan keseimbangan massa reaktor dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Lax Wendroff*, yaitu dengan cara diskritisasi pada persamaan (3.1) menggunakan hampiran sebagai berikut:

$$c^{n+1} = c^n + \Delta t c_t|_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_{tt} \Big|_n + O(\Delta x)^3 + \dots \quad (3.2)$$

(Jamhuri, 2013)

Untuk mendapatkan  $c_{tt}$  pada persamaan (3.2) maka persamaan (3.1) diturunkan terhadap  $t$  sehingga menjadi:

$$c_{tt} = D(c_{xx})_t - U(c_x)_t - \gamma c_t \quad (3.3)$$

Kemudian menggantikan turunan waktu dengan turunan ruang pada pada hampiran deret Taylor orde dua, sehingga persamaan (3.3) dapat ditulis menjadi:

$$c_{tt} = D(c_t)_{xx} - U(c_t)_x - \gamma c_t \quad (3.4)$$

Selanjutnya mensubstitusi persamaan (3.1) ke dalam persamaan (3.4) sehingga diperoleh:

$$c_{tt} = D(Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c)_{xx} - U(Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c)_x - \gamma(Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c)$$

Jika disederhanakan menjadi:

$$c_{tt} = D^2 c_{xxxx} - 2DUc_{xxx} - 2D\gamma c_{xx} + U^2 c_{xx} + 2U\gamma c_x + \gamma^2 c \quad (3.5)$$

Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusi persamaan (3.1) dan persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.2) sehingga diperoleh:

$$c^{n+1} = c^n + \Delta t(Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c)|^n + \frac{1}{2}\Delta t^2(D^2 c_{xxxx} - 2DUc_{xxx} - 2D\gamma c_{xx} + U^2 c_{xx} + 2U\gamma c_x + \gamma^2 c)|^n + \dots \quad (3.6)$$

Dengan mensubstitusikan skema beda pusat terhadap ruang ke dalam persamaan (3.6) dapat diperoleh:

$$c_j^{n+1} = c_j^n + \Delta t \left( D \left( \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) - U \left( \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) - \gamma(c_j^n) \right) + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left( D^2 \left( \frac{c_{j+2}^n - 4c_{j+1}^n + 6c_j^n - 4c_{j-1}^n + c_{j-2}^n}{\Delta x^4} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -2DU \left( \frac{c_{j+1\frac{1}{2}}^n - 3c_{j+\frac{1}{2}}^n + 3c_{j-\frac{1}{2}}^n - c_{j-1\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^3} \right) \\
& -2D\gamma \left( \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + U^2 \left( \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\
& + 2U\gamma \left( \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) + \gamma^2 (c_j^n)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

atau dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
c_j^{n+1} &= c_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n) - \frac{U\Delta t}{\Delta x} \left( c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \gamma\Delta t (c_j^n) \\
& + \frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4} (c_{j+2}^n - 4c_{j+1}^n + 6c_j^n - 4c_{j-1}^n + c_{j-2}^n) \\
& - \frac{2DU\Delta t^2}{2\Delta x^3} \left( c_{j+1\frac{1}{2}}^n - 3c_{j+\frac{1}{2}}^n + 3c_{j-\frac{1}{2}}^n - c_{j-1\frac{1}{2}}^n \right) \\
& - \frac{2D\gamma\Delta t^2}{2\Delta x^2} (c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n) + \frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} (c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n) \\
& + \frac{2U\gamma\Delta t^2}{2\Delta x} \left( c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\gamma^2\Delta t^2}{2} (c_j^n)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dengan mengumpulkan indeks-indeks sejenis dari persamaan (3.8) maka akan menjadi seperti berikut:

$$c_j^{n+1} = \left( 1 - 2 \left( \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \right) - \gamma\Delta t + 6 \left( \frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& +2\left(\frac{2D\gamma\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) - 2\left(\frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) + \frac{\gamma^2\Delta t^2}{2} c_j^n \\
& + \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - 4\left(\frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4}\right) - \frac{2D\gamma\Delta t^2}{2\Delta x^2} + \frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) c_{j+1}^n \\
& + \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - 4\left(\frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4}\right) - \frac{2D\gamma\Delta t^2}{2\Delta x^2} + \frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) c_{j-1}^n \\
& - \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} - \frac{6DU\Delta t^2}{2\Delta x^3} - \frac{2U\gamma\Delta t^2}{2\Delta x}\right) c_{j+\frac{1}{2}}^n \\
& + \left(\frac{U\Delta t}{\Delta x} - \left(\frac{6DU\Delta t^2}{2\Delta x^3}\right) - \frac{2U\gamma\Delta t^2}{2\Delta x}\right) c_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& - \left(\frac{DU\Delta t^2}{\Delta x^3}\right) c_{j+\frac{1}{2}}^n + \left(\frac{DU\Delta t^2}{\Delta x^3}\right) c_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& + \left(\frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4}\right) c_{j+2}^n + \left(\frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4}\right) c_{j-2}^n
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Jika persamaan (3.9) disederhanakan maka akan menjadi:

$$\begin{aligned}
c_j^{n+1} & = \left(1 - \left(\frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\right) - \gamma\Delta t + \left(\frac{3D^2\Delta t^2}{\Delta x^4}\right)\right) \\
& + \left(\frac{2D\gamma\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) - \left(\frac{U^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{\gamma^2\Delta t^2}{2}\right) c_j^n \\
& + \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2D^2\Delta t^2}{\Delta x^4} - \frac{D\gamma\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) c_{j+1}^n \\
& + \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2D^2\Delta t^2}{\Delta x^4} - \frac{D\gamma\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\right) c_{j-1}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{U\Delta t}{\Delta x} - \frac{3DU\Delta t^2}{\Delta x^3} - \frac{U\gamma\Delta t^2}{\Delta x} \right) c_{j+\frac{1}{2}}^n \\
& + \left( \frac{U\Delta t}{\Delta x} - \frac{3DU\Delta t^2}{\Delta x^3} - \frac{U\gamma\Delta t^2}{\Delta x} \right) c_{j-\frac{1}{2}}^n - \left( \frac{DU\Delta t^2}{\Delta x^3} \right) c_{j+1\frac{1}{2}}^n \\
& + \left( \frac{DU\Delta t^2}{\Delta x^3} \right) c_{j-1\frac{1}{2}}^n + \left( \frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4} \right) c_{j+2}^n + \left( \frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4} \right) c_{j-2}^n
\end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.2 Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati persamaan keseimbangan massa reaktor tersebut stabil atau tidak, maka perlu melakukan uji kestabilan dengan menggunakan analisis stabilitas *von Neumann* yang mana syarat kestabilannya adalah  $|\rho| \leq 1$ . Sehingga syarat kestabilan dari persamaan (3.10) dapat dicari dengan cara mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$  ke dalam persamaan tersebut.

Misalkan:

$$\begin{aligned}
A_1 = & \left( 1 - \left( \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} \right) - \gamma\Delta t + \left( \frac{3D^2\Delta t^2}{\Delta x^4} \right) + \left( \frac{2D\gamma\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{U^2\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{\gamma^2\Delta t^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$A_2 = \left( \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2D^2\Delta t^2}{\Delta x^4} - \frac{D\gamma\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{U^2\Delta t^2}{2\Delta x^2} \right)$$

$$A_3 = \left( \frac{U\Delta t}{\Delta x} - \frac{3DU\Delta t^2}{\Delta x^3} - \frac{U\Delta t}{\Delta x} \right)$$

$$A_4 = \left( \frac{DU\Delta t^2}{\Delta x^3} \right)$$

$$A_5 = \left( \frac{D^2\Delta t^2}{2\Delta x^4} \right)$$

maka persamaan (3.10) menjadi:

$$c_j^{n+1} = (A_1)c_j^n + (A_2)c_{j+1}^n + (A_2)c_{j-1}^n - (A_3)c_{j+\frac{1}{2}}^n + (A_3)c_{j-\frac{1}{2}}^n - (A_4)c_{j+\frac{3}{2}}^n + (A_4)c_{j-\frac{3}{2}}^n + (A_5)c_{j+2}^n + (A_5)c_{j-2}^n \quad (3.11)$$

Selanjutnya yaitu mensubstitusi  $c_j^n = \rho^n e^{iaj}$  ke dalam persamaan (3.11) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} e^{iaj} &= A_1(\rho^n e^{iaj}) + A_2(\rho^n e^{ia(j+1)} + \rho^n e^{ia(j-1)}) - \\ &A_3 \left( \rho^n e^{ia(j+\frac{1}{2})} - \rho^n e^{ia(j-\frac{1}{2})} \right) - \\ &A_4 \left( \rho^n e^{ia(j+\frac{3}{2})} - \rho^n e^{ia(j-\frac{3}{2})} \right) + \\ &A_5(\rho^n e^{ia(j+2)} + \rho^n e^{ia(j-2)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dengan membagi kedua ruas pada persamaan (3.12) dengan  $\rho^n e^{iaj}$  dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho &= A_1 + A_2(e^{ia} + e^{-ia}) - A_3 \left( e^{\frac{1}{2}ia} - e^{-\frac{1}{2}ia} \right) - \\ &A_4 \left( e^{\frac{1}{2}ia} - e^{-\frac{1}{2}ia} \right) + A_5(e^{2ia} + e^{-2ia}) \end{aligned} \quad (3.13)$$



