SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN FOKKER-PLANCK DENGAN METODE IMPLISIT FTCS

SKRIPSI

OLEH
NURUL JANNAH
NIM. 10610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN FOKKER-PLANCK DENGAN METODE IMPLISIT FTCS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Nurul Jannah
NIM. 10610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN FOKKER-PLANCK DENGAN METODE IMPLISIT FTCS

SKRIPSI

Oleh
Nurul Jannah
NIM. 10610012

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 06 November 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN FOKKER-PLANCK
DENGAN METODE IMPLISIT FTCS**

SKRIPSI

**Oleh
Nurul Jannah
NIM. 10610012**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 30 Desember 2015

Penguji Utama	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nurul Jannah
NIM	:	10610012
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 November 2015
Yang membuat pernyataan,

Nurul Jannah
NIM. 10610012

MOTO

...فَإِذَا عَزَمْتَ فَتَوَكَّلْ عَلَى ٱللَّهِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلْمُتَوَكِّلِينَ ﴿١٥٩﴾

”...Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakal kepada-Nya”
(QS. Ali Imron/3:159)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ini untuk:

Ayahanda Noor Falah (almarhum) dan Ibunda Eni Sofia tercinta

yang telah membesarkan, mendidik, membimbing, dan memberikan segenap cinta kasih kepada penulis, serta iringan doanya yang selalu menyertai setiap langkah penulis.

Kakak-kakak tersayang Khoirul Anas, Khoirun Nisa, dan Anies Sholichah yang senantiasa memberikan inspirasi, motivasi, dan dukungan materiil maupun moril.

Semoga Allah Swt. memberikan kebahagiaan di dunia dan akhirat.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya sehingga penulisan skripsi dengan judul "*Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS*" ini dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam penulis haturkan kepada Nabi Muhammad, keluarga, dan para sahabat beliau.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai tanpa adanya bantuan dari beberapa pihak. Pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibarahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dengan sabar dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingan kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika dan dosen Jurusan Matematika terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya yang dapat dijadikan bekal di masa depan,

terutama Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu mendukung penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.

7. Kedua orang tua penulis almarhum bapak Noor Falah dan ibu Eni Sofia, yang telah mengajarkan kesabaran, keikhlasan, dan rasa syukur dalam mencapai kesuksesan. Berkat doa dan ridho beliau, Allah memberi berbagai kemudahan kepada penulis. Berkat beliau juga penulis selalu bersemangat untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak-kakak penulis Khoirul Anas, Khoirun Nisa, dan Anies Sholichah yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
9. Fadila Norasarin Eritha dan keluarga besar bapak H. Tatok Hariyanto yang telah banyak memberikan dukungan, semangat, saran, dan fasilitas kepada penulis selama belajar dan mencari ilmu.
10. Sahabat-sahabati "Integral", terutama Nur Aini, Rowaihul Jannah, Naila Nafilah, Harum Kurniasari, Fitria Nur Aini, Muhammad Ghozali, Ach. Syihabuddin Zahid, Sigit Fembrianto, Muhammad Hasan, Fahmi C. A., Syaifie Ali Azizy, Wahyu Setyo, dan Ahmad Wahyudi.
11. Sahabat-sahabat Jurusan Matematika, khususnya Siti Asyah, Muhammad Syukron, Lukman Hakim, Muyassaroh, dan Suryani. Terima kasih telah berbagi ilmu di bangku kuliah.
12. Seluruh teman-teman dan semua pihak yang tidak mungkin untuk dicantumkan namanya satu-persatu, terima kasih banyak atas segala bentuk bantuan dan dukungannya.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Malang,   November 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Jannah, Nurul. 2015. **Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Solusi Numerik, Metode Implisit FTCS, Persamaan Fokker-Planck, *Error*

Salah satu metode untuk memperoleh solusi numerik adalah metode implisit FTCS (*Forward Time Center Space*) yang mengubah setiap turunan dari persamaan diferensial menjadi bentuk beda maju untuk turunan waktu dan beda pusat untuk turunan ruang menggunakan ekspansi deret Taylor.

Tujuan penelitian ini adalah memperoleh solusi numerik dengan metode implisit FTCS pada penyelesaian persamaan Fokker-Planck, yang kemudian dibandingkan dengan solusi analitik yang sudah diketahui sebelumnya untuk mengetahui *error* dari solusinya. Dalam pembahasan, penulis menggunakan persamaan Fokker-Planck yang memuat koefisien difusi dalam bentuk eksponensial. Langkah awal yang dilakukan adalah mengubah persamaan Fokker-Planck menjadi bentuk diskrit skema implisit FTCS. Kemudian, dari bentuk diskrit tersebut diperoleh bentuk matriks yang digunakan untuk menentukan solusi numeriknya. Setelah itu dibandingkan dengan solusi analitiknya. Langkah terakhir, dihitung besar *error* dari solusi.

Hasil penelitian ini, menunjukkan bahwa solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS mendekati solusi analitiknya. Hal tersebut dapat dilihat dari besar *error* yang dihasilkan dari solusi sangat kecil atau mendekati nol.

ABSTRACT

Jannah, Nurul. 2015. **Numerical Solution Fokker-Planck Equation Using FTCS Implicit Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Numerical Solution, FTCS Implicit Method, Fokker-Planck equation, Error

One method for obtaining numerical solutions is implicit FTCS (Forward Time Center Space) method that change every derivative of differential equations into a form of forward different for time derivative and central different for space derivative using Taylor series expansion.

This research has a purpose to obtain the numerical solution with an implicit FTCS method to solve Fokker-Planck equation, which is then compared to its analytic solutions that are already known in advance to determine the error of the solution. In the discussion, the researcher use the Fokker-Planck equation that includes the diffusion coefficient in the exponential form. The first step is to change the Fokker-Planck equation into a discrete form of FTCS implicit scheme. Then from the discrete form the matrix form used to determine the numerical solution is obtained. Then compared to its analytical solutions. The final step is analyzing the error of both solutions.

