SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN MINKOWSKI PADA RUANG MORREY, HERZ DAN HERZ-MORREY

SKRIPSI

OLEH
SINTYA ULANDARI
NIM. 17610011

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN MINKOWSKI PADA RUANG MORREY, HERZ DAN HERZ-MORREY

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memeuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
SINTYA ULANDARI
NIM. 17610011

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN MINKOWSKI PADA RUANG MORREY, HERZ DAN HERZ-MORREY

SKRIPSI

Oleh
SINTYA ULANDARI
NIM. 17610011

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 15 Juni 2021

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M. Si.	Erna Herawai, M.Pd
NIP. 19800429 200604 1 003	NIDT. 1976072 20180201 2222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN MINKOWSKI PADA RUANG MORREY, HERZ DAN HERZ-MORREY

SKRIPSI

Oleh
SINTYA ULANDARI
NIM. 17610011

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal, 24 Juni 2021

Penguji Utama	: Prof. Dr. Turmudi, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M. Sc	....
Sekertaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M. Si.	....
Anggota Penguji	: Erna Herawati, M. Pd.	....

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika,

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sintya Ulandari

NIM : 17610011

Program Studi : Matematika

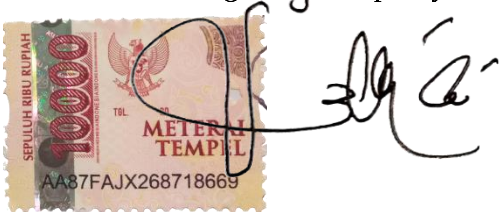
Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul skrispi : Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Morrey, Herz dan Herz-Morrey

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, keduali dengan mencantumkan sumber cuplikan atau daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,

Yang membuat pernyataan,



Sintya Ulandari,

NIM. 17610011

MOTTO

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi pula kamu menyukai sesuatu padahal ia amat buruk bagimu, Allah mengatahui sedang kamu tidak mengetahui"

(Q.S. Al-Baqoroh 216)

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak H. Farizal Afapi dan Hj. Subaidah tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, materi dan kasih sayang yang tak ternilai, serta kakak tercinta Zainada Khofafi yang selalu menjadi panutan dan partner terbaik dalam hidup penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Morrey, Herz, dan Herz-Morrey" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta Salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M. Si., selaku dosen pembimbing I dan Erna Herawati, M. Pd. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Evawati Alishah, M. Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan arahan dan motivasi kepada penulis.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dan pengalaman yang luar biasa selama proses perkuliahan.Segenap keluarga terutama Ayah dan Ibu yang sudah memberikan dukungan doa dan lainnya.

7. Bapak dan Ibu serta Kakak tercinta yang selalu memberikan do'a semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2017 dan Santri Bait Tahfidz al-Qur'an (BTQ).
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ii dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu’alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 26 Juni 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan Riil
$\mathbb{R}^n$	: Himpunan bilangan Riil berdimensi n
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan Asli
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
$x \in \mathbb{R}$	: x anggota $\mathbb{R}$
$f(x)$	: fungsi terhadap x
$f^{-1}(x)$	: Invers fungsi terhadap x
$\forall x$	: Untuk setiap unsur x
$\exists x$	: Terdapat unsur x
$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$	: Himpunan yang terdiri atas $f_1, f_2, \cdots, f_n$
χ	: Fungsi karakteristik
$\|\cdot\|$	: Norm
$\sim$	: Ekuivalen
$\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$	: Irisan $a_1 \cap a_2 \cap \cdots$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$	: Gabungan $a_1 \cup a_2 \cup \cdots$
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	: Penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$B(\alpha, r)$	: Bola buka dengan pusat α dan jari-jari r
sup	: Batas atas terkecil
inf	: Batas bawah terbesar
L^p	: Ruang Lebesgue
wL^p	: Ruang Lebesgue Lemah
$\mathcal{M}_q^p$	: Ruang Morrey
$w\mathcal{M}_q^p$	: Ruang Morrey Lemah
$\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$	: Ruang Herz
$w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$	: Ruang Herz Lemah
$\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$	: Ruang Herz-Morrey
$w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$	: Ruang Herz-Morrey Lemah

ABSTRAK

Ulandari, Sintya. 2021. **Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowksi pada ruang Morrey, Herz dan Herz-Morrey.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman, M. Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Ketaksamaan Minkowski, Ruang Morrey, Ruang Morrey lemah, Ruang Herz, Ruang Herz Lemah, Ruang Herz-Morrey, Ruang Herz-Morrey Lemah.

Ketaksaman Minkowski merupakan ketaksamaan dasar yang dikembangkan dari ketaksamaan segitiga. Ketaksamaan Minkowski juga banyak digunakan dalam analisis fungsional untuk membuktikan ketaksamaan lainnya. Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk mengembangkan aplikasinya pada beberapa ruang fungsi yaitu ruang Morrey, Morrey lemah, Herz, Herz Lemah, Herz-Morrey, dan Herz-Morrey Lemah. Pembuktikan ini dilakukan dengan menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada masing-masing ruang sesuai dengan norm fungsi dan karakteristiknya beserta ruang dalam kondisi lemahnya karena terdapat beberapa kondisi pada fungsi yang tidak terintegralkan secara Lebesgue. Kemudian setelah mengaplikasikan ketaksamaan Minkowski pada norm yang didefinisikan pada ruang-ruang tersebut, maka sebagai hasil penulis dapat membuktikan syarat cukup ketaksamaan pada ruang Morrey, Herz, dan Herz-Morrey beserta kondisi lemahnya.

ABSTRACT

Ulandari, Sintya. 2021. **Sufficient Conditions of Minkowksi Inequality in Morrey, Herz and Herz-Morrey Spaces.** Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman, M. Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Minkowski Inequality, Morrey Space, Weak Morrey Space, Herz Space, Weak Herz Space, Herz-Morrey Space, Weak Herz-Morrey Space.

The Minkowski inequality is a basic inequality developed from the triangular inequality. Minkowski inequalities are also widely used in functional analysis to prove other inequalities. In this study, the author is interested in developing its application in several function spaces, namely Morrey space, weak Morrey, Herz, Weak Herz, Herz-Morrey, and Weak Herz-Morrey. This proof is done by showing the sufficient conditions for the Minkowski inequality in each space according to the function norm and its characteristics and the space is in a weak condition because there are several conditions in the function that are not Lebesgue integrated. Then after applying Minkowski's inequalities to the norms defined in these spaces, as a result, the writer can prove the sufficient conditions for inequalities in Morrey, Herz, and Herz-Morrey spaces and their weak conditions.

مخلص

أولانداري, سينتيا .٢٠٢١.الشروط الكافية لعدم المساواة مينكوفسكي في فضاءت موري و هرز و هرز موري. البحث العلمي. قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك ابراهيم الاسلامية الحكومية فى مالانغ. المشرف: (١) الدوكتور حير الرحمن, الماجستير. (٢) ارن هراوتي, الماجستير

الكلمات الرنيسية: عدم المساوة مينكوفسكي, الفضاء موري, الفضاء موري الضعيفة, الفضاء هرز, الفضاء هرز الضعيفة, الفضاء هرز موري, الفضاء هرز موري الضعيفة

إن عدم المساواة مينكوفسكي هو عدم مساواة أساسية نشأت من عدم المساواة المثلثية. تُستخدم تفاوتات مينكوفسكي أيضًا على نطاق واسع في الدراسة التحليلية الوظفية لإثبات عدم المساواة الأخرى. في هذه الدراسة ، اهتم المؤلف بتطوير تطبيقه في عدة فضاءت وظيفية ، وهي: الفضاء موري, الفضاء موري الضعيفة, الفضاء هرز, الفضاء هرز الضعيفة, الفضاء هرز موري, الفضاء هرز موري الضعيفةز ويتم هذا الإثبات من خلال إظهار حالة عدم المساواة الكافية في كل الفضاءت وفقًا لمعيار الوظيفة وخصائصها جنبًا إلى جنب مع الفضاء في حالة ضعيفة لأن هناك عدة شروط في الوظيفة غير متكاملة لبسغوي. ثم بعد تطبيق عدم مساواة مينكوفسكي على المعايير المحددة في هذه الفضاءت ، نتيجة لذلك ، يمكن للكاتب إثبات الظروف الكافية لعدم المساواة في فضاءت موري ، وهرز ، وهرز-موري وظروفها الضعيفة

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional merupakan cabang matematika abstrak yang tidak memusatkan perhatian pada ruang yang berdimensi dua, tetapi juga dimensi tiga, empat sampai tak hingga (Kreyzig, 1978). Dalam bidang analisis fungsional terdapat salah satu ruang fungsi yang sering dibahas dalam penelitian yaitu ruang Lebesgue yang dinotasikan dengan L^p. Ruang Lebesgue merupakan ruang Banach untuk $1 \leq p \leq \infty$ yang pertama kali dikenalkan oleh Henri Lebesgue. Ruang Lebesgue memiliki peranan yang cukup penting dalam pengembangan teori ukuran, analisis fungsional, teori peluang, serta berbagai macams disiplin ilmu yang lain. Setelah ditemukannya ruang Lebesgue pada tahun 1910, kemudian ditemukan juga pengembangan dari ruang Lebesgue dikarenakan terdapat beberapa kondisi pada fungsi yang tidak terintegralkan secara Lebesgue yaitu ruang Lebesgue lemah yang dinotasikan dengan wL^p (Royden, 2010).