Karena

$$e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$$

$$e^{\pm \frac{1}{2}ia} = \cos \frac{1}{2}a \pm i \sin \frac{1}{2}a$$

$$e^{\pm \frac{3}{2}ia} = \cos \frac{3}{2}a \pm i \sin \frac{3}{2}a$$

$$e^{\pm 2ia} = \cos 2a \pm i \sin 2a$$

maka persamaan (3.13) menjadi:

$$\begin{aligned} \rho = & A_1 + A_2(2\cos a) - A_3 \left( 2i \sin \frac{1}{2}a \right) - \\ & A_4 \left( 2i \sin \frac{3}{2}a \right) + A_5(2\cos 2a) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Kemudian mengumpulkan unsur-unsur yang mengandung bilangan imajiner pada persamaan (3.14) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho = & A_1 + 2A_2(\cos a) + 2A_5(\cos 2a) - \\ & i \left( 2A_3 \left( \sin \frac{1}{2}a \right) + 2A_4 \left( \sin \frac{3}{2}a \right) \right) \end{aligned}$$

atau dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \rho = & A_1 + 2A_2(\cos a) + 4A_5(\cos^2 a - 1) - i \left( 2A_3 \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} + \right. \\ & \left. 2A_4 \left( \sqrt{1 - \cos^2 a} \left( \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \right) + \cos a \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Misalkan

$$R = A_1 + 2A_2(\cos a) + 4A_5(\cos^2 a - 1)$$

$$M = 2A_3 \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} + 2A_4 \left( \sqrt{1 - \cos^2 a} \left( \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \right) + \cos a \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \right)$$

maka persamaan (3.15) dapat ditulis menjadi:

$$\rho = R - iM \quad (3.16)$$

Syarat kestabilan *von Neumann* adalah  $|\rho| \leq 1$ , sehingga nilai mutlak bilangan kompleks pada persamaan (3.16) dapat ditulis seperti pada persamaan (2.29) di bab sebelumnya. Sehingga persamaan (3.16) dapat ditulis sebagai berikut:

$$|\rho| = \sqrt{R^2 - M^2} \leq 1 \quad (3.17)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.15) ke dalam persamaan (3.17) kemudian dikuadratkan, maka persamaan (3.15) akan menjadi seperti di bawah ini:

$$\begin{aligned} |\rho|^2 = & (A_1 + 2A_2 \cos a + 4A_5(\cos^2 a - 1))^2 - 2A_3 \left( \frac{1 - \cos a}{2} \right) + \\ & 2A_4 \left( 1 - \cos^2 a \left( \frac{1 + \cos a}{2} \right) + \cos a \left( \frac{1 - \cos a}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Karena nilai  $-1 \leq \cos a \leq 1$ , untuk  $\cos a = -1$  maka persamaan (3.18) menjadi:

$$|\rho|^2 = (A_1 - 2A_2)^2 - (2A_3 + 2A_4) \leq 1 \quad (3.19)$$

untuk  $\cos a = 1$ , maka persamaan (3.18) akan menjadi seperti berikut ini:

$$|\rho|^2 = (A_1 + 2A_2)^2 \leq 1 \quad (3.20)$$

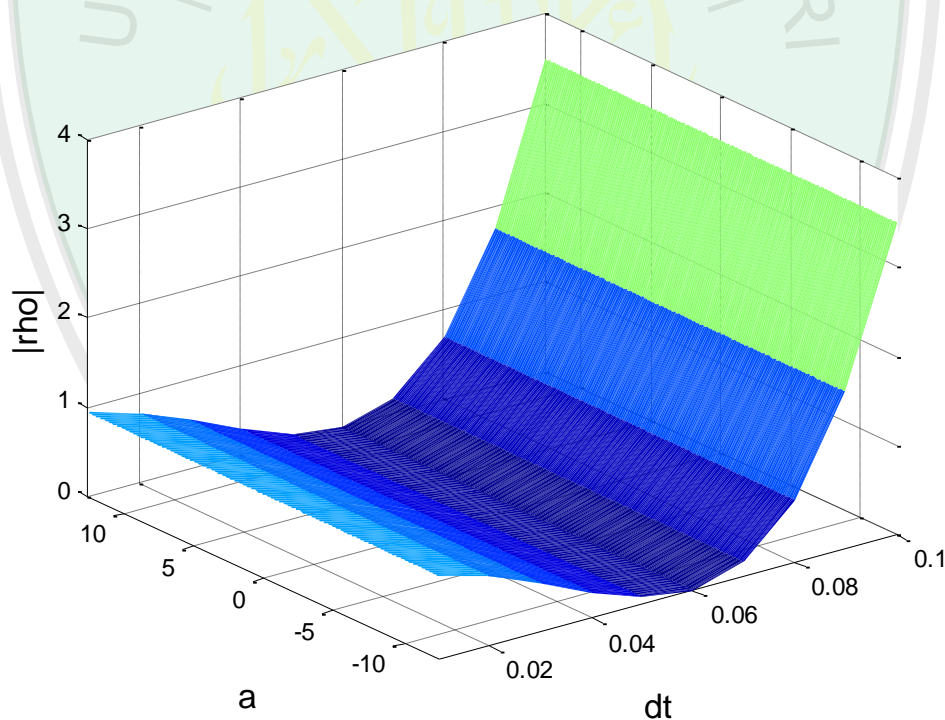
Karena  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6$  bernilai positif maka persamaan (3.19) dan (3.20) dapat ditulis sebagai berikut:

$$(A_1 - 2A_2)^2 - (2A_3 + 2A_4) \leq (A_1 + 2A_2)^2 \quad (3.21)$$

Sehingga syarat kestabilannya adalah:

$$(A_1 + 2A_2)^2 \leq 1 \quad (3.22)$$

Selanjutnya persamaan (3.22) disajikan ke dalam bentuk gambar berikut:



Gambar 3.1 Kestabilan pada Persamaan (3.22)

Gambar 3.1 merupakan gambar dari persamaan (3.22), dengan  $dx = 0,07$  dan  $0,01 \leq dt \leq 0,1$  serta parameter  $D = 0,083 \text{ m}^2/\text{det}$ ,  $U = 0,008 \text{ m}/\text{det}$ ,  $\gamma = 0,018 \text{ mol}/\text{det}$ . Diketahui bahwa  $|\rho|$  adalah stabil bersyarat, yaitu ketika

diberikan kondisi  $0,01 \leq dt \leq 0,08$  akan didapatkan  $|\rho| \leq 1$ , namun ketika diberikan kondisi  $dt \geq 0,09$  maka akan didapatkan  $|\rho| \geq 1$ , kondisi seperti ini tidak memenuhi syarat kestabilan. Sehingga syarat yang diperlukan agar persamaan (3.22) menjadi stabil maka haruslah  $0,01 \leq dt \leq 0,08$ .

### 3.3 Analisis Konsistensi

Konsistensi metode *Lax Wendroff* skema eksplisit dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7). Ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.7) adalah:

$$c_j^{n+1} = c_j^n + \Delta t c_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 c_{ttt} |_j^n + \dots \quad (3.23)$$

$$c_{j+1}^n = c_j^n + \Delta x c_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.24)$$

$$c_{j-1}^n = c_j^n - \Delta x c_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.25)$$

$$c_{j+\frac{1}{2}}^n = c_j^n + \frac{1}{2} \Delta x c_x |_j^n + \frac{1}{8} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n + \frac{1}{48} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.26)$$

$$c_{j-\frac{1}{2}}^n = c_j^n - \frac{1}{2} \Delta x c_x |_j^n + \frac{1}{8} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n - \frac{1}{48} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.27)$$

$$c_{j+1\frac{1}{2}}^n = c_j^n + \frac{3}{2} \Delta x c_x |_j^n + \frac{9}{8} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n + \frac{9}{16} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.28)$$

$$c_{j-1\frac{1}{2}}^n = c_j^n - \frac{3}{2} \Delta x c_x |_j^n + \frac{9}{8} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n - \frac{9}{16} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.29)$$

$$c_{j+2}^n = c_j^n + 2\Delta x c_x|_j^n + 2\Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \frac{4}{3}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.30)$$

$$c_{j-2}^n = c_j^n - 2\Delta x c_x|_j^n + 2\Delta x^2 c_{xx}|_j^n - \frac{4}{3}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.31)$$

Untuk penyederhanaan maka persamaan (3.23), (3.24), (3.25), ..., (3.31) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$c_j^{n+1} = c_j^n + \Delta t c_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 c_{tt}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 c_{ttt}|_j^n + \dots \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} c_{j+1}^n + c_{j-1}^n &= \left( c_j^n + \Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\ &\quad + \left( c_j^n - \Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 c_{xx}|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\ &= 2c_j^n + \Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n &= \left( c_j^n + \frac{1}{2}\Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{8}\Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \frac{1}{48}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\ &\quad - \left( c_j^n - \frac{1}{2}\Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{8}\Delta x^2 c_{xx}|_j^n - \frac{1}{48}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\ &= \Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{24}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = \frac{\Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{24}\Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots}{\Delta x}$$

$$= c_x |_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^2 c_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} c_{j+2}^n + c_{j-2}^n &= \left( c_j^n + 2\Delta x c_x |_j^n + 2\Delta x^2 c_{xx} |_j^n + \frac{4}{3} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \right) \\ &\quad + \left( c_j^n - 2\Delta x c_x |_j^n + 2\Delta x^2 c_{xx} |_j^n - \frac{4}{3} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \right) \\ &= 2c_j^n + 4\Delta x^2 c_{xx} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} c_{j+1\frac{1}{2}}^n - c_{j-1\frac{1}{2}}^n &= \left( c_j^n + \frac{3}{2} \Delta x c_x |_j^n + \frac{9}{8} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n + \frac{9}{16} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \right) \\ &\quad - \left( c_j^n - \frac{3}{2} \Delta x c_x |_j^n + \frac{9}{8} \Delta x^2 c_{xx} |_j^n - \frac{9}{16} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \right) \\ &= 3\Delta x c_x |_j^n + \frac{9}{8} \Delta x^3 c_{xxx} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Untuk mengetahui pemotongan pertama dari persamaan keseimbangan massa reaktor maka substitusikan persamaan (3.32) sampai dengan persamaan (3.37) ke dalam persamaan (3.7) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} c_j^{n+1} &= c_j^n + \Delta t \left( D \left( \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) - U \left( \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) - \nu(c_j^n) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left( D^2 \left( \frac{c_{j+2}^n - 4c_{j+1}^n + 6c_j^n - 4c_{j-1}^n + c_{j-2}^n}{\Delta x^4} \right) \right) \\ &\quad - 2DU \left( \frac{c_{j+1\frac{1}{2}}^n - 3c_{j+\frac{1}{2}}^n + 3c_{j-\frac{1}{2}}^n - c_{j-1\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2D\gamma \left( \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + U^2 \left( \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\
& + 2U\gamma \left( \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) + \gamma^2 (c_j^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_j^n + \Delta t c_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 c_{ttt}|_j^n + \dots = \\
c_j^n + \left( \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (-2c_j^n + 2c_j^n + \Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \dots) \right. \\
\left. - \frac{U\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right) - \gamma \Delta t (c_j^n) \right) \\
+ \left( \frac{D^2 \Delta t^2}{2\Delta x^4} (6c_j^n + 2c_j^n + 4\Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \dots \right. \\
\left. - 4(2c_j^n + \Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \dots) \right) \\
- \frac{2DU\Delta t^2}{2\Delta x^3} \left( 3\Delta x c_x|_j^n + \frac{9}{8} \Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right. \\
\left. - 3 \left( \Delta x c_x|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^3 c_{xxx}|_j^n + \dots \right) \right) \\
- \frac{2D\gamma \Delta t^2}{2\Delta x^2} (-2c_j^n + 2c_j^n + \Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \dots) \\
+ \frac{U^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (-2c_j^n + 2c_j^n + \Delta x^2 c_{xx}|_j^n + \dots)
\end{aligned}$$

