SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DI RUANG HERZ-MORREY

SKRIPSI

OLEH
AMELIA NURIL FAJRIYANI
NIM. 17610055

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DI RUANG HERZ-MORREY

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Amelia Nuril Fajriyani
NIM. 17610055

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DI RUANG HERZ-MORREY

SKRIPSI

Oleh
Amelia Nuril Fajriyani
NIM. 17610055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 11 Juni 2021

Pembimbing I,

Dr. Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Pembimbing II,

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SYARAT CUKUP KETAKSAMAAN HÖLDER DI RUANG HERZ-MORREY

SKRIPSI

Oleh
Amelia Nuril Fajriyani
NIM. 17610055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Juni 2021

Penguji Utama	: Prof. Dr. Turmudzi, M.Si., Ph.D.	…………………………
Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	…………………………
Sekretaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	…………………………
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	…………………………

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Amelia Nuril Fajriyani

NIM : 17610055

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Herz-Morrey

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2021
Yang membuat pernyataan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL D9821AJX105942068

Amelia Nuril Fajriyani
NIM. 17610055

MOTO

Ibu, Ibu, Ibu, dan Ayah

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah Zamroni dan Ibu Luluk, yang selalu menjadi tempat pulang penulis dan alasan untuk berjuang menggapai mimpi-mimpi dan kesuksesan. Mereka-lah yang senantiasa mencurahkan kasih dan sayang tanpa mengharapkan balas budi. Adik tercinta, M. Sayyid Habib Al Kahfi yang cita-citanya sungguh mulia, serta keluarga yang selalu mengirimkan dukungan, semangat serta doa terbaik kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur kehadirat Allah swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Herz-Morrey" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah membimbing manusia dari zaman jahiliah menuju zaman islamiah.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak menerima bimbingan, masukan, dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu melalui halaman ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan banyak ilmu, arahan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin, M. A selaku Dosen Pembimbing II yang banyak memberikan ilmu, arahan dan masukan kepada penulis.
6. Prof. Dr. Turmudi, M.Si, P.Hd dan Dr. Elly Susanti, M.Sc selaku Dosen Penguji yang banyak memberikan saran dan masukan kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama jajaran dosen, terima kasih atas pengalaman perkuliahan yang luar biasa.
8. Ayah dan Ibu yang selalu mengirimkan doa terbaik kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika angkatan 2017.

10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah ikut serta membantu menyelesaikan penyusunan skripsi, baik dukungan moril maupun materil.

Penulis sadar tidak bisa memberikan apapun selain ucapan terima kasih dan doa semoga Allah membalas kebaikan jasa dengan balasan yang sebaik-baiknya. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat, baik bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 Juni 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\mathbb{R}$	:	Himpunan bilangan Riil
$\mathbb{R}^n$	:	Himpunan bilangan Riil berdimensi n
$\mathbb{Z}$	:	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	:	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{K}$	:	Himpunan bilangan kompak
$\mathbb{C}$	:	Himpunan bilangan kompleks
E	:	Himpunan terukur
$x \in \mathbb{R}$	:	x anggota $\mathbb{R}$
$f(x)$	:	Fungsi terhadap x
$f^{-1}(x)$	:	Invers fungsi atau balikan fungsi terhadap x
$\forall x$	:	Untuk setiap unsur x
$\exists x$	:	Terdapat unsur x
(f)	:	Barisan fungsi f
$\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$	:	Himpunan yang terdiri atas unsur $f_1, f_2, \dots, f_n$
χ	:	Fungsi karakteristik
$\lVert\cdot\rVert$	:	Norm
$\sim$	:	Ekuivalen
$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$	:	Gabungan $a_1 \cup a_2 \cup \dots$
$\bigcap_{i=1}^{\infty} a_i$	:	Irisan $a_1 \cap a_2 \cap \dots$
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	:	Penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$B(a, r)$	:	Bola buka dengan pusat a dan jari-jari r
$\sup$	:	Batas atas terkecil

inf	:	Batas bawah terbesar
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Lebesgue pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$wL^p(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Lebesgue lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Morrey pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Morrey lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Herz pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Herz lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Herz-Morrey pada himpunan bilangan Riil dimensi-n
$w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	:	Ruang Herz-Morrey lemah pada himpunan bilangan Riil dimensi-n

ABSTRAK

Fajriyani, Amelia Nuril. 2021. **Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Herz-Morrey.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Ketaksamaan Hölder, Ruang Herz-Morrey, Syarat Cukup

Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu ketaksamaan dasar yang ada di analisis fungsional. Ketaksamaan ini banyak digunakan untuk membuktikan ketaksamaan-ketaksamaan lain. Pada awalnya, ketaksamaan Hölder diperkenalkan diaplikasikan di ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue adalah ruang Banach di mana merupakan perumuman dari ruang vektor yang memiliki norma dan lengkap. Ruang Lebesgue merupakan ruang fungsi. Sedangkan ruang fungsi sendiri merupakan ruang vektor yang unsur-unsur di dalamnya merupakan fungsi kontinu. Beragam ruang fungsi telah ditemukan dan dikembangkan dari ruang Lebesgue. Tidak hanya itu, peneliti juga mengolaborasikan beberapa karakteristik ruang fungsi menjadi definisi suatu ruang baru, salah satunya adalah ruang Herz-Morrey di mana ruang ini merupakan kolaborasi antara ruang Herz dan ruang Morrey. Pada penelitian ini dilakukan pengembangan pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey beserta ruang lemahnya yaitu ruang Herz-Morrey lemah. Karena akan ditunjukkan di ruang Herz-Morrey di mana merupakan ruang fungsi maka ketaksamaan Hölder yang digunakan adalah ketaksamaan Hölder integral. Penelitian ini menunjukkan syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah berdasarkan karakteristik dari ruang tersebut.

ABSTRACT

Fajriyani, Amelia Nuril. 2021. **Sufficient Condition of Hölder's Inequality in Herz-Morrey Space.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Hölder's Inequality, Herz-Morrey Space, Sufficient Condition

Hölder's Inequality is one of fundamental inequality in functional analysis. This inequality used for proofing other inequality. Firstly, Hölder's Inequality was applied in Lebesgue space. Lebesgue space is a Banach space which is generalized of vector space which has norm and complete. Lebesgue space is a function space. Meanwhile a function space is a vector space which their elements is continuous functions. Many kinds of function spaces found and developed from Lebesgue space. Not only that, researcher collaborate some characteristics of function space become new definition of new space, one of them is Herz-Morrey space which is this space is collaboration between Herz space and Morrey space. In this research, the application development of Hölder's Inequality in Herz-Morrey space and its weak space, namely weak Herz-Morrey, is done. Since in which space Herz-Morrey space is function space, so Hölder's Inequality integral is used. This research show sufficient condition of Hölder's Inequality in Herz-Morrey space and weak Herz-Morrey space based on characteristic of the space.

ملخص

الفجريان, أملية نور. ٢٠٢١. **شروط كافية عدم المساواة Hölder في الفضا هيرز–موري**. بحث جامعي. قسم الرياضيات. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشروف : (١)الدكتور. هيرالرحمن، الماجستير. (٢) أحمد نصح الدين، الماجستير.

الكلمة المفتاحية: عدم المساواة Hölder ، في الفضاء هيرز –موري ، شروط كافية

عدم المساواة Hölder هي واحدة من أوجه عدم المساواة الأساسية في التحليل الوظيفي. غالبًا ما يستخدم هذا التفاوت لإثبات عدم المساواة الأخرى. في البداية ، تم تقديم عدم المساواة Hölder لتطبيقها على مساحة لبسغوي. الفضاء لبسغوي هي الفضاء بناح وهي عبارة عن تعميم للفضاء متجه لها معيار وكامل. الفضاء لبسغوي هي الفضاء وظيفية. بينما الفضاء الوظيفة نفسها عبارة عن الفضاء متجهية عناصرها وظائف مستمرة. تم اكتشاف العديد من قاعات المناسبات وتطويرها من فضاء لبسغوي. ليس ذلك فحسب ، فقد تعاون الباحثون أيضًا في العديد من خصائص الفضاء الوظيفة لتحديد مساحة جديدة ، إحداها هي الفضاء هيرز–موري حيث هذه الفضاء عبارة عن تعاون بين فضاء هيرز–موري و فضاء موري. في هذه الدراسة ،تم تطوير تطبيق عدم المساواة Hölder في فضاء هيرز–موري ومساحتها الضعيفة ، وهي الفضاء هيرز–موري الضعيفة. نظرًا لأنه سيتم افضاء في مساحة هيرتس موري ، وهي مساحة دالة ، فإن متباينة هيلدر المستخدمة هي عدم مساواة هولدر متكاملة. تُظهر هذه الدراسة أن الشرط الكافي لعدم المساواة Hölder في الفضاء هيرز–موري و هيرز–موري ضعيف بناءً على خصائص الفضاء.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang fungsi didefinisikan sebagai ruang vektor yang unsur-unsur di dalamnya merupakan fungsi kontinu. Ruang fungsi merupakan ruang Banach dengan karakteristik tertentu. Sedangkan ruang Banach sendiri adalah ruang vektor yang memiliki norm (pemetaan) dan lengkap. Berbagai macam ruang fungsi telah ditemukan dan akan terus dikembangkan sesuai dengan karakteristiknya masing-masing. Salah satu ruang fungsi atas himpunan terukur dengan norm tertentu adalah ruang L^p (Amalina, 2018). Ruang L^p atau biasa dikenal dengan ruang Lebesgue pertama kali diperkenalkan oleh Henri Lebesgue, namun menurut pendapat lain, ruang ini pertama kali dikenalkan oleh Frigyes Riesz pada tahun 1910. Ruang Lebesgue sendiri merupakan ruang Banach dengan $1 \leq p \leq \infty$ (Royden dan Fitzpatrick, 2010). Penemuan ruang Lebesgue ternyata masih menyisakan beberapa kondisi pada fungsi yang tidak terintegralkan secara Lebesgue. Oleh karena itu, ditemukan pengembangan dari ruang Lebesgue dengan mendefinisikan suatu ruang baru yang disebut ruang Lebesgue lemah atau wL^p (Amalina, 2018). Ruang Lebesgue adalah ruang fungsi dasar yang kemudian dikembangkan menjadi ruang-ruang lain.

Setelah ditemukan ruang Lebesgue, penelitian selanjutnya dilakukan pada tahun 1938 oleh C. B. Morrey yang memperkenalkan salah satu perumuman dari ruang Lebesgue, yaitu ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q < \infty$ (Mu'tazili, 2019). Sedangkan ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_q^p$ merupakan perumuman dari ruang Lebesgue lemah. Akan tetapi ruang Morrey lemah bukanlah ruang Banach namun ruang quasi-Banach sebagaimana ruang Lebesgue lemah. Keberadaan ruang Morrey lemah karena terdapat fungsi-fungsi yang tidak terpenuhi di ruang Morrey.

Pada tahun 1968, Herz juga mendefinisikan salah satu ruang yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue dengan $0 < p, q \leq \infty$ dan tambahan unsur lain yaitu $\alpha \in \mathbb{R}$, yang kemudian disebut dengan ruang Herz $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$. Begitu juga dengan ruang Herz lemah $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ yang merupakan perluasan dari ruang Lebesgue lemah. Tidak hanya berhenti sampai di situ, para ahli matematika juga mengolaborasikan beberapa definisi ruang yang ada sehingga menghasilkan definisi ruang yang baru. Seperti halnya yang dikemukakan oleh Lu dan Xu (2005) yaitu ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ yang merupakan kombinasi antara ruang Herz dan ruang Morrey beserta ruang lemahnya yaitu ruang Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$. Lu dan Xu (2005) mengombinasikan karakteristik kedua ruang tersebut menjadi suatu karakteristik baru.

Dalam ilmu matematika, utamanya analisis fungsional, berbagai persamaan maupun ketaksamaan diperkenalkan untuk dipelajari. Ketaksamaan memiliki peran yang penting dalam bidang analisis, sering digunakan untuk menurunkan perkiraan (estimasi) maupun mengontrol eror. Salah satu ketaksamaan dasar yang sering menjadi topik penelitian adalah ketaksamaan Hölder, di mana ketaksamaan ini digunakan untuk membuktikan ketaksamaan-ketaksamaan lain. Ketaksamaan Hölder sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 (Li dkk, 2018). Terdapat 3 macam ketaksamaan Hölder, di antaranya ketaksamaan Hölder *summation*, ketaksamaan Hölder integral, dan perumuman ketaksamaan Hölder.

Ketaksamaan Hölder pertama kali diaplikasikan di ruang Lebesgue menggunakan Hölder konjugat sebagai syarat cukup untuk membuktikannya. Kemudian seiring berjalannya waktu, penelitian-penelitian tentang ketaksamaan Hölder semakin banyak dijumpai dan menghasilkan penemuan-penemuan baru dengan memodifikasi ketaksamaan tersebut. Seperti yang dilakukan oleh Ifronika dkk. pada tahun 2018, penelitian berjudul "*Generalized Hölder's Inequality in Morrey Space*" ini menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu perumuman ketaksamaan Hölder di ruang Morrey. Dari penelitian tersebut dapat diketahui bahwa ketaksamaan Hölder dapat diaplikasikan di ruang fungsi dengan asumsi bahwa ruang fungsi yang digunakan adalah ruang Banach.

Kemudian penulis terinspirasi untuk melakukan penelitian menggunakan ketaksamaan Hölder. Adapun penelitian yang dilakukan adalah mengaplikasikan ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey beserta ruang lemahnya yaitu ruang Herz-Morrey lemah. Ruang Herz-Morrey merupakan salah satu ruang yang sedang banyak digunakan sebagai objek penelitian, seperti penelitian "*Inclusion Properties of The Homogeneous Herz-Morrey*" yang dilakukan oleh Rahman (2020), "*Fractional Integral on Herz-Morrey Spaces with Variabel Exponent*" oleh Izuki (2010), dan masih banyak lagi. Namun untuk pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang tersebut masih belum dilakukan. Sehingga dirasa perlu untuk dilakukan penelitian tersebut sebagai pengembangan penelitian tentang ketaksamaan Hölder maupun ruang Herz-Morrey sendiri. Oleh karena menggunakan objek ruang Herz-Morrey di mana merupakan ruang fungsi, maka ketaksamaan Hölder yang digunakan adalah ketaksamaan Hölder integral atas fungsi kontinu. Penelitian ini akan menunjukkan syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah.

Pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey sama halnya dengan patuh terhadap aturan yang telah didefinisikan di ruang tersebut. Begitu juga dalam Islam yang mengajarkan kepada orang-orang beriman untuk menaati perintah sebagaimana tertuang di Surah An-Nisa' ayat 59 yang berbunyi:

فَإِن تَنَٰزَعْتُمْ فِى شَىْءٍ فَرُدُّوهُ يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ أَطِيعُوا۟ ٱللَّهَ وَأَطِيعُوا۟ ٱلرَّسُولَ وَأُو۟لِى ٱلْأَمْرِ مِنكُمْ

إِلَى ٱللَّهِ وَٱلرَّسُولِ إِن كُنتُمْ تُؤْمِنُونَ بِٱللَّهِ وَٱلْيَوْمِ ٱلْءَاخِرِ ذَٰلِكَ خَيْرٌ وَأَحْسَنُ تَأْوِيلً

"Hai orang-orang yang beriman, taatilah Allah dan taatilah Rasul (Nya), dan Ulil Amri di antara kamu. Kemudian jika kamu berlainan pendapat tentang sesuatu, maka kembalikanlah ia kepada Allah (Al-Qur'an) dan Rasul (sunnahnya), jika kamu benar-benar beriman kepada Allah dan hari kemudian. Yang demikian itu lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya."

Surah ini memerintahkan manusia untuk taat kepada Allah, Rasul, dan Ulil Amri. Terkhusus ketaatan terhadap Ulil Amri harus dilandaskan dengan syariat Islam dan tidak mengarah kepada kemaksiatan dan kemungkaran (Ar-Rifa'i, 1999). Sama halnya dengan topik penelitian yang diangkat oleh penulis, pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey juga harus selalu dilandasi dengan dasar-dasar ilmu matematika.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian berdasarkan rumusan masalah tersebut adalah untuk mengetahui syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai ilmu baru dan bahan kajian baru bagi peneliti selanjutnya yang berkaitan dengan ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan uraian masalah yang disebutkan, penulis merasa perlu untuk membatasi masalah agar pembahasan tidak menyimpang dan meluas. Adapun batasan masalahnya sebagai berikut:

1. Dalam menunjukkan keberlakukan ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah, digunakan proses pembuktian ruang Banach dan ruang quasi-Banach terlebih dahulu.
2. Ketaksamaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah ketaksamaan Hölder integral.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur (*literature study*) atau kepustakaan. Metode ini berdasarkan pada informasi yang diperoleh pada buku, jurnal, artikel dan sumber-sumber lain yang berkaitan dengan rumusan masalah. Kegiatan yang dilakukan meliputi pengumpulan data kepustakaan, membaca dan menelaah, serta menganalisa dan mengolah bahan penelitian. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk membuktikan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah adalah sebagai berikut

1. Menunjukkan bahwa ruang Herz-Morrey adalah ruang Banach dan ruang Herz-Morrey lemah adalah ruang quasi-Banach.

2. Menunjukkan keberlakuan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah menggunakan definisi norm pada ruang-ruang tersebut di mana definisi normnya dituliskan oleh Lu dan Xu (2005) dalam jurnalnya yang berjudul "*Boundedness of Rough Singular Integral Operators on The Homogeneous Morrey-Herz Spaces*".
3. Menarik kesimpulan atas hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas empat bab, yaitu

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka di sini akan memaparkan teori-teori yang menjadi landasan dalam menyelesaikan masalah, meliputi ukuran luar, himpunan terukur, fungsi terukur, ketaksamaan Hölder, ruang vektor, ruang bernorma, ruang Banach, ruang fungsi, serta kajian keislaman yang terkait dengan penelitian.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dibahas tentang pembuktian-pembuktian teorema ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan analogi pengaplikasian ketaksamaan Hölder dengan konsep menaati perintah.

Bab IV Penutup

Penutup tersusun atas kesimpulan hasil peneilitan yang telah dilakukan serta saran-saran yang bersesuaian.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ukuran Luar

Konsep ukuran luar berangkat dari konsep ukuran, di mana dilakukan pemartisian pada suatu himpunan X menjadi himpunan-himpunan bagian yang terukur. Dalam pemartisian domain dari suatu fungsi, diperlukan suatu fungsi himpunan yang disebut ukuran luar pada himpunan X. Ukuran luar ini digunakan untuk mengetahui apakah suatu himpunan bagian dari X terukur atau tidak (Fatihah dkk., 2020).

Definisi 2.1. (Royden dan Fitzpatrick, 2010) *Suatu ukuran luar yang dinotasikan dengan m^* merupakan fungsi himpunan untuk sembarang himpunan, dan khususnya untuk sembarang interval. Ukuran luar untuk interval adalah panjangnya sedangkan untuk himpunan, jika E merupakan himpunan terukur dan $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah koleksi sembarang himpunan yang terukur, maka*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k), \tag{2.1}$$

di mana ukuran luar merupakan countably subadditive.

2.2 Himpunan Terukur

Himpunan terukur didefinisikan oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) sebagai berikut.

Definisi 2.2. *Suatu himpunan E dikatakan terukur jika untuk sembarang himpunan A memenuhi*

$$m\hat{}* \ (A) = m\hat{}* \ (A \cap E) + m\hat{}* \ (A \cap E\hat{}C\ ), \tag{2.2}$$

di mana m^* merupakan ukuran luar.

2.3 Fungsi Terukur

Fungsi merupakan suatu pemetaan yang memetakan antara satu himpunan yang disebut sebagai domain kepada himpunan lain yang disebut sebagai kodomain. Sedangkan fungsi terukur merupakan fungsi yang berada di himpunan terukur dan memenuhi syarat yang ditunjukkan oleh proposisi berikut.

Proposisi 2.3. (Royden dan Fitzpatrick, 2010) *Misalkan f adalah fungsi terukur pada domain E dan E terukur Lebesgue. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:*

1. $\forall b \in \mathbb{R}, \{x \in E \mid f(x) > c\}\ fungsi\ terukur.$
2. $\forall b \in \mathbb{R}, \{x \in E \mid f(x) \geq c\}\ fungsi\ terukur.$
3. $\forall b \in \mathbb{R}, \{x \in E \mid f(x) < c\}\ fungsi\ terukur.$
4. $\forall b \in \mathbb{R}, \{x \in E \mid f(x) \leq c\}\ fungsi\ terukur.$

Sifat-sifat tersebut berarti bahwa untuk setiap $c \in \mathbb{R}$, maka

$$\{x \in E \mid f(x) = c\}\ terukur. \tag{2.3}$$

Bukti. Himpunan (1) dan (4) saling komplemen di E sama seperti himpunan (2) dan (3). Komplemen dari suatu himpunan terukur adalah terukur, maka (1) dan (4) ekuivalen, begitu juga dengan (2) dan (3). Jadi cukup ditunjukkan bahwa (1) ⟺ (2) yang juga sama halnya dengan (3) ⟺ (4).

- Jika (1) maka (2)

  Perhatikan bahwa,

  $$\{x \in E \mid f(x) \geq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E \mid f(x) > c - \frac{1}{k}\right\},$$

  dikarenakan $c - \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, maka $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ fungsi terukur. Selanjutnya, irisannya juga fungsi terukur. Jadi, $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ fungsi terukur.

- Jika (2) maka (1)

  Perhatikan bahwa,

  $$\{x \in E \mid f(x) > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in E \mid f(x) \geq c + \frac{1}{k}\right\},$$

  dikarenakan $c + \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, maka $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ fungsi terukur. Sehingga gabungannya juga fungsi terukur. Jadi, $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ fungsi terukur.

Pernyataan (1)-(4) ekuivalen, sehingga keempat pernyataan tersebut memenuhi. Jika $c \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in E \mid f(x) = c\} = \{x \in E \mid f(x) \geq c\} \cap \{x \in E \mid f(x) > c\}$$

maka $f^{-1}(c)$ fungsi terukur karena irisan dari dua himpunan terukur. Di sisi lain, jika $c = \infty$,

$$\{x \in E \mid f(x) = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) > k\}$$

maka $f^{-1}(\infty)$ fungsi terukur karena irisan berhingga dari himpunan terukur. □

Contoh 2.1. (Amalina, 2018) Suatu himpunan terukur yang didefinisikan sebagai $X = (0, 1)$ dan fungsi terukur $f : X \to \mathbb{R}$ yang didefinisakan dengan

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

2.4 Ketaksamaan Hölder

Sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu terkait bilangan konjugat.

Definisi 2.4. (Royden dan Fitzpatrick, 2010) *Konjugat dari suatu bilangan* $p \in (1, \infty)$ *adalah* $q = \frac{p}{p-1}$, *di mana untuk* $q \in (1, \infty)$ *berlaku*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.4}$$

Konjugat dari 1 *didefinisikan* ∞ *dan konjugat dari* ∞ *didefinisikan* 1.

Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu ketaksamaan mendasar di analisis fungsional, utamanya di ruang L^p. Pada dasarnya, ketaksamaan Hölder memiliki beragam kondisi, namun dalam penelitian ini digunakan ketaksamaan Hölder integral. Ketaksamaan Hölder sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 (Li dkk., 2018).

Proposisi 2.5. (Kantorovich dan Akilov, 1982) *Misalkan* $f(x)$ *dan* $g(x)$ *merupakan fungsi terukur pada himpunan terukur* (X, μ). *Maka diperoleh ketaksamaan*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.5}$$

di mana $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bukti. Pertama, asumsikan bahwa

$$0 < \alpha^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu < \infty, \quad 0 < \beta^q = \int_X |g(x)|^q \, d\mu < \infty,$$

karena ketaksamaan tersebut akan terbukti trivial jika salah satu dari integral tersebut bernilai nol atau tak hingga. Kemudian misalkan

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\alpha} \quad \text{dan} \quad g'(x) = \frac{g(x)}{\beta}.$$

Untuk setiap $x \in X$ diperoleh $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (bilangan konjugat), dan diperoleh

$$|f'(x)g'(x)| \leq \frac{|f'(x)|^p}{p} + \frac{|g'(x)|^q}{q},$$

di mana ketika diintegralkan diperoleh

$$\int_X |f'(x)g'(x)| d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X |f'(x)|^p \, d\mu + \frac{1}{q}\int_X |g'(x)|^q \, d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

sehingga

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu \leq \alpha\beta.$$

□

2.5 Ruang Vektor

Definisi 2.6. (Anton dan Rorres, 2014) *Misalkan A sembarang himpunan tak kosong dengan 2 operasi yang didefinisikan yaitu penjumlahan dan perkalian dengan suatu bilangan yang disebut skalar. Penjumlahan yang dimaksud adalah untuk mengelompokkan sebuah aturan dengan setiap pasangan elemen $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ di A yang mengandung elemen $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, disebut penjumlahan dari $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$; sedangkan perkalian skalar yang dimaksud adalah untuk mengelompokkan setiap skalar r dan setiap elemen $\boldsymbol{a}$ di A yang mengandung elemen $r\boldsymbol{a}$, disebut perkalian skalar $\boldsymbol{a}$ oleh r. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh setiap elemen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ di A dan semua skalar r dan s, maka A disebut ruang vektor dan elemen di A disebut vektor:*

1. *Jika $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ elemen di A, maka $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ di A.*
2. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.
3. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

4. *Terdapat elemen* $0 \in A$ *yang disebut vektor nol terhadap* A *sedemikian sehingga* $0 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$ *, untuk setiap* $\boldsymbol{a} \in A$.
5. *Untuk setiap* $\boldsymbol{a} \in A,$ *terdapat elemen* $-\boldsymbol{a}$ *di* A *yang disebut negatif dari* $\boldsymbol{a}$ *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = 0$.
6. *Jika* r *sembarang skalar dan* $\boldsymbol{a}$ *sembarang elemen di* $A,$ *maka* $r\boldsymbol{a}$ *di* A.
7. $r(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = r\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{b}$.
8. $(r + s)\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$.
9. $r(s\boldsymbol{a}) = (rs)(\boldsymbol{a})$.
10. $1\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Aksioma 1-5 *merupakan sifat grup komutatif terhadap penjumlahan sedangkan aksioma* 6-10 *merupakan sifat dengan operasi perkalian skalar.*

Sembarang himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan perkalian sendiri disebut dengan lapangan, yang biasa dinotasikan dengan F.

Contoh 2.2. (Lestari, 2012) $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar.

Bukti. Ambil sembarang $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Tertutup terhadap penjumlahan,

$$(m_1, n_1), +(m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2) \in \mathbb{R}^2$$

2. Bersifat komutatif penjumlahan,

$$\begin{aligned}(m_1, n_1) + (m_2, n_2) &= (m_1 + m_2, n_1 + n_2)\\ &= (m_2 + m_1, n_2 + n_1)\\ &= (m_2, n_2) + (m_1, n_1)\end{aligned}$$

3. Bersifat asosiatif penjumlahan,

$$\begin{aligned}[(m_1, n_1) + (m_2, n_2)] + (m_3, n_3) &= (m_1 + m_2, n_1 + n_2) + (m_3, n_3)\\ &= (m_1 + m_2 + m_3, n_1 + n_2 + n_3)\\ &= (m_1, n_1) + (m_2 + m_3, n_2 + n_3)\\ &= (m_1, n_1) + [(m_2, n_2) + (m_3, n_3)]\end{aligned}$$

4. Memiliki identitas penjumlahan,

   $\exists \bar{0} \in \mathbb{R}^2, \forall (m_1, n_1)$ berlaku $(m_1, n_1) + \bar{0} = (m_1, n_1)$

$$\Leftrightarrow \bar{0} = (m_1, n_1) - (m_1, n_1)$$
$$= (m_1 - m_1, n_1 - n_1)$$
$$= (0, 0)$$

maka terdapat $\bar{0} = (0, 0)$ sehingga $(m_1, n_1) + \bar{0} = (m_1, n_1)$.

