

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED*  
KORTEWEG DE VRIES MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA CRANK-NICOLSON**

**SKRIPSI**

**OLEH  
MUHAMAD GHOZALI  
NIM. 10610017**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED*  
KORTEWEG DE VRIES MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA CRANK-NICOLSON**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Muhamad Ghozali  
NIM. 10610017**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED*  
KORTEWEG DE VRIES MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA CRANK-NICOLSON**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Muhamad Ghozali  
NIM. 10610017**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 7 Oktober 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN *FORCED*  
KORTEWEG DE VRIES MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA CRANK-NICOLSON**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Muhamad Ghozali  
NIM. 10610017**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 3 Desember 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si .....

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhamad Ghozali

NIM : 10610017

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* Korteweg de Vries  
Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil pikiran atau tulisan orang lain yang saya akui sebagai hasil pikiran atau tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 3 Oktober 2015  
Yang membuat pernyataan,

Muhamad Ghozali  
NIM. 10610017

## MOTO

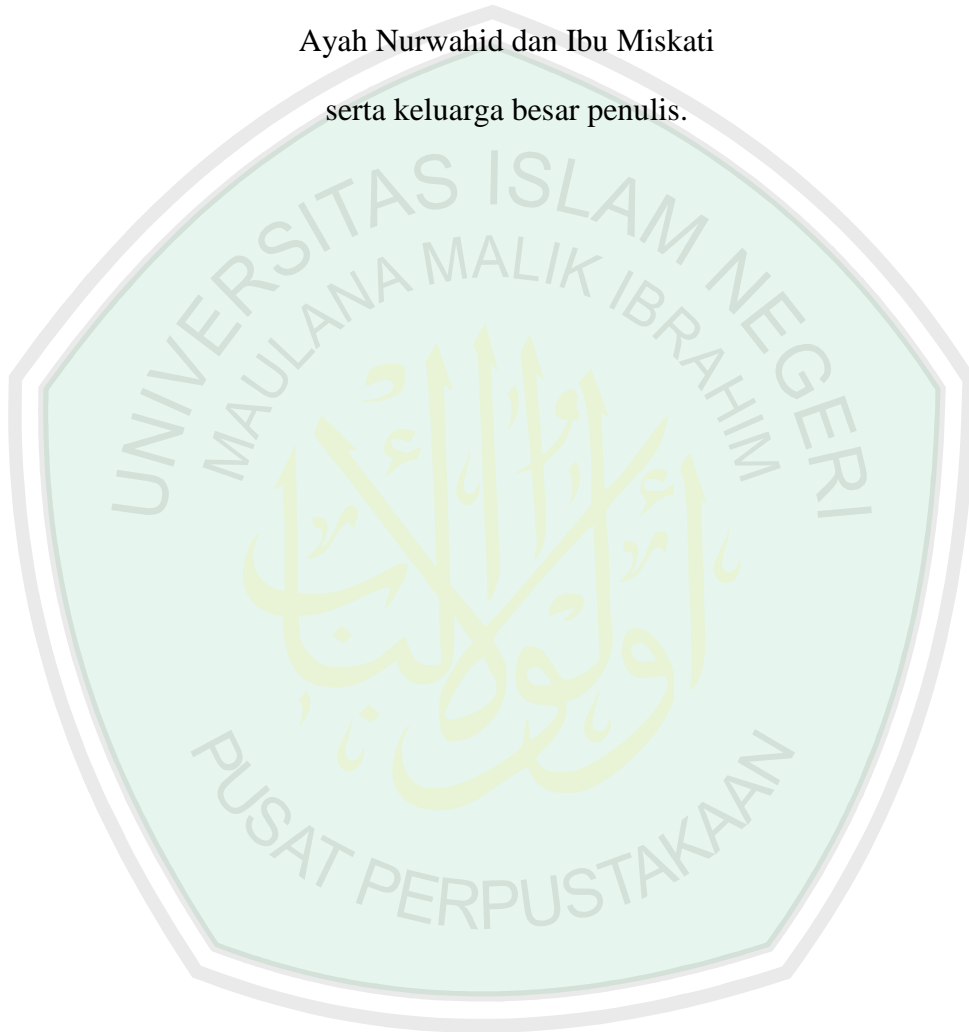
“Sebaik-baik Manusia adalah yang Bermanfaat bagi Sesama”



## PERSEMBAHAN

Karya tulis ini dipersembahkan untuk:

Ayah Nurwahid dan Ibu Miskati  
serta keluarga besar penulis.



## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* Korteweg de Vries Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson” ini dengan baik dan tepat waktu. *Shalawat* serta salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah mengantarkan manusia dari jaman kegelapan ke jaman yang terang benderang yakni dengan ajaran agama Islam.

Selesainya skripsi ini tidak luput dari bantuan berbagai pihak, baik secara moral maupun spiritual. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bimbingan dengan penuh kesabaran.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen wali.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan ide mengenai permasalahan skripsi ini serta meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan dengan penuh kesabaran.

6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan seluruh staf serta karyawan.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang selalu memberikan semangat dan doa kepada penulis.
8. Evi Nur Azizah, sebagai teman, sahabat, dan guru terbaik yang senantiasa memotivasi agar skripsi ini dapat diselesaikan.
9. Sahabat-sahabati Integral, Celot 2010, Galileo, Teater Galileo, dan Sunan Ampel yang telah membimbing dan menemani penulis untuk berproses menjadi pribadi yang lebih baik.
10. Teman-teman seperjuangan selama perkuliahan, teman-teman koloni *Math A*, *Math 2010*, dan terutama bagi teman-teman yang telah bersedia membagikan ilmunya agar skripsi ini dapat diselesaikan tepat waktu.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah wawasan keilmuan khususnya di bidang matematika. Amin.

Malang, Oktober 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

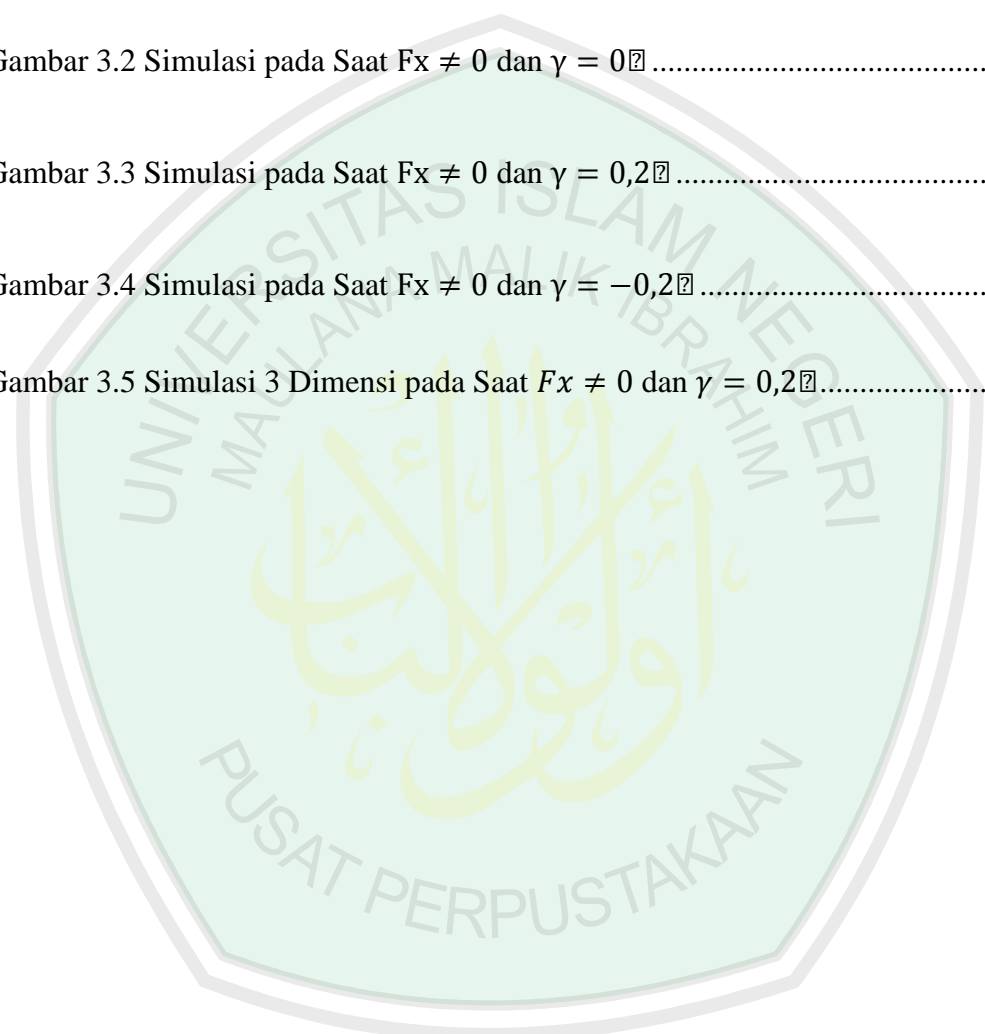
<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>ملخص</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	9
2.1 Persamaan <i>Forced</i> Korteweg de Vries (KdV).....	9
2.2 Kondisi Awal dan Kondisi Batas.....	10
2.3 Deret Taylor.....	11
2.4 Skema FTCS ( <i>Forward Time Central Space</i> ).....	13
2.5 Skema Crank-Nicolson.....	15
2.6 Analisis Kestabilan.....	16
2.7 Analisis Konsistensi.....	17
2.8 Solusi Permasalahan dalam Perspektif Islam.....	19
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	23
3.1 Persamaan <i>Forced</i> KdV, Syarat Awal, dan Kondisi Batas.....	23
3.2 Diskritisasi.....	23
3.3 Analisis Kestabilan.....	26

3.4 Analisis Konsistensi .....	29
3.5 Simulasi dan Interpretasi Hasil.....	32
3.6 Kajian Keagamaan.....	37
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>39</b>
4.1 Kesimpulan.....	39
4.2 Saran .....	39
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>40</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	
<b>RIWAYAT HIDUP</b>	



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Simulasi pada Saat $F_x = 0$ .....	33
Gambar 3.2 Simulasi pada Saat $F_x \neq 0$ dan $\gamma = 0$ .....	34
Gambar 3.3 Simulasi pada Saat $F_x \neq 0$ dan $\gamma = 0,2$ .....	35
Gambar 3.4 Simulasi pada Saat $F_x \neq 0$ dan $\gamma = -0,2$ .....	36
Gambar 3.5 Simulasi 3 Dimensi pada Saat $F_x \neq 0$ dan $\gamma = 0,2$ .....	37



## ABSTRAK

Ghozali, Muhamad. 2015. **Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced Korteweg de Vries* Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

**Kata kunci:** Solusi Numerik, Persamaan *Forced Korteweg de Vries*, Metode Beda Hingga, Skema Crank-Nicolson.

Skripsi ini membahas tentang solusi numerik persamaan *Forced Korteweg de Vries* (KdV) yang merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier orde tiga dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson. Langkah awal adalah dilakukan diskritisasi pada persamaan *Forced KdV* dengan metode beda maju terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang, kemudian diterapkan skema Crank-Nicolson. Selanjutnya linierisasi dengan menggunakan aproksimasi deret Taylor agar mendapatkan persamaan yang linier. Dalam skripsi ini juga dibahas kestabilan dari metode yang digunakan dengan menggunakan metode stabilitas von Neumann, dalam hal ini didapatkan bahwa metode tersebut adalah stabil tanpa syarat. Analisis konsistensi juga disajikan dalam skripsi ini, hasil analisis menunjukkan nilai galat orde dua  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  dan  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ . Hasil perhitungan menunjukkan bahwa metode tersebut konsisten. Selanjutnya juga disajikan simulasi dan interpretasi yang menunjukkan bahwa perhitungan yang dilakukan sudah benar dan sesuai dengan yang diharapkan serta dapat dibandingkan dengan metode lain.

## ABSTRACT

Ghozali, Muhamad. 2015. **Numerical Solution for Forced Korteweg de Vries Equation using Finite Difference Method with Crank-Nicolson Scheme.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

**Keywords:** Numerical Solution, Forced Korteweg de Vries Equation, Finite Difference Method, Crank-Nicolson scheme.

This thesis discusses about numerical solution of Forced Korteweg de Vries (KdV) equation which is third order nonlinear partial differential equation using Crank-Nicolson method. The first step is to perform the discretization on Forced KdV equation with difference method in which forward respect to time and central respect to space, and then Crank-Nicolson scheme is applied. The next step is to linearize it using Taylor series approximation in order to obtain a linear equation. In this thesis is also discussed the stability of the methods using von Neumann stability method, in this case it is found that the method is unconditionally stable. Analysis of consistency is also presented in this thesis to analyze the value of the error of the method used. The result shows the error value of second order respect to time and space. The calculation shows that the method is consistent. Furthermore, it also presented a simulation and interpretation in order to show that the calculations were done correctly and as expected, and can be compared with another method.

## ملخص

غزالي ، محمد. ٢٠١٥. الحل العددي لمعادلة **Forced Korteweg de Vries** باستخدام طريقة الفرق المحدود بمخطط **Crank-Nicolson**. الشعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) محمد جمهرى، الماجستير (٢) الدكتور عبد الشاكر، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الحلول العددية، لمعادلة **Forced Korteweg de Vries**، طريقة الفرق المحدود، مخطط **Crank-Nicolson**.

هذه الأطروحة تناقش حول الحل العددي لمعادلة **Forced Korteweg de Vries (KdV)** التي كانت المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الثالثة باستخدام طريقة الفرق المحدود من مخطط **Crank-Nicolson**. الخطوة الأولى هي لأداء تفريد بالقضاء على المعادلة **Forced KdV** بطريقة الفرق الامامي عن الوقت وطريقة الفرق المركزي عن الفضاء، ثم يتم تطبيق مخططة **Crank-Nicolson**. ثم تخطيطها باستخدام تقريب سلسلة **Taylor** من أجل الحصول على معادلة خطية. في هذه الأطروحة هنا مناقشة استقرار الطريقة المستخدمة باستخدام طريقة **von Neumann**، في هذه الحالة وجدت أن هذه الطريقة مستقرة دون قيد أو شرط. تحليل الاتساق سيعرض أيضا في هذه الأطروحة إلى تحليل قيمة الخطأ عن الطريقة المستخدمة. والنتيجة تظهر قيمة الخطأ من الرتبة الثانية إلى الزمان والفضاء. يظهر حساب أن هذه الطريقة متسقة. وعلاوة على ذلك، وقدمت أيضا محاكاة وتفسيرها من أجل إظهار أن الحسابات أجريت بشكل صحيح وكما هو متوقع، ويمكن مقارنتها مع طريقة أخرى.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Allah Swt. menjamin bahwa semua permasalahan selalu ada penyelesaian atau jalan keluarnya bagi orang-orang yang beriman sebagaimana firman-Nya yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“5. Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, 6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. al-Syarh/94:5-6).