$$+U\gamma\Delta t^2 \left( \Delta x c_x \Big|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^3 c_{xxx} \Big|_j^n + \dots \right) + \frac{\gamma^2 \Delta t^2}{2} (c_j^n) \quad (3.38)$$

atau dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \Delta t c_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 c_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 c_{ttt} \Big|_j^n + \dots = \\ \left( -\frac{2Dc\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2Dc\Delta t}{\Delta x^2} + D\Delta t c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n \\ - \left( \frac{U\Delta t}{\Delta x} \Delta x c_x - \frac{U\Delta t}{24\Delta x} \Delta x^3 c_{xxx} + \dots \right) \Big|_j^n - (\gamma c \Delta t) \Big|_j^n \\ + \left( \frac{3D^2 c \Delta t^2}{\Delta x^4} + \frac{D^2 c \Delta t^2}{\Delta x^4} + \frac{2D^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} c_{xx} \right. \\ \left. - \frac{4D^2 c \Delta t^2}{\Delta x^4} - \frac{2D^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n \\ - \left( \frac{3DU\Delta t^2}{\Delta x^2} c_x + \frac{9DU\Delta t^2}{8} c_{xxx} \right. \\ \left. - \frac{3DU\Delta t^2}{\Delta x^3} \Delta x c_x - \frac{DU\Delta t^2}{8\Delta x^3} \Delta x^3 c_{xxx} + \dots \right) \Big|_j^n \\ + \left( \frac{2D\gamma c \Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{2D\gamma c \Delta t^2}{\Delta x^2} - D\gamma \Delta t^2 c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n \\ - \left( \frac{U^2 c \Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{U^2 c \Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{U^2 \Delta t^2}{2} c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left( U\gamma\Delta t^2\Delta x c_x + \frac{U\gamma\Delta t^2}{24\Delta x}\Delta x^3 c_{xxx} + \dots \right) \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{\gamma^2 c \Delta t^2}{2} \right) \Big|_j^n \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas pada persamaan (3.39) dengan  $\Delta t$  sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
c_t \Big|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t c_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 c_{ttt} \Big|_j^n + \dots = & \\
\left( -\frac{2Dc}{\Delta x^2} + \frac{2Dc}{\Delta x^2} + Dc_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n & \\
- \left( Uc_x - \frac{U}{24\Delta x}\Delta x^3 c_{xxx} + \dots \right) \Big|_j^n - (\gamma c) \Big|_j^n & \\
+ \left( \frac{3D^2c\Delta t}{\Delta x^4} + \frac{D^2c\Delta t}{\Delta x^4} + \frac{2D^2\Delta t}{\Delta x^2}c_{xx} \right. & \\
\left. - \frac{4D^2c\Delta t}{\Delta x^4} - \frac{2D^2\Delta t}{\Delta x^2}c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n & \\
- \left( \frac{3DU\Delta t}{\Delta x^2}c_x + \frac{9DU\Delta t}{8}c_{xxx} \right. & \\
\left. - \frac{3DU\Delta t}{\Delta x^3}\Delta x c_x - \frac{DU\Delta t}{8\Delta x^3}\Delta x^3 c_{xxx} + \dots \right) \Big|_j^n & \\
+ \left( \frac{2D\gamma c\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2D\gamma c\Delta t}{\Delta x^2} - D\gamma\Delta t c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{U^2 c \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{U^2 c \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{U^2 \Delta t}{2} c_{xx} + \dots \right) \Big|_j^n \\
& + \left( U \gamma \Delta t \Delta x c_x + \frac{U \gamma \Delta t}{24 \Delta x} \Delta x^3 c_{xxx} + \dots \right) \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{\gamma^2 c \Delta t}{2} \right) \Big|_j^n
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Persamaan (3.40) disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}
c_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t c_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 c_{ttt} \Big|_j^n + \dots = \\
(Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c) \Big|_j^n + \Delta x^2 \left( \frac{U}{24} c_{xxx} \right) \Big|_j^n \\
- \Delta t \left( D U c_{xxx} + D \gamma c_{xx} - \frac{U^2}{2} c_{xx} - U \gamma c_x - \frac{\gamma^2 c}{2} \right) \Big|_j^n \\
+ \Delta t \Delta x^2 \left( \frac{U \gamma}{24} c_{xxx} \right) \Big|_j^n
\end{aligned} \tag{3.41}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_t \Big|_j^n = (Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c) \Big|_j^n + \Delta x^2 \left( \frac{U}{24} c_{xxx} \right) \Big|_j^n - \frac{1}{2} \Delta t c_{tt} \Big|_j^n \\
- \frac{1}{6} \Delta t^2 c_{ttt} \Big|_j^n - \Delta t \left( D U c_{xxx} + D \gamma c_{xx} - \frac{U^2}{2} c_{xx} - U \gamma c_x - \frac{\gamma^2 c}{2} \right) \Big|_j^n \\
+ \Delta t \Delta x^2 \left( \frac{U \gamma}{24} c_{xxx} \right) \Big|_j^n
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Dari persamaan (3.42) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde  $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t)$ . Persamaan (3.42) dikatakan konsisten jika:

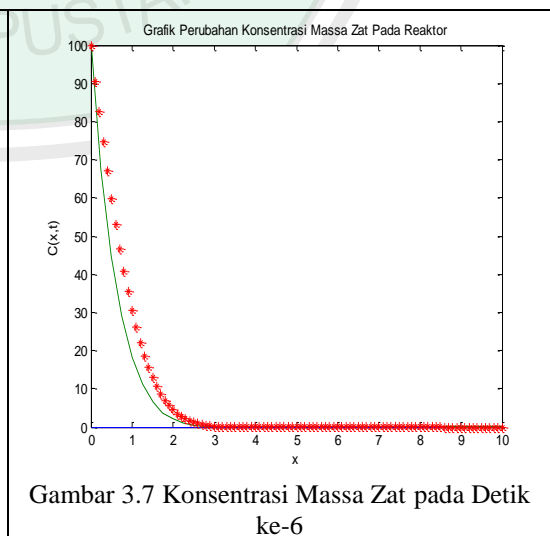
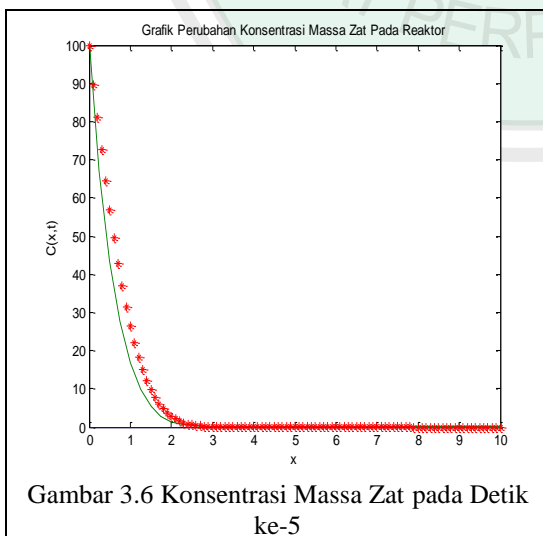
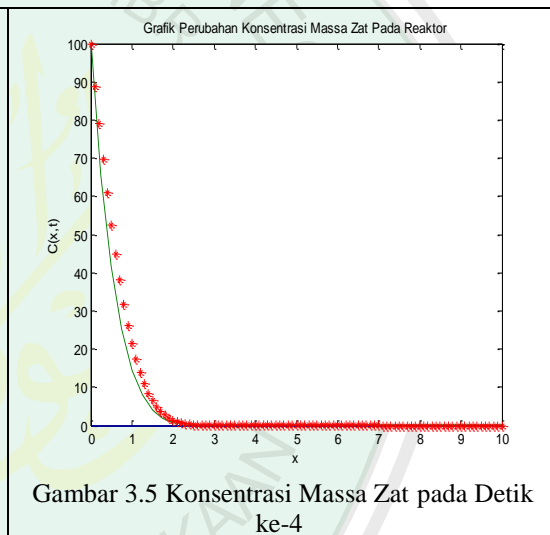
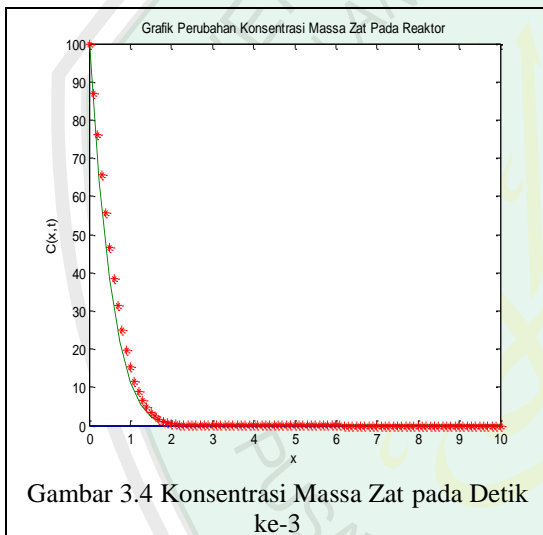
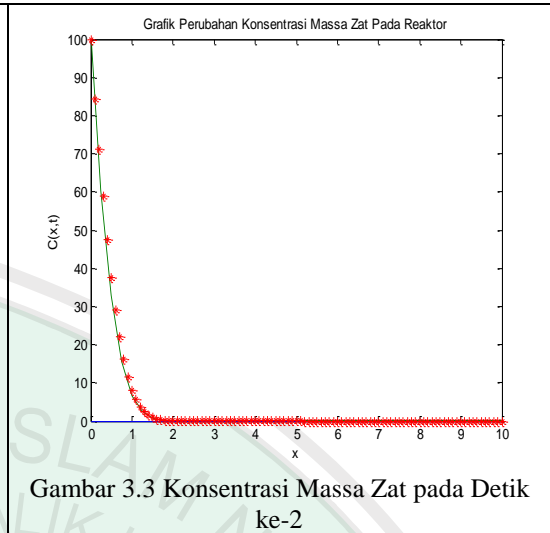
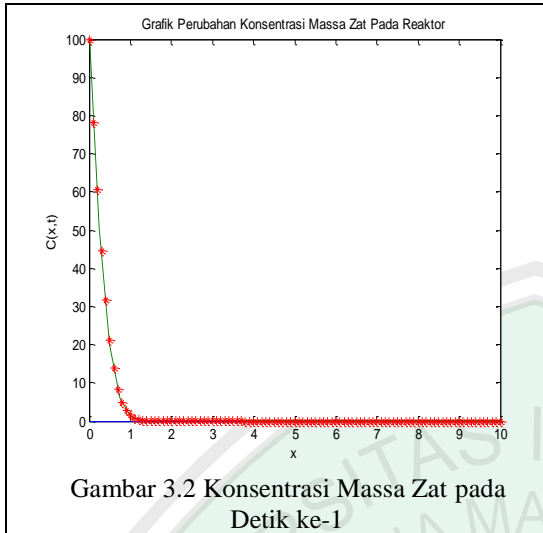
$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \Delta x^2 \frac{U}{24} c_{xxx} \Big|_j^n - \frac{1}{2} \Delta t c_{tt} \Big|_j^n = 0$$