5. Memiliki elemen invers,

$\forall (m_1, n_1), \exists p \in \mathbb{R}^2$ berlaku $(m_1, n_1) + p = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow (m_1, n_1) + p = \bar{0}$$
$$p = (0, 0) - (m_1, n_1)$$
$$= (0 - m_1, 0 - n_1)$$
$$= (-m_1, -n_1)$$

maka, $\forall (m_1, n_1), \exists (-m_1, -n_1)$ berlaku $(m_1, n_1) + (-m_1, -n_1) = \bar{0}$.

6. Tertutup terhadap perkalian skalar,

$$\alpha(m_1, n_1) = (\alpha m_1, \alpha n_1) \in \mathbb{R}^2$$

7. Bersifat distributif,

$$(\alpha + \beta)(m_1, n_1) = [(\alpha + \beta)m_1, (\alpha + \beta)n_1]$$
$$= (\alpha m_1 + \beta m_1, \alpha n_1 + \beta n_1)$$
$$= (\alpha m_1, \alpha n_1) + (\beta m_1, \beta n_1)$$
$$= \alpha(m_1, n_1) + \beta(m_1, n_1)$$

8. Bersifat distributif,

$$\alpha[(m_1, n_1) + (m_2, n_2)] = \alpha(m_1 + m_2, n_1 + n_2)$$
$$= (\alpha m_1 + \alpha m_2, \alpha n_1 + \alpha n_2)$$
$$= (\alpha m_1, \alpha n_1) + (\alpha m_2, \alpha n_2)$$
$$= \alpha(m_1, n_1) + \alpha(m_2, n_2)$$

9. Bersifat asosiatif terhadap perkalian skalar,

$$\alpha[\beta(m_1, n_1)] = \alpha(\beta m_1, \beta n_1)$$
$$= (\alpha\beta m_1, \alpha\beta n_1)$$
$$= \alpha\beta(m_1, n_1)$$

10. Memiliki elemen identitas perkalian,

$$1 \cdot (m_1, n_1) = (1 \cdot m_1, \cdot n_1) = (m_1, n_1)$$

karena $\mathbb{R}^2$ memenuhi aksioma ruang vektor, maka $\mathbb{R}^2$ ruang vektor terbukti. $\square$

2.6 Ruang Bernorma

Ruang bernorma didefinisikan oleh Rynne dan Youngson (2000) sebagai berikut.

Definisi 2.7. *Misalkan* A *adalah ruang vektor atas lapangan* F. *Suatu norm di* A *merupakan fungsi* $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $a, b \in A$ *dan* $\alpha \in F$, *memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. $\|a\| \geq 0$;
2. $\|a\| = 0$ *jika dan hanya jika* $a = 0$;
3. $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$;
4. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ *(Ketaksamaan Segitiga).*

Suatu ruang vektor A yang memiliki norm disebut ruang vektor bernorma atau ruang bernorma, salah satu contoh ruang bernorma adalah ruang Banach. Sedangkan Kalton (2003) mendefinisikan quasi-norm sebagai berikut.

Definisi 2.8. *Quasi-norm* $\|\cdot\|$ *pada ruang vektor* A *atas lapangan* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *atau* $\mathbb{C}$ *merupakan suatu pemetaan* $\|\cdot\| : A \to [0, \infty)$ *dengan* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ *dan* α *sembarang skalar di* $\mathbb{K}$ *memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. $\|a\| = 0$ *jika dan hanya jika* $a = 0$;
2. $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$;
3. *Terdapat konstanta* $c \geq 1$ *sedemikian sehingga*

$$\|a + b\| \leq c(\|a\| + \|b\|).$$

2.7 Ruang Banach

Definisi ruang Banach oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) berangkat dari ruang linier bernorma sebagai berikut.

Definisi 2.9. *Suatu barisan* (f_n) *merupakan ruang linier* A *dengan norma* $\|\cdot\|$ *disebut* ***Cauchy*** *di* A *dengan syarat untuk setiap* $\epsilon > 0$, *terdapat bilangan asli* N *sedemikian sehingga untuk setiap* $m, n \geq N$ *berlaku*

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon. \tag{2.6}$$

Ruang bernorma A disebut ***lengkap*** *jika untuk setiap barisan Cauchy di A konvergen ke fungsi A. Ruang bernorma yang lengkap ini disebut* ***Ruang Banach***.

Contoh 2.3. (Kreyszig, 1978) Ruang Euclid $\mathbb{R}^n$ merupakan himpunan semua pasangan *n-tuple* atau barisan dari bilangan riil, yang dituliskan sebagai

$$y = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$

yang dilengkapi dengan norma

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\xi_i|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}.$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ ruang bernorma yang lengkap. $\mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai ruang bernorma jika memenuhi aksioma-aksioma ruang bernorma, yaitu

1. $\|y\| \geq 0$

   Berdasarkan definisi nilai mutlak, diperoleh bahwa $|\xi_i|$ bernilai positif, sehingga jelas bahwa $\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

2. $\|y\| = 0$ jika dan hanya jika $y = 0$

   ($\Rightarrow$) Jika $\|y\| = 0$ maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = 0$$

$$\xi_i = 0.$$

   ($\Leftarrow$) Jika $y = 0$ maka

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (0)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. $\|\alpha y\| = |\alpha|\|y\|;\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha\xi_1|^2 + |\alpha\xi_2|^2 + \cdots + |\alpha\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2|\xi_1|^2 + |\alpha|^2|\xi_2|^2 + \cdots + |\alpha|^2|\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}}\left(|\xi_1|^2 + \left|\xi_q\right|^2 + \cdots + \ |\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|\|y\|$$

4. $\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\|$ (Ketaksamaan Segitiga)

   Ambil sembarang $z = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, sehingga diperoleh

$$\|y + z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\xi_1 + \eta_1|^2 + |\xi_2 + \eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n + \eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (|\xi_1|^2 + |\eta_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\eta_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 + |\eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}} + (|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \cdots + |\eta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|y + z\|.$$

maka terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ dengan norma $\|y\| = (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ adalah ruang bernorma. Kemudian akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya.

Misalkan (y_k) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$, di mana $y_k = (\xi_i^k, \dots, \xi_n^k)$.

Perhatikan bahwa

$$(y_k) = (y_1, y_2, \dots)$$

dengan

$$y_1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \dots) \in \mathbb{R}^n$$

$$y_2 = (\xi_1^2, \xi_2^2, \dots) \in \mathbb{R}^n$$
$$\vdots$$

Karena y_k barisan Cauchy, berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, l > K$ berlaku

$$\|y_k - y_l\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Kemudian untuk $i = 1, 2, \dots, n$ bernilai konstan, diperoleh

$$\left(\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$
$$\left(\left(\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \varepsilon^2$$
$$\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2 < \varepsilon^2$$
$$\left|\xi_i^k - \xi_i^l\right|^2 < \varepsilon$$

Diketahui bahwa $(y_{1_k}, x_k^2, \dots)$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan tersebut konvergen. Misalkan ξ_i^k konvergen ke ξ_i Ketika $k \to \infty$, maka dapat dituliskan

$$\|y_k, y\| = \|y_k - y_l\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i^k - \xi_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

sehingga diperoleh bahwa Cuachy y_k konvergen di $\mathbb{R}^n$. Maka terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ lengkap. □

Ruang metrik didefinisikan oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) sebagai berikut.

Definisi 2.10. *Misalkan A sembarang himpunan tak kosong. Suatu fungsi $f: A \times A \to \mathbb{R}$ disebut* ***metrik*** *jika untuk setiap a, b, dan $c \in A$ memenuhi*

1. $f(a, b) \geq 0$;
2. $f(a, b) = 0$ *jika dan hanya jika* $a = b$;
3. $f(a, b) \leq f(b, a)$;
4. $f(a, b) \leq f(a, c) + f(c, b)$.

Suatu himpunan tak kosong dengan metrik pada himpunan disebut ***ruang metrik*** *yang dituliskan dengan* (A, f).

Definisi 2.11. (Royden dan Fitzpatrick, 2010) *Suatu barisan* (a_n) *di ruang metrik* (A, f) *disebut barisan* ***Cauchy*** *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat indeks* N *di mana*

$$\textit{jika } n, m \geq N, \textit{ maka } f(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Suatu ruang metrik A *dikatakan* ***lengkap*** *jika untuk setiap barisan Cauchy di* A *konvergen ke satu titik di* A.

Wu dan Li (2008) dalam jurnalnya menuliskan definisi ruang quasi-Banach sebagai berikut.

Definisi 2.12. *Jika* $\|\cdot\|$ *quasi-norm di ruang vektor* X *berlaku ruang metrik lengkap, maka ruang vektor* X *disebut ruang quasi-Banach.*

2.8 Ruang Fungsi

Ruang fungsi merupakan ruang vektor dengan unsur-unsur di dalamnya berupa fungsi kontinu. Ruang fungsi adalah salah satu objek penelitian yang sering dikembangkan oleh para peneliti sehingga menghasilkan beberapa definisi ruang baru. Ruang fungsi merupakan ruang Banach dengan kondisi yang berbeda pada tiap ruang fungsi. Begitu juga, ruang fungsi memiliki kondisi lemah pada ruang masing-masing.

2.8.1 Ruang Lebesgue

Ruang fungsi yang sering digunakan pada analisis fungsional adalah ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ruang ini merupakan perumuman dari ruang vektor yang memiliki norma. Ruang Lebesgue sendiri merupakan ruang dasar dalam ruang fungsi, sebagaimana definisinya dituliskan oleh Royden dan Fitzpatrick (2010) dalam bukunya sebagai berikut.

Definisi 2.13. *Untuk* $\mathbb{R}^n$ *himpunan terukur,* $1 < p < \infty$, *dan suatu fungsi* f *di* $\mathbb{R}^n$ *didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.7}$$

Contoh 2.4. (Limanta, 2014) $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{\mathbb{R}[-1,1]}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $p > 1$, karena

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n[-1,1]} \frac{1}{|x|^p} dx \\ &= 2\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \\ &= \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^\infty \\ &= \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

tetapi $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, karena

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^\infty = \infty.$$

Akan ditunjukkan bahwa ruang Lebesgue adalah ruang bernorma. Ambil sembarang $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

1. $\|f\|_{L^p} \geq 0$

   Perhatikan bahwa

   $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka jelas bahwa $\|f\|_{L^p} \geq 0$.

2. $\|f\|_{L^p} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   ($\Rightarrow$) Jika $\|f\|_{L^p} = 0$

   $$\|f\|_{L^p} = 0$$

   $$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \qquad \text{(definisi norm ruang Lebesgue)}$$

   $$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = 0^p \qquad \text{(kedua ruas dipangkatkan } p\text{)}$$

   $$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 0 \qquad \text{(hasil pemangkatan)}$$

   $$f(x) = 0 \qquad \text{(karena integral bernilai 0)}$$

($\Leftarrow$) Jika $f = 0$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |0|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (diketahui)

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} 0\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (hasil pemangkatan)

$$= 0^{\frac{1}{p}}$$ (hasil pengintegralan)

$$= 0.$$ (hasil pemangkatan)

3. $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha|\|f\|_{L^p};\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\alpha|^p |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (sifat pemangkatan mutlak)

$$= \left(|\alpha|^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (sifat integral)

$$= |\alpha| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (pengoperasian pangkat)

$$= |\alpha|\|f\|_{L^p}.$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

4. $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$

$$\|f + g\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)|^p + |g(x)|^p)\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (sifat pemangkatan mutlak)

$$\leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)|^p\ dx\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|g(x)|^p)\ dx\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$ (sifat integral tak tentu)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|g(x)|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(operasi pangkat)}$$

$$= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \qquad \text{(definisi norm ruang Lebesgue)}$$

Dari aksioma-aksioma tersebut, diperoleh bahwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya. Akan tetapi, akan ditunjukkan terlebih dahulu beberapa lemma yang akan digunakan untuk membuktikan kelengkapan dari $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.14. (Standar Penjumlahan Cauchy) (Bowers dan Kalton, 2014) Ruang bernorma X lengkap jika dan hanya jika setiap barisan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke X ketika $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$.

Bukti. Pertama, asumsikan X lengkap dengan norma $\|\cdot\|$ dan $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$. Untuk $n \in \mathbb{N}$, misalkan $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Kemudian $\|S_m - S_n\| \leq \sum_{j=n+1}^{m}\|x_k\|$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, maka $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy. Oleh karena itu, karena X lengkap, maka barisan $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ konvergen.

Sebaliknya, asumsikan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ketika $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$. Misalkan $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy di X. Ambil barisan monoton naik $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dari bilangan asli sedemikian sehingga

$$\|y_p - y_q\| < \tfrac{1}{2^k}, \text{ ketika } p > q \geq n_k.$$

Misalkan $y_{n_0} = 0$. Maka

$$y_{n_k} = \sum_{j=1}^{k}\left(y_{n_j} - y_{n_{j-1}}\right), k \in \mathbb{N}.$$

Maka dari itu, diperoleh $\left\|y_{n_j} - y_{n_{j-1}}\right\| < \frac{1}{2^{j-1}}, \forall j \geq 2$, sedemikian diperoleh bahwa $\sum_{j=1}^{\infty}\left\|y_{n_j} - y_{n_{j-1}}\right\| < \infty$. Berarti bahwa subbarisan $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ konvergen ke beberapa unsur di X. Misalkan y adalah nilai limit dari subbarisan $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$, dipilih $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$ cukup besar sehingga $\left\|y_{n_k} - y\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{2^K} < \frac{\varepsilon}{2}$. Berdasarkan definisi, jika $m > n_K$, maka $\left\|y_m - y_{n_k}\right\| \leq \frac{1}{2^K}$. Maka,

$$\|y_m - y\| \leq \left\|y_m - y_{n_k}\right\| + \left\|y_{n_k} - y\right\| < \frac{1}{2^K} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

di mana $m > n_K$. Oleh karena itu, $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ adalah barisan konvergen. □

Lemma 2.15. (Lemma Fatou) (Royden dan Fitzpatrick, 2010) *Misalkan* $\{f_n\}$ *barisan dari fungsi terukur tak negative di* $\mathbb{R}^n$.