Ayat tersebut menerangkan bahwa dalam sebuah kesulitan terdapat kemudahan. Jika Allah Swt. sudah berfirman bahwa sudah pasti ada kemudahan maka manusia hanya cukup mencari kemudahan-kemudahan tersebut dalam setiap permasalahannya. Setiap kesulitan yang diberikan kepada manusia adalah sebuah ujian, jika manusia dapat mengatasi ujian tersebut maka Allah Swt. akan mengangkat derajatnya di dunia maupun di akhirat. Allah Swt. juga tidak pernah memberikan ujian kepada manusia kecuali manusia tersebut dapat mengatasinya, sebagaimana firman Allah Swt. yaitu:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ ﴿٢٨٦﴾

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya” (QS. al-Baqarah/2:286).

Secara sama merujuk dari ayat tersebut, permasalahan menemukan penyelesaian suatu persamaan diferensial parsial nonlinier dalam matematika dapat ditempuh secara eksak atau numerik. Jika penyelesaian eksak sulit

ditentukan karena tingkat kompleksitasnya, maka dapat ditempuh dengan penyelesaian numerik. Sebagai contoh persamaan yang belum ditemukan penyelesaian eksaknya yaitu persamaan *Forced* Korteweg de Vries (KdV). Persamaan *Forced* KdV adalah persamaan gerak yang dapat menggambarkan gerak gelombang soliter. Gelombang soliter adalah gelombang yang memiliki satu puncak, dimana dalam perambatannya mempertahankan bentuk dan kecepatannya (Hakim, 2009:1). Persamaan *Forced* KdV adalah persamaan diferensial parsial nonlinier tak homogen dengan variabel  $t$  sebagai waktu dan  $x$  sebagai ruang yang merupakan representasi dari gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah gundukan (Grimshaw, dkk, 2007:1). Persamaan tersebut memuat turunan pertama terhadap waktu, turunan pertama terhadap ruang dan juga turunan ketiga terhadap ruang atau dengan kata lain merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier order tiga. Sampai saat ini belum ditemukan penyelesaian eksak pada persamaan *Forced* KdV, namun persamaan ini dapat dicari penyelesaian hampirannya dengan menggunakan metode numerik (Wiryanto & Akbar, 2008:1). Salah satu metode numerik yang cukup populer adalah metode beda hingga skema Crank-Nicolson.

Dalam analisis numerik, skema Crank-Nicolson merupakan metode beda hingga yang pada hakekatnya adalah rata-rata dari metode beda hingga skema eksplisit dan implisit (Wilmott, dkk, 1995:130). Skema Crank-Nicolson dalam penelitian ini menggunakan pendekatan FTCS (*Forward Time Central Space*) yaitu persamaan beda maju terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang. Kelebihan dari skema ini adalah bahwa untuk nilai  $\Delta x$  tertentu kesalahan

pemotongan pada suku dalam  $\Delta t$  adalah lebih kecil daripada skema implisit dan eksplisit (Triatmodjo, 2002:222).

Selanjutnya penyelesaian numerik dari dari persamaan *Forced* KdV tersebut belum tentu menghasilkan penyelesaian yang tepat sama dengan penyelesaian eksaknya. Sehingga dalam merumuskan suatu persamaan beda diperlukan analisis kestabilan (Chendra, 2007:11). Suatu persamaan beda dikatakan stabil jika skema tersebut menghasilkan penyelesaian yang tidak terpengaruh oleh nilai awal sehingga dengan keadaan nilai awal berapapun maka hasil penyelesaian tersebut akan tetap sama (Flaherty, 1966:15). Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan adalah dengan metode stabilitas *von Neumann* yaitu dengan mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$  pada persamaan yang telah didiskritkan. Syarat suatu metode dikatakan stabil adalah jika  $|\rho| \leq 1$  (Zauderer, 2006:391).

Analisis konsistensi juga diperlukan untuk mengetahui nilai galat perhitungan suatu metode numerik, sehingga hasil perhitungan dapat diketahui seberapa dekat dengan hasil eksaknya. Analisis konsistensi digunakan untuk mengetahui bahwa persamaan beda yang dihasilkan merupakan hasil pendekatan yang baik terhadap penyelesaian eksaknya (Flaherty, 1966:15). Salah satu penerapan analisis konsistensi adalah dengan pendekatan deret Taylor yaitu mensubstitusikan deret Taylor pada persamaan diskrit, dan selanjutnya akan ditemukan nilai galat dari metode yang digunakan. Jika limit  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$  dari nilai galat adalah sama dengan nol maka dapat disimpulkan bahwa metode yang digunakan adalah konsisten. Jika suatu metode numerik telah terbukti stabil

dan konsisten maka penyelesaian numerik tersebut konvergen terhadap penyelesaian eksaknya.

Penelitian sebelumnya tentang penyelesaian numerik persamaan *Forced* KdV telah dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya yaitu oleh Grimshaw, dkk (2007) dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*), serta Wiryanto & Akbar (2008) menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS (*Forward Time Central Space*). Kedua penelitian tersebut tidak dilakukan analisis kestabilan dan analisis konsistensi sehingga tidak dapat disimpulkan metode yang digunakan stabil ataupun konsisten. Namun syarat kestabilan dan syarat konsistensi dari penyelesaian numerik dengan metode beda hingga skema eksplisit telah dilakukan oleh Syifaul Amamah (2014) dalam tugas akhirnya. Penelitian selanjutnya disarankan agar setiap penyelesaian numerik juga di tambahkan perhitungan analisis kestabilan dan analisis konsistensi.

Adapun posisi penelitian ini adalah menganalisis kembali persamaan *Forced* KdV dari Syifaul Amamah (2014), Grimshaw, dkk (2007), serta Wiryanto & Akbar (2008) tetapi menggunakan skema Crank-Nicolson. Kedalaman analisis dalam penelitian ini adalah sampai pada analisis kestabilan dan konsistensi dari skema tersebut. Penelitian ini dilakukan agar semakin banyak cara penyelesaian untuk persamaan *Forced* KdV, dengan begitu maka para peneliti lain akan semakin mudah dalam membandingkan mana metode yang paling baik dalam menyelesaikan persamaan tersebut. Metode ini juga mempunyai kelebihan yaitu bahwa untuk nilai  $\Delta x$  tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam  $\Delta t$  adalah lebih kecil daripada skema implisit dan eksplisit.

Berdasarkan uraian singkat tersebut maka penelitian ini menggunakan judul “Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* KdV Menggunakan Metode Bada Hingga Skema Crank-Nicolson”.

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan *Forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson?
2. Bagaimana syarat kestabilan dan kekonsistenan dari skema yang digunakan?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini mempunyai tujuan sebagai berikut:

1. Menyelesaikan persamaan *Forced* KdV menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson.
2. Menentukan syarat kestabilan dan kekonsistenan dari skema yang digunakan.

### 1.4 Batasan Masalah

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada latar belakang, adapun model yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan *Forced* KdV yang digunakan oleh Grimshaw, dkk (2007). Adapun persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$U_t + \gamma U_x - \mu U U_x - \lambda U_{xxx} = \frac{c}{2} F_x(x)$$

$$\gamma = 0, \quad \mu = \frac{3c}{2h}, \quad \lambda = \frac{ch^2}{6}, \quad c = (gh)^{\frac{1}{2}}$$

dengan nilai  $c = 1$  dan  $h = 1$  maka  $\lambda = \frac{1}{6}$  dan  $\mu = \frac{3}{2}$

$$F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$$

dengan  $\mu = 0,25$ ,  $F_M = 0,1$  dan  $L = 50$

Adapun kondisi batas untuk  $x \rightarrow -\infty$  adalah  $U(-\infty, t) = 0$  dan  $x \rightarrow \infty$  adalah  $U(t, \infty) = 0$ . Sedangkan kondisi awalnya adalah  $U(x, 0) = 0$ . Selanjutnya  $\Delta t = 0,25$  dengan  $0 \leq t \leq 200$  dan  $\Delta x = 0,6$  dengan  $-200 \leq x \leq 300$ .

### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan *Forced KdV* dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson, serta tambahan penyelesaian numerik pada persamaan *Forced KdV*.

### 1.6 Metode Penelitian

Teknik kajian yang digunakan dalam pembahasan penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*). Penelitian kepustakaan merupakan penelitian yang dilakukan dengan cara membaca, memahami, menelaah, kemudian mengidentifikasi pengetahuan yang diperoleh dari beberapa literatur.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini antara lain yaitu:

1. Menyelaraskan kondisi batas, kondisi awal, dan persamaan *Forced KdV* dengan literatur yang digunakan sebagai acuan.

2. Melakukan diskritisasi pada persamaan *Forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson.
3. Melakukan linierisasi pada persamaan diskrit yang dihasilkan.
4. Melakukan analisis kestabilan menggunakan stabilitas von Neumann dengan mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$  dengan  $i = \sqrt{-1}$  pada hasil diskritisasi.
5. Melakukan analisis konsistensi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor.
6. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan dengan program MATLAB.
7. Interpretasi hasil.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam pembahasan ini adalah:

#### Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini dijelaskan beberapa hal yang menjadi dasar dalam penelitian ini yaitu tentang persamaan *Forced* KdV, Kondisi awal, dan kondisi batas, Deret Taylor, Skema FTCS (*Forward Time Central Space*), skema Crank-Nicolson, analisis kestabilan, dan analisis konsistensi.

#### Bab III Pembahasan

Dalam bab ini berisi tentang prosedur yang digunakan untuk penyelesaian numerik persamaan *Forced* KdV dengan menggunakan metode beda

hingga skema Crank-Nicolson serta melakukan analisis kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan.

#### Bab IV Penutup

Dalam bab ini dipaparkan mengenai kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian dan beberapa saran.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan *Forced Korteweg de Vries (KdV)*

Grimshaw, dkk (2007:1) menyebutkan bahwa persamaan *Forced KdV* adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang merupakan representasi dari gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah gundukan. Wiryanto & Akbar (2008:1) menyebutkan bahwa sampai saat ini belum ditemukan penyelesaian eksak pada persamaan tersebut. Secara umum persamaan *Forced KdV* berbentuk:

$$U_t + \gamma U_x - \mu U U_x - \lambda U_{xxx} = \frac{c}{2} F_x(x) \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) memiliki dua variabel bebas yaitu  $x$  dan  $t$ , serta satu variabel terikat yaitu  $U$  yang merupakan ketinggian gelombang permukaan. Sedangkan  $\mu$ ,  $\lambda$  merupakan suatu konstanta yang berkaitan dengan besaran fisis yang mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$\mu = \frac{3c}{2h}, \quad \lambda = \frac{ch^2}{6}, \quad c = (gh)^{\frac{1}{2}}$$

dengan  $h$  menyatakan kedalaman aliran,  $g$  sebagai gravitasi, dan  $c$  merupakan variabel kecepatan rambat.

Selanjutnya  $\gamma$  merupakan perbedaan kecepatan aliran, dimana jika  $\gamma < 0$  disebut aliran subkritis (*subcritical flow*), jika  $\gamma > 0$  disebut aliran superkritis (*supercritical flow*), sedangkan jika  $\gamma = 0$  maka disebut aliran kritis (*critical flow*). Sedangkan  $F(x)$  adalah fungsi untuk gundukan pada dasar saluran yang merupakan gaya luar sebagaimana disebutkan oleh Grimshaw, dkk (2007:2) yaitu:

$$F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$$

Bentuk gaya luar yang digunakan berupa gundukan dengan puncak datar dengan lebar  $L$  dan tinggi gundukan sebesar  $F_M$ . Sedangkan  $\mu$  merupakan sudut kemiringan antara  $F_M$  dan  $s$ , sedangkan  $s$  sebagai lebar kaki dari gundukan tersebut.

## 2.2 Kondisi Awal dan Kondisi Batas

Persamaan diferensial parsial mempunyai lebih dari satu penyelesaian, dengan demikian, perlu adanya kondisi yang diformulasikan sehingga persamaan tersebut memiliki penyelesaian yang tunggal (Strauss, 2007:20). Terdapat dua macam kondisi yang digunakan, yaitu kondisi awal dan kondisi batas. Kondisi awal digunakan untuk menggunakan penyelesaian pada waktu pertama atau pada saat  $t = 0$ .

$$C(x, t) = U(x)$$

Dengan  $U(x)$  merupakan posisi awal  $x$  pada saat  $t = 0$ . Dikarenakan fungsi  $U(x)$  menunjukkan posisi awal  $x$ , maka  $U(x)$  dapat bernilai konstanta atau fungsi yang dipengaruhi variabel  $x$ . Pada permasalahan tertentu, terdapat daerah (*domain*)  $x$  yang menjadikan persamaan diferensial tersebut menjadi valid. *Domain*  $x$  terletak pada interval  $0 < x < l$ , sehingga permasalahan kondisi batas pada daerah  $x$  hanya pada titik  $x = 0$  dan  $x = l$ . Adapun kondisi batas yang digunakan yaitu:

1. Kondisi batas Dirichlet:  $C(0, t) = g(t)$  dan  $C(l, t) = h(t)$ .
2. Kondisi batas Neumann:  $C_x(0, t) = g(t)$  dan  $C_x(l, t) = h(t)$ .

3. Kondisi batas Robin:  $C_x(0, t) - a_0 C(0, t) = g(t)$  dan  $C_x(l, t) + a_1 C_x(l, t) = h(t)$  dengan  $a_0$  dan  $a_1$  merupakan suatu konstanta.

Sehingga kondisi batas persamaan yang digunakan dalam penelitian ini merupakan kondisi batas Dirichlet. Pada masalah kondisi batas terdapat dua kalisifikasi yang paling penting untuk diperhatikan dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial, yaitu kondisi batas homogen dan kondisi batas tak homogen. Misalkan  $C(x, t)$  adalah suatu penyelesaian dari persamaan diferensial parsial pada batas  $0 < x < l$ , kondisi batas  $x = 0$  dan  $x = l$  dituliskan seperti persamaan berikut:

$$C(0, t) = g(x) \quad (2.2)$$

$$C(l, t) = h(x) \quad (2.3)$$

Persamaan (2.2) dan (2.3) merupakan contoh kondisi batas Dirichlet. Apabila  $g(t) = 0$  dan  $h(t) = 0$  maka disebut sebagai kondisi batas homogen, sedangkan apabila  $g(t) \neq 0$  dan  $h(t) \neq 0$  maka disebut sebagai kondisi batas tak homogen (Pinsky, 2003:450). Sehingga  $g(t)$  dapat bernilai konstanta yang tidak nol, ataupun sebuah fungsi yang dipengaruhi oleh variabel  $t$ , oleh karena itu, kondisi yang digunakan dalam penelitian ini merupakan kondisi awal homogen dan kondisi batas homogen.