Pada tahun 1938, kemudian C. B. Morrey memperkenalkan ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q \leq \infty$ sebagai salah satu perluasan dari ruang Lebesgue yaitu, suatu ruang yang dibangun oleh semua fungsi yang terintegralkan secara lokal di $\mathbb{R}^n$ serta dilengkapi suatu norma yang diperhalus dengan menambah satu parameter dan bertujuan untuk melihat secara detail perilaku fungsi-fungsi di ruang Lebesgue. Selain ruang Morrey, terdapat juga ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_q^p$ yang merupakan perluasan dari ruang Lebesgue lemah (Grafakos, 2008).

Ruang Herz $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ merupakan kelas ruang fungsi yang diperkenalkan oleh Herz dalam studi tentang transformasi Fourier yang benar-benar konvergen pada tahun 1968. Lu dan Yang adalah dua penulis pertama yang mempelajari beberapa ruang yang terkait dengan ruang Herz homogen dengan indeks khusus. Kemudian, teori lengkap untuk kasus indeks umum ditemukan oleh Lu dan Yang pada tahun 1995. Tepatnya, Lu dan Yang pertama kali membentuk karakterisasi dekomposisi ruang Herz dalam hal yang disebut blok pusat. Disamping itu, juga terdapat kondisi lemah pada ruang Herz yang dinotasikan dengan $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ (Lu, 2008). Setelah ditemukannya beberapa ruang dalam analisis fungsional, kemudian banyak matematikawan yang mempelajari dan menggabungkan relasi antara dua ruang atau lebih seperti yang dilakukan oleh Lu dan Xu pada tahun 2005. Lu dan Xu memperkenalkan ruang baru yaitu ruang Herz-Morrey yang kombinasi antara ruang Herz dan ruang Morrey (Xu, 2005).

Selain ruang fungsi, topik pembahasan yang banyak dibahas dalam penelitian adalah ketaksamaan. Matematika memiliki banyak sekali ketaksamaan. Namun salah satu ketaksaman yang banyak digunakan dalam analisis adalah ketaksmaan Minkowski. Ketaksaman Minkowski merupakan pengembangan dari ketaksamaan segitiga yang pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman Hermann Minkowski pada tahun 1907 (Hardy, 1934). Pada dasarnya Ketaksamaan Minkowski merupakan ketaksamaan segitiga yang diaplikasikan pada ruang L^p terukur, kemudian seiring berjalannya waktu banyak penelitian yang memodifikasi ketaksamaan tersebut menjadi penemuan-penemuan baru yang lebih beragam. Sebagaimana yang dilakukan Wang dan Wu untuk membuktikan beberapa ketaksamaan pada ruang Herz-Morrey anisotropik dengan dua variabel eksponen (Wu, 2016).

Dalam surat Luqman ayat 27 yang berbunyi

وَلَوْ أَنَّمَا فِي الأَرْضِ مِنْ شَجَرَةٍ أَقْلامٌ وَالْبَحْرُ يَمُدُّهُ مِنْ بَعْدِهِ سَبْعَةُ أَبْحُرٍ مَا نَفِدَتْ كَلِمَاتُ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيم

Artinya: “*Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh laut (lagi) sesudah (kering)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana.*”,

Allah Swt. telah menuliskan secara tersurat tentang betapa luasnya ilmu Allah dimuka bumi. Berkenaan dengan luasnya ilmu pengetahuan, maka tentunya manusia harus selalu berfikir untuk senantiasa mengkaji dan mengembangkan ilmu tersebut. Dimana penciptaan manusia juga berfungsi untuk menjalankan tugas kekhalifaan antara lain adalah *intifa’* (memanfaatkan bumi), *ishlah* (memelihara bumi), dan *i’tibar* (mengambil pelajaran di bumi), kemudian dijarkan pada manusia ilmu pengetahuan agar memudahkan dalam menjalankan tugas kekhalifaan tersebut yang bertujuan untuk mengatur dan memanfaatkan benda-benda yang ada di bumi (Abdussakir, 2017).

Untuk membuktikan suatu kebenaran dari penemuan-penemuan baru, tentu perlu dilakukan kajian-kajian tentang perkembangan dalam ilmu matematika.

Berdasarkan pemaparan tersebut, penulis ingin melakukan penelitian yang mengaplikasikan ketaksamaan Minkowski pada ruang Lebesgue dan Morrey sesuai dengan definisinya masing-masing. Pada penelitian ini akan ditunjukkan syarat cukup Ketaksamaan Minkowski pada di ruang Lebesgue dan Morrey.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diperoleh berdasarkan latar belakang permasalahan diatas yaitu bagaimana syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey, Herz dan Herz-Morrey?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun Tujuan yang diperoleh dalam penelitian ini adalah untuk membuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey, Herz dan Herz-Morrey.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan agar dapat menambahkan informasi dan kajian baru yang berkaitan dengan syarat cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Morey, Herz dan Herz-Morrey.

1.5 Batasan Masalah

Agar pembahasan pada penelitian ini tidak meluas atau menyimpang, maka dirasa perlu bagi penulis untuk membuat batasan masalah. Batasan masalah yang dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Ketaksamaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah Ketaksamaan Minkowski klasik (integral).
2. Ruang yang digunakan pada penelitian ini meliputi ruang Morrey, ruang Morrey Lemah, ruang Herz, ruang Herz lemah, ruang Herz-Morrey, dan ruang Herz-Morrey lemah.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian iniadalah metode studi kepustakaan (Library research). Penelitian kepustakaan merupakan penelitian yang dilakukan tanpa terjun kelapangan dan hanya memanfaatkan literatur-

literatur seperti buku, artilkel dan jurnal penelitian terdahulu sebagai sumber informasi dan data.

Peneliti mempelajari, mengumpulkan serta mengolah bahan penelitian yang berkaitan dengan penelitian ini. Jurnal yang menjadi sumber informasi dalam penelitian antara lain adalah buku *Elementary Linear Algebra* karangan Rene Erlin Castillo dan Humberto Rafairo, *Introductory Funcntional Analysis with application* karangan Erwin Kreyzig, *Real Analysis Fourth Edition* karangan H. L. Royden dan P. M. Fitzpatrick, *Herz Type Spaces and Their Application* karangan S. Lu, Yang D., dan Hu. G serta *Boundedness of Rough Singular Integral Operators on the Homogeneous Morrey-Herz Spaces* karangan Shanzhen Lu dan Lifang Xu.

Adapun ketaksamaan yang digunakan dalam penelitian ini berupa ketaksamaan Minkowski yang diaplikasikan pada beberapa ruang fungsi yang sudah disebutkan dalam batasan masalah. Langkah langkah yang digunakan untuk mengolah data dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Menunjukkan definisi norm masing-masing pada ruang Morrey, Morrey lemah, Herz, Herz lemah, Herz-Morrey lemah.
2. Mengaplikasikan definisi norm masing-masing ruang tersebut pada ketaksamaan Minkowski.
3. Membuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski di ruang Morrey, Morrey lemah, Herz, Herz lemah, Herz-Morrey lemah menggunakan definisi norm pada masing-masing ruang
4. Menarik kesimpulan atas hasil yang telah dibuktikan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembaca dalam memeahami isi dari penelitian ini, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bagian yang meliputi

Bab I Pendahuluan

Pada Bab I Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada Bab II berisi kajian pustaka yang membahas tentang kajian teori-teori pendukung untuk menjawab rumusan masalah yang meliputi: Ruang Vektor, Ketaksamaan Minkowski, Ruang Metrik, Ruang Bernorma, Ruang Banach, Ruang Lebesgue, Ruang lebesgue Lemah, Ruang Morrey, Ruang Morrey Lemah, Ruang Herz, Ruang Herz lemah, Ruang Herz-Morrey, Ruang Herz-Morrey Lemah serta kajian keislaman yang terkait dengan penelitian.

Bab III Pembahasan

Bab III merupakan pemaparan dari pembahasan yang merupakan jawaban dari rumusan masalah. Pembahasan yang dimaksud adalah Ketaksamaan Minkowski pada beberapa ruang Fungsi yang telah disebutkan pada batasan masalah.