Jika $(f_n) \to f$ *hampir di mana-mana di* $\mathbb{R}^n$, *maka* $\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_n$. (2.8)

Bukti. Fungsi f tak negatif dan terukur karena terdapat masing-masing titik limit pada fungsi dari barisan fungsi tersebut. Untuk menunjukkan ketaksamaan lemma tersebut, cukup dan perlu untuk menunjukkan bahwa jika h fungsi terbatas dan terukur di mana $0 \leq h \leq f$ di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_n.$$

Misalkan h suatu fungsi. Pilih $M \geq 0$ di mana $|h| \leq M$ di $\mathbb{R}^n$. Definisikan $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) \neq 0\}$. Maka $m(E_0) < \infty$. Misalkan n bilangan asli, fungsi h_n di $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai $h_n = \min\{h, f_n\}$ di $\mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa fungsi h_n terukur, yaitu

$$0 \leq h_n \leq M \text{ di } E_0 \text{ dan } h_n = 0 \text{ di } \mathbb{R}^n \sim E_0.$$

Selanjutnya, untuk setiap x di E, karena $h(x) \leq f(x)$ dan

$$\{f_n(x)\} \to f(x), \{h_n(x)\} \to h(x).$$

Berdasarkan teorema konvergen terbatas yang dibahas oleh Thomson (2020) diaplikasikan pada barisan terbatas seragam yang dibatasi oleh h_n di $\mathbb{R}^n \sim E_0$ bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n = \lim_{n\to\infty} \int_{E_0} h_n = \int_{E_0} h = \int_{\mathbb{R}^n} h.$$

Akan tetapi, $\forall n, h_n \leq f_n$ di $\mathbb{R}^n$, oleh karena itu dengan definisi integral f_n atas $\mathbb{R}^n$, $\int_E h_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_n$. Maka,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_n \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_n.$$

□

Proposisi 2.16 (Bowers dan Kalton, 2014) $L^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah ruang Banach.*

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $L^p(\mathbb{R}^n)$ lengkap, maka akan digunakan Standar Penjumlahan Cauchy (Lemma (2.14)).

Asumsikan $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ adalah barisan fungsi di $L^p(\mathbb{R}^n)$ sedemikian sehingga $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{L^p} < \infty$. Misalkan $M = \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{L^p}$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, definisikan $g_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(\omega)|$ untuk setiap $\omega \in \mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah fungsi barisan terukur tak negatif dan $g_n \leq g_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Lemma Fatou (Lemma (2.15)), diperoleh

$$\int \liminf_{n\to\infty} |g_n|^p dx \leq \lim_{n\to\infty} inf \int |g_n|^p dx = \liminf_{n\to\infty}\|g_n\|_{L^p}^p \leq M^p < \infty.$$

Berarti bahwa $\liminf_{n\to\infty} |g_n|^p\ dx < \infty$ terukur hampir di mana-mana, dan akibatnya diperoleh

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p = \liminf_{n\to\infty}|g_n|^p < \infty$$

terukur di mana-mana. Sehingga, fungsi $g = \sum_{k=1}^{\infty}|f_k|$ ada dan $\|g\|_p \leq M$. Kemudian, misalkan $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, berarti bahwa f ada dan terukur di mana-mana, karena $|f(\omega)| \leq g(\omega); \forall\omega \in \mathbb{R}^n$. Perhatikan juga bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(\omega)\right| \leq g(\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}^n$$

Oleh karena itu, diperoleh bahwa $\sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergen ke f di L^p. $\square$

Kemudian didefinisikan ruang Lebesgue lokal sebagai berikut

Definisi 2.17. (Mu'tazili, 2019) *Ruang Lebesgue lokal* $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai semua fungsi terukur* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *yang memenuhi*

$$\int_K |f(x)|^p\ dx < \infty \tag{2.9}$$

untuk setiap subhimpunan kompak $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

2.8.2 Ruang Lebesgue Lemah

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, masing-masing ruang fungsi memiliki kondisi lemahnya, begitu juga yang terjadi pada ruang Lebesgue.

Definisi 2.18. (Grafakos, 2013) *Misalkan* $1 \leq p < \infty$. *Ruang Lebesgue lemah* $wL^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah himpunan semua fungsi terukur* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sehingga*

$$\|f\|_{wL^p} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.10}$$

dengan $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|$ *menyatakan ukuran lebesgue dari* $\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$.

Contoh 2.5. (Amalina, 2018) Misalkan suatu himpunan terukur didefinisikan sebagai $X = \mathbb{R}$ dan fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, x \in [-1,0] \\ 0, x\ lainnya \end{cases}$$

untuk sembarang $0 < p < \infty$ maka $f \in wL^p$.

Ruang Lebesgue lemah merupakan ruang quasi-Banach telah dibuktikan oleh Limanta (2014) sebagai berikut. Pertama ditunjukkan bahwa ruang Lebesgue lemah adalah ruang quasi-norm.

Ambil sembarang $f, g \in wL^p(\mathbb{R}^n)$.

1. $\|f\|_{wL^p} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   ($\Longrightarrow$) Jika $\|f\|_{wL^p} = 0$

$$\|f\|_{wL^p} = 0$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} = 0 \qquad \text{(norm ruang Lebesgue lemah)}$$

$$\left(\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}\right)^p = 0^p \qquad \text{(kedua ruas dipangkatkan } p\text{)}$$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = 0 \qquad \text{(hasil pemangkatan)}$$

   Perhatikan bahwa $f(x)$ bernilai mutlak, maka jelas bahwa $f(x) = 0$.

   ($\Longleftarrow$) Jika $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \|f\|_{wL^p} &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} && \text{(norm ruang Lebesgue lemah)} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |0| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} && \text{(diketahui)} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |0|^{\frac{1}{p}} && \text{(hasil pemangkatan)} \\ &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, (0) && \text{(hasil pemangkatan)} \\ &= 0. && \text{(hasil perkalian)} \end{aligned}$$

2. $\|\alpha f\|_{wL^p} = |\alpha|\|f\|_{wL^p}; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Jika $\alpha = 0$, maka jelas bahwa $\|\alpha f\|_{wL^p} = |\alpha|\|f\|_{wL^p}$. Kemudian asumsikan $\alpha \neq 0$, maka diperoleh

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |\alpha f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right|$$

berakibat

$$\|\alpha f\|_{wL^p} = \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

Ambil $\gamma = \frac{\lambda}{|\alpha|}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{wL^p} &= \sup_{\gamma>0} |\alpha|\gamma \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \sup_{\gamma>0} \gamma \, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha|\|f\|_{wL^p} \end{aligned}$$

3. $\|f + g\|_{wL^p} \leq c(\|f\|_{wL^p} + \|g\|_{wL^p}); \forall c \geq 1$

Perhatikan bahwa

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

berakibat

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda\}| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

sehingga

$$\lambda|x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda|^{\frac{1}{p}} \leq \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}} + \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\lambda|x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > \lambda|^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(\lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$+\left(\lambda\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\lambda^p|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)+g(x)|>\lambda\}\leq\lambda^p\ \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$
$$+\lambda^p\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

maka diperoleh

$$\|f+g\|_{wL^p}\leq 2^p\ \left(\sup_{\lambda>0}\lambda^p\ \left|\left\{x:|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|+\ \sup_{\lambda>0}\lambda^p\ \left|\left\{x:|g(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\right)$$
$$=2^p\left(\|f\|_{wL^p}^p\ +\|g\|_{wL^p}^p\right).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan kelengkapan dari ruang Lebesgue lemah sebagai berikut.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $wL^p(\mathbb{R}^n)$.

Anggap bahwa terdapat barisan konvergen $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1}-f_k\|_{wL^p}\leq a_k;\forall k \tag{2.11}$$

karena

$$f_{n+k}-f_n=\sum_{j=n}^{n+k-1}\left[f_{j+1}-f_j\right];\forall n,k$$

maka

$$\|f_{n+k}-f_n\|_{wL^p}\leq\sum_{j=n}^{n+k-1}\left\|f_{j+1}-f_j\right\|_{wL^p}$$
$$\leq\sum_{j=n}^{\infty}a_j$$

Misalkan $x\in wL^p$, maka

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)|\leq\sum_{j=n}^{\infty}a_j;\forall n,k$$

Barisan $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergen, maka $\left(f_n(x)\right)$ adalah barisan Cauchy terhadap bilangan riil. Himpunan bilangan riil merupakan ruang yang lengkap.

Misalkan limit dari $\left(f_n(x)\right)$ adalah $f(x)$, maka untuk $k\to\infty$ diperoleh

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \; ; \forall n, \forall x \in wL^p$$

Sehingga diperoleh bahwa (f_n) konvergen seragam ke $f(x)$. Karena $f(n)$ kontinu, maka berlaku juga pada f. Kasus umum mengikuti kasus khusus dengan catatan bahwa barisan Cauchy konvergen jika terdapat barisan konvergen dan barisan Cauchy di wL^p memiliki subbarisan di mana persamaan (2.11) berlaku. Jadi, diperoleh bahwa $wL^p(\mathbb{R}^n)$ adalah quasi-Banach.

2.8.3 Ruang Morrey

Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan salah satu ruang yang diperoleh dari modifikasi ruang Lebesgue. Ruang ini digagas oleh C. B. Morrey pada tahun 1938. Dikatakan demikian karena terdapat beberapa fungsi yang termuat di ruang Morrey tetapi tidak termuat di ruang Lebesgue. Sawano dkk., (2020) dalam jurnalnya menuliskan definisi ruang Morrey yang diambil dari definisi yang dituliskan oleh C.B. Morrey.

Definisi 2.19. *Misalkan* $0 \leq p \leq q < \infty$. *Untuk suatu fungsi* f *merupakan fungsi di* $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$, *norm ruang Morrey didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.12}$$

Ruang Morrey yang diperoleh dari perluasan ruang Lebesgue dapat dilihat pada kasus ketika $p = q$, yaitu

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(a,r)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} && \text{(definisi untuk } p = q\text{)} \\
&= \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(a,r)|^0 \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} && \text{(operasi pengurangan)} \\
&= \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} && \text{(hasil perkalian)} \\
&= \|f\|_{L^p} && \text{(definisi)}
\end{aligned}$$

sehingga $\mathcal{M}_q^p = L^p$ yang berarti merupakan perluasan dari ruang Lebesgue.

Contoh 2.6. (Mu'tazili, 2019) Fungsi konstan tak nol $f(x) = c$ bukan anggota ruang Morrey dikarenakan

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |c|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |c| |B(a,r)|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |c| \, |B(a,r)|^{\frac{1}{q}} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa ruang Morrey adalah ruang bernorma.

Ambil sembarang $f, g \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

1. $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} \geq 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka jelas bahwa $\|f\|_{M_q^p} \geq 0$.

2. $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

($\Rightarrow$) Jika $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Perhatikan bahwa $|B(a,r)|$ merupakan ukuran Lebesgue dengan $r > 0$, sehingga diperoleh $|B(a,r)| > 0$. Maka haruslah

$$\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\left(\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = 0^p \qquad \text{(kedua ruas dipangkatkan } p\text{)}$$

$$\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx = 0 \qquad \text{(hasil pemangkatan)}$$

$$f(x) = 0. \qquad \text{(karena integral bernilai 0)}$$

($\Leftarrow$) Jika $f(x) = 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |0|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(diketahui)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (0)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(hasil pengintegralan)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (0) \quad \text{(hasil pemangkatan)}$$

$$= 0. \quad \text{(hasil perkalian)}$$

3. $\|\alpha f\|_{\mathcal{M}_q^p} = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{M}_q^p}$; untuk $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{M_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |\alpha f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(definisi)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |\alpha|^p |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(pemangkatan mutlak)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|\alpha|^p \int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(sifat integral)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |\alpha| \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(hasil pemangkatan)}$$

$$= |\alpha| \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(sifat komutatif)}$$

$$= |\alpha| \|f\|_{M_q^p}. \quad \text{(definisi)}$$

4. $\|f + g\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} + \|g\|_{\mathcal{M}_q^p}$

$$\|f + g\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(definisi)}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (sifat pemangkatan mutlak)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(a,r)} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$ (sifat integral)

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ (operasi perkalian)

$$= \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} + \|g\|_{\mathcal{M}_q^p}.$$ (definisi)

Dari aksioma-aksioma di atas, diperoleh bahwa $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Kemudian, untuk menunjukkan $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach, perlu dibuktikan kelengkapan ruangnya yang ditunjukkan oleh proposisi berikut.

Proposisi 2.20. (Rukmana, 2016) $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *adalah ruang Banach.*

Bukti. Ambil sembarang barisan Cauchy (x_n) di $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. Misalkan $\left(x_{n_k}\right)$ subbarisan dari (x_n) di mana $n_1 < n_2 < \cdots$ yang memenuhi

$$\left\|f_m - f_{n_k}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} < 2^{-k}; \forall m \geq n_k.$$

Kemudian, $\forall k \in \mathbb{N}$, definisikan

$$g_k = \left|f_{n_1}\right| + \sum_{i=1}^{k-1} \left|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right|.$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{\mathcal{M}_q^p} \leq \left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} + \sum_{i=1}^{k-1} \left\|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} < \left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} + 1 < \infty.$$

Misalkan

$$g = \lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_i+1} - f_{n_i}|.$$

Berdasarkan Lemma Fatou (Lemma 2.15) di atas, diperoleh $\|g\|_{\mathcal{M}_q^p} \le \|f_{n_1}\|_{\mathcal{M}_q^p} + 1$. Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir di mana-mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_i+1}(x) - f_{n_i}(x) \right)$$

konvergen mutlak untuk hampir semua x. Kemudian definisikan jumlah pada deret di atas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

maka diperoleh $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i+1}(x)$ hampir di mana-mana. Dengan begitu, cukup dibuktikan bahwa f adalah titik limit dari f_n. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Karena (f_n) Cauchy, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n \ge N$ diperoleh $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}_q^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Juga karena (f_{n_k}) konvergen ke f, dapat dipilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}_q^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\|_{\mathcal{M}_q^p} \\ &\le \|f_n - f_{n_k}\|_{\mathcal{M}_q^p} + \|f_{n_k} - f\|_{\mathcal{M}_q^p} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap $n > N$. Hal ini membuktikan $f_n \to f$. Jadi $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach. □

2.8.4 Ruang Morrey Lemah

Ruang Morrey lemah yang merupakan kondisi lemah dari ruang Morrey juga diperkenalkan oleh C.B. Morrey. Limanta (2014) menuliskan dalam penelitiannya yang berjudul *"Ruang Morrey Kuat dan Lemah"* di mana ruang ini merupakan bentuk perluasan dari ruang Lebesgue lemah.