### 2.3 Deret Taylor

Munir (2010) mengatakan jika dimisalkan  $U$  dan semua turunannya  $U', U'', U''', \dots$  kontinu di dalam selang  $[a, b]$ . Misalkan  $x_0 \in [a, b]$ , maka untuk nilai-nilai  $x$  disekitar  $x_0$  dan  $x \in [a, b]$ ,  $U(x)$  dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor sebagaimana berikut:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} U'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} U''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} U^m(x_0) \quad (2.4)$$

Munir (2010) menyatakan bahwa persamaan (2.4) merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*) yang disebut deret. Perhatikanlah bahwa deret Taylor ini panjangnya tidak berhingga sehingga untuk memudahkan penulisan suku-suku selanjutnya menggunakan tanda elipsis (...). Jika dimisalkan  $(x - x_0) = h$ , maka  $U(x)$  dapat juga ditulis sebagai:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{h}{1!} U'(x_0) + \frac{h^2}{2!} U''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} U^m(x_0) \quad (2.5)$$

Nugroho (2009) menyatakan bahwa suatu teori sederhana mengenai hampiran numerik dapat diperoleh melalui ekspansi deret Taylor dari  $U(x + h)$  di sekitar  $x$  yaitu:

$$U(x + h) = U(x) + \frac{h}{1!} U'(x) + \frac{h^2}{2!} U''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} U^m(x) \quad (2.6)$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa bila persamaan (2.6) dipangkas setelah suku turunan pertama, akan diperoleh bentuk:

$$U(x + h) = U(x) + \frac{h}{1!} U'(x) + \sigma(h) \quad (2.7)$$

Chapra & Canale (2010:96) mengatakan bahwa pendekatan pada persamaan (2.6) dapat digeneralisasi untuk fungsi yang bergantung pada dua variabel independen. Hal ini dicapai dengan versi multivariabel dari deret Taylor. Sebagai contoh, jika kita memiliki fungsi dari dua variabel independen  $x$  dan  $t$ , maka deret Taylor dapat ditulis sebagai berikut:

$$U(x + \Delta x, t + \Delta t) = U(x, t) + \frac{\partial U}{\partial x}(x) + \frac{\partial U}{\partial t}(t) + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x}(x)^2 + \frac{\partial U}{\partial x \partial t}(x)(t) + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 t}(t)^2 \right] + \dots \quad (2.8)$$

Causon & Mingham (2010:100) mengatakan bahwa untuk membangun pendekatan turunan parsial dari  $U$  terhadap  $x$  dimana  $t$  adalah konstan, secara efektif juga dapat menggunakan persamaan (2.5) yang merupakan turunan biasa (satu variabel) menjadi turunan parsial dengan variabel  $x$  dan  $t$ , serta mengganti ukuran langkah  $h$  dengan  $\Delta x$  (untuk menunjukkan perubahan  $x$ ) sehingga persamaan (2.5) dapat diubah menjadi:

$$U(x + \Delta x, t) = U(x, t) + \frac{\Delta x}{1!} U_x(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} U_{xx}(x, t) + \dots + \frac{\Delta x^m}{m!} U_m(x, t) \quad (2.9)$$

selanjutnya untuk membangun pendekatan turunan dari  $U$  terhadap  $t$  dimana  $x$  konstan dan mengganti ukuran langkah  $h$  dengan  $\Delta t$  (untuk menunjukkan perubahan  $t$ ) pada persamaan (2.5) adalah sebagai berikut:

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + \frac{\Delta t}{1!} U_t(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2!} U_{tt}(x, t) + \dots + \frac{\Delta t^m}{m!} U_m(x, t) \quad (2.10)$$

#### 2.4 Skema FTCS (*Forward Time Central Space*)

Persamaan beda maju terhadap waktu (*forward time*) diperoleh dari persamaan (2.10) yang dipotong hingga turunan pertama sebagaimana berikut:

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + \frac{\Delta t}{1!} U_t(x, t) + \sigma(\Delta t)$$

$$U_t(x, t) = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} \quad (2.11)$$

Strauss (2007) menyebutkan bahwa  $U_t(x, t)$  juga dapat ditulis menjadi  $\frac{\partial U}{\partial t}(j \Delta x, n \Delta t)$  dan  $U(x \Delta x, n \Delta t) \approx U_j^n$ , sehingga persamaan (2.11) dapat ditulis menjadi:

$$U_t \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} \quad (2.12)$$

Selanjutnya untuk persamaan beda pusat terhadap ruang (*central space*) dapat diperoleh menggunakan acuan deret Taylor persamaan (2.9) dengan mengurangkan persamaan beda maju terhadap beda mundur sebagaimana berikut:

$$\begin{aligned} U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t) &= [U(x, t) + U_x(x, t)\Delta x + \dots] - [U(x, t) - \\ &\quad U_x(x, t)\Delta x + \dots] \\ &= 2U_x(x, t)\Delta x + \dots \\ 2U_x(x, t)\Delta x &= U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^2 \\ U_x(x, t) &= \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

persamaan (2.13) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.14)$$

Adapun aproksimasi turunan kedua terhadap  $x$  untuk beda pusat diperoleh dari persamaan (2.9) yang dipotong hingga turunan kedua kemudian menjumlahkan persamaan beda maju dan beda mundur terhadap ruang sebagaimana berikut:

$$\begin{aligned}
U(x + \Delta x, t) + U(x - \Delta x, t) &= \left[ U(x, t) + U_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}U_{xx}(x, t)\Delta x^2 \dots \right] + \\
&\quad \left[ U(x, t) - U_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}U_{xx}(x, t)\Delta x^2 \right] \\
&= 2U(x, t) + U_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \dots \\
U_{xx}(x, t)\Delta x^2 &= U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^3 \\
U_{xx}(x, t) &= \frac{U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^3}{\Delta x^2} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk persamaan beda pusat turunan ketiga adalah sebagai berikut:

$$U_{xxx}(x, t) = \frac{U(x + 2\Delta x, t) - 2U(x + \Delta x, t) + 2U(x - \Delta x, t) - U(x - 2\Delta x, t) + O(\Delta x)^5}{2\Delta x^3} \quad (2.16)$$

persamaan (2.15) dan (2.16) juga dapat ditulis:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \quad (2.18)$$

## 2.5 Skema Crank-Nicolson

Menurut Triatmodjo (2002:221) skema Crank-Nicolson merupakan salah satu skema pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Pada skema eksplisit turunan terhadap ruang dari persamaan diferensial parsial ditulis pada waktu ke  $n$ . Pada skema implisit, turunan terhadap ruang dari persamaan tersebut ditulis untuk waktu  $n + 1$ . Pada kedua skema tersebut diferensial terhadap waktu ditunjukkan pada persamaan (2.12). Kelebihan dari skema Crank-Nicolson adalah bahwa

untuk nilai  $\Delta x$  tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam  $\Delta t$  adalah lebih kecil daripada skema implisit dan eksplisit (Triatmodjo, 2002:222).

Adapun diskritisasi pada persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson (Wikipedia, 2014) sebagaimana berikut:

a. Skema turunan 1, yaitu:

$$\left(\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

b. Skema turunan 2, yaitu:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

c. Skema turunan 3, yaitu:

$$\frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{U_{j+2}^{n+1} - 2U_{j+1}^{n+1} + 2U_{j-1}^{n+1} - U_{j-2}^{n+1}}{2\Delta x^3} + \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \right)$$

## 2.6 Analisis Kestabilan

Suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil atau tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap penyelesaian eksak dari masalah yang diberikan, sehingga penyelesaian numerik kurang mendekati penyelesaian eksak. Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan adalah stabilitas von Neumann atau juga dikenal dengan stabilitas Fourier, dengan menerapkan stabilitas von Neumann terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$  pada persamaan

diskrit yang dihasilkan, yang mana superskrip  $i$  menunjukkan posisi,  $n$  menunjukkan waktu,  $j$  merupakan vektor dan untuk semua  $a$  dalam interval  $[0, 2\pi]$ . Syarat perlu dan cukup stabilitas von Neumann adalah  $|\rho| \leq 1$  (Zauderer, 2006).

Guna memperjelas maka diberikan contoh perhitungan analisis kestabilan persamaan *Forced* KdV (sebagaimana persamaan (2.1)) menggunakan metode beda hingga skema eksplisit (Amamah, 2014:21-26) dan hasil diskritisasi sebagaimana berikut:

$$U_j^{n+1} = U_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma - \frac{U_{j+1}^n + U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \right) (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{6\Delta x^3} \left( \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n + U_{j-2}^n}{2} \right) + \Delta x F_x \quad (2.19)$$

Selanjutnya mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$  pada persamaan (2.19) dan dilakukan perhitungan sehingga diperoleh hasil akhir sebagai berikut:

$$|\rho_{1,2}| = \sqrt{\left[ -\left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{3\Delta x^3} \right\} \sin(a) \pm \sqrt{\left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{3\Delta x^3} \right\}^2 \sin^2(a) - 1} \right]}$$

syarat kestabilan von Neumann adalah jika  $|\rho| < 1$  sehingga untuk memenuhi hal tersebut maka syarat kestabilan metode beda hingga skema eksplisit adalah sebagai berikut:

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right) - \frac{2\Delta t}{3\Delta x^3} \right| \leq 1$$

## 2.7 Analisis Konsistensi

Zauderer (2006:742) menyebutkan bahwa penyelesaian numerik dikatakan konvergen apabila stabil dan konsisten. Jika penyelesaian numerik tersebut

konvergen maka penyelesaian numerik mendekati penyelesaian eksak. Kriteria konsistensi merupakan kondisi ideal dimana penyelesaian numerik sesuai dengan penyelesaian eksak pada persamaan diferensial parsial.

Konsistensi menunjukkan bahwa suatu penyelesaian dengan metode numerik merupakan pendekatan penyelesaian eksak pada persamaan diferensial parsial. Jika limit  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$  sama dengan nol, maka penyelesaian numerik yang didapatkan hampir sama dengan penyelesaian eksak. Jika penyelesaian numerik mendekati penyelesaian eksak, maka konsistensi terpenuhi. Berikut ini adalah contoh perhitungan analisis konsistensi persamaan *Forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit (Amamah, 2014:26-32) dan hasil diskritisasi sebagaimana persamaan (2.19). Setelah diekspansi menggunakan deret Taylor pada masing-masing suku persamaan (2.19) serta dilakukan perhitungan pengurangan dan penjumlahan maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( U_t + \gamma U_x - \frac{3}{2} U U_x - \frac{1}{6} U_{xxx} \right) \Big|_j^n + \left( \frac{1}{6} U_{ttt} \right) \Delta t^2 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{\gamma}{6} U_{xxx} - \frac{1}{4} U U_{xxx} - \frac{1}{2} U_x U_{xx} - \frac{1}{24} U U_{xxxx} \right) \Delta x^2 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{20} U_{tttt} \right) \Delta t^4 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{120} \gamma U_{xxxx} + \frac{1}{24} U_x U_{xxx} + \frac{1}{12} U_{xx} U_{xxx} + \frac{1}{80} U U_{xxxx} \Big|_j^n \right) \Delta x^4 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{240} U_{xx} U_{xxx} + \frac{1}{144} U_{xxx} U_{xxx} \right) \Delta x^6 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{2880} U_{xxxx} U_{xxxx} \right) \Delta x^8 \Big|_j^n
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dari persamaan (2.20) dapat diketahui bahwa galat pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde dua. Persamaan (2.20) dikatakan konsisten jika:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \left( \frac{1}{6} U_{ttt} \right) \Delta t^2 \Big|_j^n + \left( \frac{\gamma}{6} U_{xxx} - \frac{1}{4} UU_{xxx} - \frac{1}{2} U_x U_{xx} - \frac{1}{24} UU_{xxxx} \right) \Delta x^2 \Big|_j^n = 0$$

jika  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai  $U_{xxx}$ ,  $UU_{xxx}$ ,  $U_{xxxx}$ ,  $U_x U_{xx}$ , dan  $U_{ttt}$  jika dikalikan dengan  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. Sehingga galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode tersebut konsisten.

## 2.8 Penyelesaian Permasalahan dalam Perspektif Islam

Manusia dalam kehidupannya tidak akan pernah luput dari suatu masalah. Masalah merupakan ujian yang diberikan oleh Allah Swt. untuk diselesaikan agar manusia menjadi lebih baik dan mendapatkan derajat yang lebih tinggi. Permasalahan juga terdapat dalam ilmu pengetahuan, seperti dalam ilmu matematika. Berbagai macam permasalahan dalam matematika seperti belum adanya penyelesaian eksak persamaan *Forced* KdV sampai saat ini (Wiryanto & Akbar, 2008:1). Meskipun persamaan *Forced* KdV belum mempunyai penyelesaian eksak, namun penyelesaian persamaan tersebut dapat diketahui dengan metode numerik yang salah satunya adalah metode beda hingga skema Crank-Nicolson. Hal ini membuktikan bahwa setiap permasalahan pasti terdapat penyelesaian seperti yang dijelaskan dalam al-Quran yaitu:

﴿٦﴾ فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٧﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٨﴾

“5. Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, 6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. al-Syarh/94:1-8).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa dalam kesulitan terdapat kemudahan. Ayat *مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا* diulang dua kali yang berarti menta'qidkan atau menguatkan bahwa setiap kesulitan pasti ada kemudahan. Hal ini dianalogikan oleh Ibn Mas'ud bahwa seandainya suatu kesulitan masuk ke dalam batu, niscaya kemudahan akan keluar darinya. Dalam tata bahasa Arab juga disebutkan bahwa dalam ayat 5 dan 6 terdapat isim ma'rifah yaitu kalimat *الْعُسْرُ* dan isim nakirah pada kalimat *يُسْرًا*, sehingga terdapat dua kalimat isim ma'rifah dan dua kalimat isim nakirah. Jika isim ma'rifah diulang-ulang maka mempunyai arti yang sama dan jika isim nakirah diulang-ulang maka mempunyai arti yang berbeda (Katsir, 2006). Kesimpulan dari tata bahasa tersebut adalah bahwa dalam satu masalah akan terdapat beberapa penyelesaian, dan hal ini dikuatkan dalam hadits berikut:

لَنْ يَغْلِبَ عُسْرًا يُسْرَيْنِ

“*Satu kesulitan tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan.*”

Meskipun hadits ini merupakan hadits yang lemah, namun maknanya benar. Al-Baghawi (2004) juga menyebutkan bahwa ayat tersebut menta'qidkan agar manusia mempunyai harapan yang besar dalam menyelesaikan sebuah masalah. Allah Swt. juga tidak akan pernah memberikan masalah kepada manusia kecuali manusia tersebut dapat menyelesaikannya sebagaimana firman Allah Swt. yaitu:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۗ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا ۗ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إِكْرَامًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَىٰ

الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَأَعْفُ عَنَّا وَاعْفِرْ لَنَا  
وَارْحَمْنَا ۗ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (Mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. Beri maaflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir” (QS. al-Baqarah/2:286).