Bab IV Penutup

Bab IV merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran bagi pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Vektor

Ruang vektor adalah struktur matematika yang dibentuk oleh sekumpulan vektor, yaitu objek yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan suatu bilangan, yang disebut *skalar*. Operasi penjumlahan dan perkalian vektor harus memenuhi persyaratan tertentu yang dinamakan *aksioma*.

Definisi 2.1 *Misalkan V adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi dimana operasi pertama disebut dengan penjumlahan yang menghubungkan setiap vektor x dan y di V yang dinotasikan dengan $x + y$. Sedangkan operasi kedua disebut perkalian skalar yang menghubungkan setiap vektor x di V dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ yang dinotasikan dengan αx. Kedua operasi tersebut harus memenuhi aksioma-aksioma berikut* (Rorres, 2005):

1. Untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$ *maka* $x + y \in V$.
2. $x + y = y + x; \forall x, y \in V$.
3. $(x + y) + z = x + (y + z); \forall x, y, z \in V$.
4. *Terdapat vektor tunggal* 0, *dinamakan vektor nol sedemikian sehingga* $0 + x = x + 0 = x; \forall x \in V$.
5. *Untuk setiap $x \in V$, terdapat vektor tunggal$-x$ yang disebut negatif dari x sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
6. *Jika $x \in V$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ maka $\alpha \in \mathbb{R}$ juga di V.*
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
9. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
10. $1x = x$

Aksioma 1-5 merupakan sifat grup komutatif terhadap penjumlahan sedangkan aksima 6-10 merupakan sifat dengan operasi perkalian skalar.

Suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian disebut lapangan. Barisan bilangan riil

Contoh 2.1 (Anon dan Rorres, 2005) Misalkan suatu himpunan barisan bilangan riil

$$\ell^2 = \left\{ \{a_n\} = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \left| \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \right|^2 < \infty \right\},$$

ℓ^2 dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar $k \in \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = (x_1, x_2, x_3, \cdots) + (y_1, y_2, y_3, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots)$$

$$k\{\alpha_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (kx_1, kx_2, kx_3, \cdots)$$

Akan dibuktikan bahwa ℓ^2 adalah suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa ℓ^2 oleh dua operasi penjumlahan dan perkalian skalar memenuhi semua aksioma.

1. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ $\{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \{\alpha_n\} + \{\beta_n\} &= (x_1, x_2, x_3, \cdots) + (y_1, y_2, y_3, \cdots) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \cdots) \end{aligned}$$

2. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ $\{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$ maka berlaku

$$\begin{aligned} \{\alpha_n\} + \{\beta_n\} &= (x_1, x_2, x_3, \cdots) + (y_1, y_2, y_3, \cdots) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \cdots) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, \cdots) \\ &= (y_1, y_2, y_3, \cdots) + (x_1, x_2, x_3, \cdots) \\ &= \{\beta_n\} + \{\alpha_n\} \end{aligned}$$

   Jadi, $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\beta_n\} + \{\alpha_n\}$ (bersifat komutatif)

3. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$, akan ditunjukkan bahwa Akan ditunjukkan bahwa

$$(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\} = \{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\})$$

   Maka berlaku

$$\begin{aligned} (\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\}) &= \big((x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots)\big)(z_1, z_2, z_3, \ldots) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots) + (z_1, z_2, z_3, \ldots) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1\ , x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \ldots) + \big((y_1, y_2, y_3, \ldots) + (z_1, z_2, z_3, \ldots)\big) \end{aligned}$$

$$= (\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\})$$

Jadi terbukti bahwa $(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\} = \{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\})$ bersifat asosiatif.

4. Ambil $\theta = (0,0,0, \dots) \in \ell^2$ maka untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ berlaku:

$$\begin{aligned}\{\alpha_n\} + \theta &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (0, 0, 0, \dots) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0, \dots) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= \{\alpha_n\}\end{aligned}$$

Sehingga $\{\alpha_n\} + \theta = \{\alpha_n\}$. Oleh karena itu, θ merupakan vektor nol dalamℓ^2.

5. Untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$, dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3)$ maka terdapat $\{-\alpha_n\} \in \ell^2$ sedemikian sehingga $\{-\alpha_n\} = -\{-\alpha_n\}$

$$\begin{aligned}(\{\alpha_n\} + \{-\alpha_n\}) &= (x_1, x_2, x_3, \dots) + (-x_1, -x_2, -x_3, \dots) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3, \dots) \\ &= (0, 0, 0, \dots) \\ &= \theta\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $(\{\alpha_n\} + \{-\alpha_n\}) = \theta$

6. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan skalar $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned}\{k\alpha_n\} &= (kx_1, kx_2, kx_3, \dots) \\ &= k(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= k\{\alpha_n\}\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\{k\alpha_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots)$ berada di ℓ^2. Untuk setiap $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ sedemikian sehingga berlaku $\sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty$ Berada ℓ^2 maka untuk skalar $k \in \mathbb{R}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\{k\alpha_n\}|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |k|^2 |\{\alpha_n\}|^2 \\ &= |k|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |k|^2 |\{\alpha_n\}|^2 \\ &= \left(\sqrt{k^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2\end{aligned}$$

$$= k^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\{\alpha_n\}|^2 < \infty$$

Sehingga $k\{\alpha_n\} = k(x_1, x_2, x_3, \dots)$ tertutup pada perkalian skalar.

7. Misalkan $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\{\beta_n\} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ skalar $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingg berlaku

$$\begin{aligned} k(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) &= k\big((x_1, x_2, x_3, \dots) + (y_1, y_2, y_3, \dots)\big) \\ &= k(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \\ &= (kx_1 + y_1, kx_2 + y_2, kx_3 + y_3, \dots) \\ &= (\{k\alpha_n\} + \{k\beta_n\}) \end{aligned}$$

Jadi, $k(\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}) = (\{k\alpha_n\} + \{k\beta_n\})$, dengan k adalah skalar atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan operasi perkalian distributif atas penjumlahan.

8. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned} (a + b)\{\alpha_n\} &= (a + b)(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= \big((a + b)x_1, (a + b)x_2, (a + b)x_3, \dots\big) \\ &= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2 ax_3 + bx_3, \dots) \\ &= (ax_1, ax_2, ax_3, \dots) + (bx_1, bx_2, bx_3, \dots) \\ &= a(x_1, x_2, x_3, \dots) + b(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= a\{\alpha_n\} + b\{\alpha_n\} \end{aligned}$$

Jadi, $(a + b)\{\alpha_n\} = a\{\alpha_n\} + b\{\alpha_n\}$

9. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ dengan $\{\alpha_n\} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned} (ab)\{\alpha_n\} &= (ab)(x_1, x_2, x_3, \dots) \\ &= \big((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3, \dots\big) \\ &= a(bx_1, bx_2, bx_3, \dots) \\ &= a\big(b(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) \\ &= a\{\alpha_n\}b\{\alpha_n\} \end{aligned}$$

10. Misalkan $\{\alpha_n\} \in \ell^2$, untuk setiap $1 \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

$$1\{\alpha_n\} = \{\alpha_n\}$$

Untuk setiap $\{\alpha_n\} \in \ell^2$. Jadi $1\{\alpha_n\} = \{\alpha_n\}$.

Ruang barisan ℓ^2 memenuhi semua aksioma, sehingga terbukti bahwa ℓ^2 adalah suatu ruang vektor atas lapangan real $\mathbb{R}$.

2.2 Ketaksamaan Minkowski

Ketaksamaan Minkowski merupakan ketaksamaan dasar yang dikembangkan dari ketaksamaan segitiga dan di temukan pertama kali oleh Matematikawan asal Jerman pada tahun 1907. Karena fungsi dalam analisis dan aplikasinya, ketaksamaan ini mendapat perhatian yang cukup besar dalam beberapa dekade terakhir dan banyak penelitian telah muncul yang membahas berbagai perumuman, perluasan, dan penerapannya. Salah satunya adalah penelitian dalam jurnal yang ditulis oleh Ondrej Hutnik mengenai definisi ketaksamaan Minkowski diskrit dan integral (Hutnik, 2000).