Definisi 2.21. *Misalkan* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Ruang Morrey lemah* $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ *merupakan himpunan semua fungsi terukur yang memenuhi*

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (2.13)$$

dengan $|\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|$ *menyatakan ukuran Lebesgue dari* $\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}$.

Perhatikan bahwa jika $p = q$, maka

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^0 \quad \text{(operasi pengurangan)}$$

$$\gamma |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} \gamma |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{(hasil pangkat 0)}$$

$$= \|f\|_{wL^p} \quad \text{(definisi)}$$

sehingga $w\mathcal{M}_q^p = wL^p$. Berarti bahwa ruang Morrey lemah merupakan perumuman dari ruang Lebesgue lemah. Selain itu, perhatikan bahwa

$$|\{x \in B\,(a,r) : \ |f(x)| > \gamma\}| = \int_{B(a,r)} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n :\, |f(x)|>\gamma\}}(x)\, dx$$

$$= \int_{B(a,r)} \chi_{(\gamma,\infty)}\, (|f(x)|)\, dx,$$

merupakan quasi-norm di ruang Morrey lemah yang juga dapat dinyatakan sebagai

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\gamma>0} \left\|\gamma\, \chi_{\{|f|>\gamma\}}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\gamma>0} \left\|\gamma\, \chi_{(\gamma,\infty)}(|f|)\right\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

(Mu'tazili, 2019).

Contoh 2.7. (Mu'tazili, 2019) Misalkan $1 \leq p < q < \infty$ dan $h(x) = |x|^{-\frac{d}{q}}$, maka $h \in w\mathcal{M}_q^p$ dan $\|h\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}}$. Dengan menghitung langsung,

$$\|h\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\gamma>0} \left\|\gamma \chi_{\left\{|x|^{-\frac{d}{q}}>\gamma\right\}}\right\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \left\| \gamma \chi_{\left\{|x|<\gamma^{-\frac{q}{d}}\right\}} \right\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \left\| \gamma \chi_{B\left(0,\gamma^{-\frac{q}{d}}\right)} \right\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left| B\left(0, \gamma^{-\frac{q}{d}}\right) \right|^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ruang Morrey lemah merupakan ruang quasi-Banach telah dibuktikan oleh Rukmana (2016) sebagai berikut. Pertama ditunjukkan bahwa ruang Morrey lemah adalah ruang quasi-norm.

Ambil sembarang $f, g \in w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

1. $\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   ($\Rightarrow$) Jika $\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = 0$

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) \colon |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) \colon |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}$$

   Jelas bahwa $|\{x \in B(a,r) \colon |f(x)| > \gamma\}| = 0$ atau dengan kata lain $|\{x \in B(a,r) \colon |f(x)| \neq 0\}| = 0$ sehingga diperoleh $f = 0$.

   ($\Leftarrow$) Jika $f = 0$

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) : |0| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \quad \text{(diketahui)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) : 0 > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \quad \text{(mutlak 0)}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r,\gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma(0) \quad \text{(hasil pangkat)}$$

$$= 0. \quad \text{(hasil perkalian)}$$

2. $\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = |\alpha|\ \|f\|_{w\mathcal{M}_q^p}\ ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma |\{x \in B(a,r) :\ |\alpha f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma \left|\left\{x \in B(a,r) :\ |\alpha f(x)| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

Pilih $\gamma' = \frac{\gamma}{|\alpha|}$ sehingga diperoleh

$$\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |\alpha|\, \gamma'\ |\{x \in B(a,r) :\ |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\ \gamma' |\{x \in B(a,r) :\ |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha|\ \|f\|_{w\mathcal{M}_q^p}. \qquad \text{(definisi)}$$

3. $\|f+g\|_{w\mathcal{M}_q^p} \le c\left(\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} + \|g\|_{w\mathcal{M}_q^p}\right)\ ; \forall c \ge 1$

Pilih $c = 2$ karena

$$|\{x \in B(a,r) : |f(x)+g(x)| > \gamma\}| \le \left|\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right| + \left|\{x \in B(a,r) : |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right|$$

dan pilih $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$ maka diperoleh

$$\|f+g\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\ \gamma |\{x \in B(a,r) : |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma \left|\left\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}} + \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma \left|\left\{x \in B(a,r) : |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{1}{p}}$$

(akibat pernyataan sebelumnya)

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma'>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\ 2\gamma'\ |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{1}{p}}$$

(karena $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$)

$$+ \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma'>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

$$2\gamma' \, |\{x \in B(a,r) : |g(x)| > \gamma'\}|^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2\left(\sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma'>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \, \gamma' \, |\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$+2\left(\sup_{a\in\mathbb{R}^n, r, \gamma'>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \, \gamma' \, |\{x \in B(a,r) : |g(x)| > \gamma'\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat perkalian)

$$= 2\left(\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} + \|g\|_{w\mathcal{M}_q^p}\right). \qquad \text{(definisi)}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan kelengkapan dari ruang Morrey lemah sebagai berikut.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

Anggap bahwa terdapat barisan konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{w\mathcal{M}_q^p} \leq a_k \; ; \forall k \qquad (2.14)$$

karena

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{j=n}^{n+k-1} \left[f_{j+1} - f_j\right] ; \forall n, k$$

maka

$$\|f_{n+k} - f_n\|_{w\mathcal{M}_q^p} \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} \left\|f_{j+1} - f_j\right\|_{w\mathcal{M}_q^p}$$

$$\leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

Misalkan $x \in w\mathcal{M}_q^p$, maka

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \; ; \forall n, k$$

Barisan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\left(f_n(x)\right)$ adalah barisan Cauchy terhadap bilangan riil. Himpunan bilangan riil merupakan ruang yang lengkap.

Misalkan limit dari $\left(f_n(x)\right)$ adalah $f(x)$, maka untuk $k \to \infty$ diperoleh

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \; ; \forall n, \forall x \in w\mathcal{M}_q^p$$

Sehingga diperoleh bahwa (f_n) konvergen seragam ke $f(x)$. Karena $f(n)$ kontinu, maka berlaku juga pada f. Kasus umum mengikuti kasus khusus dengan catatan bahwa barisan Cauchy konvergen jika terdapat barisan konvergen dan barisan Cauchy di $w\mathcal{M}_q^p$ memiliki subbarisan di mana persamaan (2.14) berlaku. Jadi, diperoleh bahwa $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah quasi-Banach.

2.8.5 Ruang Herz

Ruang Herz merupakan kelas ruang fungsi yang diperkenalkan oleh Herz pada tahun 1968. Lu dkk. (2008) dalam bukunya yang berjudul "*Herz Type Spaces and Their Application*" menuliskan definisi ruang Herz sebagai berikut.

Definisi 2.22. *Misalkan* $0 < p, q \leq \infty$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ruang Herz* $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan sebagai*

$$\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n/\{0\}) \; ; \|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\} \tag{2.15}$$

di mana

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \coloneqq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.16}$$

dengan $A_k \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \; ; 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\}$ *dan* $\chi_k = \chi_{A_k}$ *merupakan fungsi karakteristik dari* A_k.

Ruang Herz merupakan perluasan dari ruang Lebesgue ketika $\alpha = 0$, $q = p$, dan $\chi_{A_k} = 1$ yaitu

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{K}_{p,p}^{0}} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(0)p} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}} && \text{(diketahui)} \\
&= \left(\|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p\right)^{\frac{1}{p}} && \text{(pangkat 0)} \\
&= \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} && \text{(perkalian pangkat)} \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. && \text{(diketahui dan perkalian)}
\end{aligned}$$

2.8.6 Ruang Herz Lemah

Seperti halnya ruang Herz lemah, Lu dkk. (2008) dalam bukunya yang berjudul "*Herz Type Spaces and Their Application*" juga menuliskan definisi ruang Herz lemah sebagai berikut.

Definisi 2.23. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < q < \infty$ dan $0 < p \leq \infty$. Suatu fungsi terukur f di $\mathbb{R}^n$ merupakan fungsi pada ruang Herz lemah $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ jika*

$$\|f\|_{w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} := \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{2.17}$$

di mana $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|$.

Perhatikan bahwa ketika $\alpha = 0$ dan $q = p$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\|f\|_{w\dot{K}_{p,p}^{0}} &= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(0)p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} && \text{(diketahui)} \\
&= \sup_{\gamma>0} \gamma \big(m_k(\gamma, f)\big)^{\frac{1}{p}} && \text{(perkalian pangkat)} \\
&= \sup_{\gamma>0} \gamma |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} && \text{(definisi } m_k(\gamma, f)\text{)} \\
&= \|f\|_{wL^p} && \text{(definisi)}
\end{aligned}$$

sehingga disimpulkan bahwa ruang Herz lemah merupakan perluasan dari ruang Lebesgue lemah.

2.8.7 Ruang Herz-Morrey

Seiring berjalannya waktu, banyak peneliti yang mulai mengombinasikan beberapa beberapa karakteristik ruang yang ada menjadi karakteristik ruang baru. Salah satunya adalah pengombinasian ruang Herz dengan ruang Morrey yang dikenal dengan ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Ruang ini diperkenalkan oleh Lu dan Xu pada tahun 2005 yang dituliskan dalam jurnalnya yang berjudul "*Boundedness of Rough Singular Integral Operators on The Homogeneous Morrey-Herz Spaces*".

Sebelum mendefinisikan ruang Herz-Morrey sendiri, kita definisikan terlebih dahulu $B_k = B(0,2^k)$ bola buka yang berpusat di 0 dan berjari-jari 2^k.

Misalkan $B_k = B(0,2^k) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$ dan $A_k = \frac{B_k}{B_{k-1}}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Kemudian misalkan $\chi_k = \chi_{A_k}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$ fungsi karakteristik dari himpunan A_k (Lu dan Xu, 2005).

Definisi 2.24. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$, dan $\lambda \geq 0$. Ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ didefenisikan sebagai*

$$\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n / \{0\}) \,, \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty\} \,, \tag{2.18}$$

di mana

$$\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.19}$$

2.8.8 Ruang Herz-Morrey Lemah

Sama seperti ruang-ruang sebelumnya yang didefinisikan kondisi lemahnya, ruang Herz-Morrey juga memiliki kondisi lemahnya yang dituliskan juga definisinya oleh Lu dan Xu (2005) sebagai berikut.

Definisi 2.25. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, \lambda \geq 0$, dan $0 < q < \infty$. Ruang Herz-Morrey lemah $\left(w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)\right)$ merupakan himpunan semua fungsi terukur $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n / \{0\})$ yang memenuhi*

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\gamma > 0} \gamma \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.20}$$

di mana $m_k(\gamma, f) = |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|$.

2.9 Konsep Menaati Perintah

Menaati perintah Allah dan Rasul merupakan suatu kewajiban bagi orang mukmin, karena dalam rukun iman telah disebutkan iman kepada Allah dan iman kepada Rasul. Iman kepada Allah berarti mempercayai dengan sepenuh hati bahwa Allah ada dan Esa, sedangkan iman kepada Rasul berarti mempercayai bahwa Rasul adalah utusan Allah untuk mengajarkan syariat-syariat Islam yang harus ditaati oleh orang-orang mukmin. Dalam Surah An-Nisa' ayat 59 disebutkan bahwa

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ أَطِيعُواْ ٱللَّهَ وَأَطِيعُواْ ٱلرَّسُولَ وَأُوْلِي ٱلۡأَمۡرِ مِنكُمۡۖ فَإِن تَنَٰزَعۡتُمۡ فِي شَيۡءٖ فَرُدُّوهُ

إِلَى ٱللَّهِ وَٱلرَّسُولِ إِن كُنتُمۡ تُؤۡمِنُونَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِۚ ذَٰلِكَ خَيۡرٞ وَأَحۡسَنُ تَأۡوِيلًا

"Hai orang-orang yang beriman, taatilah Allah dan taatilah Rasul (Nya), dan Ulil Amri di antara kamu. Kemudian jika kamu berlainan pendapat tentang sesuatu, maka kembalikanlah ia kepada Allah (Al-Qur'an) dan Rasul (sunnahnya), jika kamu benar-benar beriman kepada Allah dan hari kemudian. Yang demikian itu lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya".

Ayat ini membahas tentang perintah untuk taat kepada Allah, Rasul, dan Ulil Amri. Ar-Rifa'i (1999) menjelaskan bahwa kalimat "Taatlah kepada Allah" berarti mengikuti kitab-Nya, "Taatlah kepada Rasul" berarti memegang teguh sunnah-sunnahnya sedangkan "Taatlah kepada Ulil Amri di antara kamu" bermakna ketaatan terhadap perintah mereka dengan ketaatan terhadap Allah, bukan ketaatan terhadap kemaksiatan maupun kemungkaran, karena tidak ada ketaatan bagi makhluk yang merupakan kemaksiataan kepada sang pencipta. Sebagaimana dalam hadis sahih,

"Diriwayatkan oleh Imam Bukhari dan Muslim dari Abu Hurairah, ia berkata: Bersabda Rasulullah saw. 'Barangsiapa menaatiku, maka dia menaati Allah. Barangsiapa mendurhakaiku, maka dia mendurhakai Allah. Barangsiapa menaati amirku, berarti dia menaati aku. Barangsiapa yang mendurhakai amirku, berarti dia mendurhakai aku'". (HR. Bukhari dan Muslim).

Hadis di atas diperjelas oleh Ibnu Hajar al-Asqalani,

"Dalam hadis tersebut terdapat dalil wajibnya menaati penguasa, dengan syarat dalam perkara yang bukan maksiat. Adapun hikmah dari perintah untuk menaati penguasa adalah terjaganya persatuan kaum muslimin. Sebab, dalam perpecahan terdapat (banyak) kerusakan." (Al-'Asqalani, 2011)

'Ali bin Abi Thalhah meriwayatkan, dari Ibu 'Abbas bahwa *"Dan Ulil Amri di antara kamu"* adalah ahli fiqih (orang yang memahami ilmu-ilmu agama) dan ahli agama. Demikian pula Mujahid, 'Atha', al-Hasan al-Bashri dan Abul 'Aliyah berkata bahwa *"Dan Ulil Amri di antara kamu"* adalah ulama. Namun secara umum, Ulil Amri mencakup setiap pemegang urusan, baik umara maupun ulama (Ghoffar, 2007).