Ayat tersebut mengajarkan bahwa setiap manusia mempunyai kemampuan untuk mengatasi permasalahan dalam perjalanan hidupnya. Pahala adalah hal yang akan didapat bagi orang-orang yang berusaha mengatasi permasalahannya.

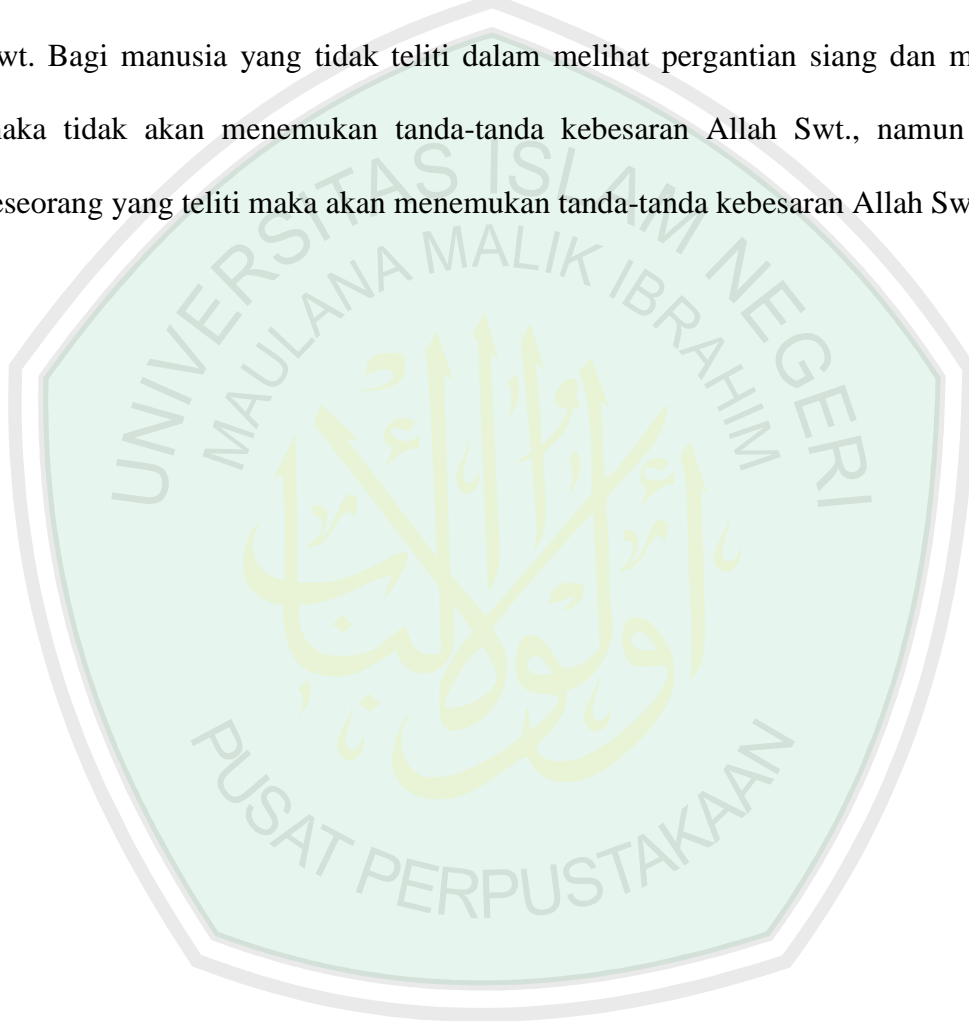
Penyelesaian numerik merupakan perhitungan yang menggunakan operasi penambahan, pengurangan, perkalian dan pembagian yang dilakukan secara berulang-ulang sehingga diperlukan ketelitian dalam menghitung guna mendapatkan hasil yang sesuai dengan tujuan. Jika dalam perhitungan terdapat sedikit kesalahan maka hasil yang didapatkan tidak akan sesuai. Allah Swt. berfirman:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفَلَكَ الَّتِي تَجْرِي فِي  
الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَّاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ  
مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيْحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ  
وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿٢٨٦﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hiduapkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala

*jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan” (QS. al-Baqarah/2:164).*

Ayat tersebut mengajarkan untuk teliti dalam mengkaji suatu hal seperti pergantian siang dan malam agar dapat mengetahui tanda-tanda kebesaran Allah Swt. Bagi manusia yang tidak teliti dalam melihat pergantian siang dan malam maka tidak akan menemukan tanda-tanda kebesaran Allah Swt., namun bagi seseorang yang teliti maka akan menemukan tanda-tanda kebesaran Allah Swt.



## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Persamaan *Forced* KdV, Syarat Awal, dan Kondisi Batas

Model persamaan *Forced* KdV yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan *Forced* KdV yang juga digunakan oleh Grimshaw, dkk (2007). Adapun persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$U_t + \gamma U_x - \mu U U_x - \lambda U_{xxx} = \frac{c}{2} F_x(x) \quad (3.1)$$

Penyelesaian numerik pada persamaan (3.1) dapat menggunakan syarat batas bawah  $U(-\infty, t) = 0$  dengan  $-\infty$  adalah nilai minimum  $x$  dan  $U(t, \infty) = 0$  dengan  $\infty$  merupakan nilai maksimum  $x$ . Nilai awal dapat diberikan  $U(x, 0) = 0$  atau  $U(x, 0) = f(x)$ , untuk setiap  $f(x)$  sebarang fungsi. Namun pada penyelesaian ini cukup menggunakan nilai awal  $U(x, 0) = 0$ . Domain  $t$  yaitu  $0 \leq t \leq 200$  dan domain  $x$  yaitu  $-200 \leq x \leq 300$  dengan interval  $\Delta t = 0,25$  dan  $\Delta x = 0,6$ .

#### 3.2 Diskritisasi

Pada bagian ini diuraikan prosedur penyelesaian persamaan (3.1) menggunakan skema Crank-Nicolson FTCS (*Forward Time Central Space*). Pendiskritan dilakukan terhadap  $t$  terlebih dahulu untuk mempermudah proses selanjutnya. Hasil pendiskritan adalah sebagai berikut:

$$U_t \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} \quad (3.2)$$

$$U_x \approx \frac{1}{2}(U_x^{n+1} + U_x^n) \quad (3.3)$$

$$UU_x \approx \frac{1}{2}(U^{n+1} U_x^{n+1}) + \frac{1}{2}(U^n U_x^n) \quad (3.4)$$

$$U_{xxx} \approx \frac{1}{2}(U_{xxx}^{n+1} + U_{xxx}^n) \quad (3.5)$$

Selanjutnya persamaan (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2}(U_x^{n+1} + U_x^n) - \frac{\mu}{2}(U_j^{n+1} U_x^{n+1}) - \frac{\mu}{2}(U_j^n U_x^n) \\ - \frac{\lambda}{2}(U_{xxx}^{n+1} + U_{xxx}^n) = \frac{c}{2}F_x(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pada persamaan (3.6) menunjukkan adanya suku yang nonlinier yaitu:

$$U^{n+1}U_x^{n+1} = (UU_x)^{n+1}$$

sehingga suku tersebut harus dilinierkan agar mendapatkan nilai yang dominan pada matriks koefisien saat perhitungan. Proses linierisasi dapat dilakukan dengan menggunakan hampiran deret Taylor orde 1, maka dapat diuraikan menjadi:

$$\begin{aligned} (UU_x)^{n+1} &\approx (UU_x)^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (UU_x)^n \\ &\approx (UU_x)^n + \Delta t (U_t U_x + UU_{xt})^n \\ &\approx (UU_x)^n + \Delta t \left( \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} U_x^n + U^n \frac{U_x^{n+1} - U_x^n}{\Delta t} \right) \\ &\approx (UU_x)^n + (U^{n+1}U_x^n - U^n U_x^n + U^n U_x^{n+1} - U^n U_x^n) \\ &\approx (UU_x)^n + U^{n+1}U_x^n - U^n U_x^n + U^n U_x^{n+1} - (UU_x)^n \\ &\approx U^{n+1}U_x^n - U^n U_x^n + U^n U_x^{n+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.7) pada persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2}(U_x^{n+1} + U_x^n) - \frac{\mu}{2}(U^{n+1}U_x^n - U^nU_x^{n+1}) - \frac{\mu}{2}(U_j^n U_x^n) \\ - \frac{\lambda}{2}(U_{xxx}^{n+1} + U_{xxx}^n) = \frac{c}{2}F_x(x) \end{aligned}$$

Dengan perhitungan aljabar maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2}(U_x^{n+1} + U_x^n) - \frac{\mu}{2}(U^{n+1}U_x^n) - \frac{\mu}{2}(U^nU_x^{n+1}) \\ - \frac{\lambda}{2}(U_{xxx}^{n+1} + U_{xxx}^n) = \frac{c}{2}F_x(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) merupakan hasil pendiskritan terhadap  $t$  saja dan berbentuk persamaan linier. Langkah selanjutnya yaitu pendiskritan persamaan (3.8) terhadap  $x$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ - \frac{\mu}{2} \left[ U_j^{n+1} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] - \frac{\mu}{2} \left[ U_j^n \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \right] \\ - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^{n+1} - 2U_{j+1}^{n+1} + 2U_{j-1}^{n+1} - U_{j-2}^{n+1}}{2\Delta x^3} \right) \\ - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \right) = \frac{c}{2}F_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan aljabar sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4\Delta x^3} U_{j-2}^{n+1} - \left[ \frac{2\lambda}{4\Delta x^3} + \frac{\gamma}{4\Delta x} - \left( \mu \frac{U_j^n}{4\Delta x} \right) \right] U_{j-1}^{n+1} + \left[ \frac{1}{\Delta t} - \mu \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4\Delta x} \right) \right] U_j^{n+1} \\ + \left[ \frac{\gamma}{4\Delta x} - \left( \mu \frac{U_j^n}{4\Delta x} \right) + \frac{2\lambda}{4\Delta x^3} \right] U_{j+1}^{n+1} - \frac{\lambda}{4\Delta x^3} U_{j+2}^{n+1} \\ = \frac{1}{2}F_x + \frac{U_j^n}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui stabil atau tidaknya metode yang digunakan. Dalam hal ini menggunakan analisis kestabilan von Neumann dengan cara mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  pada persamaan yang telah didiskritkan. Namun sebelum itu menurut Feng & Mitsui (1998) persamaan (3.1) harus diubah menjadi persamaan linier dengan mengubah  $UU_x$  menjadi  $\bar{U}U_x$  dimana  $\bar{U} = \max|U|$ , sehingga diperoleh:

$$U_t + \gamma U_x - \mu \bar{U} U_x - \lambda U_{xxx} = \frac{c}{2} F_x(x) \quad (3.11)$$

Selanjutnya persamaan (3.11) didiskritkan terhadap  $t$  dan  $x$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \right] \\ - \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^{n+1} - 2U_{j+1}^{n+1} + 2U_{j-1}^{n+1} - U_{j-2}^{n+1}}{2\Delta x^3} \right) \\ - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya hasil tersebut disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \right] \\ - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^{n+1} - 2U_{j+1}^{n+1} + 2U_{j-1}^{n+1} - U_{j-2}^{n+1}}{2\Delta x^3} \right) \\ = \frac{U_j^n}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] \\ + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \right) \end{aligned}$$

Selanjutnya mensubstitusikan  $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , yaitu:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho^{n+1}e^{iaj}}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\rho^{n+1}e^{ia(j+1)} - \rho^{n+1}e^{ia(j-1)}}{2\Delta x} \right) \\
& - \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{\rho^{n+1}e^{ia(j+1)} - \rho^{n+1}e^{ia(j-1)}}{2\Delta x} \right) \right] \\
& - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\rho^{n+1}e^{ia(j+2)} - 2\rho^{n+1}e^{ia(j+1)} + 2\rho^{n+1}e^{ia(j-1)} - \rho^{n+1}e^{ia(j-2)}}{2\Delta x^3} \right) \\
& = \frac{\rho^n e^{iaj}}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\rho^n e^{ia(j+1)} - \rho^n e^{ia(j-1)}}{2\Delta x} \right) + \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{\rho^n e^{ia(j+1)} - \rho^n e^{ia(j-1)}}{2\Delta x} \right) \right] \\
& + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\rho^n e^{ia(j+2)} - 2\rho^n e^{ia(j+1)} + 2\rho^n e^{ia(j-1)} - \rho^n e^{ia(j-2)}}{2\Delta x^3} \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dibagi  $\rho^n e^{iaj}$  guna mendapatkan persamaan yang lebih sederhana, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\rho e^{ia} - \rho e^{-ia}}{2\Delta x} \right) - \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{\rho e^{ia} - \rho e^{-ia}}{2\Delta x} \right) \right] \\
& - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\rho e^{2ia} - 2\rho e^{ia} + 2\rho e^{-ia} - \rho e^{-2ia}}{2\Delta x^3} \right) \\
& = \frac{1}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2\Delta x} \right) + \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2\Delta x} \right) \right] \\
& + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{e^{2ia} - 2e^{ia} + 2e^{-ia} - e^{-2ia}}{2\Delta x^3} \right)
\end{aligned}$$

Karena  $e^{\pm ia} = \cos(a) \pm i \sin(a)$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{\Delta t} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\rho(\cos(a) + i \sin(a)) - \rho(\cos(a) - i \sin(a))}{2\Delta x} \right) \\
& - \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{\rho(\cos a + i \sin a) - \rho(\cos a - i \sin a)}{2\Delta x} \right) \right] \\
& - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\rho(\cos(2a) + i \sin(2a)) - 2\rho(\cos(a) + i \sin(a)) + 2\rho(\cos(a) - i \sin(a)) - \rho(\cos(2a) - i \sin(2a))}{2\Delta x^3} \right) \\
& = \frac{1}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{(\cos(a) + i \sin(a)) - (\cos(a) - i \sin(a))}{2\Delta x} \right) \\
& + \frac{\mu}{2} \left[ \bar{U} \left( \frac{(\cos(a) + i \sin(a)) - (\cos(a) - i \sin(a))}{2\Delta x} \right) \right] \\
& + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{(\cos(2a) + i \sin(2a)) - 2(\cos(a) + i \sin(a)) + 2(\cos(a) - i \sin(a)) - (\cos(2a) - i \sin(2a))}{2\Delta x^3} \right)
\end{aligned}$$