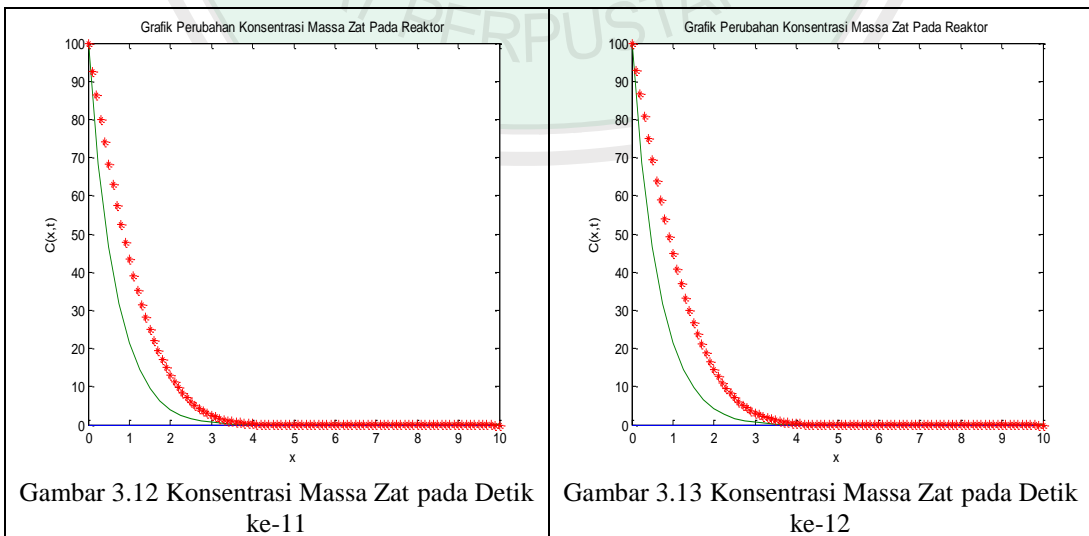
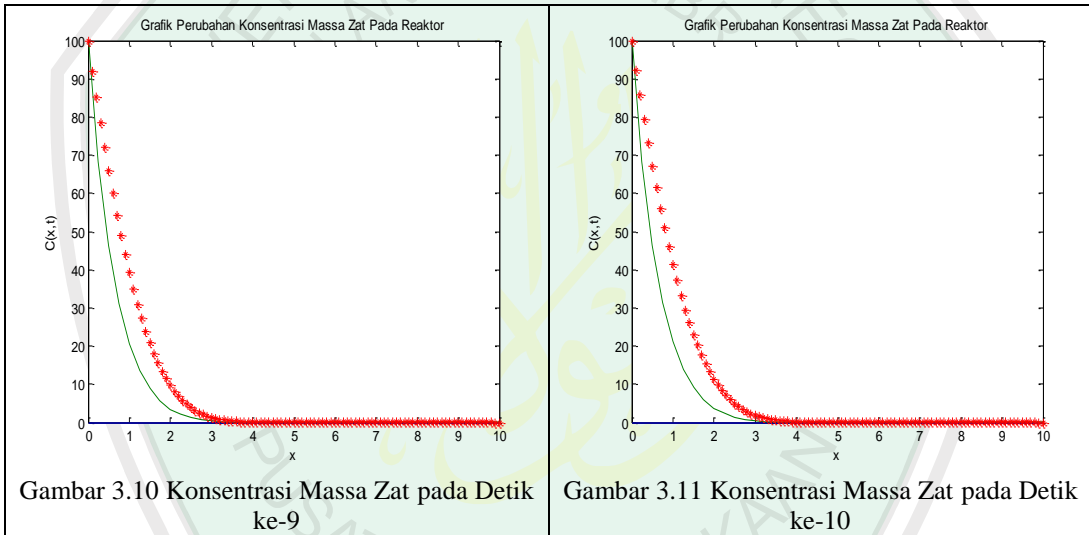
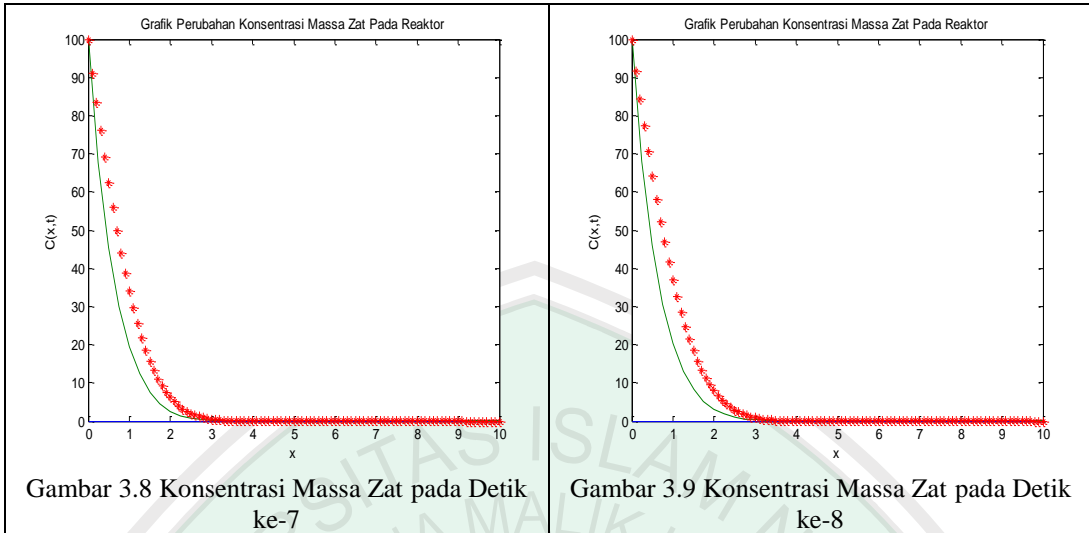
Jika  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai  $c_{xxx}$  dan  $c_{tt}$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. Sehingga *error* pemotongan akan menuju nol.

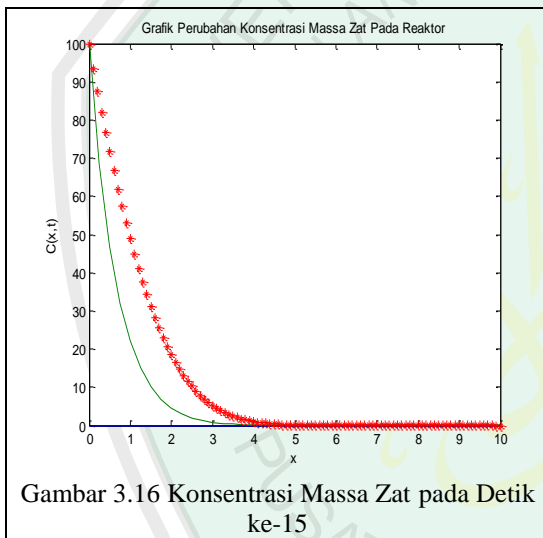
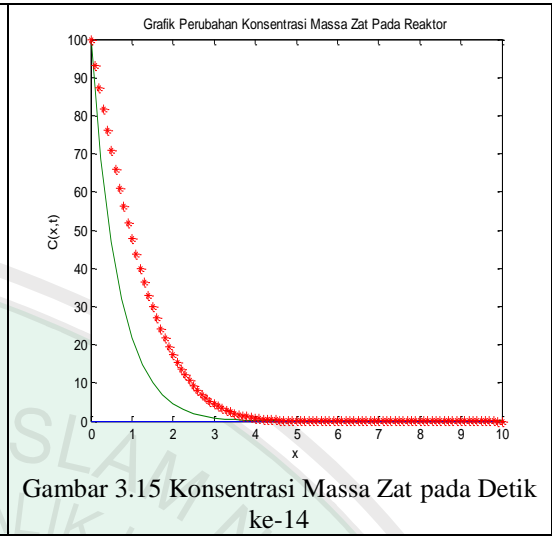
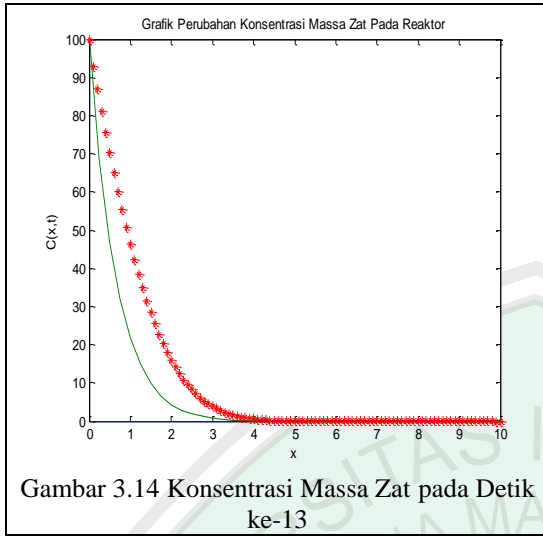
### 3.4 Simulasi dan Interpretasi

Persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan suatu persamaan yang menyatakan jumlah perubahan konsentrasi massa zat yang dipengaruhi oleh perubahan waktu pada suatu sistem tertutup atau reaktor dengan persamaan yang digunakan yaitu  $c_t = Dc_{xx} - Uc_x - \gamma c$ , kondisi batas  $c(x, 0) = 0$ ,  $c(x, t) = 100$ ,  $c(L, t) = 0$ , dan parameter  $D = 0,083 \text{ m}^2/\text{det}$  yang merupakan koefisien penyebaran zat,  $U = 0,008 \text{ m}/\text{det}$  merupakan kecepatan fluida yang mengalir pada suatu reaktor, dan  $\gamma = 0,018 \text{ mol}/\text{det}$  merupakan koefisien massa zat yang bereaksi pada suatu reaktor.