The result shows that the numerical solution of the Fokker-Planck equation with implicit FTCS method is close to analitical solution. This can be seen from the resulted error which is very small or close to zero.

ملخص

الجنة، نور ٢٠١٥. **الحل العددي لمعادلة Fokker–Planck باستخدابم طريقة FTCS الضمنية. بحث جامعي**. الشعبة الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجي، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: ١) أري كوسوماستوتي الماجستيرة، ٢) احمدنصيح الدّين, الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الحلول العددية، طريقة FTCS الضمنة، معادلة Fokker–Planck، خطأ

طريقة واحدة للحصول على الحلول العددية هي طريقة FTCS الضمنية (Forward Time Center Space) التي تتغير كل مثيل المعادلات التفاضلية في أشكال الرق الأماي لمشتقات الوقت والفرق الوسطي لمشتقات الفضاء باستخدام تو سيع سلسلمةتايلور.

وكان غرض هذه الدراسة هو لتحديد الحل العددي باستخدام طريقة FTCS ضمية على حلول معادلة Fokker–Planck، والتي يتم بعد ذلك مقارنة ها الحلول التحليلية التي هي معروفة بالفعل في وقت مبكر لتحديد الخطأ من الحل. في المناقشة، الكاتبة إستخدمة معادلة Fokker–Planck الذي يتضمن معامل الانتشار في شكل الأسي. الخطوة الأولى هي تغيير المعادلة Fokker–Planck الى شكل المنفصل من مخطط FTCS الضمنية. ثم من شكل منفصل يتم الحصول على شكل مصفوفة تستخدم لتحديد الحل العددي. و بعد ذلك مقارنة ألي الحلول التحليلية. الخطوة النهائية هي تحديدخطأ الحل.

وأظهرت نتائج هذه الدراسة أن الحل العددي لمعادلة Fokker–Planck بطريقة FTCS الضمنية اقترب حلول التحليلية. يمكن أن ينظر إليه من الخطأ الناتجة عن الحل هي صغيرة جدا أو قريبة من الصفر.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Firman Allah Swt. dalam surat Luqman 34 yang berbunyi

إِنَّ ٱللَّهَ عِندَهُۥ عِلۡمُ ٱلسَّاعَةِ وَيُنَزِّلُ ٱلۡغَيۡثَ وَيَعۡلَمُ مَا فِي ٱلۡأَرۡحَامِۖ وَمَا تَدۡرِي نَفۡسٞ
مَّاذَا تَكۡسِبُ غَدٗاۖ وَمَا تَدۡرِي نَفۡسُۢ بِأَيِّ أَرۡضٖ تَمُوتُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرُۢ ٣٤

Sesungguhnya Allah, hanya pada sisi-Nya sajalah pengetahuan tentang hari Kiamat; dan Dia-lah yang menurunkan hujan, dan mengetahui apa yang ada dalam rahim. dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui (dengan pasti) apa yang akan diusahakannya besok dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui di bumi mana Dia akan mati. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal (QS. Luqman/31:34).

Sayyid Quthub (2004:187) menggambarkan tentang ilmu Allah yang mencakup segalanya dan menggambarkan pula keterbatasan manusia yang terhalang dari hal-hal ghaib.

Firman Allah Swt. dalam surah Ar-Ra’d ayat 11 yang berbunyi

...إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ ... ١١

...Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri...(QS. Ar-Ra’d/13: 11).

Allah tidak akan mengubah nikmat atau bencana, kemuliaan atau kerendahan, kedudukan atau kehinaan kecuali jika orang-orang itu mengubah perasaan, perbuatan, dan kenyataan hidup mereka. Maka Allah akan mengubah keadaan diri mereka sesuai dengan perubahan yang terjadi dalam diri dan perbuatan mereka sendiri. Meskipun Allah mengetahui apa yang akan terjadi dari mereka sebelum hal itu terwujud, tetapi apa yang terjadi atas diri mereka adalah sebagai akibat dari apa yang timbul dari mereka (Quthub, 2004:38).

Dalam surat Al-Anfaal ayat 53

ذَٰلِكَ بِأَنَّ ٱللَّهَ لَمۡ يَكُ مُغَيِّرٗا نِّعۡمَةً أَنۡعَمَهَا عَلَىٰ قَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡ ۙ
وَأَنَّ ٱللَّهَ سَمِيعٌ عَلِيمٞ ٥٣

....yang demikian itu adalah karena sesungguhnya Allah sekali-kali tidak akan meubah sesuatu nikmat yang telah dianugerahkan-Nya kepada suatu kaum, hingga kaum itu meubah apa-apa yang ada pada diri mereka sendiri, dan sesungguhnya Allah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui(QS. Al-Anfaal/8:53).

Semua perkara terjadi karena Allah Swt. tidak mengubah apapun dari rahmat yang Dia limpahkan kepada seseorang kalau orang-orang tersebut tidak mengubah keadaan mereka sendiri dan pastilah Allah Swt. mengetahui segala sesuatu (Faqih, 2004:310).

Merujuk dari tiga ayat di atas maka dalam matematika, jika dari suatu model sulit diperoleh solusi analitiknya, maka tetap harus berusaha dicari solusinya yang disebut dengan solusi pendekatan. Solusi pendekatan untuk model matematika adalah solusi yang menghampiri atau mendekati solusi analitik (solusi eksak). Solusi pendekatan tidak tepat sama dengan solusi analitik, sehingga terdapat beda antara solusi analitik dan solusi pendekatannya yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2010:5). Solusi pendekatan tersebut dapat diperoleh dengan metode yang dinamakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*). Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak (Triatmodjo, 2002:1).

Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode beda hingga (*finite difference*). Salah satu metode beda hingga yang dimaksud adalah metode implisit FTCS (*Forward Time Center Space*) yang mengubah setiap turunan dari persamaan diferensial parsial menjadi bentuk beda maju untuk turunan waktu dan beda pusat untuk turunan ruang dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Metode implisit FTCS digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial dan secara khusus diterapkan untuk menyelesaikan model yang menggunakan persamaan diferensial parsial, apabila diketahui nilai batasnya.