Dengan perhitungan aljabar maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 + i\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - \lambda 2 \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right] \rho \\
& - \left[ 1 - i\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin 2(a) - \lambda 2 \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right] = 0
\end{aligned}$$

sehingga nilai  $\rho$  dapat diketahui sebagaimana berikut:

$$\rho = \frac{1 + \left\{ -i\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - \lambda 2 \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\}}{1 + i\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - \lambda 2 \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right]}$$

Selanjutnya menghitung  $|\rho|$  sebagaimana berikut:

$$|\rho| = \left| \frac{1 + \left\{ -i\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - \lambda 2 \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\}}{1 + i\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - \lambda 2 \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right]} \right|$$

Kreyszig (2011) menyebutkan bahwa  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_1 = x + iy$  dan  $|z| =$

$\sqrt{x^2 + y^2}$ , sehingga diperoleh:

$$|\rho| = \frac{\left| 1 + \left\{ -\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - 2\lambda \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\} \right|}{\left| 1 + \Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - 2\lambda \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right|}$$

$$|\rho| = \frac{\sqrt{1^2 + \left\{ -\Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - 2\lambda \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\}^2}}{\sqrt{1^2 + \left\{ \Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - 2\lambda \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\}^2}}$$

$$|\rho| = \frac{\sqrt{1^2 + \left\{ \Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - 2\lambda \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\}^2}}{\sqrt{1^2 + \left\{ \Delta t \left[ \left( \frac{\gamma \sin(a) - \mu \bar{U} \sin(a)}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\lambda \sin(2a) - 2\lambda \sin(a)}{2\Delta x^3} \right) \right] \right\}^2}}$$

$$|\rho| = 1$$

Hasil akhir menunjukkan  $|\rho| = 1$  sehingga dapat disimpulkan bahwa metode yang digunakan adalah stabil tanpa syarat dan bebas menentukan  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  dalam melakukan simulasi.

### 3.4 Analisis Konsistensi

Konsistensi metode beda hingga skema Crank-Nicolson dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan pada persamaan (3.9). Ekspansi deret Taylor yang digunakan dapat dilihat pada Lampiran 1.

Selanjutnya persamaan (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), dan (3.21) pada Lampiran 1 disubstitusikan ke masing-masing suku pada persamaan (3.9) yang menghasilkan beberapa persamaan pada Lampiran 2.

Persamaan (3.22), (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), dan (3.28) pada Lampiran 2 disubstitusikan pada persamaan (3.9) sebagaimana berikut:

$$\begin{aligned}
& U_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t U_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 U_{ttt} |_j^n + \frac{\gamma}{2} (U_x |_j^n + 2\Delta t U_{tx} |_j^n + \Delta t^2 U_{ttx} |_j^n - \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n) \\
& + \frac{\gamma}{2} \left( U_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n \right) \\
& - \frac{\mu}{2} \left[ U_j^n U_x |_j^n + \Delta t U_t |_j^n U_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 U_{tt} |_j^n U_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n U_x |_j^n \right. \\
& + \frac{1}{6} \Delta x^2 U_j^n U_{xxx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t U_t |_j^n U_{xxx} |_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^2 U_{tt} |_j^n U_{xxx} |_j^n \\
& \left. + \frac{1}{36} \Delta x^2 \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n U_{xxx} |_j^n \right] \\
& - \frac{\mu}{2} \left[ U_j^n U_x |_j^n + 2\Delta t U_j^n U_{tx} |_j^n + \Delta t^2 U_j^n U_{ttx} |_j^n + \Delta x^2 U_j^n U_{xxx} |_j^n \right] - \frac{\lambda}{2} (U_{xxx} |_j^n) \\
& - \frac{\lambda}{2} (U_{xxx} |_j^n) = \frac{c}{2} F_x
\end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan aljabar sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& U_t |_j^n + \frac{\gamma}{2} U_x |_j^n + \frac{\gamma}{2} U_x |_j^n - \frac{\mu}{2} U_j^n U_x |_j^n - \frac{\mu}{2} U_j^n U_x |_j^n - \frac{\lambda}{2} (U_{xxx} |_j^n) - \frac{\lambda}{2} (U_{xxx} |_j^n) \\
& + \left( \frac{1}{2} \Delta t U_{tt} |_j^n + \gamma \Delta t U_{tx} |_j^n - \frac{\mu}{2} \Delta t U_t |_j^n U_x |_j^n - \mu \Delta t U_j^n U_{tx} |_j^n \right) \\
& + \left( \frac{1}{6} \Delta t^2 U_{ttt} |_j^n + \frac{\gamma}{2} \Delta t^2 U_{ttx} |_j^n + \frac{\mu}{12} \Delta t^2 U_{tt} |_j^n U_x |_j^n \right. \\
& \left. - \frac{\mu}{2} \Delta t^2 U_j^n U_{ttx} |_j^n - \frac{\gamma}{2} \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n + \frac{\gamma}{12} \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n \right) \\
& + \frac{\mu}{12} \Delta x^2 U_j^n U_{xxx} |_j^n - \frac{\mu}{2} \Delta x^2 U_j^n U_{xxx} |_j^n + \left( \frac{\mu}{12} \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n U_x |_j^n \right) \\
& + \frac{\mu}{12} \Delta x^2 \Delta t U_t |_j^n U_{xxx} |_j^n + \frac{\mu}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 U_{tt} |_j^n U_{xxx} |_j^n \\
& + \frac{2}{72} \Delta x^2 \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n U_{xxx} |_j^n = \frac{c}{2} F_x
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
& (U_t + \gamma U_x - \mu U U_x - \lambda U_{xxx})|_j^n + \left( \frac{1}{2} U_{tt} + \gamma U_{tx} - \frac{\mu}{2} U_t U_x - \mu U U_x \right) \Delta t \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{6} U_{ttt} + \frac{\gamma}{2} U_{ttx} + \frac{\mu}{12} U_{tt} U_x - \frac{\mu}{2} U U_{ttx} \Big|_j^n \right) \Delta t^2 \Big|_j^n \\
& + \left( -\frac{\gamma}{2} U_{xxx} + \frac{\gamma}{12} U_{xxx} + \frac{\mu}{12} U U_{xxx} - \frac{\gamma}{2} U U_{xxx} \right) \Delta x^2 \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{\mu}{12} U_{ttt} U_x \right) \Delta t^3 \Big|_j^n + \left( \frac{\mu}{12} U_t U_{xxx} \right) \Delta x^2 \Delta t \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{\mu}{24} U_{tt} U_{xxx} \right) \Delta x^2 \Delta t^2 \Big|_j^n + \left( \frac{2}{72} U_{ttt} U_{xxx} \right) \Delta x^2 \Delta t^3 \Big|_j^n = \frac{c}{2} F_x
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dari persamaan (3.29) dapat diketahui bahwa galat pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde dua  $\mathcal{O}\Delta t^2$  dan  $\mathcal{O}\Delta x^2$ . Persamaan (3.29) dikatakan konsisten jika:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} U_{tt} + \gamma U_{tx} - \frac{\mu}{2} U_t U_x - \mu U U_x \right) \Delta t \Big|_j^n \\
& + \left( \frac{1}{6} U_{ttt} + \frac{\gamma}{2} U_{ttx} + \frac{\mu}{12} U_{tt} U_x - \frac{\mu}{2} U U_{ttx} \Big|_j^n \right) \Delta t^2 \Big|_j^n \\
& + \left( -\frac{\gamma}{2} U_{xxx} + \frac{\gamma}{12} U_{xxx} + \frac{\mu}{12} U U_{xxx} - \frac{\gamma}{2} U U_{xxx} \right) \Delta x^2 \Big|_j^n = 0
\end{aligned}$$

Jika  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai  $U, U_{ttt}, U_{tt}, U_t, U_{tx}, U_{ttx}, U_x, U_{xx}$ , dan  $U_{xxx}$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. Galat pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode yang digunakan adalah konsisten.

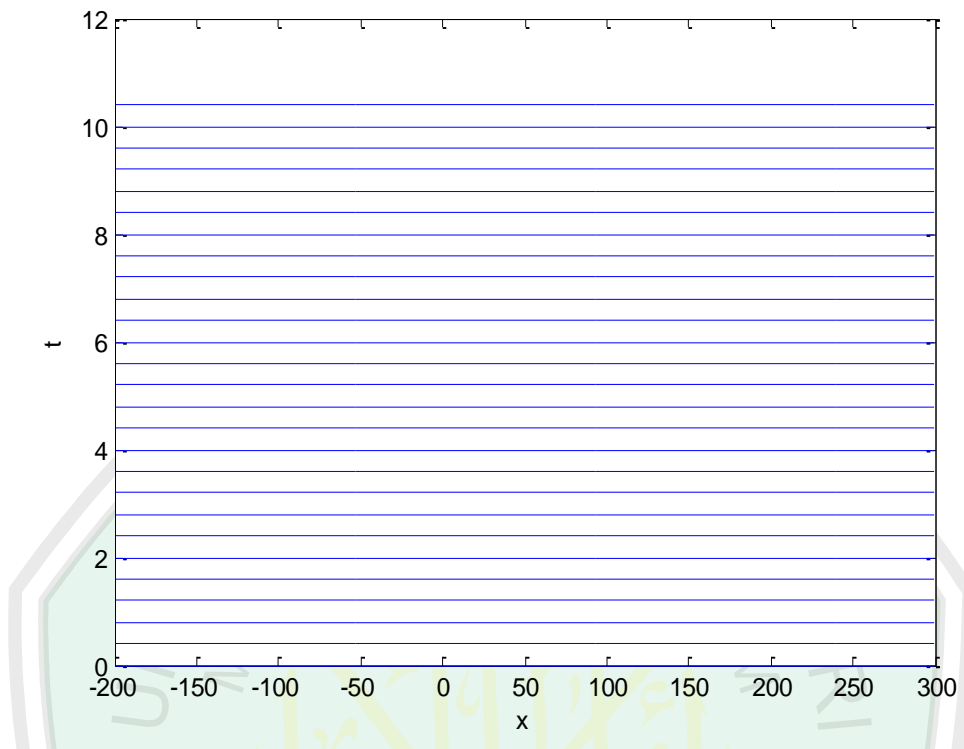
### 3.5 Simulasi dan Interpretasi Hasil

Hasil diskritisasi persamaan *Forced* KdV pada persamaan (3.10) merupakan langkah awal dalam menghitung penyelesaian numerik. Langkah selanjutnya yaitu melakukan simulasi persamaan (3.10) untuk mengetahui apakah metode yang diterapkan menghasilkan penyelesaian yang sesuai. Perhitungan ini tentunya sangat susah jika dilakukan secara manual karena perhitungan dilakukan berulang-ulang. Sehingga dalam hal ini digunakan bantuan program komputer. Program yang digunakan adalah program MATLAB R2008. Simulasi dilakukan dalam dua tahap yaitu ketika  $F(x) = 0$  dan  $F(x) \neq 0$  dimana masing-masing tahap digunakan tiga kemungkinan yaitu ketika  $\gamma = 0$ ,  $\gamma > 0$ , dan  $\gamma < 0$ . Pada saat  $F(x) \neq 0$  ada gaya luar yang diberikan yaitu:

$$F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$$

bentuk gaya luar yang digunakan tersebut berupa gundukan dengan puncak datar dengan lebar  $L$  dan tinggi gundukan sebesar  $F_M$ . Sedangkan  $\mu$  merupakan sudut kemiringan antara  $F_M$  dan  $s$  sebagai lebar kaki dari gundukan tersebut. Pada kedua simulasi tersebut menggunakan  $\Delta x = 0,2$ ,  $\Delta t = 0,05$ ,  $F_M = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$ , dan  $L = 50$ .

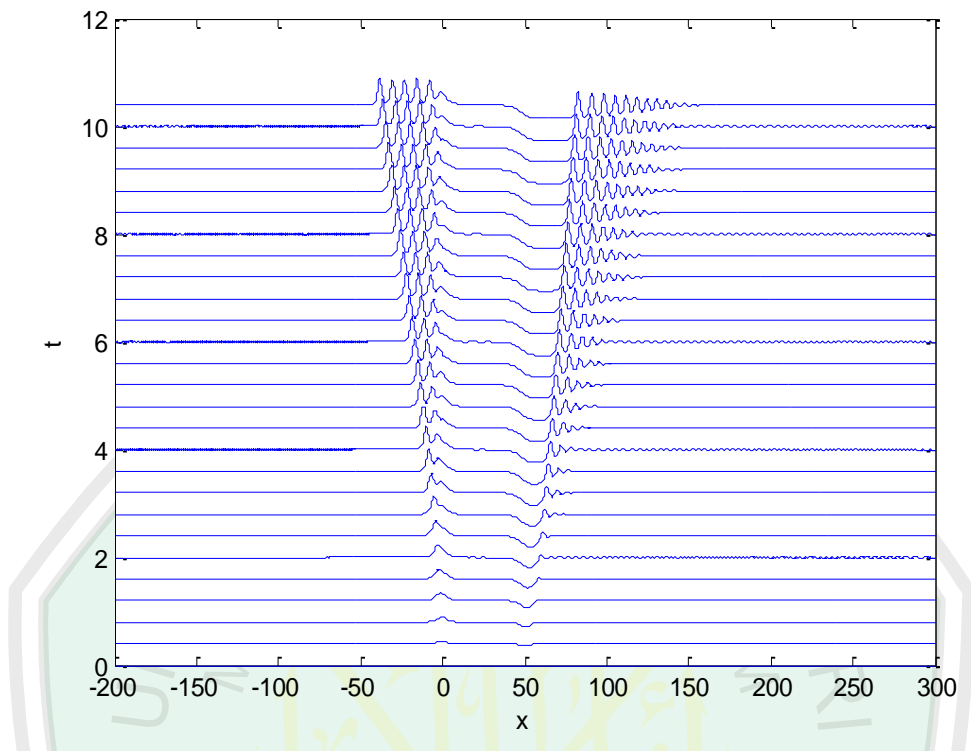
Simulasi pertama yaitu menggunakan  $F(x) = 0$  yang berarti tidak ada gundukan pada dasar saluran fluida. Adapun hasil simulasi dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.1 Simulasi pada Saat  $F(x) = 0$