Kemudian pada kalimat *"Apabila kamu berselisih mengenai sesuatu, maka kembalikanlah ia kepada Allah dan Rasul"* dijelaskan oleh Ar-Rifa'i (1999) bahwa maksudnya adalah dalam menghadapi segala perkara yang menimbulkan perselisihan di antara manusia maka dikembalikan kepada Al-Qur'an dan Sunnah.

Selanjutnya pada *“Perkara apa saja yang kamu perselisihkan, maka ketetapannya dikembalikan kepada Allah”* bermakna apapun yang telah ditetapkan oleh Al-Qur'an dan Sunnah, kemudian keduanya membuktikan kesahihan perkara, maka itulah kebenaran. Sedangkan *“Jika kamu beriman kepada Allah dan hari akhir, hal itu lebih baik”* berarti kembalikanlah perselisihan yang terjadi kepada Kitab Allah dan Sunnah Rasul, di sanalah penyelesaian masalah akan ditunjukkan. Dijelaskan juga bahwa ayat ini mengandung makna bahwa barangsiapa yang tidak berhakim kepada Kitab Allah dan Sunnah Rasul dalam perkara yang diperselisihkan, maka dia bukanlah orang yang beriman kepada Allah dan hari akhir.

Seorang mufasir Ibnu al-Arabi menafsirkan bahwa dalam Surah An-Nisa' ayat 59 mencakup tiga pembahasan. Pertama, tentang hakikat taat. Kedua, dalam firman Allah “dan Ulil Amri di antara kamu”, terdapat dua pendapat tentang Ulil Amri, a) Maimun bin Mihran yaitu *ahbāb al-saraya* (pemimpin pasukan), b) Jabir mengatakan bahwa Ulil Amri yaitu ulama (ahli ilmu). Akan tetapi paling shahih menurut sebagian besar ulama, sesungguhnya Ulil Amri adalah *umara’* (para pemimpin) dan *ulama’* (ahli ilmu). Ketiga, penyelesaian perselisihan, Ibnu al-Arabi menyatakan bahwa perbedaan pendapat diselesaikan dengan merujuk kepada kitab Allah, Al-Qur'an. Apabila tidak ditemukan maka merujuk kepada sunnah Rasul. Apabila jika masih tidak ditemukan, maka dilakukan *ijtihad* (Rahman, 2017).

Kemudian dari Surah An-Nisa' ayat 59 tersebut dipertegas lagi perintahnya dalam Surah An-Nisa' ayat 80,

مَنْ يُّطِعِ الرَّسُوْلَ فَقَدْ اَطَاعَ اللّٰهَ ۚ وَمَنْ تَوَلّٰى فَمَآ اَرْسَلْنٰكَ عَلَيْهِمْ حَفِيْظًا

Barangsiapa menaati Rasul (Muhammad), maka sesungguhnya dia telah menaati Allah. Dan barangsiapa berpaling (dari ketaatan itu), maka (ketahuilah) Kami tidak mengutusmu (Muhammad) untuk menjadi pemelihara mereka”.

Berdasarkan tafsir ayat dalam Ar-Rifa’i (1999), Allah memberitahukan bahwa barangsiapa yang menaati rasul-Nya, maka sesungguhnya dia telah menaati Allah. Dan barangsiapa yang mendurhakainya, maka dia mendurhakai Allah. Hal ini dikarenakan apa yang dikatakan oleh Rasul-Nya adalah wahyu dari Allah. Kemudian dalam kalimat *“Dan barangsiapa berpaling, maka Kami tidak mengutusmu untuk menjadi pemelihara mereka”.* maksudnya adalah bahwa tugas Nabi Muhammad yaitu menyampaikan risalah. Sehingga barangsiapa yang mengikuti Nabi Muhammad maka dia akan selamat dan berbahagia. Sedangkan barangsiapa yang berpaling dari Nabi Muhammad maka dia akan merugi dan Nabi Muhammad tidak memiliki wewenang sedikitpun terhadap (keberpalingan) itu.

Menurut Imam Syafi'i, dalam Surah An-Nisa' ayat 80 tersebut menjelaskan bahwa Allah mengistimewakan Nabi Muhammad sebagai penerima wahyu, dan menjelaskan keutamaan beliau sebagai juru penerang bagi makhluk-Nya. Maka dari itu Allah mewajibkan seluruh umat manusia agar menaati Nabi Muhammad. Setiap makhluk Allah harus mengetahui bahwa Nabi Muhammad hanya menyabdakan sesuatu sesuai dengan firman Allah. Dan pernyataan beliau tidak akan bertentangan dengan Al-Qur'an. Dengan begitu, Al-Qur'an dan Sunnah merupakan dua sumber hukum yang tidak ada pertentangan di dalamnya. Apabila umat manusia menentang kedua hukum tersebut, berarti mereka telah bermaksiat kepada Allah dan keputusan-keputusan yang diambil tidak sah (Al-Farran, 2008).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Herz-Morrey

Dalam mengaplikasikan ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa ruang Herz-Morrey adalah ruang Banach, begitu juga dengan kondisi lemahnya yaitu ruang Herz-Morrey lemah yang ditunjukkan ke ruang quasi-Banach. Ruang Herz-Morrey yang merupakan bentuk kolaborasi antara ruang Herz dan ruang Morrey, sehingga mengharuskan untuk diketahui terlebih dahulu jika kedua ruang tersebut adalah ruang Banach. Sedangkan kedua ruang tersebut merupakan perluasan dari ruang Lebesgue. Sehingga perlu diketahui terlebih dahulu bahwa ruang Lebesgue adalah ruang Banach. Tujuan dari perlu ditunjukkannya bahwa ruang-ruang tersebut adalah ruang Banach yakni untuk mengetahui keberlakuan norm dari ruang tersebut, di mana ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap sebagaimana dituliskan dalam Definisi 2.9. Ruang Lebesgue adalah ruang Banach telah dibuktikan di Proposisi 2.16 dan ruang Morrey adalah ruang Banach telah dibuktikan juga di Proposisi 2.20. Sedangkan untuk ruang Lebesgue lemah dan ruang Morrey lemah masing-masing telah dibuktikan oleh Limanta (2014) dan Rukmana (2016) di bab sebelumnya. Sehingga pada bab ini akan dibuktikan bahwa ruang Herz dan ruang Herz-Morrey adalah ruang Banach, begitu juga ruang Herz lemah dan ruang Herz-Morrey lemah adalah ruang quasi-Banach.

Teorema 3.1. *Misalkan* $0 < p, q \leq \infty$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$, *norm di ruang Herz didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \, \|f\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.1}$$

maka ruang Herz $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *adalah ruang Banach.*

Bukti. Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Sehingga akan ditunjukkan bahwa ruang Herz $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ adalah ruang bernorma yang memuat barisan Cauchy yang konvergen.

Ambil sembarang $f, g \in \dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Untuk menjadi ruang bernorma, maka ruang Herz $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ harus memenuhi keempat sifat berikut.

1. $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \geq 0$

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(definisi norm ruang Lebesgue)}$$

Perhatikan bahwa berdasarkan definisi mutlak dan sifat penjumlahan, maka diperoleh $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \geq 0$.

2. $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

(⇒) Jika $\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = 0$

$$\|f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = 0$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0 \qquad \text{(definisi norm ruang Herz)}$$

$$\left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = 0 \qquad \text{(definisi norm ruang Lebesgue)}$$

$$\left(\left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{q} = 0^q \qquad \text{(kedua ruas dipangkatkan } q\text{)}$$

$$\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}} = 0 \qquad \text{(perkalian pangkat)}$$

Perhatikan bahwa $k \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh nilai $2^{k\alpha p}$ bernilai > 0. Kemudian terdapat dua kemungkinan sebagai berikut.

i) Untuk $\chi_k = 1$

Jelas bahwa untuk $\chi_k = 1$, $f(x)$ akan bernilai 0.

ii) Untuk $\chi_k = 0$

Perhatikan bahwa

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}} = 0$$

Untuk $\chi_k = 0$ berarti memungkinan untuk nilai $f(x) \neq 0$. Akan tetapi perhatikan bahwa berdasarkan Definisi 2.22, nilai $\chi_k = \chi_{A_k}$ dan untuk $A_k \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,; 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\}$. Oleh karena A_k jelas bernilai positif untuk sembarang k, maka dapat dipastikan bahwa $f(x) = 0$.

Sehingga dari kedua kemungkinan di atas diperoleh bahwa $f(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Jika $f = 0$

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \, \|f\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (definisi norm ruang Herz)

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(0)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (diketahui)

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 0 \, dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (operasi perkalian)

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} (0)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (operasi pengintegralan)

$$= (0)^{\frac{1}{q}}$$ (operasi penjumlahan)

$$= 0.$$ (hasil pemangkatan)

3. $\|\alpha f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = |\alpha|\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|\alpha f\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (definisi norm ruang Herz)

$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} |\alpha|^q \|f\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (sifat ruang norm di ruang Lebesgue)

$$= |\alpha| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (operasi perkalian pangkat)

$$= |\alpha|\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$ (definisi)

4. $\|f+g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq \|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \|g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$

$$\|f+g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \|(f+g)\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (definisi norm ruang Herz)

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\big(f(x)+g(x)\big)\chi_k\right|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (definisi norm Lebesgue)

$$= \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k + g(x)\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$ (sifat distributif)

$$\leq \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p + |g(x)\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat penjumlahan pangkat mutlak)

$$\leq \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat integral tak tentu)

$$\leq \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat bilangan berpangkat)

$$\leq \left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat distributif)

$$+\left(\sum_{k\in Z} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \|g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Dari aksioma-aksioma yang telah dibuktikan di atas, diperoleh bahwa $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan ditunjukkan kelengkapannya sebagai berikut.

Ambil sembarang barisan Cauchy (x_n) di $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Misalkan (x_{n_k}) subbarisan dari (x_n) di mana $n_1 < n_2 < \cdots$ yang memenuhi

$$\left\|f_m - f_{n_k}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} < 2^{-k}; \forall m \geq n_k.$$

Kemudian, $\forall k \in \mathbb{N}$, definisikan

$$g_k = |f_n| + \sum_{i=1}^{k-1}\left|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right|.$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq \left\|f_{n_1}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \sum_{i=1}^{k-1}\left\|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} < \left\|f_{n_1}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + 1 < \infty.$$

Misalkan

$$g = \lim_{k\to\infty} g_k = \left|f_{n_1}\right| + \sum_{i=1}^{k-1}\left|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right|.$$

Berdasarkan Lemma Fatou (Lemma 2.15) di atas, diperoleh

$$\|g\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq \left\|f_{n_1}\right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + 1.$$

Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir di mana-mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(f_{n_i+1}(x) - f_{n_i}(x)\right)$$

konvergen mutlak untuk hampir semua x. Kemudian definisikan jumlah pada deret di atas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_i+1} - f_{n_i} \right) = f_{n_k},$$

maka diperoleh $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i+1}(x)$ hampir di mana-mana. Dengan begitu, cukup dibuktikan bahwa f adalah titik limit dari f_n. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Karena (f_n) Cauchy, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n \geq N$ diperoleh $\|f_m - f_n\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Juga karena $\left(f_{n_k}\right)$ konvergen ke f, dapat dipilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan $\|f_m - f_n\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} &= \left\|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\right\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \\ &\leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} + \left\|f_{n_k} - f\right\|_{\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap $n > N$. Hal ini membuktikan $f_n \to f$. Jadi $\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach. □

Teorema 3.2. *Misalkan* $a \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$, *dan* $\lambda \geq 0$, *norm di ruang Herz-Morrey didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \coloneqq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.2)$$

maka ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *adalah ruang Banach.*

Bukti. Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Sehingga akan ditunjukkan bahwa ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ adalah ruang bernorma yang memuat barisan Cauchy yang konvergen.

Ambil sembarang $f, g \in \mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Untuk menjadi ruang bernorma, maka ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ harus memenuhi keempat sifat berikut.

1. $\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \geq 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

Perhatikan bahwa berdasarkan definisi mutlak dan sifat penjumlahan, maka diperoleh $\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \geq 0$.

2. $\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   (⇒) Jika $\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = 0$

$$\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

$$\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} = 0$$ (definisi norm ruang Lebesgue)

Perhatikan bahwa untuk $k_0 \in \mathbb{Z}, 2^{-k_0\lambda} = \frac{1}{2^{k_0\lambda}} > 0$, sehingga haruslah

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

$$\left(\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q = 0^q$$ (kedua ruas dipangkatkan q)

$$\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} = 0$$ (hasil pemangkatan)

Perhatikan bahwa $k \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh nilai $2^{k\alpha p}$ bernilai > 0. Kemudian terdapat dua kemungkinan sebagai berikut.

i) Untuk $\chi_k = 1$

   Jelas bahwa untuk $\chi_k = 1$, $f(x)$ akan bernilai 0.

ii) Untuk $\chi_k = 0$

   Perhatikan bahwa

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p}} = 0$$

Untuk $\chi_k = 0$ berarti memungkinan untuk nilai $f(x) \neq 0$. Akan tetapi perhatikan bahwa berdasarkan Definisi 2.22, nilai $\chi_k = \chi_{A_k}$ dan untuk $A_k \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,; 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\}$. Oleh karena A_k jelas bernilai positif untuk sembarang k, maka dapat dipastikan bahwa $f(x) = 0$.