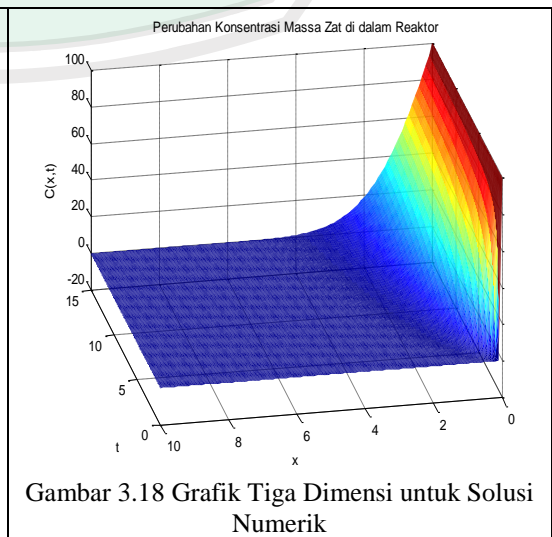
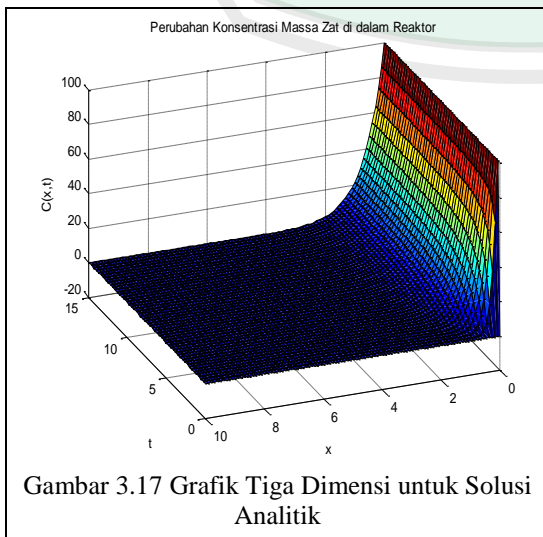
Jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor awalnya sebesar  $100 \text{ mol}/\text{m}^3$ . Sedangkan jumlah konsentrasi massa zat yang keluar dari reaktor adalah nol. Hal ini dikarenakan, massa zat di dalam reaktor mengalami reaksi kimia, sehingga dapat dilihat bahwa reaktor dengan panjang satu meter konsentrasinya menurun menjadi nol. Dengan demikian maka perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik untuk perubahan konsentrasi massa zat pada detik ke-1 sampai detik ke-15 dapat dilihat seperti gambar di bawah ini:







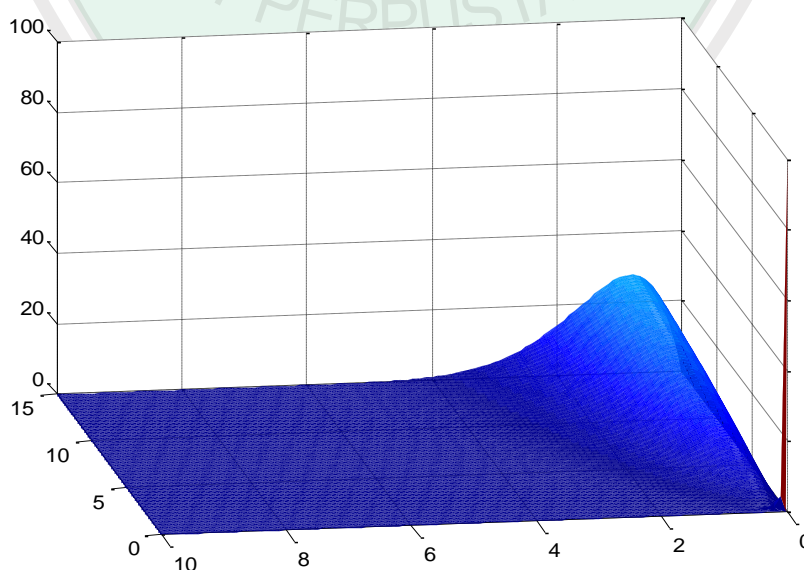
Gambar 3.16 dapat dilihat melalui grafik tiga dimensi seperti berikut ini:



Berdasarkan Gambar 3.2 sampai dengan Gambar 3.18 dapat dilihat bahwa antara gambar solusi analitik dan solusi numerik hampir terlihat sama, yaitu saat detik ke-1 konsentrasinya  $100 \text{ mol/m}^3$  dan pada detik ke-15 konsentrasinya menjadi nol. Dalam hal ini untuk lebih jelasnya mengenai hasil solusi analitik dapat dilihat pada lampiran ke-17, dan hasil solusi numerik dapat dilihat pada lampiran ke-18.

### 3.5 Analisis Galat (*Error*)

Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya, semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Dari penyelesaian numerik persamaan keseimbangan massa reaktor secara analitik dan numerik sekilas terlihat sama, namun pada kenyataannya terdapat selisih di antara kedua metode tersebut yang biasanya disebut galat (*error*). Hasil galat dari kedua metode penyelesaian persamaan keseimbangan massa reaktor tersebut dapat digambarkan seperti pada kurva di bawah ini:



Gambar 3.19 Galat (*Error*)

Gambar 3.19 menunjukkan bahwa semakin singkat waktu yang digunakan untuk proses reaksi maka galatnya akan semakin kecil dan semakin lama waktu yang digunakan untuk proses reaksi maka galatnya akan semakin besar, lebih jelasnya untuk mengetahui nilai galat yang diperoleh pada Gambar 3.19 dapat dilihat pada Lampiran 20.

### **3.6 Solusi Keseimbangan Massa Reaktor dalam Islam**

Keseimbangan massa reaktor merupakan suatu persamaan yang menyatakan adanya perubahan massa yang terjadi karena proses reaksi kimia di dalam ruangan tertutup (reaktor). Perubahan konsentrasi massa zat yang terjadi di dalam reaktor tersebut termasuk dalam kategori fenomena alam. Kondisi seperti ini dalam ilmu matematika dirumuskan menjadi bentuk persamaan diferensial parsial linier, atau yang disebut dengan persamaan keseimbangan massa reaktor. Sehingga rumus tersebut bertujuan untuk mempermudah proses analisis tentang fenomena yang terjadi di alam.

Di dalam al-Quran terdapat banyak penjelasan mengenai fenomena alam yang terjadi sebagai bukti atas kekuasaan Allah Swt. yang telah menciptakan alam semesta beserta isinya untuk manusia sebagai khalifah di bumi dan telah menyatakan tentang penciptaan alam semesta dalam al-Quran. Meskipun demikian, al-Quran bukan buku kosmologi atau biologi, sebab al-Quran hanya menyatakan bagian-bagian yang sangat penting saja dari ilmu-ilmu yang dimaksud, sehingga benar adanya bahwa al-Quran merupakan sumber dari segala ilmu, akan tetapi al-Quran tidak menjelaskan secara detail bagaimana proses tersebut terjadi.



Misalnya saja konsentrasi zat yang masuk pada reaktor awalnya sebesar  $100 \text{ ml/m}^3$ , akan tetapi karena terjadinya proses reaksi kimia, dapat menyebabkan jumlah konsentrasi massa zat yang keluar dari reaktor mengalami penurunan menjadi nol. Proses perubahan konsentrasi massa zat tersebut, serta cepat atau lambatnya perubahan massa di dalam reaktor, tidak dijelaskan dalam al-Quran, namun setelah dilakukan penelitian pada subbab sebelumnya didapatkan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang dapat dijadikan alat untuk mengetahui proses perubahan massa yang terjadi di dalam reaktor, sehingga dari hasil analisis dapat diketahui bahwa banyaknya massa zat yang berkurang dalam kurun waktu tertentu, serta pilihan beberapa parameter yang sesuai dengan kondisi pada penjelasan sebelumnya, dapat dijadikan acuan untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

Keingintahuan manusia tentang alam semesta tidak hanya membaca al-Quran saja, akan tetapi dengan melakukan perintah Allah Swt. sehingga manusia menemukan kebenaran yang dapat dipergunakan dalam pemahaman serta penafsiran al-Quran. Berikut ini adalah salah satu ayat yang menjelaskan tentang fenomena alam

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأَخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي  
الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾

“*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal*” (QS. Ali Imran/3:190).

Tafsir dari ayat al-Quran surat Ali Imran/3:190 adalah *Inna fii khalqis samaawaati* (sesungguhnya dalam penciptaan langit), yakni sesungguhnya dalam

penciptaan segala makhluk yang ada di langit, yaitu malaikat, matahari, bulan, bintang, dan awan. *Wal ardhi* (dan bumi), yakni dan dalam penciptaan bumi beserta segala sesuatu yang ada padanya berupa gunung, lautan, pepohonan, dan hewan. *Wakhtilaafil laili wan nahaari* (serta silih bergantinya malam dan siang), yakni dalam pertukaran malam dan siang. *La aayaatin* (terdapat tanda-tanda), yakni terdapat tanda-tanda yang menunjukkan ke Esaan-Nya. *Li ulil albaab* (bagi orang-orang yang berakal), yakni bagi manusia yang memiliki pikiran. Kemudian Allah Swt. mengemukakan sifat-sifat orang yang berakal dengan firman-Nya, dapat dilihat dalam (Toha, 2009).