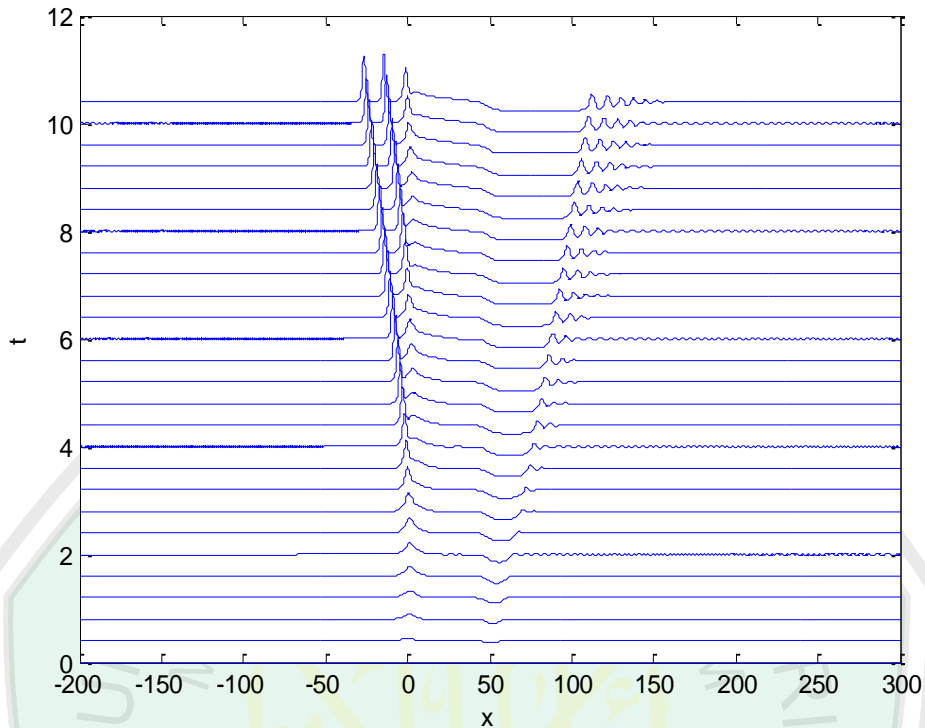
Gambar 3.1 menunjukkan bahwa tidak ada gelombang pada permukaan saluran yang dikarenakan tidak adanya gundukan di dasar saluran atau nilai  $F(x) = 0$ . Nilai  $\gamma$  pada simulasi ini tidak berpengaruh pada bentuk dasar gelombang sehingga berapapun nilai  $\gamma$  jika tidak ada gundukan di dasar saluran maka permukaan saluran tidak akan bergelombang. Adapun kode program untuk Gambar 3.1 terdapat pada Lampiran 3.

Simulasi kedua yaitu menggunakan  $F(x) \neq 0$  yang artinya terdapat gundukan di dasar saluran. Tahap ini juga menggunakan tiga kemungkinan yaitu ketika  $\gamma = 0$ ,  $\gamma > 0$ , dan  $\gamma < 0$ . Berikut merupakan simulasi ketika menggunakan  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma = 0$ , adapun hasilnya yaitu:



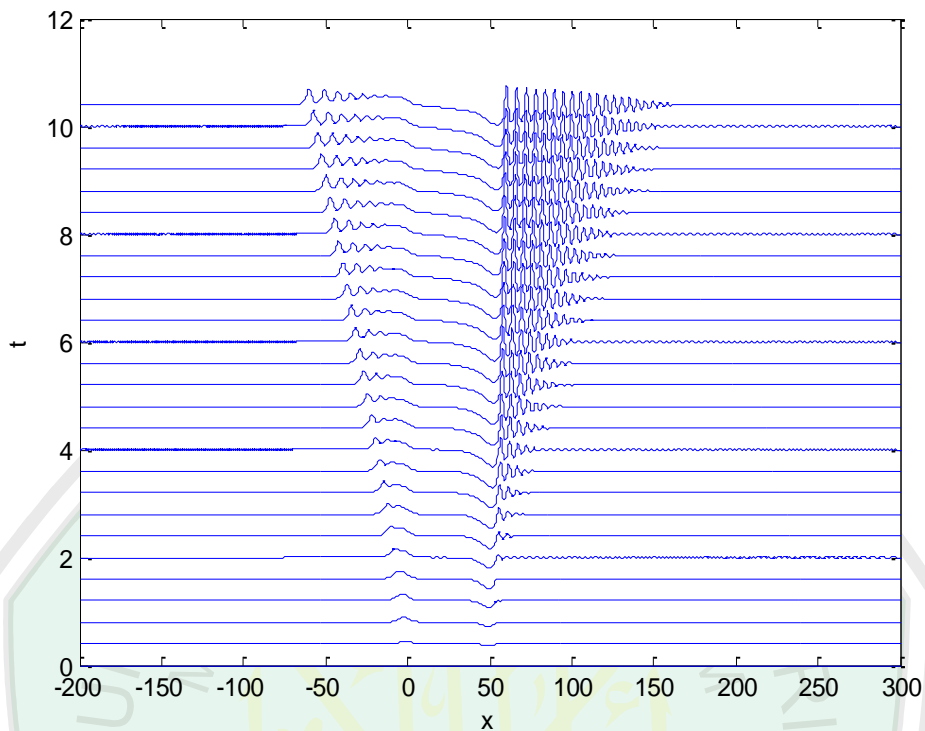
Gambar 3.2 Simulasi pada Saat  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma = 0$

Gambar 3.2 merupakan hasil simulasi ketika  $F(x) \neq 0$  yang artinya terdapat gundukan di dasar saluran sehingga muncul gelombang pada permukaan saluran yang berjalan dari  $x = 0$  menuju  $x = 50$ . Gelombang pada permukaan mula-mula mempunyai ketinggian yang rendah dan semakin lama semakin tinggi hingga mencapai 0,4944. Adapun kode program untuk Gambar 3.2 terdapat pada Lampiran 4. Berikutnya adalah simulasi ketika  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma > 0$  lebih tepatnya  $\gamma = 0,2$ , adapun hasilnya yaitu:



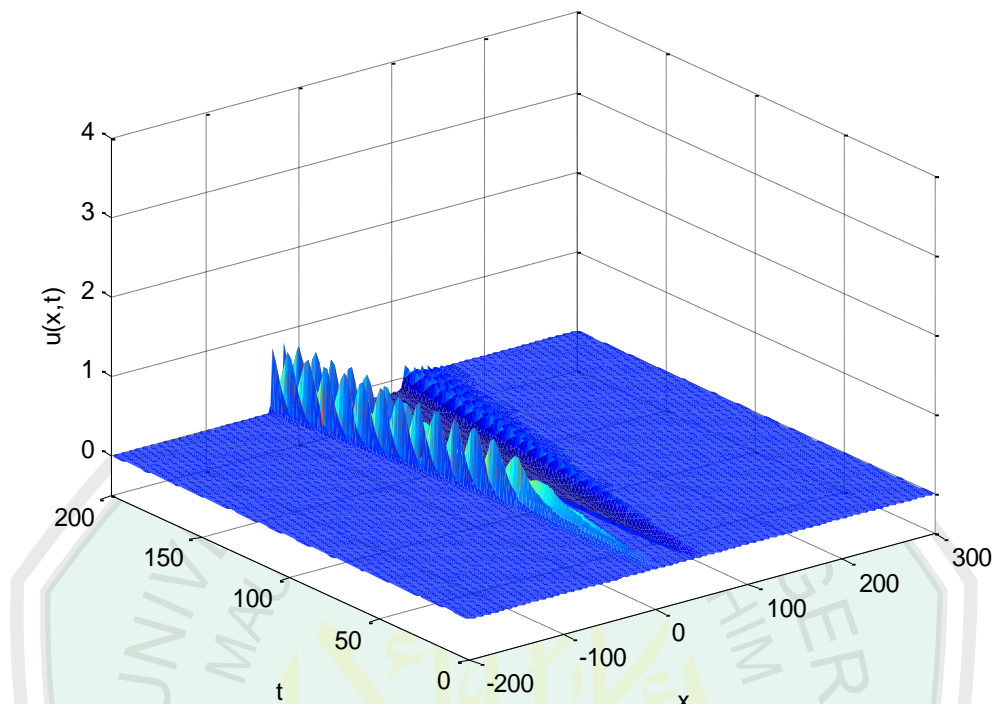
Gambar 3.3 Simulasi pada Saat  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma = 0,2$

Gambar 3.3 merupakan hasil simulasi ketika  $F(x) \neq 0$  yang juga terdapat gundukan di dasar saluran sehingga muncul gelombang pada permukaan saluran yang berjalan dari  $x = 0$  menuju  $x = 50$ . Pada simulasi ini tinggi maksimum gelombang mencapai 0,8795 sehingga dapat disimpulkan bahwa tinggi gelombang pada simulasi ini lebih tinggi daripada saat menggunakan  $\gamma = 0$ . Simulasi ini juga menunjukkan bahwa gelombang mengalami penipisan pada bagian hulu, hal ini disebabkan nilai  $\gamma > 0$ . Adapun kode program untuk Gambar 3.3 terdapat pada Lampiran 5. Berikutnya adalah simulasi ketika  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma < 0$  lebih tepatnya  $\gamma = -0,2$ , adapun hasilnya yaitu:



Gambar 3.4 Simulasi pada Saat  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma = -0,2$

Gambar 3.4 juga menunjukkan ada gundukan di dasar saluran yang dibuktikan oleh munculnya gelombang pada permukaan saluran yang berjalan dari  $x = 0$  menuju  $x = 50$ . Pada simulasi ini tinggi maksimum gelombang mencapai 0,3397, sehingga dapat disimpulkan bahwa tinggi gelombang pada simulasi ini adalah paling rendah dibanding dengan saat menggunakan  $\gamma = 0$  maupun  $\gamma > 0$ . Simulasi ini juga menunjukkan bahwa gelombang mengalami penipisan pada bagian hilir yang disebabkan nilai  $\gamma < 0$ . Adapun kode program untuk Gambar 3.4 terdapat pada Lampiran 6. Selanjutnya juga disajikan grafik dalam bentuk 3 dimensi sebagai berikut:



Gambar 3.5 Simulasi 3 Dimensi pada Saat  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma = 0,2$

Gambar 3.5 merupakan hasil simulasi dalam bentuk 3 dimensi ketika  $F(x) \neq 0$  dan  $\gamma = 0,2$  yang juga terdapat gundukan di dasar saluran sehingga muncul gelombang pada permukaan saluran yang berjalan dari  $x = 0$  menuju  $x = 50$ . Gelombang berubah menjadi semakin tinggi dari  $t = 0$  menuju  $t = 200$  hingga tinggi maksimum gelombang mencapai 0,8795. Simulasi ini juga menunjukkan bahwa gelombang mengalami penipisan pada bagian hulu, hal ini disebabkan nilai  $\gamma > 0$ . Adapun kode program untuk Gambar 3.5 terdapat pada Lampiran 7.

### 3.6 Kajian Keagamaan

Persamaan *Forced* KdV merupakan persamaan yang tidak diketahui penyelesaian eksaknya sehingga diperlukan penyelesaian numerik untuk menyelesaikannya. Pembahasan pada sub bab sebelumnya telah diketahui hasil

penyelesaian numerik dari persamaan *Forced* KdV dengan metode beda hingga skema Crank-Nicolson, hal ini membuktikan bahwa dalam setiap masalah pasti ada penyelesaian yang menyertai. Al-Quran surat al-Syarah ayat ke-5 dan ke-6 telah menerangkan bahwa dalam setiap kesulitan akan terdapat kemudahan. Penelitian ini telah membuktikan ayat tersebut walaupun melalui beberapa proses yang cukup sulit karena dalam menghitung penyelesaian numerik diperlukan suatu ketelitian agar mendapatkan hasil yang sesuai. Surat al-Syarah ayat ke-5 dan ke-6 juga bermakna bahwa dalam satu kesulitan terdapat banyak kemudahan, skripsi ini juga membuktikan ayat tersebut dimana persamaan *Forced* KdV mempunyai beberapa penyelesaian numerik yang telah diteliti sebelumnya diantaranya yaitu metode beda hingga skema eksplisit (Grimshaw dkk., 2007), metode beda hingga skema implisit (Wiryanto & Akbar, 2008), dan metode beda hingga skema Crank-Nicolson yang telah dibahas dalam skripsi ini. Bukti tersebut juga sesuai dengan hadits yang artinya “*Satu kesulitan tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan*”.

Ketelitian dalam penelitian ini diperlukan sejak pertama mulai mengaplikasikan metode yang digunakan kemudian menghitungnya serta melakukan analisis kestabilan dan konsistensi. Allah Swt. secara tersirat juga menerangkan dalam surat al-Baqarah ayat 164 bahwa bagi manusia yang teliti akan menemukan tanda-tanda kebesaran-Nya. Tanda-tanda tersebut tentunya dapat diketahui dengan penelitian dan proses berpikir yang tidak mudah dan membutuhkan waktu yang cukup lama. Namun dengan proses tersebut tentunya Allah Swt. telah menyiapkan petunjuk yang jelas dan ganjaran yang sesuai dengan proses yang dilakukan.

## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan *Forced* KdV dengan menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicolson dapat dilakukan dengan mendiskritkan persamaan yang diberikan kemudian melakukan linierisasi sehingga akan mendapatkan hasil pendiskritan yang berupa persamaan linier.
2. Analisis kestabilan didapatkan bahwa metode beda hingga skema Crank-Nicolson pada persamaan *Forced* KdV adalah stabil tanpa syarat. Hal ini berpengaruh pada bebasnya penentuan nilai  $\Delta x$  dan  $\Delta t$ . Dari analisis konsistensi juga didapatkan bahwa nilai limit pada galat orde dua adalah sama dengan nol. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode yang digunakan adalah konsisten.