Salah satu contoh persamaan diferensial parsial adalah persamaan Fokker-Planck yang pertama kali diperkenalkan oleh Adriaan Fokker dan Max Planck dan juga dikenal sebagai persamaan Kolmogorov maju (difusi). Persamaan Fokker-Planck adalah persamaan diferensial parsial yang menggambarkan waktu evolusi fungsi kepadatan probabilitas dari kecepatan partikel di bawah pengaruh kekuatan tarik dan kekuatan acak, seperti *Brownian Motion.* Persamaan ini telah digunakan di berbagai bidang dalam ilmu alam seperti optik kuantum, fisika *solid-state*, fisika kimia, biologi teoritis, teori sirkuit, fisika plasma, fisika permukaan, dinamika populasi, biofisika, teknik, ilmu saraf, polimer fisika, fisika laser, hidrodinamika nonlinear, *Pattern Formation*, dan *Marketing* (Torvattanabun dan Duangpithak, 2011:2194). Persamaan Fokker-Planck yang digunakan dalam penelitian ini berbentuk persamaan diferensial parsial yang memuat koefisien difusi dalam bentuk eksponensial. Orde dari persamaan Fokker-Planck yakni orde dua dengan dua variabel bebas x dan t.

Banyak peneliti yang telah membahas persamaan Fokker-Planck dan metode beda hingga skema implisit. Misalnya persamaan Fokker-Planck yang diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi adomian yang diteliti oleh Tatari dkk (2007), dimana metode ini lebih mudah dan lebih ringkas diaplikasikan sehingga mengurangi volume perhitungan. Torvattanabun dan Duangpithak (2011) menggunakan metode variasi iterasi yang merupakan suatu metode numerik yang kuat untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dan beberapa persamaan sejenis. Selain itu persamaan Fokker-Planck juga telah diselesaikan dengan menggunakan metode garis yang menghasilkan galat sangat kecil atau mendekati nol (Muyassaroh, 2014). Dalam penelitian yang dilakukan oleh Mutholi'ah (2008) menyatakan bahwa metode beda hingga skema implisit lebih mudah digunakan daripada skema *Crank-Nicholson* untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Kemudian Hasan (2015) menyatakan bahwa metode beda hingga skema implisit merupakan metode numerik dengan ketelitian yang tinggi. Sedangkan Pichler dkk (2011) menyatakan bahwa metode beda hingga skema implisit untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck mempunyai tingkat keefisienan dan keakuratan yang baik.

Dari penelitian-penelitian terdahulu, penulis ingin meneliti bagaimana persamaan Fokker-Planck yang memuat koefisien difusi dalam bentuk eksponensial diselesaikan dengan menggunakan metode implisit FTCS. Sehingga penelitian ini dapat dijadikan perbandingan metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan penelitian sebelumnya. Dari urgensi tersebut, penelitian ini difokuskan untuk memperoleh solusi numerik dengan metode beda hingga skema implisit FTCS pada penyelesaian persamaan Fokker-Planck yang memuat koefisien difusi yang berbentuk eksponensial.

Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian dengan judul *"Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS"*.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah untuk penelitian ini adalah

1. Bagaimana solusi numerik persamaan Fokker-Planck menggunakan metode implisit FTCS?
2. Bagaimana perbedaan *error* solusi persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS terhadap solusi analitiknya?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang hendak dicapai untuk penelitian ini adalah

1. Memperoleh solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS.
2. Mengetahui perbedaan *error* solusi persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS terhadap solusi analitiknya.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat, antara lain

1. Memahami konsep tentang metode implisit FTCS sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial.
2. Memperoleh solusi numerik persamaan Fokker-Planck menggunakan metode implisit FTCS.

3. Mengetahui besar *error* solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS.

1.5 Batasan Masalah

Dalam pembahasan ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian, yaitu persamaan Fokker-Planck yang digunakan berbentuk

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v(x,t) - xe^{3t}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x}v(x,t) = 2xe^{2t} - e^{2t} \\ v(0,t) = 0 \quad , v(1,t) = e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = x \quad , \forall x \in (0,1) \end{cases}$$

dengan solusi eksak dari persamaan di atas adalah $v(x,t) = xe^{2t}$.

(Hussain dan Alwan, 2013:1748)

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan menelaah buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung. Langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut

1. Menganalisis bentuk diskrit skema implisit persamaan Fokker-Planck.
2. Menentukan solusi numerik persamaan Fokker-Planck menggunakan metode implisit FTCS.
3. Menerapkan solusi secara simulasi komputasi Matlab.
4. Menganalisis *error* solusi numerik persamaan Fokker-Planck.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam penulisan ini adalah

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka menjelaskan beberapa teori yang berhubungan dengan penelitian yakni persamaan Fokker-Planck, metode implisit FTCS persamaan Fokker-Planck, analisis pertumbuhan *error* atau kesalahan, dan kajian agama dari penelitian.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang digunakan untuk simulasi penyelesaian persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS dan menganalisis *error* solusi numeriknya.

Bab IV Penutup

Penutup berisi tentang kesimpulan dari penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Fokker-Planck

Persamaan Fokker-Planck pertama kali diperkenalkan oleh Fokker dan Planck untuk menggambarkan gerak *Brown* dari partikel. Persamaan ini telah digunakan di berbagai bidang dalam ilmu alam seperti optik kuantum, fisika *solid-state*, fisika kimia, biologi teoritis, teori sirkuit, fisika plasma, fisika permukaan, dinamika populasi, biofisika, teknik, ilmu saraf, polimer fisika, fisika laser, hidrodinamika nonlinear, *Pattern Formation*, dan *Marketing* (Torvattanabun dan Duangpithak, 2011:2194). Persamaan Fokker-Planck secara umum sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \left[-A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}B(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]v(x,t) \tag{2.1}$$

(Zauderer, 2006:10)

dimana $A(x,t)$ adalah koefisien apung (*drift coefficient*) dan $B(x,t)$ adalah koefisien difusi (*diffusion coefficient*). $\frac{\partial v}{\partial t}$ adalah turunan parsial pertama dari fungsi $v(x,t)$ terhadap t, $\frac{\partial v}{\partial x}$ adalah turunan parsial pertama dan $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ adalah turunan parsial kedua fungsi $v(x,t)$ terhadap x yang merupakan urunan parsial tertinggi dari persamaan Fokker-Planck. Sehingga persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas x dan t.