Definisi 2.2 *Ketaksamaan Minkowski klasik (integral) biasanya didefinisikan sebagai berikut. Misalkan* $u > 1$. *Kemudian bentuk diskrit dan integral dari ketaksamaan Minkowski diberikan dengan*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i + b_i|^u\right)^{\frac{1}{u}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^u\right)^{\frac{1}{u}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^u\right)^{\frac{1}{u}} \qquad (2.1)$$

Untuk barisan a_i, b_i *dan*

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^u dt\right)^{\frac{1}{u}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^u dt\right)^{\frac{1}{u}} + \left(\int_a^b |g(t)|^u dt\right)^{\frac{1}{u}} \qquad (2.2)$$

Untuk fungsi kontinu f *dan* g *di* $[a, b]$

Lemma 2.3 *Untuk*$1 \leq p < \infty$ *dan setiap* $a, b >$

$$\inf_{0<t<1}[t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p] = (a+b)^p$$

(Maligranda, 1995)

Bukti. Misalkan, untuk $0 < t < 1$, fungsi g didefinisikan dengan

$$g(t) = t^{1-p}a^p + (1-t)^{t-p}b^p$$

Maka, turunan dari f' memenuhi

$$g'(t) = (1-p)t^{-p}a^p - (1-p)(1-t)^{-p}b^p = 0$$

Hanya ketika $t = t_1 = \frac{a}{a+b}$. Jika

$$g''(t) = (1-p)(-p)t_1^{-p-1}a^p - (1-p)(-p)(1-t_1)^{-p-1}b^p > 0$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa g memiliki lokal minimum pada $\mathrm{t}_1 = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}}$, yang artinya sama dengan

$$\begin{aligned} g(t_1) = g\left(\frac{a}{a+b}\right) &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} a^p + \left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} b^p \\ &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} a^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{1-p} b^p \\ &= (a+b)^p \end{aligned}$$

Lokal minimum pada fungsi g sama dengan global minimumnya karena g kontinu pada (0,1) dan $\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 1^-} g(t) = +\infty$

Proposisi 2.4 *Ketaksamaan Minkowski klasik dinyatakan dengan:*

Misalkan $1 \leq p < \infty$. *Jika*$x, y \in L^p(\mu)$ *maka* $x + y \in L^p$ *dan*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{2.3}$$

(Maligranda, 1995)

Bukti. Dengan menggunakan Lemma yang kita miliki, yaitu ketaksamaan

$$(a+b^p) \leq t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$$

Kita menemukan untuk setiap $t, 0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p = \int_\Omega |x(s)+y(s)|^p d\mu(s) &\leq \int_\Omega [|x(s)|+|y(s)|]^p d\mu(s) \\ &\leq \int_\Omega [t^{1-p}|x(s)|^p + (1-t)^{1-p}|y(s)|^p]\, d\mu(s) \\ &= t^{1-p}\int_\Omega |x(s)|^p\, d\mu(s) + (1-t)^{1-p}\int_\Omega |y(s)|^p\, d\mu(s) \\ &= t^{1-p}\|x\|_p + (1-t)^{1-p}\|y\|_p \end{aligned}$$

Dengan infimum atas $0 < t < 1$ dan menggunakan lemma diatas, kita memperoleh

$$\|x+y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p$$

2.3 Ruang Metrik

Terdapat banyak himpunan elemen di mana"jarak" antara pasangan elemennya dapat didefinisikan, dan hal itu menunjukkan bahwa pengertian tentang konvergensi dan kontinuitas dapat dipelajari. Pengetahuan mengenai hal tersebut disebut ruang metrik. Pembahasan mengenai ruang metrik menerangi banyak konsep analisis klasik dan memudahkan dalam mempelajarinya (Shirali, 2006).

Definisi 2.5 *Misalkan* X *himpunan tak kosong dengan pemetaan* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *disebut* ***ruang metrik*** *jika pemetaan memenuhi sifat-sifat berikut:*

1. $d(x, y) \geq 0 \quad x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad x, y \in X$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad x, y \in X$;

Pemetaan d disebut metrik pada X atau terkadang juga disebut fungsi jarak pada X. Notasi (X, d) adalah ruang metrik yang artinya d adalah metrik pada himpunan X. Sifat keempat sering disebut ketaksamaan segitiga.

Definisi 2.6 *(Royden dan Fitzpatrick, 2010) Suatu barisan* (a_n) *di ruang metrik* (X, d) *disebut barisan* ***Cauchy*** *jika untuk setiap ε > 0, terdapat indeks N di mana*

$$jika\ n, m \geq N, maka\ f(x_n, y_m) < \varepsilon$$

Dalam jurnalnya, (Li, 2008) juga mendefinisikan ruang quasi-Banach sebagai berikut

Definisi 2.7 *Jika* $\|.\|$ *quasi-norm di ruang vektor X berlaku ruang metrik lengkap, maka ruang vektor X disebut ruang quasi-Banach.*

2.4 Ruang Bernorma

Dalam bukunya, (Youngson, 2008) mendefinisikan ruang bernorma sebagai berikut.

Definisi 2.8 *Misalkan X ruang vektor atas lapangan F. Suatu norma di X merupakan fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$, memenuhi aksioma berikut ini:*

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Ketaksamaan Segitiga)*

Ruang vektor X yang memiliki norm disebut ruang vektor bernorma atau ruang bernorma. Diantara salah satu contoh ruang bernorma adalah ruang Banach. Sedangkan (Kalton, 2003) mendefinisikan quasi-norm sebagai berikut.

Definisi 2.9 *Quasi-norm $\|\cdot\|$ pada ruang vektor X atas lapangan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ merupakan suatu pemetaan $X \to [0, \infty)$ dengan $x, y \in X$ dan α sebarang scalar di K yang memenuhi aksioma-aksioma berikut (Kalton, 2003):*

1. $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3. *Terdapat konstanta* $\mathrm{k} \geq 1$ *sedemikian sehingga*

$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leq \mathrm{k}(\|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|)$$

2.5 Ruang Banach

Menurut Royden dan Fitzpatrick (2010), definisi ruang Banach berasal dari ruang bernorma berikut:

Definisi 2.10 *Suatu barisan $\{f_n\}$ merupakan ruang linier X dengan norma $\|\cdot\|$ disebut **Cauchy** di X dengan syarat untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk setiap $m,n \geq N$ berlaku*

$$\left\|f_n - f_m\right\| \leq \varepsilon \tag{2.4}$$

*Ruang bernorma X disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke fungsi di X. Ruang bernorma yang lengkap ini disebut **Ruang Banach.***

Contoh 2.11 (Ghozali, 2010)

1. Barisan $\langle x_n \rangle$ pada ruang metrik *(X,d)* dengan $d(x_m, x_n) = |x_m - x_n|$ dan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap setiap n $=$ 1,2,3,$\cdots$ adalah barisan Cauchy

   Keterangan:

   Diberikan *ε < 0* terdapat bilangan asli *N* sehingga $\frac{1}{N} < \varepsilon$ untuk semua $m, n >$ berlaku

$$(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

2. Barisan $\langle x_n \rangle = n^2$ untuk setiap n $=$ 1,2,3,$\cdots$ bukan merupakan barisan Cauchy karena daerah jangkauan range tidak terbatas dan tidak konvergen.

Contoh 2.12 Ruang Euclid $\mathbb{R}^n$ merupakan himpunan semua pasangan n-tuple atau barisan dari bilangan riil, yang dituliskan sebagai

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

yang dilengkapi dengan norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_i|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}.$$

(Kreyzig, 1978)

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang Banach. Oleh karena itu, maka kita akan menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma yang lengkap.

$\mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai ruang bernorma jika memenui aksioma-aksioma ruang bernorma yaitu

1. $\|x\| \geq 0$

   Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka diperoleh bahwa $|\xi_i|$ bernilai positif sehingga jelas bahwa $(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika *x = 0*

   (⇒) Jika $\|x\| = 0$ maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = 0$$

$$\xi_i = 0$$

($\Leftarrow$) Jika $x = 0$ maka

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (0)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|; \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha\xi_1|^2 + |\alpha\xi_2|^2 + \cdots + |\alpha\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2|\xi_1|^2 + |\alpha|^2|\xi_2|^2 + \cdots + |\alpha|^2|\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|\|x\|$$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Ketaksamaan Segitiga)

   Ambil sebarang $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, sehingga diperoleh

$$\|x + y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\xi_1 + \eta_1|^2 + |\xi_2 + \eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n + \eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (|\xi_1|^2|\eta_1|^2 + |\xi_2|^2|\eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2|\eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}} + (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \cdots + |\eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|x\| + \|y\|$$

Maka terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ dengan norma $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ adalah ruang bernorma. Kemudian akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya.

Misalkan (x_k) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$, di mana $x_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$.

Perhatika bahwa

$$(x_k) = (x_1, x_2)$$

Dengan

$$x_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_2^1) \in \mathbb{R}^n$$
$$x_2 = (\xi_1^2, \dots, \xi_2^2) \in \mathbb{R}^n$$
$$\vdots$$

Karena x_k barisan Cauchy, berarti untk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k.l \geq K$ berlaku

$$\|x_k - x_l\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

Kemudian untuk i $= 1,2,\cdots, n$ bernilai konstan, diperoleh

$$\left(\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$
$$\left(\left(\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \varepsilon^2$$
$$\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2 < \varepsilon^2$$
$$\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right| < \varepsilon$$

Diketahui bahwa $\left(x_k^1, x_k^2, \dots\right)$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^n$ lengkap, maka barisan tersebut konvergen. Misalkan ξ_i^k konvergen ke ξ_i ketika $k \to \infty$, maka dapat dituliskan

$$\|x_k, x\| = \|x_k - x_l\| = \|x_k - x_l\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

Sehingga diperoleh bahwa barisan Cauchy x_k konvergen di $\mathbb{R}^n$. Maka terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ lengkap.