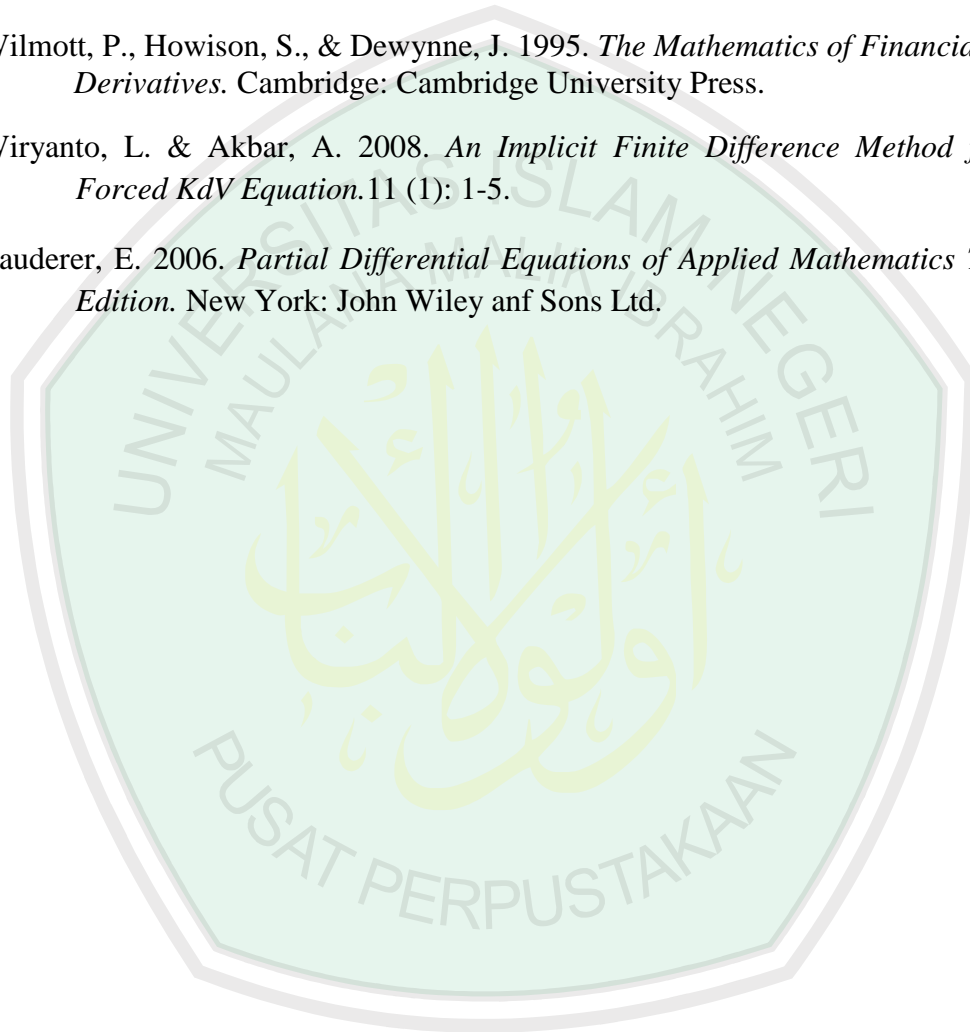
#### **4.2 Saran**

Penyelesaian numerik pada persamaan *Forced* KdV telah banyak dilakukan oleh beberapa peneliti sehingga saran untuk penelitian selanjutnya yaitu melakukan perbandingan terhadap masing-masing penyelesaian numerik. Perbandingan dilakukan untuk mendapatkan kelebihan dan kekurangan masing-masing metode serta mengetahui metode numerik yang terbaik dalam menyelesaikan persamaan tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- Amamah, S. 2014. *Penyelesaian Numerik Persamaan Forced KdV Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Anonymous. 2014. *Crank-Nicolson Method*. (Online), ([https://en.wikipedia.org/wiki/Crank%E2%80%93Nicolson\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Crank%E2%80%93Nicolson_method)), diakses 10 Oktober 2015.
- Baghawi, A. 2004. *Tafsir Alquran*. Bairut: Darul Kutub Ilmiah.
- Causon, D. & Mingham, C. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. Manchester: Ventus Publishing.
- Chapra, S.C. & Canale, R.P. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition*. New York: McGraw Hill.
- Chendra, H.D. 2007. *Perancangan Reflektor Gelombang Berupa Deretan N-Blok, Sebuah Tinjauan Matematis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Feng, B.F. & Mitsui, T. 1998. A Finite Difference Method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 90 (1): 95-116.
- Flaherty, J.E. 1966. *Partial Differential Equations*. New York. Rensselaer Polytechnic Institute.
- Grimshaw, R., Zhang, D., & Chong, K. 2007. Generation of Solitary Waves by Transcritical Flow Over a Step. *J. Fluid Mech*, 587 (1): 235-254.
- Hakim, A. 2009. *Prediksi Kecepatan Phase Gelombang Soliter Terganggu*. Tesis tidak dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Katsir, I. 2006. *Tafsir Al-Quran*. Bairut: Darul Kutub Ilmiah.
- Kreyszig, E. 2011. *Advanced Engineering Mathematics*. Jefferson City: Laurie Rosatone.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Nugroho, D.B. 2009. *Metode Numerik*. Buku tidak diterbitkan, Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

- Pinsky, A.M. 2003. *Partial Differential Equation and Boundary Value Problem with Application Third Edition*. Rhode Island: Waveland Press.
- Strauss, W.A. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley and Sons Ltd.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wiryanto, L. & Akbar, A. 2008. *An Implicit Finite Difference Method for a Forced KdV Equation*. 11 (1): 1-5.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley and Sons Ltd.



**LAMPIRAN 1**

$$U_j^{n+1} = \left( U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 U_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n \dots \right) \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} U_{j+1}^{n+1} &= U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + \Delta x U_x |_j^n \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n + 2\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \\ &+ \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n + 3\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 3\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n \\ &+ \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} U_{j-1}^{n+1} &= U_j^n + \Delta t U_t |_j^n - \Delta x U_x |_j^n \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n - 2\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \\ &+ \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n - 3\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n \\ &+ 3\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n - \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} U_{j+2}^{n+1} &= U_j^n + 2\Delta t U_t |_j^n + \Delta x U_x |_j^n \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n + 4\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + 4\Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \\ &+ \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n + 6\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n \\ &+ 12\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n + 8\Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} U_{j-2}^{n+1} &= U_j^n + 2\Delta t U_t |_j^n - \Delta x U_x |_j^n \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n - 4\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + 4\Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \\ &+ \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n - 6\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n \\ &+ 12\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n - 8\Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

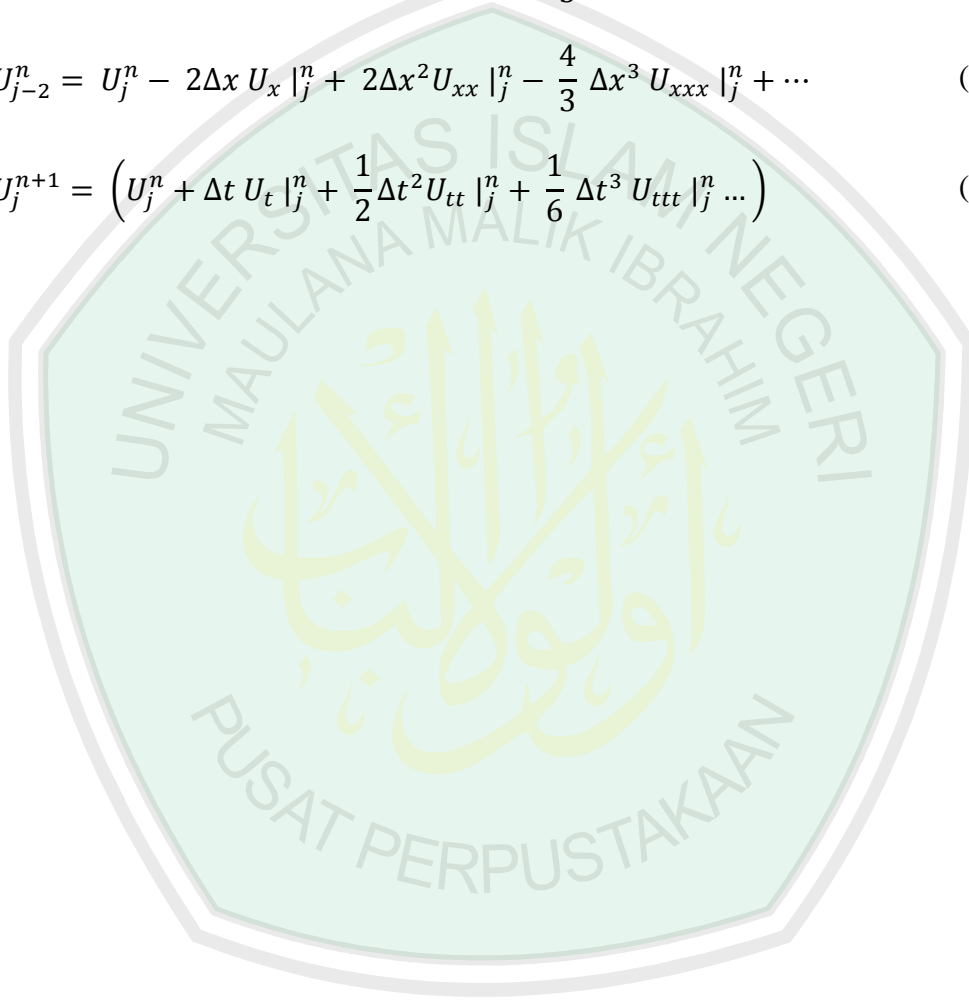
$$U_{j+1}^n = U_j^n + \Delta x U_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 U_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.17)$$

$$U_{j-1}^n = U_j^n - \Delta x U_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 U_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.18)$$

$$U_{j+2}^n = U_j^n + 2\Delta x U_x|_j^n + 2\Delta x^2 U_{xx}|_j^n + \frac{4}{3} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.19)$$

$$U_{j-2}^n = U_j^n - 2\Delta x U_x|_j^n + 2\Delta x^2 U_{xx}|_j^n - \frac{4}{3} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.20)$$

$$U_j^{n+1} = \left( U_j^n + \Delta t U_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 U_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 U_{ttt}|_j^n \dots \right) \quad (3.21)$$



## LAMPIRAN 2

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} &= \frac{\left( U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 U_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n \dots \right) - U_j^n}{\Delta t} \\ &= U_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t U_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 U_{ttt} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= \left[ U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n + 2\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \right. \\ &\quad + \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n + 3\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 3\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n + \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \\ &\quad - \left( U_j^n + \Delta t U_t |_j^n - \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n - 2\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n - 3\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 3\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n - \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) \right) \right] \frac{1}{2\Delta x} \\ &= [U_x |_j^n + 2\Delta t U_{tx} |_j^n + \Delta t^2 U_{ttx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n] + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} &= \left[ U_j^n + \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 U_{xx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n + \dots \right. \\ &\quad \left. - \left( U_j^n - \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 U_{xx} |_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n + \dots \right) \right] \frac{1}{2\Delta x} \\ &= U_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) &= U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 U_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n \\ &\quad + \dots \left( U_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_j^n U_x |_j^n + \Delta t U_t |_j^n U_x |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 U_{tt} |_j^n U_x |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n U_x |_j^n + \\
&\frac{1}{6} \Delta x^2 U_j^n U_{xxx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t U_t |_j^n U_{xxx} |_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^2 U_{tt} |_j^n U_{xxx} |_j^n + \\
&\frac{1}{36} \Delta x^2 \Delta t^3 U_{ttt} |_j^n U_{xxx} |_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
U_j^n \left( \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) &= U_j^n [U_x |_j^n + 2\Delta t U_{tx} |_j^n + \Delta t^2 U_{ttx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xxx} |_j^n] + \dots \\
&= U_j^n U_x |_j^n + 2\Delta t U_j^n U_{tx} |_j^n + \Delta t^2 U_j^n U_{ttx} |_j^n + \Delta x^2 U_j^n U_{xxx} |_j^n + \\
&\dots
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{U_{j+2}^{n+1} - 2U_{j+1}^{n+1} + 2U_{j-1}^{n+1} - U_{j-2}^{n+1}}{2\Delta x^3} \\
&= \left[ \left( U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + 2\Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n + 4\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + 4\Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n + 6\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 12\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n + 8\Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( U_j^n + \Delta t U_t |_j^n + \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n + 2\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n + 3\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 3\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n + \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( U_j^n + \Delta t U_t |_j^n - \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n - 2\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + \Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n - 3\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 3\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n - \Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( U_j^n + 2\Delta t U_t |_j^n - \Delta x U_x |_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^2 U_{tt} |_j^n - 4\Delta t \Delta x U_{tx} |_j^n + 4\Delta x^2 U_{xx} |_j^n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\Delta t^3 U_{ttt} |_j^n - 6\Delta t^2 \Delta x U_{ttx} |_j^n + 12\Delta t \Delta x^2 U_{txx} |_j^n - 8\Delta x^3 U_{xxx} |_j^n) + \dots \right) \right] \frac{1}{2\Delta x^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \frac{2U_x|_j^n}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t U_{tx}|_j^n}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t^2 U_{ttx}|_j^n}{\Delta x^2} + \frac{4}{3} U_{xxx}|_j^n \right) - \frac{2U_x|_j^n}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\Delta t U_{tx}|_j^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t^2 U_{ttx}|_j^n}{\Delta x^2} - \frac{1}{3} U_{xxx}|_j^n \right] \\
&= U_{xxx}|_j^n + \dots \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + 2U_{j-1}^n - U_{j-2}^n}{2\Delta x^3} \\
&= \left[ U_j^n + 2\Delta x U_x|_j^n + 2\Delta x^2 U_{xx}|_j^n + \frac{4}{3} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \right. \\
&\quad - 2 \left( U_j^n + \Delta x U_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 U_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad + 2 \left( U_j^n - \Delta x U_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 U_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad \left. - \left( U_j^n - 2\Delta x U_x|_j^n + 2\Delta x^2 U_{xx}|_j^n - \frac{4}{3} \Delta x^3 U_{xxx}|_j^n + \dots \right) \right] \frac{1}{2\Delta x^3} \\
&= U_{xxx}|_j^n + \dots \tag{3.28}
\end{aligned}$$