Sehingga dari kedua kemungkinan di atas diperoleh bahwa $f(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Jika $f = 0$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}} &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} && \text{(definisi norm Lebesgue)} \\
&= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(0)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} && \text{(diketahui)} \\
&= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 0 \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} && \text{(hasil perkalian)} \\
&= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} (0)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} && \text{(hasil pengintegralan)} \\
&= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} (0) \right)^{\frac{1}{q}} && \text{(operasi perkalian)} \\
&= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} (0)^{\frac{1}{q}} && \text{(operasi penjumlahan)} \\
&= 0. && \text{(operasi perkalian)}
\end{aligned}$$

3. $\|\alpha f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = |\alpha|\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}; \forall\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\|\alpha f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}|\alpha|^q\|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ (sifat ruang norm di ruang Lebesgue)

$$= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}|\alpha|\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ (operasi perkalian pangkat)

$$= |\alpha|\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\|f\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ (sifat komutatif)

$$= |\alpha|\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}.$$

4. $\|f + g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}$

$$\|f + g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\|(f+g)\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(definisi norm ruang Herz-Morrey)

$$= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f(x)+g(x))\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(definisi norm Lebesgue)

$$= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k + g(x)\chi_k|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat distributif)

$$\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p + |g(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat penjumlahan pangkat mutlak)

$$\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat integral tak tentu)

$$\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right] \right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat bilangan berpangkat)

$$\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat distributif)

$$= \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}. \qquad \text{(definisi)}$$

Dari aksioma-aksioma yang telah dibuktikan di atas, diperoleh bahwa $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya sebagai berikut

Ambil sembarang barisan Cauchy (x_n) di $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Misalkan (x_{n_k}) subbarisan dari (x_n) di mana $n_1 < n_2 < \ldots$ yang memenuhi

$$\left\|f_m - f_{n_k}\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} < 2^{-k}; \forall m \geq n_k.$$

Kemudian, $\forall k \in \mathbb{N}$, definisikan

$$g_k = |f_n| + \sum_{i=1}^{k-1} \left|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right|.$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq \left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + \sum_{i=1}^{k-1} \left\|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} < \left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + 1 < \infty.$$

Misalkan

$$g = \lim_{k\to\infty} g_k = \left|f_{n_1}\right| + \sum_{i=1}^{k-1} \left|f_{n_i+1} - f_{n_i}\right|.$$

Berdasarkan Lemma Fatou (Lemma 2.15) di atas, diperoleh

$$\|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq \left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + 1.$$

Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir di mana-mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right)$$

Konvergen mutlak untuk hampir semua x. Kemudian definisikan jumlah pada deret di atas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k},,$$

maka diperoleh $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i+1}(x)$ hampir di mana-mana. Dengan begitu, cukup dibuktikan bahwa f adalah titik limit dari f_n. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Karena (f_n) Cauchy, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n \geq N$ diperoleh $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Juga karena $\left(f_{n_k}\right)$ konvergen ke f, dapat dipilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} &= \left\|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \\ &\leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + \left\|f_{n_k} - f\right\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap $n > N$. Hal ini membuktikan $f_n \to f$. Jadi $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach. $\square$

Teorema 3.3. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < q < \infty$ dan $0 < p \leq \infty$, norm di ruang Herz lemah didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} \coloneqq \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3}$$

maka ruang Herz lemah $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ adalah ruang quasi-Banach.

Bukti. Ruang quasi-Banach adalah ruang quasi-norm yang lengkap. Sehingga akan ditunjukkan bahwa ruang Herz lemah $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ adalah ruang quasi-norm yang memiliki kelengkapan.

Ambil sembarang $f, g \in w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Untuk menjadi ruang quasi-norm, maka ruang Herz lemah $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ harus memenuhi ketiga sifat berikut.

1. $\|f\|_{w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   ($\Rightarrow$) Jika $\|f\|_{w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = 0$

$$\sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \qquad \text{(definisi } m_k(\gamma, f))$$

   Perhatikan bahwa $k \in \mathbb{Z}$ yang menyebabkan nilai $2^{k\alpha p}$ pasti bernilai positif meskipun dipangkatkan dengan nilai berapapun, perhatikan juga bahwa $f(x)$ bernilai mutlak yang menyebabkan nilai $f(x)$ harus bernilai positif, sehingga untuk persamaan di atas jelas bahwa berlaku untuk $f(x) = 0$.

   ($\Leftarrow$) Jika $f = 0$

$$\|f\|_{w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$ (definisi $m_k(\gamma, f)$)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |0| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$ (diketahui)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} (0) \right)^{\frac{1}{p}}$$ (pangkat 0)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma\, (0)^{\frac{1}{p}}$$ (sifat perkalian)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma\, (0)$$ (sifat perkalian)

$$= 0.$$ (sifat perkalian)

2. $\|\alpha f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = |\alpha| \|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, \alpha f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |\alpha f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$ (definisi $m_k(\gamma, f)$)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |\alpha||f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$ (sifat perkalian mutlak)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left|\left\{x \in A_k : |f(x)| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$ (operasi pembagian)

Pilih $\gamma' = \frac{\gamma}{|\alpha|}$, sehingga diperoleh

$$\|\alpha f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sup_{\gamma'>0} |\alpha| \gamma' \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\gamma'>0} \gamma' \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

3. $\|f+g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq c\left(\|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \|g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}\right); \forall c \geq 1$

$$\|f+g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f+g)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pilih $c = 2$, karena

$$|\{x \in A_k : |f(x)+g(x)| > \gamma\}| \leq \left|\left\{x \in A_k : |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in A_k : |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|.$$

Kemudian pilih $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$ maka diperoleh

$$\|f+g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left(\left|\left\{x \in A_k : |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}} + \left|\left\{x \in A_k : |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(akibat pernyataan sebelumnya)

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left|\left\{x \in A_k : |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\gamma>0} \gamma \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} \left|\left\{x \in A_k : |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat distributif)

$$\leq \sup_{\gamma'>0} 2\gamma' \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\gamma'>0} 2\gamma' \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |g(x)| > \gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2\left(\sup_{\gamma'>0}\gamma'\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{k\alpha p}|\{x\in A_k: |f(x)|>\gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$+2\left(\sup_{\gamma'>0}\gamma'\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{k\alpha p}|\{x\in A_k: |g(x)|>\gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat asosiatif)

$$= 2\left(\|f\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \|g\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}\right). \qquad \text{(definisi)}$$

Dari aksioma-aksioma yang telah dibuktikan di atas, diperoleh bahwa $w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang quasi-norm. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang quasi-Banach dengan menunjukkan kelengkapannya sebagai berikut.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Anggap bahwa terdapat barisan konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \le a_k \; ; \forall k \qquad (3.4)$$

karena

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{j=n}^{n+k-1}\left[f_{j+1} - f_j\right] ; \forall n,k$$

maka

$$\|f_{n+k} - f_n\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \le \sum_{j=n}^{n+k-1}\left\|f_{j+1} - f_j\right\|_{w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$$

$$\le \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

Misalkan $x \in w\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, maka

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \le \sum_{j=n}^{\infty} a_j \; ; \forall n,k$$

Barisan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\left(f_n(x)\right)$ adalah barisan Cauchy terhadap bilangan riil. Himpunan bilangan riil merupakan ruang yang lengkap.

Misalkan limit dari $\left(f_n(x)\right)$ adalah $f(x)$, maka untuk $k \to \infty$ diperoleh

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \ ; \forall n, \forall x \in w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$$

Sehingga diperoleh bahwa (f_n) konvergen seragam ke $f(x)$. Karena $f(n)$ kontinu, maka berlaku juga pada f. Kasus umum mengikuti kasus khusus dengan catatan bahwa barisan Cauchy konvergen jika terdapat barisan konvergen dan barisan Cauchy di $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}$ memiliki subbarisan di mana persamaan (3.1) berlaku. Jadi, diperoleh bahwa $w\dot{K}_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ adalah quasi-Banach. □

Teorema 3.4. *Misalkan* $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, \lambda \geq 0,$ *dan* $0 < q < \infty$, *norm di ruang Herz-Morrey lemah didefinisikan sebagai*

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} := \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.5}$$

maka ruang Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ *adalah ruang quasi-Banach.*

Bukti. Ruang quasi-Banach adalah ruang quasi-norm yang lengkap. Sehingga akan ditunjukkan bahwa ruang Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ adalah ruang quasi-norm yang memiliki kelengkapan.

Ambil sembarang $f, g \in w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Untuk menjadi ruang quasi-norm, maka ruang Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ harus memenuhi ketiga sifat berikut.

1. $\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$

   ($\Rightarrow$) Jika $\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = 0$

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = 0$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Perhatikan bahwa untuk γ, k_0 harus bernilai positif dan $f(x)$ bernilai mutlak, maka jelas bahwa $f(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Jika $f(x) = 0$

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(definisi)}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(definisi fungsi $m_k(\gamma, f)$)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |0| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(diketahui)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} (0) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(operasi perkalian)}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} (0)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(operasi penjumlahan)}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma\, (0) \qquad \text{(operasi perkalian)}$$

$$= 0. \qquad \text{(operasi perkalian)}$$

2. $\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = |\alpha| \|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, \alpha f)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |\alpha f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(definisi fungsi $m_k(\gamma, f)$)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |\alpha||f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat perkalian mutlak)

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left|\left\{x \in A_k : |f(x)| > \frac{\gamma}{|\alpha|}\right\}\right|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(operasi pembagian)

Pilih $\gamma' = \frac{\gamma}{|\alpha|}$, sehingga diperoleh

$$\|\alpha f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{\gamma'>0} |\alpha|\gamma' \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\gamma'>0} \gamma' \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma'\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} .$$

3. $\|f + g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq c \left(\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + \|g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \right)$; $\forall c \geq 1$

$$\|f + g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, f + g)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x) + g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pilih $c = 2$, karena

$$|\{x \in A_k : |\alpha f(x) + g(x)| > \gamma\}| \leq \left|\left\{x \in A_k : |f(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|$$

$$+ \left|\left\{x \in A_k : |g(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right|$$

Kemudian pilih $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$, maka diperoleh

$$\|f+g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}|\{x\in A_k : |f(x)+g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\left|\left\{x\in A_k : |f(x)|>\frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}} + \left|\left\{x\in A_k : |f(x)|>\frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(akibat pernyataan sebelumnya)

$$\leq \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left|\left\{x\in A_k : |f(x)|>\frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left|\left\{x\in A_k : |g(x)|>\frac{\gamma}{2}\right\}\right|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat distributif)

$$= \sup_{\gamma'>0}2\gamma' \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}|\{x\in A_k : |f(x)|>\gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\sup_{\gamma'>0}2\gamma' \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}|\{x\in A_k : |g(x)|>\gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(permisalan $\gamma' = \frac{\gamma}{2}$)

$$= 2\left(\sup_{\gamma'>0}\gamma' \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}|\{x\in A_k : |f(x)|>\gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$+2\left(\sup_{\gamma'>0}\gamma' \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}|\{x\in A_k : |g(x)|>\gamma'\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

(sifat asosiatif)

$$= 2\left(\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} + \|g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}\right). \quad \text{(definisi)}$$

Dari aksioma-aksioma yang telah dibuktikan di atas, diperoleh bahwa $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang quasi-norm. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang quasi-Banach dengan menunjukkan kelengkapannya sebagai berikut.

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Anggap bahwa terdapat barisan konvergen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sedemikian sehingga

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq a_k \;; \forall k \tag{3.6}$$

karena

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{j=n}^{n+k-1} \left[f_{j+1} - f_j\right] ; \forall n, k$$

maka

$$\|f_{n+k} - f_n\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq \sum_{j=n}^{n+k-1} \left\|f_{j+1} - f_j\right\|_{w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}$$

$$\leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

Misalkan $x \in w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$, maka

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \;; \forall n, k$$

Barisan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\left(f_n(x)\right)$ adalah barisan Cauchy terhadap bilangan riil. Himpunan bilangan riil merupakan ruang yang lengkap.

Misalkan limit dari $\left(f_n(x)\right)$ adalah $f(x)$, maka untuk $k \to \infty$ diperoleh

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \;; \forall n, \forall x \in w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$$

Sehingga diperoleh bahwa (f_n) konvergen seragam ke $f(x)$. Karena $f(n)$ kontinu, maka berlaku juga pada f. Kasus umum mengikuti kasus khusus dengan catatan bahwa barisan Cauchy konvergen jika terdapat barisan konvergen dan barisan

Cauchy di $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ memiliki subbarisan di mana persamaan (3.2) berlaku. Jadi, diperoleh bahwa $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ adalah quasi-Banach. □

Setelah terbukti bahwa ruang Herz dan ruang Morrey adalah ruang Banach, begitu juga dengan ruang Herz-Morrey yang juga terbukti merupakan ruang Banach, maka definisi norm di ruang Herz-Morrey berlaku dan dapat digunakan sebagai pengaplikasian ketaksamaan Hölder. Hal yang sama juga terbukti pada ruang Herz-Morrey lemah. Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu dari ketaksamaan dasar yang ada di analisis fungsional. Banyak penelitian-penelitian yang telah dilakukan menggunakan ketaksamaan Hölder dan modifikasinya. Ketaksamaan Hölder yang digunakan pada penelitian ini adalah ketaksamaan Hölder integral atas fungsi kontinu yang didefinisikan oleh Kantorovich dan Akilov (1982) dan dituliskan di Proposisi 2.5 dikarenakan objek yang digunakan adalah ruang Herz-Morrey yang merupakan ruang fungsi. Penelitian yang dilakukan adalah menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ dan Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$.

Teorema 3.5. *Misalkan* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, 0 \leq p \leq q < \infty, 0 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$, *dan* $0 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$, *sedemikian sehingga* $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$, *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}} \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}} \tag{3.6}$$

di mana $fg \in \mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Diketahui bahwa untuk sembarang $fg \in \mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sehingga berdasarkan definisi norm di $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ diperoleh

$$\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{fg \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n / \{0\}), \|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

di mana

$$\|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q} \|(fg)\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Kemudian berdasarkan definisi norm di ruang Lebesgue, diperoleh

$$\|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\big(f(x)g(x)\big)\chi_k\right|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Oleh karena fg bernilai mutlak dalam pernyataan di atas, maka jelas bahwa $\|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}$ bernilai tak negatif. Kemudian, diketahui juga bahwa $f \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in \mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$, sehingga diperoleh

$$\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 q_1}\|f\chi_k\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} < \infty$$

dan

$$\|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_2}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 q_2}\|g\chi_k\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty,$$

kemudian berdasarkan definisi norm di ruang Lebesgue, diperoleh

$$\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_k|^{p_1} dx\right)^{\frac{q_1}{p_1}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

dan

$$\|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 q_2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)\chi_k|^{p_2} dx\right)^{\frac{q_2}{p_2}}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Oleh karena f dan g dalam pernyataan di atas bernilai mutlak, maka nilai $\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}$ dan $\|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}}$ bernilai tak negatif. Selanjutnya akan ditunjukkan keberlakuan Persamaan 3.6 di atas menggunakan definisi yang telah dijabarkan.