2.6 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue pertama kali ditemukan oleh Henri Lebesgue pada tahun 1910. Ruang Lebesgue merupakan suatu ruang kelas ekuivalen fungsi yang dilengkapi suatu norma. Fungsi-sungsi tersebut merupakan fungsi terukur (Lebesgue). Norma pada ruang Lebesgue didefinisikan dengan suau ntegral (Lebesgue) yang bernilai terbatas. Dalam beberapa hal, ruang Lebesgue dapat menjadi *prototype* bagi semua ruang fungsi (Rafeiro, 2005).

Definisi 2.13 *Ruang Lebesgue* L^p *dengan* $1 < p < \infty$ *adalah himpunan semua fungsi terukur* $f \in \mathbb{R}^n$ *yang memenuhi:*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p \, dx\right) < \infty \tag{2.5}$$

Untuk $p = \infty, L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sbagai himpunan semua fungsi yang terbatas essensial di $\mathbb{R}^n$, dengan kata lain terdapat $M \geq 0$ sehingga

$$|f(x)| \leq M$$

Di mana untuk normnya didefinisikan sebagai

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \tag{2.6}$$

Kemudian didefinisikan ruang Lebesgue lokal sebagai berikut

Definisi 2.14 *Ruang Lebesgue lokal* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai semua fungsi terukur* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *yang memenuhi*

$$\int_K |f(x)|^p \, dx < \infty$$

Untuk setiap subhimpunan kompak $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (Mu'tazili, 2019)

2.7 Ruang Lebesgue Lemah

Karena terdapat beberapa fungsi yang tidak memenuhi kondisi pada ruang Lebesgue, maka dalam jurnal (Mu'tazili, 2019) ruang Lebesgue lemah didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.15 *Misalkan* $1 \leq p < \infty$ *ruang Lebesgue lemah* wL^p *adalah himpunan semua fungsi terukur* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sehingga*

$$\|f\|_{wL^p} = \sup_{\gamma>0} \gamma \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.7}$$

Dengan $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}|$ *menyatakan ukuran Lebesgue dari*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}$$

2.8 Ruang Morrey

C.B. Morrey merupakan orang pertama yang mengenalkan ruang Morrey pada tahun 1938, di mana ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ merupakan perluasan dari ruang Lesbesgue sebagaimana telah dibahas (Mu'tazili, 2019) dalam jurnalnya.

Definisi 2.16 *Untuk setiap* $1 \leq p \leq q < \infty$ *ruang Morrey* $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah himpunan semua fungsi* $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ *sedemikian sehingga*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^p \, dx \right) < \infty \tag{2.7}$$

Dengan $B(\alpha, r)$ menyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di α dan berjari-jari di r. Jika $p = q$, maka $\mathcal{M}_q^p = L^p$, artinya ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Lebesgue yang akan ditunjukkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{0} \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^p \right) \\
&= \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

2.9 Ruang Morrey Lemah

Dalam kondisi lemah, ruang Morrey didefinisikan sebagai berikut (Mu'tazili, 2019).

Definisi 2.17 *Untuk setiap* $1 \leq p \leq q < \infty$ *ruang Morrey lemah* $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah himpunan semua fungsi terukur* $f \in \mathbb{R}^n$ *sedemikian sehingga*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.8}$$

Di mana $B(\alpha,r)$ merupakan bola buka yang berpusat di $\alpha \in \mathbb{R}^n$ dan berjarak $r > 0$ dengan $|\{x \in (B(\alpha,r) : |f(x)| > \gamma\}|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari $\{x \in (B(\alpha,r) : |f(x)| > \gamma\}$

Sama halnya pada ruang Morrey, jika $p = q$ maka $\mathcal{M}_q^p = L^p$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{0} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n, r>0} \gamma\, |\{x \in (B(\alpha,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

2.10 Ruang Herz

Ruang Herz $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ merupakan kelas ruang fungsi yang diperkenalkan oleh Herz dalam studi tentang transformasi Fourier yang benar-benar konvergen pada tahun 1968 (Lu, 2008).

Definisi 2.18 *Misalkan* $0 < p < q \leq \infty$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ruang Herz Homogen* $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai*

$$\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n) := \left\{f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n\ \{0\}); \|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} < \infty\right\} \tag{2.9}$$

Di mana

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.10}$$

Dengan $A_k \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\}$ *dn* $\chi_k = \chi_{A_k}$ *merupakan fungsi karakteristik dari* A_k

Sebagimana ruang-ruang sebelumnya, ruang Herz juga merupakan perluasan dari ruang Lebesgue ketika $\alpha = 0$ dan $p = q$ yang akan ditunjukkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(0)q} \|f\chi_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\left\|f\chi_k\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

2.11 Ruang Herz Lemah

Dalam kondisi lemah, ruang Herz didefinisikan sebagai berikut dalam jurnal yang ditulis oleh (Lu, 2008).

Definisi 2.19 *Misalkan* $0 < p < q \leq \infty$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ruang Herz lemah Homogen* $w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai ruang fungsi terukur* f *sedemikian sehingga*

$$\|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \coloneqq \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.11}$$

Di mana $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|$.

Ruang Herz lemah juga merupakan perluasan dari ruang Lebesgue lemah ketika $\alpha = 0$ dan $p = q$ yang ditunjukkan sebagai berikut

$$\|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(0)p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(m_k(\gamma, f)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \, |\{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{wL^p}$$

2.12 Ruang Herz-Morrey

Ruang Herz-Morrey merupakan kombinasi dari ruang Morrey dan Herz yang dikenalkan pertama kali oleh Lu dan Xu (Xu, 2005).

Definisi 2.20 Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 <\backslash p \leq \infty, 0 < q < \infty$ dan $0 < \lambda < \infty$, ruang Herz-Morrey Homogen $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ merupakan himpunan terukur $f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\})$ yang dilengkapi norm berikut didefiniskan didefinisikan:

$$\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\}) : \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}, \tag{2.12}$$

Di mana

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \, \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.13}$$

Di mana $B_k = B(0,2) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$dan $A_k = \frac{B_k}{B_{k-1}}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$ dan $\chi_k = \chi_{A_k}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$ fungsi larakteristik dari himpunan A_k.

2.13 Ruang Herz-Morrey Lemah

Dalam kondisi lemah, ruang Herz-Morrey didefinisikan sebagai berikut (Xu, 2005).

Definisi 2.21 Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 <\backslash p \leq \infty, 0 < q < \infty$ dan $0 < \lambda < \infty$, ruang Herz-Morrey lemah Homogen $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ merupakan himpunan terukur $f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\})$ yang dilengkapi norm berikut didefiniskan didefinisikan:

$$w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\}) : \|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\} \tag{2.14}$$

Di mana

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\, mk(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.15)$$

Di mana $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_k | f(x)| > \gamma\}|$.

2.14 Kajian Keislaman

Pada bagian ini, kita akan membahas bagaimana Alquran menerangkan betapa luasnya ilmu Allah di muka bumi. Begitu juga dengan macam-macam ruang fungsi pada analisis fungsional. Terdapat banyak macam ruang fungsi yang tidak semua dapat penulis bahas pada penelitian ini karena ruang fungsi yang penulis bahas dalam penelitian ini hanya terdapat dua ruang fungsi yaitu ruang Lebesgue dan Morey dengan kondisi lemahnya masing-masing. Hal tersebut sesuai dengan firman Allah Swt dalam surah Luqman ayat 27

وَلَوْ أَنَّمَا فِي الأَرْضِ مِنْ شَجَرَةٍ أَقْلامٌ وَالْبَحْرُ يَمُدُّهُ مِنْ بَعْدِهِ سَبْعَةُ أَبْحُرٍ مَا نَفِدَتْ كَلِمَاتُ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيم

Artinya: *”Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh laut (lagi) sesudah (kering)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Mahabijaksana. (Luqman: 27)”*

Dalam ayat ini, Allah Swt. menggambarkan tentang kebesaran, keagungan serta kemuliaan-Nya. Tiada seorang pun yang dapat meliputinya serta melukiskan dan menghinggakan \textit{Asmaul Husna-Nya}, Ketinggian sifatnya, dan kesempurnaan kalimah-Nya, sebagaimana yang telah disabdakan oleh Baginda Rasulullah Saw. dalam doanya:

لاَ أُحْصِي ثَنَاءً عَلَيْكَ، أَنْتَ كَمَا أَثْنَيْتَ عَلَى نَفْسِكَ

“Aku tidak dapat menghinggakan pujian yang selayaknya kepada-Mu. *Pujian yang selayaknya bagi-*Mu *hanyalah Engkau yang mengetahuinya.”*