### LAMPIRAN 3

Program simulasi persamaan *forced* kdv menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* saat  $\gamma = 0$  dan  $F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$  dengan nilai  $F_M = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$ , dan  $L = 50$ .

```
clc
clear all
clf

dx=0.6;
dt=0.25;

x=-200:dx:300;
t=0:dt:200;

pjgt=length(t);
pjgx=length(x);

miu=0.25; %sudut kemiringan
alfa=(1/6); %lebar gelombang
gamma=0;
L=50;
FM=0.1;

u=zeros(pjgx,pjgt);
u(:,1)=0; %nilai awal, kolom 1 nol
u(1,:)=0; %me-nol-kan baris pertama
u(2,:)=0; %me-nol-kan baris kedua
u(pjgx-1,:)=0; %me-nol-kan atasnya paling bawaah
u(pjgx,:)=0; %me-nol-kan bagian paling bawaah

k=0;
figure(1)
%inisialisai koefisien n+1
for n=2:pjgt-1;
    A=zeros(pjgx-4);
    for j=3:pjgx-2;

        % ruas kanan
        f=u(j,n)/dt;
        g=(gamma/2)*((u(j+1,n)-u(j-1,n))/(2*dx));
        h=(alfa)*((u(j+2,n)-(2*u(j+1,n))+(2*u(j-1,n))-u(j-2,n))/(4*dx^3));
        Fx(j-2)=0+f-g+h;

        %buat permisalan untuk ruas kiri
        a=alfa/(4*dx^3);
        b=-((2*alfa)/(4*dx^3))+(gamma/(4*dx))-
        ((1.5*u(j,n))/(4*dx));
        c=(1/dt)-((1.5*(u(j+1,n)-u(j-1,n)))/(4*dx));
        d=(gamma/(4*dx))-
        ((1.5*(u(j,n)))/(4*dx))+((2*alfa)/(4*dx^3));
        e=-alfa/(4*dx^3);
```

```

%membuat matriks A/jacobian
%ukuran matriks tergantung pada nilai awal

if j==3
    A(1,1:3)=[c d e]; %mengisi jacobian baris 1
end
if j==4
    A(2,1:4)=[b c d e]; %mengisi jacobian baris 2
end

if j==pjgx-3
    A(pjgx-5,pjgx-7:pjgx-4)=[a b c d]; %mengisi jacobian
baris 1 sbelum terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
end
if j==pjgx-2
    A(pjgx-4,pjgx-6:pjgx-4)=[a b c]; %mengisi jacobian
baris terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
end
%jacobian bagian tengah

if j>=5 && j<=pjgx-4
    A(j-2,j-4:j)=[a b c d e];
end

%memindah ruas kiri yang ada nilainya
%hanya untuk baria 3, 4 dan 2 baris sebelum akhir

end
udicari=inv(A)*Fx';
u(3:pjgx-2,n+1)=udicari;

if mod(n,30)==0
    plot(x,u(:,n+1)+0.3*k)
    ylim([-1 2])
    title(num2str(t(n)))
    pause(0.1)
    k=k+1;
    hold on
end

end
end

```

## LAMPIRAN 4

Program simulasi persamaan *forced* kdv menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* saat  $\gamma = 0$  dan  $F(x) = \frac{F_M}{2}(\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$  dengan nilai  $F_M = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$ , dan  $L = 50$ .

```
clc
clear all
clf

disp('gamma = 0')

dx=0.2;
dt=0.05;

x=-200:dx:300;
t=0:dt:200;

pjgt=length(t);
pjgx=length(x);

miu=0.25; %sudut kemiringan
alfa=(1/6); %lebar gelombang
gamma=0;
L=50;
FM=0.1;

u=zeros(pjgx,pjgt);
u(:,1)=0; %nilai awal, kolom 1 nol
u(1,:)=0; %me-nol-kan baris pertama
u(2,:)=0; %me-nol-kan baris kedua
u(pjgx-1,:)=0; %me-nol-kan atasnya paling bawaah
u(pjgx,:)=0; %me-nol-kan bagian paling bawaah

k=0;
figure(1)
%inisialisai koefiien n+1
for n=2:pjgt-1;
    A=zeros(pjgx-4);
    for j=3:pjgx-2;

        % ruas kanan
        f=u(j,n)/dt;
        g=(gamma/2)*((u(j+1,n)-u(j-1,n))/(2*dx));
        h=(alfa)*((u(j+2,n)-(2*u(j+1,n))+(2*u(j-1,n))-u(j-2,n))/(4*dx^3));
        Fx(j-2)=(1/4*FM*((1-tanh(miu*x(j)))^2)*miu-(1-tanh(miu*(x(j)-L))^2)*miu))+f-g+h;

        %buat permisalan untuk ruas kiri
        a=alfa/(4*dx^3);
        b=-((2*alfa)/(4*dx^3)+(gamma/(4*dx))-((1.5*u(j,n))/(4*dx)));
        c=(1/dt)-((1.5*(u(j+1,n)-u(j-1,n)))/(4*dx));
```

```

        d=(gamma/(4*dx))-
        ((1.5*(u(j,n)))/(4*dx))+((2*alfa)/(4*dx^3));
        e=-alfa/(4*dx^3);

        %membuat matriks A/jacobian
        %ukuran matriks tergantung pada nilai awal

        if j==3
            A(1,1:3)=[c d e]; %mengisi jacobian baris 1
        end
        if j==4
            A(2,1:4)=[b c d e]; %mengisi jacobian baris 2
        end

        if j==pjpgx-3
            A(pjpgx-5,pjpgx-7:pjpgx-4)=[a b c d]; %mengisi jacobian
baris 1 sbelum terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
        end
        if j==pjpgx-2
            A(pjpgx-4,pjpgx-6:pjpgx-4)=[a b c]; %mengisi jacobian
baris terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
        end
        %jacobian bagian tengah

        if j>=5 && j<=pjpgx-4
            A(j-2,j-4:j)=[a b c d e];
        end

        %memindah ruas kiri yang ada nilainya
        %hanya untuk baria 3, 4 dan 2 baris sebelum akhir

    end
    udicari=inv(A)*Fx';
    u(3:pjpgx-2,n+1)=udicari;

    plot(x,u(:,n+1))
    ylim([-1 2])
    title(num2str(t(n)))
    pause(0.1)

end

```

## LAMPIRAN 5

Program simulasi persamaan *forced* kdv menggunakan metode beda hingga

skema *Crank-Nicolson* saat  $\gamma = 0,2$  dan  $F(x) = \frac{F_M}{2}(\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$

dengan nilai  $F_M = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$ , dan  $L = 50$ .

```
clc
clear all
clf

disp('gamma = 0.2')

dx=0.2;
dt=0.05;

x=-200:dx:300;
t=0:dt:200;

pjgt=length(t);
pjgx=length(x);

miu=0.25; %sudut kemiringan
alfa=(1/6); %lebar gelombang
gamma=0.2;
L=50;
FM=0.1;

u=zeros(pjgx,pjgt);
u(:,1)=0; %nilai awal, kolom 1 nol
u(1,:)=0; %me-nol-kan baris pertama
u(2,:)=0; %me-nol-kan baris kedua
u(pjgx-1,:)=0; %me-nol-kan atasnya paling bawaah
u(pjgx,:)=0; %me-nol-kan bagian paling bawaah

k=0;
figure(1)
%inisialisai koefiien n+1
for n=2:pjgt-1;
    A=zeros(pjgx-4);
    for j=3:pjgx-2;

        % ruas kanan
        f=u(j,n)/dt;
        g=(gamma/2)*((u(j+1,n)-u(j-1,n))/(2*dx));
        h=(alfa)*((u(j+2,n)-(2*u(j+1,n))+(2*u(j-1,n))-u(j-2,n))/(4*dx^3));
        Fx(j-2)=(1/4*FM*((1-tanh(miu*x(j)))^2)*miu-(1-tanh(miu*(x(j)-L))^2)*miu))+f-g+h;

        %buat permisalan untuk ruas kiri
        a=alfa/(4*dx^3);
        b=-((2*alfa)/(4*dx^3))+(gamma/(4*dx))-((1.5*u(j,n))/(4*dx));
        c=(1/dt)-((1.5*(u(j+1,n)-u(j-1,n)))/(4*dx));
```

```

        d=(gamma/(4*dx))-
        ((1.5*(u(j,n)))/(4*dx))+((2*alfa)/(4*dx^3));
        e=-alfa/(4*dx^3);

        %membuat matriks A/jacobian
        %ukuran matriks tergantung pada nilai awal

        if j==3
            A(1,1:3)=[c d e]; %mengisi jacobian baris 1
        end
        if j==4
            A(2,1:4)=[b c d e]; %mengisi jacobian baris 2
        end

        if j==pjpgx-3
            A(pjpgx-5,pjpgx-7:pjpgx-4)=[a b c d]; %mengisi jacobian
baris 1 sbelum terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
        end
        if j==pjpgx-2
            A(pjpgx-4,pjpgx-6:pjpgx-4)=[a b c]; %mengisi jacobian
baris terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
        end
        %jacobian bagian tengah

        if j>=5 && j<=pjpgx-4
            A(j-2,j-4:j)=[a b c d e];
        end

        %memindah ruas kiri yang ada nilainya
        %hanya untuk baria 3, 4 dan 2 baris sebelum akhir

    end
    udicari=inv(A)*Fx';
    u(3:pjpgx-2,n+1)=udicari;

    plot(x,u(:,n+1))
    ylim([-1 2])
    title(num2str(t(n)))
    pause(0.1)

end

```

## LAMPIRAN 6

Program simulasi persamaan *forced* kdv menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* saat  $\gamma = -0,2$  dan  $F(x) = \frac{F_M}{2}(\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$  dengan nilai  $F_M = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$ , dan  $L = 50$ .

```
clc
clear all
clf

disp('gamma = -0.2')

dx=0.2;
dt=0.05;

x=-200:dx:300;
t=0:dt:200;

pjgt=length(t);
pjgx=length(x);

miu=0.25; %sudut kemiringan
alfa=(1/6); %lebar gelombang
gamma=-0.2;
L=50;
FM=0.1;

u=zeros(pjgx,pjgt);
u(:,1)=0; %nilai awal, kolom 1 nol
u(1,:)=0; %me-nol-kan baris pertama
u(2,:)=0; %me-nol-kan baris kedua
u(pjgx-1,:)=0; %me-nol-kan atasnya paling bawaah
u(pjgx,:)=0; %me-nol-kan bagian paling bawaah

k=0;
figure(1)
%inisialisai koefiien n+1
for n=2:pjgt-1;
    A=zeros(pjgx-4);
    for j=3:pjgx-2;

        % ruas kanan
        f=u(j,n)/dt;
        g=(gamma/2)*((u(j+1,n)-u(j-1,n))/(2*dx));
        h=(alfa)*((u(j+2,n)-(2*u(j+1,n))+(2*u(j-1,n))-u(j-2,n))/(4*dx^3));
        Fx(j-2)=(1/4*FM*((1-tanh(miu*x(j)))^2)*miu-(1-tanh(miu*(x(j)-L))^2)*miu))+f-g+h;

        %buat permisalan untuk ruas kiri
        a=alfa/(4*dx^3);
        b=-((2*alfa)/(4*dx^3))+(gamma/(4*dx))-((1.5*u(j,n))/(4*dx));
        c=(1/dt)-((1.5*(u(j+1,n)-u(j-1,n)))/(4*dx));
```

```

        d=(gamma/(4*dx))-
        ((1.5*(u(j,n)))/(4*dx))+((2*alfa)/(4*dx^3));
        e=-alfa/(4*dx^3);

        %membuat matriks A/jacobian
        %ukuran matriks tergantung pada nilai awal

        if j==3
            A(1,1:3)=[c d e]; %mengisi jacobian baris 1
        end
        if j==4
            A(2,1:4)=[b c d e]; %mengisi jacobian baris 2
        end

        if j==pjpgx-3
            A(pjpgx-5,pjpgx-7:pjpgx-4)=[a b c d]; %mengisi jacobian
baris 1 sbelum terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
        end
        if j==pjpgx-2
            A(pjpgx-4,pjpgx-6:pjpgx-4)=[a b c]; %mengisi jacobian
baris terakhir (smentara mariks ukuran 5x5)
        end
        %jacobian bagian tengah

        if j>=5 && j<=pjpgx-4
            A(j-2,j-4:j)=[a b c d e];
        end

        %memindah ruas kiri yang ada nilainya
        %hanya untuk baria 3, 4 dan 2 baris sebelum akhir

    end
    udicari=inv(A)*Fx';
    u(3:pjpgx-2,n+1)=udicari;

    plot(x,u(:,n+1))
    ylim([-1 2])
    title(num2str(t(n)))
    pause(0.01)

end

```

## LAMPIRAN 7

Program simulasi 3 dimensi persamaan *forced* kdv menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* saat  $\gamma = 0,2$  dan  $F(x) = \frac{F_M}{2} (\tanh \mu x - \tanh \mu(x - L))$  dengan nilai  $F_M = 0,1$ ,  $\mu = 0,25$ , dan  $L = 50$ .

```
clc
clear all
figure(1), clf

dx=0.2;
dt=0.05;

x=-200:dx:300;
t=0:dt:200;

M = length(x);
N = length(t);

load u_gammaplus

k = 0;
for n=1:40:length(t)
    k = k + 1;
    l = 0;
    for j=1:10:length(x)
        l = l + 1;
        U(l,k) = u(j,n);
    end
end

[xx,tt] = meshgrid(-200:2:300,0:2:200);
surf(xx,tt,U')
zlim([-0.5 4])
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('u(x,t)')
shading interp

figure(1)
camlight('headlight')
```

## RIWAYAT HIDUP

Muhamad Ghozali, lahir di kabupaten Malang pada tanggal 06 Maret 1992, pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Ringinsari III dan lulus pada tahun 2004, kemudian melanjutkan ke MTs Mambaul Ulum Gedangan dan lulus pada tahun 2007. Setelah itu dia melanjutkan pendidikan ke MA Khairuddin Gondanglegi dan lulus pada tahun 2010. Selanjutnya, pada tahun 2010 dia melanjutkan studi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama studi MA Khairuddin, dia pernah menjabat sebagai kepala sub bidang pengajaran OSIS tahun 2008. Kemudian ketika menjadi mahasiswa, dia pernah aktif pada beberapa organisasi kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika, Dewan Eksekutif Mahasiswa (DEMA) Fakultas Sains dan Teknologi, Dewan Eksekutif Mahasiswa (DEMA) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, UKM Pagar Nusa, PMII pencerahan Galileo, dan PMII Komisariat Sunan Ampel. Selain itu dia juga pernah mengabdikan sebagai Musyrif Ma'had Sunan Ampel al-'Ali pada tahun 2011.





**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Muhamad Ghozali  
NIM : 10610017  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan *Forced* Korteweg de Vries Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si  
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	19 November 2014	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	29 Desember 2014	Konsultasi Bab I dan II Agama	2.
3.	24 Desember 2014	Revisi Bab II	3.
4.	7 Januari 2015	ACC Bab I dan II Agama	4.
5.	28 Januari 2015	Konsultasi Bab III	5.
6.	5 Februari 2015	Revisi Bab III	6.
7.	27 Februari 2015	Konsultasi Bab III Agama	7.
8.	6 Maret 2015	Revisi Bab II dan III	8.
9.	20 Maret 2015	Konsultasi Bab IV	9.
10.	9 April 2015	Revisi Bab III	10.
11.	23 April 2015	Revisi Bab III	11.
12.	2 September 2015	ACC Bab III dan IV	12.
13.	26 September 2015	ACC Agama	13.
14.	16 Oktober 2015	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 13 November 2015  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001