Persamaan Fokker-Planck (2.1) adalah persamaan diferensial parsial yang bentuk implisitnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F(x,t,v_x,v_t,v_{xx}) = 0 \tag{2.2}$$

Dengan F adalah adalah fungsi x dan t adalah variabel *independen* (bebas) dan v adalah variabel *dependen* (terikat) (Cain dan Reynolds, 2010:225).

Menurut Zauderer (2006), terbentuknya persamaan Fokker-Planck (2.1) bermula dari pergerakan partikel secara acak dari sumbu-x sebesar δ. Misalkan x_i adalah variabel acak yang diasumsikan bernilai $-\delta$ jika partikel bergerak ke kiri dan bernilai δ jika partikel bergerak ke kanan pada langkah ke i. Misalkan p adalah probabilitas partikel bergerak ke kanan dan q adalah probabilitas partikel bergerak ke kiri, didefinisikan

$$p(x) = \frac{1}{2}(a(x) + b(x)\delta) \qquad\qquad q(x) = \frac{1}{2}(a(x) - b(x)\delta) \tag{2.3}$$

sehingga $p(x) + q(x) = a(x)$, dimana $a(x)$ merupakan suatu fungsi yang nilainya $0 < a(x) \leq 1$ sedangkan $b(x)$ merupakan konstanta yang dipilih dari $b(x) \leq 1$ sedemikian hingga $0 \leq p(x), q(x) \leq 1$.

Ekspektasi X menunjukkan lokasi perpindahan partikel sekali bergeser yang ditulis dengan $E(X_n) = \langle X_n \rangle = [p(x) - q(x)]\delta n$, sedangkan variansi X adalah jarak perpindahan partikel sekali bergeser yang ditulis dengan $V(X_n) = 4p(x)q(x)\delta^2 n$. Banyaknya n langkah dapat dihitung yaitu $n = \frac{t}{\tau}$, $\forall\tau$ adalah partisi waktu, sehingga $E(X_n) = \langle X_n \rangle = [p(x) - q(x)]\delta \frac{t}{\tau}$ dan $V(X_n) = 4p(x)q(x)\delta^2 \frac{t}{\tau}$. Diambil δ dan τ sekecil-kecilnya ($\delta \to 0, \tau \to 0$), sehingga nilai $\frac{\delta^2}{\tau}$ memiliki nilai tertentu dan nilai $[p(x) - q(x)]$ mendekati kelipatan δ^2. Karena peluang partikel ini terdiri dari dua bagian, yaitu peluang bergeser ke kanan dan ke kiri serta masing-masing pergerakan partikel bersifat bebas maka penurunan rumus didekati berdasarkan teori probabilitas dengan distribusi binomial.

Menggunakan deret Taylor, fungsi distribusi probabilitas $v(x,t)$ partikel di titik x pada waktu $t+\tau$ didefinisikan sebagai berikut:

$$v(x,t+\tau) = [1-p(x)-q(x)]v(x,t) + p(x)v(x-\delta,t) + q(x)v(x+\delta,t) \tag{2.4}$$

Diasumsikan $a(x)\frac{\delta^2}{\tau} \to B(x)$, $b(x)\frac{\delta^2}{\tau} \to A(x)$. Untuk menguraikan setiap nilai v menggunakan deret Taylor sebagai berikut:

$$v(x,t+\tau) = v(x,t) + \tau v_t(x,t) + 0(\tau^2)$$

$$v(x+\delta,t) = v(x,t) + \delta v_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t) + 0(\delta^3)$$

$$v(x-\delta,t) = v(x,t) - \delta v_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t) + 0(\delta^3) \tag{2.5}$$

Deret Taylor terhadap variabel x dipotong sampai turunan kedua karena pada persamaan Fokker-Planck hanya mempertimbangkan kecepatan dan percepatan yang dinyatakan dalam turunan pertama dan kedua variabel x. Setelah diperoleh deret Taylor pada masing-masing distribusi probabilitas partikel, persamaan (2.5) disubstitusikan ke persamaan (2.4) maka diperoleh

$$\begin{aligned} v(x,t) + \tau v_t(x,t) = {} & [1-p(x)-q(x)]v(x,t) + \\ & p(x)\left[v(x,t) - \delta v_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)\right] + \\ & q(x)\left[v(x,t) + \delta v_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dari persamaan (2.6), suku-suku sejenis dikelompokkan menjadi satu

$$\begin{aligned} \tau v_t(x,t) = {} & [1-1-p(x)-q(x)+p(x)+q(x)]v(x,t) + \\ & [-p(x)+q(x)]\delta v_x(x,t) + \\ & \frac{1}{2}[p(x)+q(x)]\delta^2 v_{xx}(x,t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Karena $p(x) + q(x) = a(x)$, maka persamaan (2.7) menjadi

$$\tau v_t(x,t) = [-a(x) + a(x)]v(x,t) + \\ [-p(x) + q(x)]\delta v_x(x,t) + \frac{1}{2}a(x)\delta^2 v_{xx}(x,t) \tag{2.8}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan $\frac{1}{\tau}$, sehingga diperoleh

$$v_t(x,t) = \frac{1}{\hat{\delta}}[-a(x) + a(x)]v(x,t) - \\ [p(x) - q(x)]\frac{\delta}{\tau}v_x(x,t) + \frac{1}{2}a(x)\frac{\delta^2}{\tau}v_{xx}(x,t) \tag{2.9}$$