Jika semua pohon di bumi digunakan sebagai pena dan samudra yang ada sebagai tinta, dan tujuh lautan ditambahkan padanya untuk menuliskan firman Allah sebagai gambaran dari kebesaran dan keagungan Allah, maka pena-pena tersebut akan patah dan lautan akan kering walaupun telah ditambahkan padanya sebanyak itu pula. Penggambaran tujuh samudra hanya mengandung makna *mubalaghah* bukan sebagai makna yang membatasi, juga bukan berarti membenarkan konsep adanya tujuh samudra di bumi sebagaimana disebutkan oleh orang-orang yang mengutip berita-berita *israiliyat*, yang tidak dapat didustakan ataupun dibenarkan. Bahkan pengertian ini serupa dengan makna pada Surat al-Kahfi ayat 109:

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لِكَلِمَاتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنْفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّي وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا

Artinya: *"Katakanlah, Kalau sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)."*

Makna yang dimaksud pada lafadz bimislihi bukanlah tambahan sebanyak itu, melainkan tambahan yang semisal, kemudian yang semisalnya lagi ditambahkan tanpa henti, karena ayat dan kalimah Allah yang tak terbatas. Al-Hasan Al-Bashri mengatakan bahwa seandainya semua pepohonan yang ada di bumi dijadikan pena dan lautannya dijadikan tintanya, lalu Allah berfirman, "Sesungguhnya Aku akan melakukan anu dan sesungguhnya Aku akan melakukan anu," niscaya akan habis lautan dan patah semua penanya.

Dalam Kitab Tafsir Ibnu Katsir Juz 21 karya Ismail bin Umar Al-Quraisyi bin Katsir diterangkan bahwa ayat ini diturunkan berkenaan dengan bantahan orang-orang Yahudi.

قَالَ ابْنُ إِسْحَاقَ: حَدَّثَنِيْ ابْنُ أَبِي مُحَمَّدٍ، عَنْ سَعِيْدٍ بنِ جُبَيْرٍ أَوْ عِكْرِمَةُ، عَنْ ابنِ عَبَّاسٍ: أَنَّ أَحْبَارَ يَهُوْدَ قَالُوا لِرَسُوْلِ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ بِالمَدِيْنَةِ: يَا مُحَمَّدُ، أَرَأَيْتَ قَوْلَكَ: (وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ العِلْمِ إِلَّا قَلِيْلًا) ؟ (الإِسْرَاءِ: ٨٥)، إِيَّانَا تُرِيْدُ أَمْ قَوْمَكَ؟ فَقَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: "كَلاَّ"، فَقَالُوا: أَلَسْتَ تَتْلُو فِيْمَا جَاءَكَ: أَنَّا قَدْ أُوْتِيْنَا التَّوْرَاةَ فِيْهَا تِبْيَانٌ لِكُلِّ شَيْءٍ؟ فَقَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: "إِنَّهَا فِي عِلْمِ اللهِ قَلِيلٌ وَعِنْدَكُمْ مِنْ ذَلِكَ مَا يَكْفِيكُمْ

Ibnu Ishaq meriwayatkan dari 'Atha' bin Yasar, telah diceritakan kepadaku oleh Muhammad ibnu Abu Muhammad, dari Sa'id ibnu Jubair atau Ikrimah, dari Ibnu Abbas bahwa ketika Rosulullah berada di Makkah, turunlah surat al-Israa' ayat 85. Kemudian setelah Rosulullah berhijrah ke Madinah, pendeta-pendeta Yahudi datang kepada beliau dan berkata,"Hai Muhammad, bagaimanakah pendapatmu tentang ucpanmu: *'Dan tidaklah kamu diberi pengetahuan, melainkan sedikit'* (Al-Israa':85) Apakah perkataanmu tentang 'hanya sedikit ilmu yang Allah berikan' itu ditujukan pada kami atau kaummu? Rasulullah Saw. bersabda,"Maksud kami adalah keduanya." Mereka berkata,"Bukankah telah dijelaskan dalam al-Qur'an bahwa telah diturunkan kepada kami Taurat yang didalamnya terdapat penjelasan dari segala sesuatu?" Kemudian Rosulullah bersabda ,"Semua itu sangat sedikit dibandingkan dengan ilmu Allah." Kemudian berkenaan dengan peristiwa tersebut turunlah Surat Luqman ayat 27 untuk menegaskan bahwa tiada satu alatpun yang dapat melukiskan luasnya ilmu Allah. Diriwayatkan dari Qatadah oleh Abusy Syaikh dan Ibnu Jarir dalam kitab al-'Azhamah, bahwa orang-orang musyrik berkata,"Tidak lama lagi kalimat ini akan habis." Kemudian surat Luqman ayat 27 tersebut turun untuk menegaskan bahwa tidak akan habis keajaiban-Nya, ciptaan-Nya, ilmu-Nya, serta hikmah-hikmah-Nya (Katsir, 1342 H/ 1923 M)ai.

Selanjutnya ayat yang penulis kutip adalah ayat yang memerintahkan manusia untuk selalu berpikir. Dimana sebagai manusia yang sedikit ilmunya kita memiliki kewajiban untuk senantiasa belajar karena ilmu dimuka bumi yang tidak akan ada habisnya untuk dipelajari. Ayat ini tercantum dalam surat Ali 'Imron ayat 189-191

وَلِلَّهِ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ ۗ وَٱللَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ . إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ . الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ

Artinya:*"Kepunyaan Allah-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah Maha Perkasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka."*

Disebutkan dalam kitab Hasyiyah ash-Showi ‘ala Tafsir Jalalain (Maliky, 1241-1175 H) bahwa lafadz

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ وَيَتَفَكَّرُونَ

menjadi *badal* dari lafadz sebelumnya yaitu أُولِي الْأَلْبَاب dengan demikian dapat ditunjukkan dalam hal ini bahwa mereka yang senantiasa berpikir dan berdzikir adalah orang-orang yang berakal sempurna. Kemudian lafadz وَيَتَفَكَّرُونَ merupakan *'athof* dari lafadz يَذْكُرُونَ. Hal ini menunjukkan hal yang bersamaan atau suatu pekerjaan yang berkaitan. Terkadang adakalanya seseorang terlebih dahulu mengingat Allah Swt. kemudian tergerak untuk mentadabburi betapa kuasanya Allah dengan segala ciptaan-Nya. Terkadang seseorang juga ingin mencari bukti kebenaran, hingga akhirnya menemukan hakikat yang dicarinya, yaitu keagungan Allah SWT. Tetapi ada sebagian orang yang melakukan ini pada saat yang bersamaan, mereka memikirkannya pada saat yang sama ketika berdzikir.

Berdasarkan beberapa dalil tersebut, maka kesimpulan yang diperoleh adalah kewajiban menuntut ilmu sampai Allah sendiri yang berkehendak menghentikan nafas hidup kita. Hal ini berlaku juga pada pembahasan mengenai Ketaksamaan Minkowski pada ruang Lebesgue, Lebesgue lemah, Morrey, Morrey lemah yang akan terus dikaji dan dikembangkan sebagai bentuk pengamalan dari surat Ali 'Imron ayat 189-191 tersebut.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Hasil dan Pembahasan

Dalam analisis fungsional terdapat banyak ketaksamaan yang telah diteliti, salah satunya adalah ketaksamaan Minkowski. Ketaksamaan Minkowski merupakan ketaksamaan yang dikembangkan dari ketaksamaan segitiga. Penelitian ini dilakukan untuk membuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada beberapa ruang fungsi yaitu ruang Morrey, ruang Morrey lemah, ruang Herz, ruang Herz lemah, ruang Herz-Morrey dan ruang Herz-Morrey lemah. Pembuktian tersebut akan dijelaskan dalam teorema-teorema berikut

3.1.1 Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey

Sebelum membuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey, penulis akan terlebih dahulu mendefinisikan norm pada ruang Morrey

Definisi 3.1 *Untuk setiap* $1 \leq p \leq q < \infty$ *ruang Morrey* $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah himpunan semua fungsi* $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ *sedemikian sehingga*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Dengan $B(\alpha, r)$ menyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di α dan berjari-jari di r. Jika $p = q$.

Teorema 3.2 *Misalkan* $1 \leq p \leq q < \infty, q \leq p_1 \leq q_1 < \infty,$ *dan* $1 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$. *Sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in \mathcal{M}_{q_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in \mathcal{M}_{q_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f + g\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} + \|g\|_{\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}$$

Di mana $f + g \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$

Bukti. Diketahui $f \in \mathcal{M}_{q_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ $g \in \mathcal{M}_{q_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ $\frac{1}{,p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan diatas maka diperoleh:

$$\|f+g\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)+g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^{p_1} + |g(x)|^{p_2} dx\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{p}}}$$

$$\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}$$

$$\left[\left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^{p_1} \, dx\right) + \left(\int_{B(\alpha,r)} |g(x)|^{p_2} \, dx\right)\right]^{\boldsymbol{\frac{1}{p}}}$$

$$\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |f(x)|^{p_1} \, dx\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{p_1}}}$$

$$+ \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |g(x)|^{p_2} \, dx\right)^{\boldsymbol{\frac{1}{p_2}}}$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} + \|g\|_{\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}$$

Dengan menggunakakn ketaksamaan Minkowksi, maka syarat cukup pada ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ terbukti.