Diketahui $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda,\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$, dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}}$ diperoleh

$$\|fg\|_{\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\|(fg)\chi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\big(f(x)g(x)\big)\chi_k\right|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(definisi norm di ruang Lebesgue)

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\chi_k|^{p_1}|g(x)\chi_k|^{p_2} dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat perkalian pangkat)

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\chi_k|^{p_1} dx \times \int_{\mathbb{R}^n}|g(x)\chi_k|^{p_2} dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat integral tak tentu)

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha q}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\chi_k|^{p_1} dx\right)^{\frac{q_1}{p_1}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)\chi_k|^{p_2} dx\right)^{\frac{q_2}{p_2}}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

(sifat perkalian bilangan berpangkat)

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\chi_k|^{p_1} dx\right)^{\frac{q_1}{p_1}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 q_2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)\chi_k|^{p_2} dx\right)^{\frac{q_2}{p_2}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

(sifat distributif)

$$= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 q_1}\|f\chi_k\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_2}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 q_2}\|g\chi_k\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

(definisi norm di ruang Lebesgue)

$$= \|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}} \|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}}. \qquad \text{(definisi)}$$

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa Persamaan 3.6 terbukti berlaku di ruang Herz-Morrey. Sehingga syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}$ adalah $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$, dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

□

Teorema 3.6. *Misalkan* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, 0 \leq p \leq q < \infty, 0 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$, *dan* $0 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$, *sedemikian sehingga* $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$, *dan* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$. *Jika* $f \in w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}} \leq \|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}} \|g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}} \qquad (3.7)$$

di mana $fg \in w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Diketahui bahwa untuk sembarang $fg \in w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sehingga berdasarkan definisi norm di $w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}$ diperoleh

$$w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{fg \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n / \{0\}) , \|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty\} ,$$

di mana

$$\|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma, fg)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Kemudian berdasarkan definisi fungsi $m_k(\gamma, fg)$, diperoleh

$$\|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x \in A_k : |f(x)g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Oleh karena fg bernilai mutlak dalam pernyataan di atas, maka jelas bahwa $\|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}}$ bernilai tak negatif. Kemudian, diketahui juga bahwa $f \in w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$, sehingga diperoleh

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} m_k(\gamma,f)^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty$$

dan

$$\|g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_2}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} m_k(\gamma,g)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty,$$

kemudian berdasarkan definisi fungsi $m_k(\gamma,f)$ dan $m_k(\gamma,g)$, diperoleh

$$\|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} |\{x\in A_k : |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

dan

$$\|g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_2}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} |\{x\in A_k : |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Oleh karena f dan g dalam pernyataan di atas bernilai mutlak, maka nilai $\|f\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}}$ dan $\|g\|_{\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}}$ bernilai tak negatif. Selanjutnya akan ditunjukkan keberlakuan Persamaan 3.7 di atas menggunakan definisi yang telah dijabarkan.

Diketahui $\alpha_1+\alpha_2\le\alpha, \lambda_1+\lambda_2=\lambda,\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\le\frac{1}{p}$, dan $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q}$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}}$ diperoleh

$$\|fg\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}} = \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} m_k(\gamma,fg)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x\in A_k : |f(x)g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(definisi fungsi $m_k(\gamma,fg)$)

$$= \sup_{\gamma>0}\gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} |\{x\in A_k : |f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(sifat perkalian mutlak)

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} (2^{k\alpha_1 p_1} \times 2^{k\alpha_2 p_2})|\{x \in A_k : |f(x)||g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(diketahui bahwa $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha$ dan $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$)

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1}|\{x \in A_k : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\times \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_2} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2}|\{x \in A_k : |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

(sifat distributif)

$$\leq \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_1} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} m_k(\gamma, f)^{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\times \sup_{\gamma>0} \gamma \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_2} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} m_k(\gamma, g)^{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

(definisi fungsi $m_k(\gamma, f)$ dan $m_k(\gamma, g)$)

$$= \|f\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}} \|g\|_{w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}}. \qquad \text{(definisi)}$$

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa Persamaan 3.7 terbukti berlaku di ruang Herz-Morrey lemah. Sehingga syarat cukup dari ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}$ adalah $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$, dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

□

3.2 Analogi Menaati Perintah dan Pengaplikasian Ketaksamaan Hölder

Konsep menaati perintah yang telah dijelaskan di bab 2.9 ternyata dapat dianalogikan terhadap topik penelitian yang dibahas pada sub bab sebelumnya, yaitu pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey. Ketaksamaan

Hölder yang ditunjukkan berlaku atau tidak di ruang Herz-Morrey beserta ruang lemahnya yaitu ruang Herz-Morrey lemah di mana prosesnya menggunakan definisi norm dari masing-masing ruang tersebut. Kemudian dioperasikan sedemikian rupa dengan berdasar pada dasar-dasar ilmu matematika, sehingga memberikan hasil akhir berlaku atau tidak pada ruang tersebut. Konsep dari proses tersebut dapat dianalogikan dengan konsep ketaatan seorang mukmin. Seorang mukmin memiliki kewajiban untuk taat kepada Allah, Rasul, dan Ulil Amri sebagaimana ayat yang telah dijelaskan di bab sebelumnya. Dalam Islam, 3 macam ketaatan dilakukan secara berjenjang, bahkan ketaatan terhadap Ulil Amri boleh dilanggar apabila bertentangan dengan perintah Allah dan Rasul-Nya. Dan apabila seorang mukmin melanggar atau tidak taat kepada Rasul dan Ulil Amri (dalam hal yang tidak bertentangan), sama halnya dengan mendurhakai Allah yang berakibat mendapatkan dosa besar dan bencana-bencana lain yang dapat merugikan diri seorang mukmin.

Ketaksamaan Hölder sendiri diibaratkan sebagai seorang mukmin yang harus menaati perintah-perintah yang berlaku. Perintah-perintah yang dimaksudkan adalah definisi-definisi norm dari masing-masing ruang (Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah). Sama seperti konsep ketaatan yang dilakukan secara berjenjang, dalam pengaplikasian ketaksamaan Hölder apabila ruang Herz-Morrey bukan merupakan ruang Banach dan ruang Herz-Morrey lemah bukan merupakan ruang quasi-Banach, maka definisi norm boleh dilanggar karena bertentangan dengan asumsi keberlakukan ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah, sehingga definisi norm tersebut dapat diabaikan dan tidak perlu dibuktikan, perlu dilakukan kajian ulang terkait definisi norm tersebut. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bukan hanya manusia saja yang diwajibkan untuk menaati perintah-perintah yang berlaku (baik perintah dari Allah, Rasul, maupun Ulil Amri), namun suatu ketaksamaan yang merupakan cabang dari ilmu juga diharuskan untuk menaati perintah agar mereka berlaku di ruang tersebut. Apabila ketaksamaan tersebut tidak memenuhi definisi dari norm ruang Herz-Morrey dan Herz-Morrey lemah, maka bisa berakibat ketaksamaan tersebut tidak berlaku di ruang fungsi tersebut.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dibahas pada bab sebelumnya, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey $\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ dan ruang Herz-Morrey lemah $w\mathcal{M}\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ adalah $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha, \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$, dan $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$.

4.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya menggunakan ruang fungsi lain, utamanya ruang-ruang yang baru didefinisikan. Selain itu juga bisa dilakukan penelitian untuk syarat perlu ketaksamaan Hölder di ruang Herz-Morrey sehingga dapat diketahui untuk nilai ekuivalen dari kedua syarat tersebut. Apabila ingin mengembangkan penelitian di ruang Herz-Morrey, peneliti menyarankan untuk mengaplikasikan ketaksamaan-ketaksamaan lain sebagai bahan penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

Al-‘Asqalani, Ibnu Hajar. 2011. *Fathul Bari Syarah Shahih al-Bukhari Kitab Zakat Jilid 13*. Jakarta: Pustaka Imam Syafi’i.

Al-Farran, Syaikh Ahmad Musthafa. 2008. *Tafsir Imam Syafi’i: Menyelami Kedalaman Kandungan Al-Qur’an Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Almahira.

Amalina, Dina Nur. 2018. Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue Lemah dan Ekuivalensinya dengan Kekonvergenan dalam Ruang Lebesgue. *Eureka Matematika*, 6 (2): 25-35.

Anton, H. dan Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra* 11^{th} *Edition*. United States of America: Anton Textbooks, Inc.

Ar-Rifa’i, Muhammad Nasib. 1999. *Kemudahan dari Allah: Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta: Gema Insani.

Bowers A. dan Kalton, N. J. 2014. *An Introductory Course in Functional Analysis*. New York: Springer.

Fatihah, N., Haripamyu, dan Ekariani. 2020. Ukuran Luar Lebesgue di $\mathbb{R}^n$. *Jurnal Matematika UNAND*, IX (2): 76-83.

Ghoffar, Muhammad Abdul. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 2*. Surabaya: Pustaka Imam Syafi’i.

Ifronika, Idris, Masta, dan Gunawan. 2018. Generalized Hölder’s Inequality in Morrey Spaces. *Matematički Vesnik*, 70 (4): 326-337.

Izuki, M. 2010. Fractional Integral on Herz-Morrey Spaces with Variabel Exponent. *Hiroshima Math Journal*. 40: 343-355.

Kalton, Nigel. 2003. *Quasi-Banach Spaces in: Handbook of The Geometry of Banach Spaces, Vol. 2*. Elsevier.

Kantorovich, L. V. dan Akilov, G. P. 1982. *Functional Analysis (Second Edition): Normed Spaces*. Pergamon.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons.

Lestari, Dwi. 2012. *Materi Aljabar Linear Lanjut: Ruang Vektor*. Hand-out Aljabar Linear Lanjut. Universitas Negeri Yogyakarta.

Li, Y., Gu, X., dan Zhao, J. 2018. The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality is Equivalent to the Hölder’s Inequality. *Symmetry*, 10.

Limanta, K. M. 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*. Tugas Akhir Program Sarjana. Institut Teknologi Bandung.

Lu, S. dan Xu, L. 2005. Boundedness of Rough Singular Integral Operators on The Homogeneous Morrey-Herz Spaces. *Hokkaido Mathematical Journal*, 34: 299-314.

Lu, S., Yang, D., dan Hu, G. 2008. *Herz Type Spaces and Their Application*. Beijing: Science Press.

Mu'tazili, A. 2019. *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang Morrey Kecil*. Tesis Program Magister. Institut Teknologi Bandung.

Rahman, Hairur. 2020. Inclusion Properties of The Homogeneous Herz-Morrey. *Cauchy-Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*. 6 (3): 117-121.

Rahman, Miftahur. 2017. Ûlī al-Amr dalam Al-Qur'an: Sebuah Aplikasi Teori Kontekstual Abdullah Saeed. *Jurnal Studi Ilmu-Ilmu Al-Quran dan Hadis*. 18.

Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. M. 2010. *Real Analysis Fourth Edition*. Republic of China: Pearson Educational Asia Limited and China Machine Press.

Rukmana, I. 2016. *Operator Pengali pada Ruang Morrey dan Ruang Morrey Lemah*. Tesis Program Magister. Institut Teknologi Bandung.

Rynne, B. P. dan Youngson, M. A. 2000. *Normed Spaces in: Linear Functional Analysis.* London: Springer.

Sawano, Y., Fazio, dan Hakim. 2020. *Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's Volume I*. India: CRC Press.

Thomson, Brian S. 2020. The Bounded Convergence Theorem. *The American Mathematical Monthly*. 127 (6): 485-503.

Wu, Cong dan Li, Yongjin. 2008. On The Triangle Inequality in Quasi-Banach Spaces. *Journal of Mathematics, Engineering and IT*.

RIWAYAT HIDUP

Amelia Nuril Fajriyani, lahir di Gresik pada tanggal 7 Mei 1999. Putri pertama dari Bapak Zamroni dan Ibu Lu'luil Maknun. Ia dilahirkan dan dibesarkan di rumah sederhana yang terletak di Jalan Pemuda 03 Desa Sidomulyo Kecamatan Sidayu Kabupaten Gresik.

Perempuan dengan sapaan Amel ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Aisyiyah Bustanul Athfal 09 Sidayu yang lulus pada tahun 2005, dilanjutkan dengan pendidikan dasar di SD Muhammadiyah Sidayu hingga lulus pada tahun 2011. Semasa menempuh pendidikan dasar, dia juga menempuh pendidikan non-formal 4 tahun di Madrasah Diniah Awaliah Aisyiyah Sidayu. Kemudian dia menempuh jenjang menengah pertama di SMP Negeri 1 Sidayu dan lulus pada tahun 2014, yang juga pada periode yang sama menempuh pendidikan non-formal di Madrasah Diniah Wustho Aisyiyah Sidayu. Selanjutnya menempuh pendidikan di SMA Negeri 1 Sidayu dan lulus pada tahun 2017. Pada tahun yang sama juga tercatat sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Perempuan yang semasa SMA dikenal dengan suara MC ini mulai aktif mengikuti organisasi sejak SMP. Dimulai dari menjadi duta lingkungan ketika lomba adiwiyata di SMP, menjabat sebagai sekretaris umum di OSIS SMA, dan masih banyak pengalaman berorganisasi lainnya. Selama menjadi mahasiswa, dia mengikuti organisasi mahasiswa ekstra (OMEK), menjadi asisten laboratorium, menjadi koordinator akademik di komunitas Serambi Matematika Aktif (SEMATA), menjadi relawan pendidikan dan relawan promotor kesehatan mental, serta aktif mengikuti seminar-seminar motivasi baik yang dilakukan secara luring maupun daring.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Amelia Nuril Fajriyani
NIM : 17610055
Fakultas/Program Studi : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Herz-Morrey
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Maret 2021	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	05 April 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	26 April 2021	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	03 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan dari Pembimbing I	4.
5.	06 Mei 2021	ACC untuk diseminarkan dari Pembimbing II	5.
6.	08 Juni 2021	Konsultasi Integrasi Keislaman	6.
7.	09 Juni 2021	Konsultasi Bab I, II, III, dan IV	7.
8.	10 Juni 2021	Revisi Kajian Keislaman	8.
9.	10 Juni 2021	ACC untuk disidangkan dari Pembimbing I	9.
10.	11 Juni 2021	ACC untuk disidangkan dari Pembimbing II	10.
11.	18 Juni 2021	Konsultasi Pra Sidang	11.

Malang, 11 Juni 2021
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001