Kemudian ayat berikutnya yang akan menjelaskan tentang fenomena alam beserta keseimbangan yang terjadi di dalamnya terdapat pada surat Ibrahim ayat 32-34 seperti berikut:

اللَّهُ الَّذِي خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ وَأَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَأَخْرَجَ بِهِ مِنَ الثَّمَرَاتِ رِزْقًا لَكُمْ ۗ وَسَخَّرَ لَكُمُ الْفُلْكَ لِتَجْرِيَ فِي الْبَحْرِ بِأَمْرِهِ ۗ وَسَخَّرَ لَكُمُ الْأَنْهَارَ ﴿٣٢﴾ وَسَخَّرَ لَكُمُ الشَّمْسَ وَالْقَمَرَ دَائِبِينَ ۗ وَسَخَّرَ لَكُمْ الَّيْلَ وَالنَّهَارَ ﴿٣٣﴾ وَءَاتَكُمْ مِنْ كُلِّ مَا سَأَلْتُمُوهُ ۗ وَإِنْ تَعُدُّوا نِعْمَتَ اللَّهِ لَا تَحْصُوهَا ۗ إِنَّ الْإِنْسَانَ لَظَلُومٌ كَفَّارٌ ﴿٣٤﴾

*“Allah-lah yang telah menciptakan langit dan bumi dan menurunkan air hujan dari langit, Kemudian Dia mengeluarkan dengan air hujan itu berbagai buah-buahan menjadi rizki untukmu, dan Dia telah menundukkan bahtera bagimu supaya bahtera itu, berlayar di lautan dengan kehendak-Nya, dan Dia telah menundukkan (pula) bagimu sungai-sungai. Dan Dia telah menundukkan (pula) bagimu matahari dan bulan yang terus menerus beredar (dalam orbitnya, dan telah menundukkan bagimu malam dan siang. Dan Dia telah memberikan kepadamu (keperluanmu) dan segala apa yang kamu mohonkan kepadanya. dan jika kamu menghitung nikmat Allah, tidaklah dapat kamu menghinggakannya.*

*Sesungguhnya manusia itu, sangat zalim dan sangat mengingkari (nikmat Allah)” (QS. Ibrahim/14:32-34).*

Tafsir dari ayat al-Quran surat Ibrahim/14:32-34 di atas adalah *Allaahul ladzii khalaqas samaawaati wal ardlu wa anzala minas samaa-i maa-an* (Allah-lah yang telah menciptakan langit dan bumi serta menurunkan air dari langit), yakni air hujan. *Fa akhruja bihi* (lalu Dia mengeluarkan dengannya), yakni dengan air hujan itu Dia menumbuhkan. *Minats tsamaraati* (berbagai buah-buahan), yakni buah-buahan yang beraneka warna. *Rizqal lakum* (sebagai rezeki bagi kalian), yakni menjadi makanan untuk kalian dan seluruh makhluk. *Wa sakh-khara lakumul fulka* (dan Dia telah menundukkan kapal untuk kalian), yakni perahu-perahu. *Li tajriya* (supaya ia bisa berlayar), yakni supaya kapal itu bisa berlayar. *Fil bahri bi amrihi* (di lautan dengan perintah-Nya), yakni dengan izin dan kehendak-Nya. *Wa sakh-khara lakumul anhaar* (dan Dia pun telah menundukkan sungai-sungai untuk kalian), sehingga kalian bisa berlayar ke mana pun kalian mau. Dan Dia telah menundukkan bagi kalian matahari dan bulan terus-menerus beredar (pada orbitnya), dan juga telah menundukkan bagi kalian malam dan siang, lihat dalam (Toha, 2009).

*Wa sakh-khara lakumusy syamsa wal qamara daa-ibaini* (dan Dia telah menundukkan bagi kalian matahari dan bulan terus-menerus beredar (pada orbitnya) sampai hari kiamat. *Wa sakh-khara lakumul laila wan nahaar* (dan juga telah menundukkan bagi kalian malam dan siang), yakni datang dan pergi silih berganti. Dan Dia telah memberikan kepada kalian segala apa yang kalian mohon dari-Nya. Dan jika kalian menghitung-hitung nikmat Allah, niscaya kalian tidak akan dapat menghitungnya. Sesungguhnya manusia benar-benar sangat zalim lagi sangat kafir, lihat dalam (Toha, 2009).

*Wa aataakum* (dan Dia telah memberikan kepada kalian), yakni telah mengaruniakan kepada kalian. *Min kulli maa sa-altumuuh* (segala apa yang kalian mohon dari-Nya) dan segala sesuatu yang menurut kalian sebaiknya tidak diminta. *Wa in ta'udduu ni'matallaahi* (dan jika kalian menghitung-hitung nikmat Allah), yakni menghitung-hitung karunia Allah. *Laa tuhshuuhaa* (niscaya kalian tidak akan dapat menghitungnya), yakni niscaya kalian tidak akan dapat menghafal dan mensyukuri nikmat tersebut. *Innal insaana* (sesungguhnya manusia), yakni orang-orang kafir. *La zhaluumun* (benar-benar sangat zalim), yakni sangat musyrik. *Kaffaar* (lagi sangat kafir) kepada Allah Swt. dan nikmat-Nya, lihat dalam (Toha, 2009).

Allah Swt. telah menciptakan alam semesta ini dengan segala kebesarannya, Allah Swt. yang menguasai alam ini, mengatur dengan perintah-Nya dan mengendalikan dengan kekuasaan-Nya. Allah Swt. menutupkan malam kepada siang dan menutupkan siang kepada malam. Allah Swt. menciptakan matahari, bulan, bintang, dan semuanya tunduk atas perintah-Nya. Sesungguhnya Allah Swt. maha pencipta seluruh alam dan isinya.

Keterkaitan makhluk yang satu dengan yang lain dalam satu sistem kehidupan ini terbentuk suatu sistem kehidupan yang disebut ekosistem. Ciri-ciri adanya ekosistem adalah berlangsungnya pertukaran dan transformasi energi yang sepenuhnya berlangsung di antara berbagai komponen dalam sistem itu sendiri atau dengan sistem lain di luarnya.

Adanya keterkaitan menyebabkan terjadinya dinamisasi yang sangat baik, seimbang dan harmonis dalam kawasan lingkungan hidup. Kestabilan dan kedinamisasian dalam lingkungan terletak pada upaya mengelola dan

melestarikan komponen lingkungan hidupnya. Kemudian melanjutkannya dengan melihat apa kaitan kemanfaatannya pada populasi lain, pengelolaan dan kelestarian lingkungan hidup erat hubungannya dengan mendudukan keseluruhan komponen lingkungan hidup secara kodrati.

Dari penjelasan di atas dapat dilihat bahwa alam semesta bukanlah produk dari hasil pemikiran manusia melainkan produk hasil pemikiran Allah Swt. berdasarkan bukti yang kongkrit dan valid yang berupa ayat-ayat al-Quran seperti surat al-Baqarah/2:164, al-Mulk/67:3-4, al-Anbiyaa'/21:33, Ali Imran/3:190, dan Ibrahim/14:32-34.

Allah Swt. menciptakan alam semesta ini dalam keadaan yang sangat harmonis, serasi, seimbang dan dapat memenuhi kebutuhan makhluk-Nya. Allah Swt. telah menjadikannya dengan sangat baik, kemudian memerintahkan kepada hamba-hamba-Nya untuk memperbaikinya. Dalam ayat ini Allah Swt. menerangkan apa yang terdapat dalam cakrawala yang menunjuk kepada manusia agar mensyukuri ciptaan Allah Swt. dan tetap mentaati-Nya.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Penyelesaian numerik persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode *Lax Wendroff* dapat diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut, melakukan diskritisasi pada variabel yang tidak diketahui dengan deret Taylor sampai orde dua terhadap waktu di sekitar  $c^n$ , setelah itu menurunkan persamaan  $c_t$  terhadap  $t$  untuk mendapatkan  $c_{tt}$ , kemudian mengganti  $c_{tt}$  dengan turunan ruang, dan menggunakan beda hingga pusat untuk mengaproksimasi turunan ruang pada hampiran deret Taylor orde dua tersebut.
2. Syarat kestabilan dari metode *Lax wendroff* untuk persamaan keseimbangan massa reaktor adalah

$$(A_1 + 2A_2)^2 \leq 1$$

Metode tersebut stabil dengan syarat tertentu yaitu ketika  $dx = 0,07$  dan  $0,01 \leq dt \leq 0,1$ . Namun ketika menggunakan  $dx$  yang sama dan  $dt \geq 0,2$  maka metode tersebut menjadi tidak stabil.

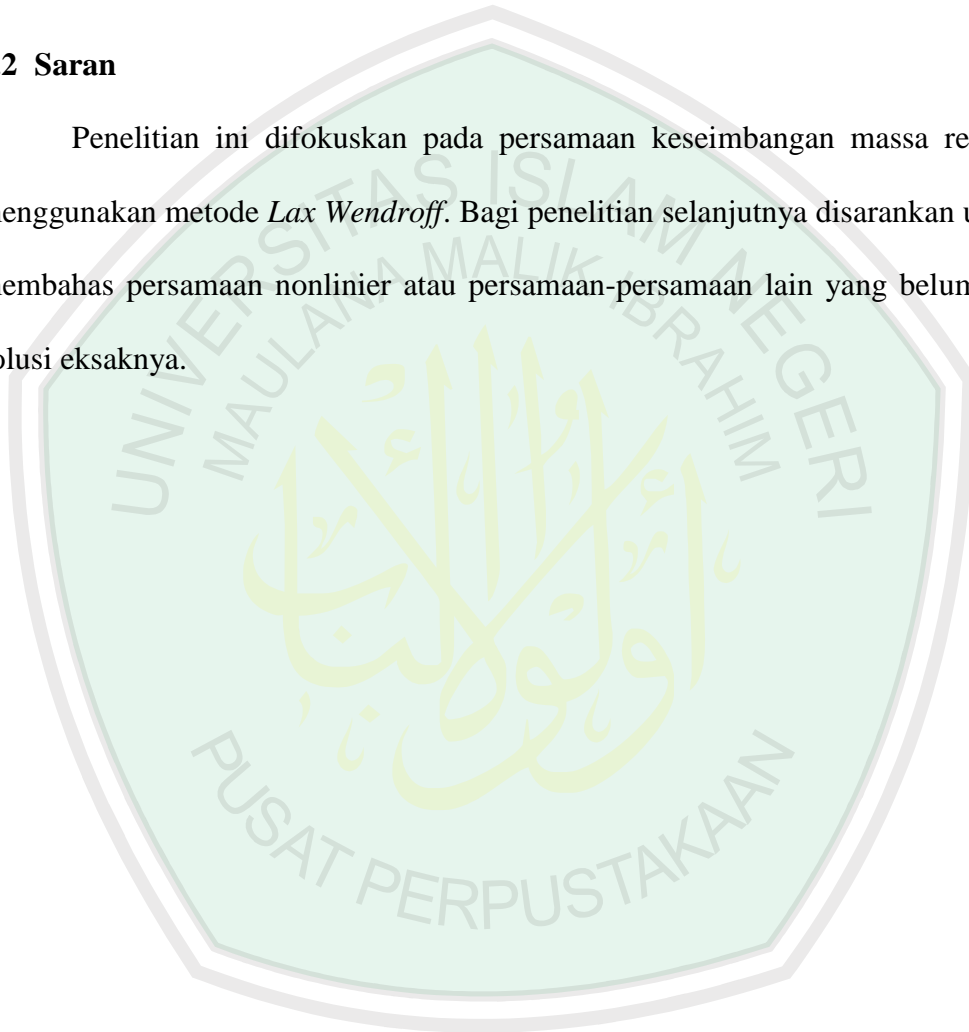
3. Model diskrit yang digunakan tersebut konsisten jika:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \Delta x^2 \frac{U}{24} c_{xxx} \Big|_j^n - \frac{1}{2} \Delta t c_{tt} \Big|_j^n = 0$$

Apabila  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai  $c_{xxx}$  dan  $c_{tt}$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. Sehingga *error* pemotongan akan menuju nol.