3.1.2 Syarat Cukup Ketaksaman Minkowski pada Ruang Morrey Lemah

Setelah membuktikan syarat cukup ketaksamaan Mikowski pada ruang Morrey, maka selanjutnya akan dibuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey lemah yang norm fungsinya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.3 *Untuk setiap* $1 \leq p \leq q < \infty$ *ruang Morrey lemah* $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah himpunan semua fungsi* $terukur$ $f \in \mathbb{R}^n$ *sedemikian sehingga*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Di mana $B(\alpha,r)$ merupakan bola buka yang berpusat di $\alpha \in \mathbb{R}^n$ dan berjarak $r > 0$ dengan $|\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)| > \gamma\}|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari $\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)| > \gamma\}$.

Teorema 3.4 *Misalkan* $1 \leq p \leq q < \infty, q \leq p_1 \leq q_1 < \infty,$ *dan* $1 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$. *Sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in w\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f+g\|_{w\mathcal{M}_q^p} \leq \|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} + \|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}$$

Di mana $f + g \in w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$

Bukti. Diketahui $f \in w\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ $g \in w\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ $\frac{1}{,p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan diatas, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)| + |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(|B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}\right) \\
&\quad \gamma |\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)| + |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_1}} \\
&\quad + \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \gamma |\{x \in (B(\alpha,r): |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq \|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}} + \|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski, maka syarat cukup pada ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ terbukti.

3.1.3 Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Herz

Setelah membuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey dan Morrey lemah, maka selanjutnya akan dibuktikan syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Herz yang norm fungsinya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.5. *Misalkan* $0 < p < q \leq \infty$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ruang Herz Homogen* $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Dengan $A_k := \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{k-1} \le |x| < 2^k\}$ *dn* $\chi_k = \chi_{A_k}$ *merupakan fungsi karakteristik dari* A_k

Teorema 3.6. *Misalkan* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, 0 \le p \le q < \infty, 0 \le p_1 \le q_1 < \infty$ *dan* $0 \le p_2 \le q_2 < \infty$. *Sedemikian sehingga* $\alpha_1 + \alpha_2 \le \alpha, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le \frac{1}{p}$ *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \le \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in K^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in K^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f+g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \le \|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} + \|g\|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}$$

$dimana\ f + g \in K^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$

Bukti. Diketahui bahwa $f \in K^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n), g \in K^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n), \alpha_1 + \alpha_2 \le \alpha, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le \frac{1}{p}$ dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \le \frac{1}{q}$

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan diatas, maka diperoleh

$$\|f+g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \left\|\big(f(x)+g(x)\big)\chi_k\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\big(f(x)+g(x)\big)\chi_k\right|^p dx\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\chi_k\right|^{p_1} + \left|g(x)\chi_k\right|^{p_2} dx\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^{p_1} + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^{p_2}\, dx\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^{p_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^{p_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 p_1} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^{p_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_2 p_2}\left(\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)\chi_k|^{p_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 p_1}\|f(x)\chi_k\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}+\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_2 p_2}\|g(x)\chi_k\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$=\|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}}+\|g\|_{\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski, maka syarat cukup pada ruang Herz $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ terbukti.

3.1.4 Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Herz Lemah

Sama seperti halnya ruang Morrey lemah, akan dibuktikan juga ketaksamaan Minkowski pada ruang Herz lemah yang fungsi normnya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7. *Misalkan* $0 < p < q \leq \infty$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *ruang Herz lemah Homogen* $w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai ruang fungsi terukur* f *sedemikian sehingga*

$$\|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} := \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma,f)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Di mana $m_k(\gamma,f) = |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|$.

Teorema 3.8. *Misalkan* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq p \leq q < \infty, 0 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$ *dan* $0 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$. *Sedemikian sehingga* $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f+g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq \|f\|_{w\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} + \|g\|_{w\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}$$

Di mana $f + g \in wK^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Diketahui bahwa $f \in w\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ $g \in w\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n) \alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q}$

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan diatas, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &= \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f+g)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x\in A_k: |f(x)+g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x\in A_k: |f(x)|+|g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{k\alpha_1 p_1}+2^{k\alpha_2 p_2}\right) |\{x\in A_k: |f(x)|+|g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{\gamma>0}\gamma \\
&\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{k\alpha_1 p_1}|\{x\in A_k: |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_1}{q_1}} + 2^{k\alpha_2 p_2}|\{x\in A_k: |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_2}{q_2}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 p_1} |\{x\in A_k: |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 p_1} |\{x\in A_k: |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sup_{\gamma>0}\gamma\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 p_1} m_k(\gamma, f)^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}} + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_2 p_2} m_k(\gamma, g)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \|f\|_{w\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} + \|g\|_{w\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski, maka syarat cukup pada ruang Herz Lemah $w\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}$ terbukti.

3.1.5 Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Herz-Morrey

Setelah membuktikan Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey dan Herz, selanjutnya akan dibuktikan syarat cukup pada ruang yang merupakan hasil dari kombinasi ruang Morrey dan Herz yaitu ruang Herz-Morrey dengan definisi norm sebagai berikut.

Definisi 3.9. Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$ dan $0 < \lambda < \infty$, ruang Herz-Morrey Homogen $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ merupakan himpunan terukur $f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\})$ yang dilengkapi norm berikut didefiniskan didefinisikan:

$$\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\}) : \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

Di mana

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \, \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Di mana $B_k = B(0,2) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$dan $A_k = \frac{B_k}{B_{k-1}}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$ dan $\chi_k = \chi_{A_k}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$ fungsi larakteristik dari himpunan A_k.

Teorema 3.10. *Misalkan* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \geq 1,\ 0 \leq p \leq q < \infty, 0 \leq p_1 \leq q_1 < \infty\ dan\ 0 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$. *Sedemikian sehingga* $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}\ dan\ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q}. Jika\ f \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n)\ dan\ g \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f + g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1}} + \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2}}$$

Di mana $f + g \in \mathcal{M}K_{p_1,q_1}^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n)$

Bukti. Diketahui $f \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n)\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}\ dan\ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q}$

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan diatas, maka diperoleh

$$\|f + g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left\| \big(f(x) + g(x)\big)\chi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \big(f(x) + g(x)\big)\chi_k \right|^{p} dx \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x)\chi_k \right|^{p_1} + \left| g(x)\chi_k \right|^{p_2} dx \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)\chi_k\right|^{p_1}dx+\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x)\chi_k\right|^{p_2}dx\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)\chi_k\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x)\chi_k\right|^{p_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)\chi_k\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\, 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x)\chi_k\right|^{p_2}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1}\|f(x)\chi_k\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$+2^{-k_0\lambda_2}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2}\|g(x)\chi_k\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$=\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}}+\|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski, maka syarat cukup pada ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}$ terbukti.

3.1.6 Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada ruang Herz-Morrey Lemah

Terakhir, sebagaimana ruang Morrey dan ruang Herz, juga akan dibuktikan ketaksamaan Minkowski pada ruang Herz-Morrey dalam keadaan lemah dengan definisi norm sebagai berikut.

Definisi 3.11 *Misalkan* $\alpha \in \mathbb{R}, 0 <\backslash p \leq \infty, 0 < q < \infty$ *dan* $0 < \lambda < \infty$, *ruang Herz-Morrey lemah Homogen* $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ *merupakan himpunan terukur* $f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\})$ *yang dilengkapi norm berikut didefiniskan didefinisikan:*

$$w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L_{loc}^{p}(\mathbb{R}^n/\{0\}) : \|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

Di mana

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\, mk(\gamma,f)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Di mana $m_k(\gamma,f) = |\{x \in A_k | f(x)| > \gamma\}|$.

Teorema 3.12. *Misalkan* $\alpha,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}, \lambda,\lambda_1,\lambda_2 \geq 1,\ 0 \leq p \leq q < \infty, 0 \leq p_1 \leq q_1 < \infty\ dan\ 0 \leq p_2 \leq q_2 < \infty.$ *Sedemikian sehingga* $\alpha_1+\alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1+\lambda_2 = \lambda, \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}\, dan\, \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in w\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_1,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f+g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}} + \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_1,\lambda_2}}$$

Di mana $f+g \in w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$

Bukti. Diketahui $\alpha_1+\alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1+\lambda_2 = \lambda, \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}\ dan\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q}$

Perhatikan bahwa berdasarkan persamaan diatas, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} &= \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f+g)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)|+|g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(2^{k\alpha_1 p_1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + 2^{k2p_2}\right)|\{x \in A_k : |f(x)|+|g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1}|\{x\in A_k: |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$+ \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2}|\{x\in A_k: |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} m_k(\gamma, f)^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$+ \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} m_k(\gamma, g)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}} + \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_2}_{p_2,q_2}}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski, maka syarat cukup pada ruang Herz-Morrey Lemah terbukti.