Diambil δ dan τ sekecil-kecilnya ($\delta \to 0, \tau \to 0$), dengan $[p(x) - q(x)]\frac{\delta}{\tau} = E\langle X\rangle$. Karena X merupakan bentuk fungsi maka diasumsikan:

$$\lim_{\tau\to 0}[p(x) - q(x)]\frac{\delta}{\tau} = A(x,t) \qquad \lim_{\tau\to 0} a(x)\frac{\delta^2}{\tau} = B(x,t) \tag{2.10}$$

Jadi persamaan (2.9) menjadi:

$$v_t(x,t) = -A(x,t)v_x(x,t) + \frac{1}{2}B(x,t)v_{xx}(x,t) \tag{2.11}$$

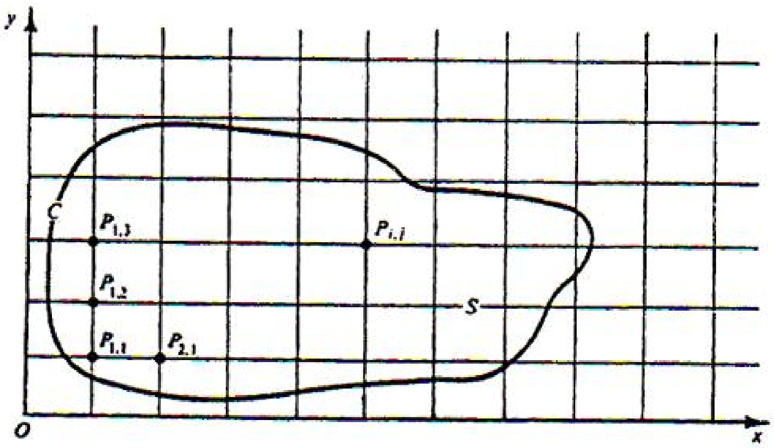
atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = -A(x,t)\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) + \frac{1}{2}B(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) \tag{2.12}$$

2.2 Metode Implisit FTCS Persamaan Fokker-Planck

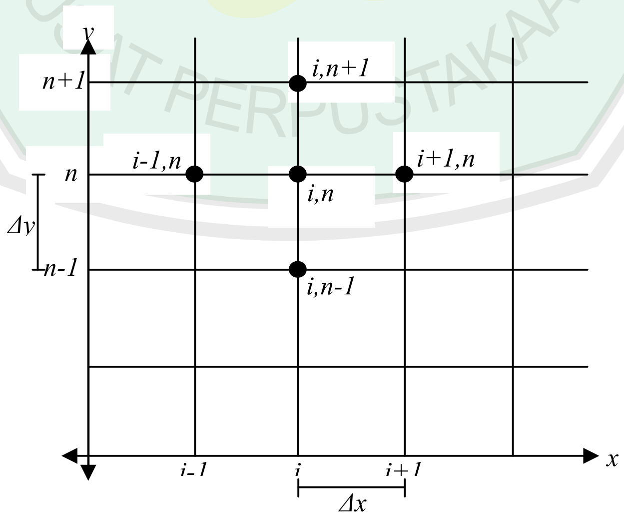
Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan kondisi awal dan batas dapat diselesaikan dengan metode beda hingga. Sebagai contoh penyelesaian persamaan ellips pada daerah S yang dibatasi oleh kurva C seperti tampak dalam Gambar 2.1. Daerah tinjauan S dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan P) dengan jarak antara pias adalah Δx dan Δy. Kondisi dimana variabel tidak bebas (ö) harus memenuhi di sekeliling kurva C disebut dengan kondisi batas.

Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan dari nilai ö pada titik-titik hitungan $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{i,j}, \ldots$ Perkiraan dilakukan dengan mengganti turunan dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan perkiraan beda hingga (Triatmodjo, 2002:200).



Gambar 2.1 Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga

Setiap persamaan diferensial yang berlaku pada luasan tersebut menyatakan keadaan suatu titik pias yang cukup kecil di luasan tersebut.



Gambar 2.2 Jaringan Titik Hitungan dalam Bidang *x-y*

Gambar 2.2 adalah jaringan titik hitungan pada bidang *x-y* yang dapat dibagi menjadi sejumlah pias segi empat dengan sisi Δx dan Δy. Panjang pias dalam arah x adalah Δx dan dalam arah y adalah Δy.

Turunan parsial dalam persamaan Fokker-Planck pada setiap titik *grid* didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Bentuk skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v yang terdiri dari dua variabel bebas x dan t. Berikut merupakan deret Taylor:

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) + \cdots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} v_{n-1}(x_0, t) + O(\Delta x^n) \tag{2.13}$$

dengan $O(\Delta x^n)$ merupakan galat orde ke n (Causon dan Mingham, 2010:20-23).

Persamaan Fokker-Planck yang akan dicari solusi numeriknya dalam penelitian ini dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) - xe^{3t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = 2xe^{2t} - e^{2t} \tag{2.14}$$

dengan kondisi awal dan kondisi batas

$$\begin{gathered} v(x,0) = x, \qquad x \in (0,1) \\ v(0,t) = 0, \qquad v(1,t) = e^{2t} \end{gathered} \tag{2.15}$$

dengan solusi eksak dari persamaan (2.14) adalah $v(x,t) = xe^{2t}$.