#### 4.2 Saran

Penelitian ini difokuskan pada persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode *Lax Wendroff*. Bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas persamaan nonlinier atau persamaan-persamaan lain yang belum ada solusi eksaknya.

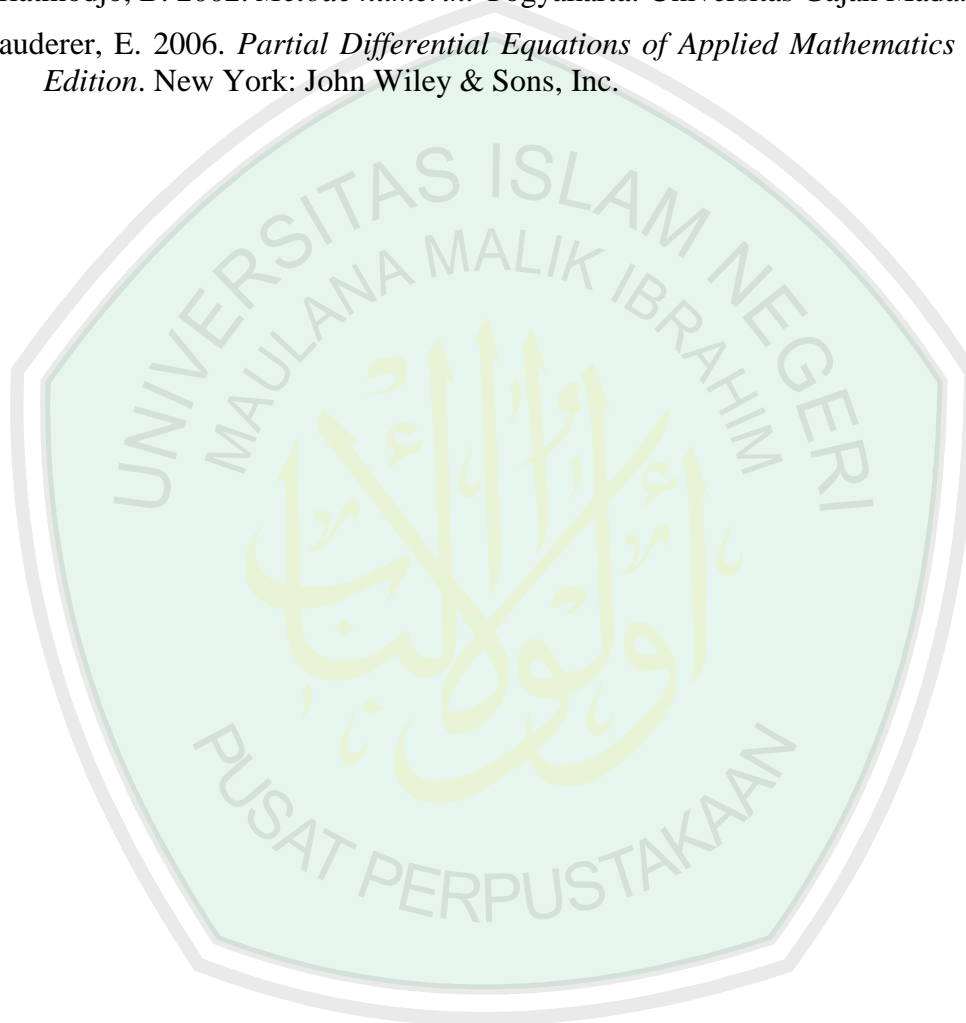


## DAFTAR PUSTAKA

- Arif, M.S. 2015. *Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor Menggunakan Metode Pemisahan Variabel*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Barnes, B dan Fulford, G.R. 2009. *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equations Approach using Maple and MATLAB* Second Edition. London: CRC Press.
- Caldwell, J dan Ng, D.K.S. 2004. *Mathematical Modelling: Case Studies and Projects*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Chapra, S.C dan Canale, R.P. 2012. *Numerical Methods for Engineers*. New York: McGraw-Hill
- Flaherty, J.E. 1966. *Problem Involving Partial Differential Equation*. Brooklyn: Polytechnic Institute.
- Hidayat, N., Suhariningsih., & Suryanto, A. 2012. *Skema Central Upwind Semidiskrit Untuk Persamaan Hiperbolik Dimensi-Satu*. Artikel tidak dipublikasikan. Surabaya: Universitas Airlangga Surabaya.
- Hudaya, T., Halim, M., & Santosa, A. 2011. Simulasi Reaktor Steam Reforming Gas Alam dengan Model One Dimensional Pseudo Homogeneous:1–10.
- Isma'il, A.A.F dan Ad-Dimasyqi, I.K. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Jamhuri, M. 2013. *Persamaan Difusi (Penurunan, Solusi Analitik, Solusi Numerik (BedaHingga, RBF))*. Artikel tidak Dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- LeVeque, R.J. 1992. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Berlin: Birkhduser.
- Munawaroh, S. 2014. Al-Quran dan Temuan Ilmiah. *Teori Dentuman Besar Big Bang Tugas al-Quran dan Sains*. 12 (5): 1-5. (Online), (<http://simon-uia.blogspot.co.id/2014/12/teori-dentuman-besar-big-bang-tugas-al.html>), diakses 19 Agustus 2015.
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Mutholi'ah, E. 2008. *Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Strauss, W.A. 1992. *Partial Differential Equations an Introduction*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Sulistyarso, H.B., Trihandaru, S., Mucharam, L., Siregar, S., Saputra, I., & Canggih, S. 2004. Solusi Model Aliran Gas Dalam Pipa pada Kondisi Line



- Packing Menggunakan Skema Richtmyer. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 36 (2): 159–177.
- Sumarni, A.P. 2009. Pemanfaatan Metoda Newton-Raphson dalam Perancangan Reaktor Alir Tangki Berpeganduk. *Jurnal Teknologi*, 2 (2): 185– 193.
- Toha, M. 2009. *Al-Qalam*. Bandung: Diponegoro.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode numerik*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



## LAMPIRAN-LAMPIRAN

### Lampiran 1. Kestabilan pada Persamaan (3.22)

```
clc,clear,clf

dx = 0.07;
D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

[dt,a]=meshgrid(0.01:0.01:0.1, -4*pi:0.1:4*pi);
% [dt,a]=meshgrid(0.01:0.01:0.1, -4*pi:0.1:4*pi);

ro=(( (1-(2*D*dt/dx^2) -
(gamma*dt)+(3*D^2*dt.^2/dx^4)+(2*D*gamma*dt.^2/dx^2)-...
(U^2*dt.^2/dx^2)+(gamma^2*dt.^2/2))+...
((2*D*dt/dx^2)-(4*D^2*dt.^2/dx^4)-
(2*D*gamma*dt.^2/dx^2)+(U^2*dt.^2/dx^2))).^2)

figure(1)
surf(dt,a,real(ro))
% surf(dt,a,real(ro))
xlim([0.01 0.1])
ylim([-4*pi 4*pi])

shading flat
xlabel(['\fontsize{13}dt'])
ylabel(['\fontsize{13}a'])
zlabel(['\fontsize{13}|\rho|'])
```

## Lampiran 2. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-1

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:1;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));

    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat (D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:1;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/(A1*1)^2+(n*pi)^2;
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'-','x',c(:,length(t)),'*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)),'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

### Lampiran 3. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-2

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:2;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));

    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:2;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```



#### Lampiran 4. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-3

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:3;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:3;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)),'*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 5. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-4

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:4;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:4;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i = 1:length(X)
        jml=0;
        for n =1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*x(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i)))-((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j) = jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure (3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 6. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-5

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:5;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat (D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:5;

```



```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i = 1:length(X)
        jml=0;
        for n =1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/(A1*1)^2+(n*pi)^2;
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*x(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i)))-((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j) = jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure (3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 7. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-6

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:6;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));

    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:6;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp((U/(2*D))-A1)*1)/(exp((U/(2*D))-A1)*1)-
exp((U/(2*D))+A1)*1);
k2=(-Cin*exp((U/(2*D))+A1)*1)/(exp((U/(2*D))-A1)*1)-
exp((U/(2*D))+A1)*1);
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-
A1*1)*cos(n*pi)-1))/(A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-
((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*
sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp((U/(2*D))+A1)*x(i))+(k2*exp((U/(2*D))-A1)*X(i));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i)))-
((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)),'*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 8. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-7

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:7;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018;  %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:7;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 9. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-8

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:8;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```



```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:8;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 10. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-9

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:9;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:9;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i = 1:length(X)
        jml=0;
        for n =1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/(A1*1)^2+(n*pi)^2;
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*x(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i)))-((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j) = jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure (3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 11. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-10

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:10;     %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;       %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;       %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018;   %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:10;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```



## Lampiran 12. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-11

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:11;     %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:11;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i = 1:length(X)
        jml=0;
        for n =1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/(A1*1)^2+(n*pi)^2;
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j) = jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure (3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)),'*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

### Lampiran 13. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-12

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:12;     %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;     %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018; %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:12;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*x(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i)))-((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)),'*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 14. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-13

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:13;     %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;       %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;       %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018;   %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:13;