3.2 Keragaman Ruang Fungsi berkenaan dengan Luasnya Ilmu Allah Swt.

Dalam Surah Luqman ayat 27 yang artinya *"Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh laut (lagi) sesudah (kering)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Mahabijaksana."* Allah menjelaskan dengan perumpamaan yang begitu nyata tentang bagaimana luasnya Ilmu Allah di Muka bumi. Sesungguhnya perumpamaan ilmu Allah di Muka bumi hanyalah bagaikan setetes air diantara luasnya samudra. Hal ini berkenaan dengan macam-macam ruang fungsi yang ada dalam analisis fungsional. Karena keterbatasan ilmu yang dimiliki manusia, maka hanya beberapa ruang saja yang dicantumkan penulis dalam penelitian ini.

Selain pembahasan mengenai ruang fugsi, penulis juga membahas tentang ketaksamaan Minkowski yang merupakan perluasan dari konsep ketaksamaan segitiga. Di mana ketaksamaan segitiga merupakan salah satu sifat penting yang terkait dengan relasi urutan dari sifat-sifat nilai mutlak. Sebagaimana kita ketahui, pada ayat yang penulis kutip diatas, telah dijelaskan bahwa kekuasaan dan keluasan ilmu Allah bersifat mutlak, artinya tidak ada yang dapat menandingi kekuasaan dan keluasan ilmu tersebut. Hikmah yang diperoleh dari penjelasan ayat al-Qur'an tersebut adalah betapa luasnya ilmu Allah di muka bumi ini. Termasuk pembahasan mengenai ketaksamaan dan ruang fungsi pada analisis fungsional juga sangat banyak. Kemudian dalam surat Ali 'Imron ayat 189-191 yang artinya *”Kepunyaan Allah-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah Maha Perkasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): “Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka."* juga diterangkan bahwa tanda-tanda orang berakal ialah senantiasa berdzikir serta berfikir untuk mentadabburi Keagungan Allah dan segala ciptaan-Nya. Oleh karena itu, kita sebagai manusia hendaknya memenuhi tugas sebagai kholifah dibumi untuk senantiasa berfikir dan mengembangkan keragaman ilmu pengetahuan yang ada di muka bumi.

BAB IV
PENUTUP

4.2 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian yang telah dibahas pada bab sebelumnya, penulis dapat menyimpulkan bahwa setelah mengaplikasikan ketaksamaan Minkowski pada norm yang telah didefinisikan pada beberapa ruang yang telah dicantumkan dalam pembahasan, maka terbukti syarat cukup ketaksamaan Minkowski pada ruang Morrey, Herz, Herz-Morrey beserta fungsi dalam kondisi lemahnya.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, Penulis menyarankan penggunaan ruang fungsi yang lain, seperti perumuman ruang Morrey dan berbagai macam ruang yang lainnya. Selain itu juga bisa dilakukan penelitian untuk syarat perlu ketaksamaan Minkowski di ruang fungsi sehingga dapat diketahui nilai ekuivalen dari kedua syarat tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2017). *Model Integrasi Matematika dan al-Qur'an serta praktik pembekajarannya.* Bukittinggi: Makalah Seminar Nasional.

Ghozali, M. (2010). *Analisis Real 1.* Bandung: Pusat Perbukaan Departemen Pendidikan.

Grafakos, L. (2008). *Classical Fourier Analysis Second Edition.* New York: Springer.

Hardy, J. E. (1934). *Inequalities.* London: Cambridge University Press.

Hutnik, O. (2000). Some integral inequalities of Holder and Minkowski. *Mathematics Subject Classication*, 17-32.

Kalton, N. (2003). *Quasi-Banach Spaces. In: Handbook of The Geometry of.* United States of America: Elsevier Science.

Katsir, I. b.-Q. (1342 H/ 1923 M). *Tafsir al-Qur'an al-'Adzim.* Kairo.

Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application.* New York: John.

Li, C. W. (2008). On The Triangle Inequality in Quasi-Banach Spaces. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 41.

Lu, D. Y. (2008). *Herz Type Spaces and Their Application.* Beijing: Science Press.

Maligranda, L. (1995). A Simple Proof of the Holder and the Minkowski Inequality. *Mathematical Association of America*, 256-259.

Maliky, A. B. (1241-1175 H). *Hasyiyatu ash Showi 'Ala Tafsir Jalalain.* Saudi Arabiyah: Bairut: Darul Kutub al ‘Ilmiyah.

Mu'tazili, A. (2019). *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang.* Institut Teknologi Bandung: Tesis Program Magister.

Rafeiro, R. E. (2005). *Elementary Linear Algebra.* Canada: Wiley.

Rorres, H. A. (2005). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces.* New York: Springer.

Royden, P. F. (2010). *Real Analysis Fourth Edition.* Republic of China: China Machine Press.

Shirali, H. L. (2006). *Metric Spaces.* United States of America: Springer.

Wu, H. W. (2016). Anisotropic Herz-Morrey Spaces with Variable Exponents. *Khayyam Journal of Mathematics*, 177-187.

Xu, S. L. (2005). Boundedness of Rough Singular Integral Operators on tThe Homogeneous Morrey-Herz Spaces. *Hokkaido Mathematical Journal*, 299–314.

Youngson, B. R. (2008). *Normed Spaces in: Linear Functional.* London: Springer.

RIWAYAT HIDUP

Sintya Ulandari, lahir di Pulau Dewata tepatnya di Kuta pada tanggal 6 April 1999. Ia merupakan Putri bungsu bapak H. Farizal Afapi dan Hj. Subaidah. Perempuan yang akrab disapa Bulan ini menempuh pedidikan formal mulai dari TK Wipara yang lulus pada tahun 2005, dilanjutkan dengan pendidikan dasar di SDN No. 2 Tuban hingga lulus pada tahun 2011. Kemudian dia melanjutkan pendidikan formalnya di Pondok Pesantren Salafiyah Syafi'iyah Sukorejo Situbondo yaitu di SMP Ibrahimy 3 Sukorejo dan SMA Ibrahimy Sukorejo. Selain menempuh pendidikan formal, Bulan juga pendidikan non-formal pada tahun yang sama di Madrasatul Qur'an Salafiyah.

Setelah tamat dari Pondok Pesantren, Bulan melanjutkan pendidikannya di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Di kampusnya, Bulan mengikuti beberapa organisasi diantarnya HTQ UIN Malang, JDFI UIN Malang, serta menjadi bagian dari Musyrifah Ma’had Sunan Ampel Al-Aly tepatnya di Mabna BTQ (Bait Tahfidz al-Qur’an). Sejak kecil Bulan sudah aktif mengikuti lomba seni di Bidang tarik suara. Diantara lomba yang pernah dijuarai adalah Juara 3 Lomba Tartil dalam rangka MTQ tingkat Provinsi Bali, Juara 3 Lomba MHQ 1 Juz dan Tilawah dalam rangka MTQ tingkat Provinsi Bali, juara 2 Lomba MHQ 5 Juz dan Tilawah dalam rangka 1 abad pondok Pesantren Salafiyah Syafi’iyah tingkat Pondok Pesantren se-Jawa Timur, Juara 1 Lomba Festival Al-Banjari tingkat Mahasiswa Nasional di Universitas Airlangga, dan Juara 3 Lomba MHQ 30 Juz dalam rangka STQH Tingkat Kabupaten Badung.

KEMENTRIAN RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp/Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sintya Ulandari

NIM : 17610011

Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika

Judul Skripsi : Syarat Cukup Ketaksamaan Minkowski pada Ruang Morrey, Herz, dan Herz-Morrey

Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M. Si.

Pembimbing II : Erna Herawati, M. Pd.

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Maret 2021	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	18 Maret 2021	Konsultasi Bab I, II & III	2.
3.	21 Maret 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	26 Maret 2021	ACC Bab 1 & Bab II	4.
5.	13 April 2021	Konsultasi Bab III	5.
6.	23 April 2021	Pembenahan Bab III	6.
7.	26 April 2021	Konsultasi Bab IV	7.
8.	5 Mei 2021	Konsultasi Abstrak	8.
9.	10 Juni 2021	ACC Kajian Keagamaan	9.
10.	11 Juni 2021	ACC Keseluruhan	10.
11.	14 Juni 2021	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 27 Juni 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M. Si.
NIP. 19650414 200312 1 001