(Hussain dan Alwan, 2013:1748)

Metode implisit FTCS untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck (2.14) membutuhkan turunan parsial $\frac{\partial}{\partial t} v(x,t)$ menggunakan beda maju untuk turunan waktu, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)$ dan $\frac{\partial}{\partial x} v(x,t)$ menggunakan beda pusat untuk turunan ruang, maka deret Taylor yang diperlukan adalah sebagai berikut:

$$v(x_i, t_n + \Delta t) = v(x_i, t_n) + \Delta t v_t(x_i, t_n) + \frac{1}{2!}\Delta t^2 v_{tt}(x_i, t_n) + \cdots \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} v(x_i + \Delta x, t_n + \Delta t) = {} & v(x_i, t_n) + \Delta t v_t(x_i, t_n) + \Delta x v_x(x_i, t_n) + \\ & \frac{1}{2!}[\Delta t^2 v_{tt}(x_i, t_n) + 2\Delta t \Delta x v_{tx}(x_i, t_n) + \\ & \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n)] + \cdots \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} v(x_i - \Delta x, t_n + \Delta t) = {} & v(x_i, t_n) + \Delta t v_t(x_i, t_n) - \Delta x v_x(x_i, t_n) + \\ & \frac{1}{2!}[\Delta t^2 v_{tt}(x_i, t_n) - 2\Delta t \Delta x v_{tx}(x_i, t_n) + \\ & \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n)] + \cdots \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sehingga turunan parsial $\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$ sebagai berikut

$$\Delta t v_t(x_i, t_n) = v(x_i, t_n + \Delta t) - v(x_i, t_n) - O(\Delta t^2)$$

$$v_t(x_i, t_n) = \frac{v(x_i, t_n + \Delta t) - v(x_i, t_n)}{\Delta t} - O(\Delta t^2) \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \tag{2.20}$$

Turunan parsial $\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n) = {} & v(x_i + \Delta x, t_n + \Delta t) - 2v(x_i, t_n + \Delta t) + \\ & v(x_i - \Delta x, t_n + \Delta t) - O\left(\Delta t^3 \Delta x^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{xx}(x_i, t_n) = {} & \frac{v(x_i + \Delta x, t_n + \Delta t) - 2v(x_i, t_n + \Delta t) + v(x_i - \Delta x, t_n + \Delta t)}{\Delta x^2} - \\ & O(\Delta t^3 \Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) = \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{2.22}$$

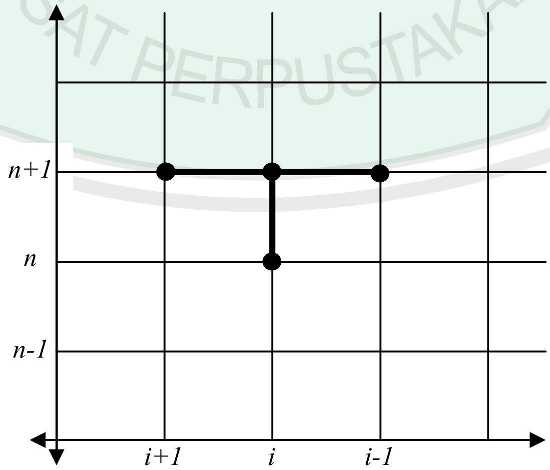
Turunan parsial untuk $\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)$ sebagai berikut

$$\Delta x v_x(x_i,t_n) = v(x_i+\Delta x, t_n+\Delta t) - v(x_i-\Delta x, t_n+\Delta t) - O(\Delta t^2 \Delta x^2)$$

$$v_x(x_i,t_n) = \frac{v(x_i+\Delta x, t_n+\Delta t) - v(x_i-\Delta x, t_n+\Delta t)}{\Delta x} - O(\Delta t^2 \Delta x^2) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) = \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \quad (2.24)$$

Karena $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$ maka suku kedua dari persamaan (2.19), (2.21), dan (2.23) dapat diabaikan. Gambar 2.3 menunjukkan jaringan titik hitungan dari skema implisit. Dari gambar tersebut, variabel di titik i pada waktu ke $n+1(v_i^{n+1})$ dipengaruhi oleh v_i^n yang sudah diketahui nilainya serta v_{i-1}^{n+1} dan v_{i+1}^{n+1} yang belum diketahui nilainya. Menurut Triatmodjo (2002:216) dengan menggunakan skema pada Gambar 2.3, fungsi $v(x,t)$ dan turunannya dari persamaan (2.20), (2.22), dan (2.24) didekati oleh bentuk ini



Gambar 2.3 Jaringan Titik Hitungan Skema Implisit

2.3 Analisis Pertumbuhan *Error* atau Kesalahan

Kesalahan numerik timbul dari penggunaan aproksimasi untuk menyatakan operasi dan besaran matematika yang pasti (Chapra dan Canale, 2007:76). Ada tiga macam kesalahan yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan (*round-off error*), dan kesalahan pemotongan (*truncation error*) (Triatmodjo, 2002:2).

Kesalahan bawaan adalah kesalahan dari nilai data. Kesalahan tersebut terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur (Triatmodjo, 2002:2).

Kesalahan pembulatan (*round-off error*) terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak (Triatmodjo, 2002:2-3). Menurut Chapra dan Canale (2007), kesalahan pembulatan terjadi karena komputer hanya menyimpan sejumlah tertentu angka penting selama perhitungan.

Kesalahan pemotongan (*truncation error*) terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Misalnya suatu proses tak berhingga diganti dengan proses berhingga. Dalam praktik, sulit diperhitungkan semua suku sampai tak berhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak. Kesalahan karena hanya memperhitungkan beberapa suku pertama disebut dengan kesalahan pemotongan (Triatmodjo, 2002:3).

Hubungan antara nilai eksak (analitik), nilai pendekatan dan kesalahan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E_t = |\text{solusi eksak} - \text{solusi pendekatan}| \tag{2.25}$$

dimana E_t adalah kesalahan atau galat absolut yang dihasilkan dari perhitungan numerik (Triatmodjo, 2002:3-4). Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan. Besarnya tingkat kesalahan dapat dinyatakan dalam bentuk kesalahan relatif, yaitu dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{\text{solusi eksak}} \tag{2.26}$$

dengan ε_t adalah kesalahan relatif terhadap nilai eksak. Kesalahan relatif sering diberikan dalam bentuk persen seperti berikut:

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{\text{solusi eksak}} \times 100\% \tag{2.27}$$

2.4 Ramalan yang Diperbolehkan dalam Islam

Nubuat atau ramalan adalah hasil prediksi mengenai peristiwa-peristiwa yang akan datang. Sinonim dari ramalan adalah perkiraan, dugaan, rekaan, dan pengandaian yang belum tentu benar atau mendekati benar. Ramalan sering kali dikaitkan dengan melihat kejadian yang akan datang dengan mendatangi orang yang mempunyai kemampuan untuk melihat masa depan. Dalam Islam, ramalan termasuk hal yang dilarang karena berlawanan dengan firman Allah dalam surah Luqman ayat 34 dan surah An-Naml ayat 65

قُل لَّا يَعْلَمُ مَن فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ ٱلْغَيْبَ إِلَّا ٱللَّهُ ۚ وَمَا يَشْعُرُونَ أَيَّانَ يُبْعَثُونَ ٦٥

Katakanlah: "tidak ada seorangpun di langit dan di bumi yang mengetahui perkara yang ghaib, kecuali Allah", dan mereka tidak mengetahui bila mereka akan dibangkitkan (QS. An-Naml/27:65).