```



```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'-',x,c(:,length(t)),'*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 15. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-14

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:14;      %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;        %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;        %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018;    %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:14;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

## Lampiran 16. Konsentrasi Massa Zat pada Detik Ke-15

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:15;     %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;      %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;      %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018;  %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt] = meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n) < c(j+1,n)
            cplus = min(c(j,n), c(j+1,n));
        else
            cplus = max(c(j,n), c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n) < c(j,n)
            cmin = min(c(j-1,n), c(j,n));
        else
            cmin = max(c(j-1,n), c(j,n));
        end

        %      Untuk indeks 3/2
        if c(j+1,n) < c(j+2,n)
            cplus2 = min(c(j+1,n), c(j+2,n));
        else
            cplus2 = max(c(j+1,n), c(j+2,n));
        end
        if j==2
            if c(j-1,n) < c(j,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j,n));
            end
        else
            if c(j-1,n) < c(j-2,n)
                cmin2 = min(c(j-1,n), c(j-2,n));
            else
                cmin2 = max(c(j-1,n), c(j-2,n));
            end
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:15;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

**Lampiran 17.** Tabel Solusi Analitik yang Didapatkan Oleh (Arif, 2015)

$C(x,t)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$	$t = 12$	$t = 13$	$t = 14$	$t = 15$
$x = 0$	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$x = 1$	0	1.2617	6.5617	11.2744	14.5852	16.8386	18.3802	19.4484	20.1984	20.7317	21.1151	21.3934	21.5971	21.7473	21.8588	21.9421
$x = 2$	0	0.0001	0.0402	0.3070	0.8231	1.4491	2.0685	2.6228	3.0921	3.4771	3.7870	4.0333	4.2278	4.3805	4.5002	4.5938
$x = 3$	0	0.0000	0.0000	-0.0014	0.0132	0.0483	0.1114	0.1971	0.2958	0.3985	0.4981	0.5902	0.6726	0.7445	0.8061	0.8582
$x = 4$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0025	0.0073	0.0156	0.0276	0.0428	0.0600	0.0784	0.0970	0.1151	0.1321
$x = 5$	0	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0011	0.0022	0.0040	0.0062	0.0090	0.0122	0.0156
$x = 6$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0006	0.0009	0.0014
$x = 7$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
$x = 8$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x = 9$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x = 10$	0	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000





**Lampiran 18.** Tabel Solusi Numerik

$C(x, t)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$	$t = 12$	$t = 13$	$t = 14$	$t = 15$
$x = 0$	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
$x = 1$	0	1.5115	8.2578	15.4731	21.5941	26.6136	30.7447	34.1851	37.0875	39.5657	41.7047	43.5684	45.2059	46.6551	47.9462	49.1029
$x = 2$	0	0.0003	0.0621	0.4885	1.4450	2.8262	4.4642	6.2231	8.0115	9.7732	11.4752	13.1001	14.6397	16.0914	17.4563	18.7374
$x = 3$	0	0.0000	0.0000	0.0028	0.0267	0.1073	0.2768	0.5500	0.9259	1.3934	1.9369	2.5398	3.1867	3.8639	4.5600	5.2657
$x = 4$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0071	0.0228	0.0553	0.1107	0.1938	0.3071	0.4514	0.6260	0.8291	1.0582
$x = 5$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0017	0.0048	0.0113	0.0228	0.0409	0.0673	0.1031	0.1495
$x = 6$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0048	0.0087	0.0147
$x = 7$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010
$x = 8$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x = 9$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x = 10$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



## Lampiran 19. Program Galat (*Error*)

```
clc,clear all;
clf

dx = 0.1;
dt = 0.02;
x = 0:dx:10;      %panjang reaktor
t = 0:dt:15;     %waktu yang diperlukan selama reaksi

D = 0.083;       %koefisien penyebaran zat
U = 0.008;       %kecepatan zat yang mengalir dalam reaktor
gamma = 0.018;   %koefisien reaksi

m = length(x);
r = length(t);

c = zeros(m,r);
c(:,1) = 0;
c(1,:) = 100;
c(end,:) = 0;
[xx, tt]=meshgrid(x,t);

figure (1)
for n=1:r-1
    for j=2:m-2
        %      untuk indeks 1/2
        if c(j,n)<c(j+1,n)
            cplus=min(c(j,n),c(j+1,n));
        else
            cplus=max(c(j,n),c(j+1,n));
        end
        if c(j-1,n)<c(j,n)
            cmin=min(c(j-1,n),c(j,n));
        else
            cmin=max(c(j-1,n),c(j,n));
        end
    end
    %      Untuk indeks 3/2
    if c(j+1,n)<c(j+2,n)
        cplus2=min(c(j+1,n),c(j+2,n));
    else
        cplus2=max(c(j+1,n),c(j+2,n));
    end
    if j==2
        if c(j-1,n)<c(j,n)
            cmin2=min(c(j-1,n),c(j,n));
        else
            cmin2=max(c(j-1,n),c(j,n));
        end
    else
        if c(j-1,n)<c(j-2,n)
            cmin2=min(c(j-1,n),c(j-2,n));
        else
            cmin2=max(c(j-1,n),c(j-2,n));
        end
    end
end
```

```

satu(j)=(c(j,n));
dua(j)=(c(j+1,n));
tiga(j)=(c(j-1,n));
empat(j)=cplus;
lima(j)=cmin;
enam(j)=cplus2;
tujuh(j)=cmin2;
delapan(j)=c(j+2,n);

    if j==2;
        sembilan(j)=c(j-1,n);
    else
        sembilan(j)=c(j-2,n);
    end

    c(j,n+1)=(1-(2*(D*dt/dx^2))-
gamma*dt+((3*D^2*dt^2)/dx^4)+((2*D*gamma*dt^2)/dx^2)-...
        ((U^2*dt^2)/dx^2)+((gamma^2*dt^2)/2))*satu(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*dua(j)+...
        ((D*dt/dx^2)-((2*D^2*dt^2)/dx^4)-
        ((D*gamma*dt^2)/dx^2)+((U^2*dt^2)/2*dx^2))*tiga(j)-...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*empat(j)+...
        (((U*dt)/dx)-((3*D*U*dt^2)/dx^3)-
        ((U*gamma*dt^2)/dx))*lima(j)-...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*enam(j)+...
        ((D*U*dt^2)/(dx^3))*tujuh(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*delapan(j)+...
        ((D^2*dt^2)/(2*dx^4))*sembilan(j));
    end
    plot(x,c(:,n))

    title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
%     title(['t = ' num2str(t(n))])
    pause(0.1)
    xlabel('x')
    ylabel('C(x,t)')
end

figure (2)
surf(t,x,c(:,,:))

title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat(D)
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor (U)
gamma=0.2;    % Koefisien Reaksi
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk dalam reaktor

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
X = 0:0.2:15;

```

```

% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
T=0:1:1;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt(U^2+(4*D*gamma))/(2*D);
k1=(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*1))/(exp(((U/(2*D))-A1)*1)-exp(((U/(2*D))+A1)*1));
A2=sqrt(abs(U^2+(4*D*gamma)))/(2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot(A2*1);

C=zeros(length(X),length(T));
for j=2:length(T)
    for i=1:length(X)
        jml=0;
        for n=1:150
            beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))/(4*D*(l^2)));
            if (U^2+(4*D*gamma))>0
                En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*1)*cos(n*pi)-1)+k2*(exp(-A1*1)*cos(n*pi)-1))/((A1*1)^2+(n*pi)^2);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
                En=-(2*Cin)/(n*pi);
            elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
                En=((k5*(cos(A2*1+n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1+n*pi)))/(A2*1+n*pi))-((k5*(cos(A2*1-n*pi)-1)+k6*(sin(A2*1-n*pi)))/(A2*1-n*pi));
            end
            V=En*exp((beta^2+gamma)*T(j))*exp((U/(2*D))*X(i))*sin((n*pi*X(i))/l);
            jml=V+jml;
        end

        if (U^2+(4*D*gamma))>0
            W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*X(i)))+(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*X(i)));
        elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
            W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*X(i)))-((Cin*X(i)*exp((U/(2*D))*X(i)))/l);
        elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
            W(i)=exp((U/(2*D))*X(i))*(k5*cos(A2*X(i))+k6*sin(A2*X(i)));
        end
        C(i,j)=jml+W(i);
    end
end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
figure(3)
plot(X,C,'- ',x,c(:,length(t)), '*')
% plot(X,C,'k-',x,c(:,length(t)), 'r')
ylim([0 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')

```

```
% galat
glt=abs(C-c);
figure(4)
surf(t,X,glt)
% plot(X,glt)
title('galat')
grid on
shading flat
```



**Lampiran 20. Tabel Analisis Galat (*Error*)**

$C(x,t)$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$	$t = 12$	$t = 13$	$t = 14$	$t = 15$
$x = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x = 1$	0	0.2498	1.6961	4.1987	7.0089	9.7750	12.3645	14.7368	16.8891	18.8340	20.5896	22.1750	23.6088	24.9078	26.0873	27.1608
$x = 2$	0	0.0002	0.0219	0.1814	0.6218	1.3772	2.3957	3.6003	4.9194	5.3960	7.6883	9.0668	10.4119	11.7108	12.9561	14.1436
$x = 3$	0	0.0000	0.0000	0.0014	0.0135	0.0590	0.1654	0.3529	0.6301	0.7983	1.1780	1.9496	2.5141	3.1194	3.7539	4.4075
$x = 4$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0046	0.0155	0.0397	0.0627	0.1169	0.2471	0.3730	0.5290	0.7140	0.9261
$x = 5$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0013	0.0027	0.0067	0.0188	0.0347	0.0582	0.0909	0.1339
$x = 6$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009	0.0020	0.0042	0.0078	0.0134
$x = 7$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0009
$x = 8$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x = 9$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x = 10$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000



## **RIWAYAT HIDUP**

Yulias Mita Rosanti yang biasa dipanggil Mita, dilahirkan di kota Probolinggo 25 Juli 1992 oleh pasangan suami istri Sunardi dan Buati. Anak pertama dari dua bersaudara ini tinggal bersama kedua orang tuanya di desa Sidorejo RT 002/RW 001 kecamatan Kotaanyar kabupaten Probolinggo.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Sidorejo 1 selama enam tahun dan lulus pada tahun 2004. Setelah itu melanjutkan ke jenjang SMP di SMP Negeri 1 Kotaanyar selama tiga tahun dan lulus pada tahun 2007. Kemudian melanjutkan ke jenjang SMA di SMA Negeri 1 Paiton kecamatan Paiton kabupaten Probolinggo selama tiga tahun dan lulus pada tahun 2010. Setelah lulus SMA dia melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.





**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Yulias Mita Rosanti  
NIM : 10610039  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor Menggunakan Metode *Lax Wendroff*  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si  
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, MA

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	19 Maret 2015	Konsultasi Bab I	1.
2.	16 April 2015	Konsultasi Bab II	2.
3.	02 April 2015	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	15 Juni 2015	ACC Bab I dan Bab II	4.
5.	25 September 2015	Konsultasi Bab III	5.
6.	12 Desember 2015	Konsultasi Kajian Keagamaan	6.
7.	12 Oktober 2015	Konsultasi Bab III	7.
8.	27 Desember 2015	ACC Kajian Keagamaan	8.
9.	29 Oktober 2015	ACC Bab III	9.
10.	11 November 2015	Konsultasi Bab IV	10.
11.	23 November 2015	ACC Bab IV	11.
12.	03 Desember 2015	Konsultasi Abstrak	12.
13.	25 Desember 2015	ACC Abstrak	13.
14.	21 Desember 2015	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 08 Januari 2016  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001