Ayat di atas menjelaskan bahwa hanya Allah Swt. yang Maha Mengetahui segala sesuatu yang akan terjadi besok. Allah Swt. telah menetapkan bahwa hari kiamat itu merupakan perkara ghaib yang tidak diketahui sama sekali oleh selain diri-Nya (Quthub, 2004:187).

Qatadah berkata bahwa bintang-bintang hanya dijadikan Allah untuk 3 hal yaitu sebagai hiasan langit, petunjuk, dan menjadi pelontar syaitan. Barangsiapa yang memanfaatkan bintang-bintang itu untuk selain hal tersebut, maka berarti ia berkata dengan pendapatnya sendiri dan telah keliru dalam menempatkannya, menyia-nyiakan usahanya sendiri dan berlebih-lebihan dalam sesuatu yang tidak terjangkau oleh ilmunya. Sesungguhnya manusia-manusia jahil tentang perintah Allah telah membuat bintang-bintang itu sebagai ramalan (Katsir, 2007:234).

Dari Shafiyyah (putri Abu 'Ubaid) dari salah seorang istri Nabi Saw, bahwa Rasulullah Saw. bersabda "*Barangsiapa yang mendatangi juru ramal kemudian bertanya tentang sesuatu (yang akan terjadi), maka shalatnya tidak akan diterima selama empat puluh malam (40 hari)*" (HR. Muslim) (Al-Albani, 2005:733-734). Meskipun hanya mendatangi paranormal, Islam melarang keras bahkan sholat yang dilakukannya selama 40 hari tidak diterima. Apabila sampai membenarkan atau meyakini pengakuan paranoral tersebut, maka dianggap telah mengkufuri al-Quran. Dari Abu Hurairah ra, Rasulullah Saw. bersabda *"Orang yang mendatangi dukun dan membenarkan ucapannya, maka ia telah terlepas dari apa yang diturunkan kepada Muhammad (keluar dari syariat Islam)"* (HR. Abu Daud) (Al-Albani, 2006:753).

Salah satu contoh ramalan yang tidak diperbolehkan seperti ramalan bintang atau zodiak. Secara logika, zodiak tidak mempunyai kebenaran yang mendasar karena hanya menebak dan menentukan nasib dan sifat seseorang yang dihubungkan dengan bintang-bintang di langit. Dari Ibnu ‘Abbas ra, dia berkata bahwa Rasullullah Saw. bersabda *“Barang siapa yang memanfaatkan salah satu ilmu nujum (astrologi) maka dia telah memanfaatkan salah satu cabang sihir. Semakin bertambah ilmu nujum yang dia manfaatkan, semakin banyak pula cabang sihir yang dia manfaatkan”*(HR Abu Dawud, dengan sanad Shahih) (Salim, 2007:297).

Akan tetapi dalam surah Luqman ayat 34 terdapat penjelasan bahwa manusia diwajibkan untuk berusaha, karena manusia tidak dapat mengetahui dengan pasti apa yang akan dilakukan atau yang akan diperolehnya. Terkadang ada beberapa hal yang dapat diketahui berdasarkan pengalaman dan penelitian, seperti mengetahui jenis kelamin dan lain-lain (Al-Qurthubi, 2009:196).

Mustafa Al-Maragi (1992:189) menjelaskan bahwa Allah Swt menurunkan hujan pada musimnya yang telah ditentukan-Nya, di tempat yang telah ditentukan oleh pengetahuan-Nya. Adapun mengenai para ahli ilmu falak, sekalipun mereka mengetahui kapan terjadinya gerhana matahari dan gerhana bulan, serta musim penghujan melalui dalil *hisabiyah,* maka hal-hal tersebut bukanlah termasuk hal yang ghaib. Sebenarnya hal-hal tersebut merupakan tanda-tanda yang dapat dijangkau oleh pengetahuan manusia, terlebih lagi sebagian dari padanya terkadang termasuk ke dalam kategori *zan* (perkiraan) dan bukannya kategori *yakin* (pasti).

Ilmu nujum berbeda dengan ilmu falak. Ibnu ‘Abdil Bar menjelaskan tentang ilmu falak bahwa manfaat ilmu perbintangan (astrologi), menurut seluruh penganut agama adalah mengetahui perjalanan pelayaran, letak bintang-bintang, tempat munculnya rasi bintang, pergeseran siang malam, bagian siang dan bagian malam di setiap negeri, setiap hari, dan letak sebuah negeri dari garis khatulistiwa (ekuator). Selain itu, mengetahui gugusan bintang utara, ufuk timur dan barat, munculnya bulan sabit (hilal), pergerakan bintang-bintang untuk menentukan musim dan sebagainya. Demikian pula mengetahui peredarannya, tegaknya, membujur dan melintangnya, masa dan terjadinya gerhana bulan dan matahari, besar dan kecilnya gerhana di setiap negeri, serta mengetahui makna dari tahun matahari, tahun bulan dan tahun bintang (Salim, 2007:292).

Dari pemaparan di atas, kata ramalan dirasa kurang sesuai untuk sebuah ilmu pengetahuan karena selalu dikaitkan dengan hal-hal ghaib. Kata yang sesuai untuk kondisi yang masih belum pasti kebenarannya adalah perkiraan. Karena perkiraan dapat tepat sama atau hampir sama dengan kebenaran yang ada dilihat dari fakta-fakta sebelumnya yang telah diolah dengan ilmu pengetahuan.

Sehingga perkiraan yang diperbolehkan adalah yang diperoleh dari penelitian data-data sebelumnya yang telah dikembangkan dengan ilmu pengetahuan yang ada, misalnya ilmu falak. Penelitian adalah suatu proses mempelajari dan meneliti suatu permasalahan yang bertujuan untuk menemukan fakta-fakta baru. Penelitian ini menghasilkan suatu pengetahuan yang lebih mendalam mengenai suatu permasalahan sehingga ilmu pengetahuan menjadi berkembang. Hasil penelitian tersebut tidak sepenuhnya benar, karena hasil tersebut adalah perkiraan *(zan)* dari hasil sebenarnya. Dari fakta-fakta yang ada muncullah hipotesis-hipotesis yang harus dibuktikan kebenarannya. Jika tidak dibuktikan, maka tidak akan mengetahui kebenaran ilmiahnya. Hal ini bersesuaian dengan firman Allah dalam surah An-Najm ayat 28 sebagai berikut:

وَمَا لَهُم بِهِۦ مِنْ عِلْمٍ ۖ إِن يَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّ ۖ وَإِنَّ ٱلظَّنَّ لَا يُغْنِى مِنَ ٱلْحَقِّ شَيْـًٔا ﴿٢٨﴾

dan mereka tidak mempunyai sesuatu pengetahuanpun tentang itu. mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan sedang Sesungguhnya persangkaan itu tiada berfaedah sedikitpun terhadap kebenaran (QS. An-Najm/53:28).

Sesungguhnya mengetahui sesuatu dengan pengetahuan yang hakiki haruslah berdasarkan keyakinan, bukan berdasarkan persangkaan atau waham karena hal ini bukanlah jalan menuju ilmu. Keyakinan seperti ini semestinya harus berdasarkan suatu dalil akal. Padahal akal tidak cenderung kepada keyakinan (Al-Maragi, 1992:94-95). Dari ayat di atas jelaslah bahwa hipotesis-hipotesis yang muncul itu harus dibuktikan dengan melakukan penelitian agar jelas hasil yang akan diperoleh. Sehingga dari hipotesis tersebut muncullah pengetahuan baru yang bermanfaat bagi umat.

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan pada penelitian ini menyajikan upaya menyelesaikan persamaan Fokker-Planck menggunakan metode implisit FTCS (*Forward Time Center Space*) untuk mendapatkan solusi secara numeriknya.

3.1 Bentuk Diskrit Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS

Mensubstitusikan persamaan (2.20), (2.22), dan (2.24) ke persamaan (2.14), menjadi

$$\frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}-x_i e^{3t^n}\left(\frac{v_{i-1}^{n+1}-2v_i^{n+1}+v_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)-\left(\frac{v_{i+1}^{n+1}-v_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)$$
$$=2x_i e^{2t^n}-e^{2t^n} \tag{3.1}$$

Kemudian untuk semua variabel dengan superskrip n dikelompokkan ke ruas kanan, sehingga diperoleh bentuk diskrit persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS sebagai berikut:

$$-\left(2x_i e^{3t^n}\Delta t-\Delta t\Delta x\right)v_{i-1}^{n+1}+\left(4x_i e^{3t^n}\Delta t+2\Delta x^2\right)v_i^{n+1}-$$
$$\left(2x_i e^{3t^n}\Delta t+\Delta t\Delta x\right)v_{i+1}^{n+1}=2\Delta x^2 v_i^n+2\Delta x^2\Delta t\left(2x_i e^{2t^n}-e^{2t^n}\right) \tag{3.2}$$

atau

$$-A_i^n v_{i-1}^{n+1}+B_i^n v_i^{n+1}-C_i^n v_{i+1}^{n+1}=D_i^n v_i^n+E_i^n \tag{3.3}$$

dimana

$$A_i^n=\left(2x_i e^{3t^n}\Delta t-\Delta t\Delta x\right)$$

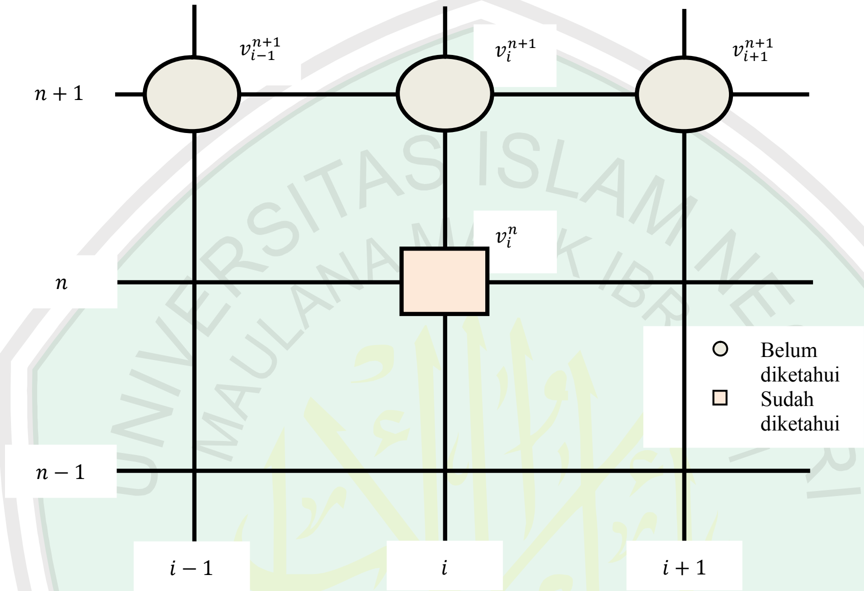
$$B_i^n=\left(4x_i e^{3t^n}\Delta t+2\Delta x^2\right)$$

$$C_i^n=\left(2x_i e^{3t^n}\Delta t+\Delta t\Delta x\right)$$

$$D_i^n = (2\Delta x^2)$$

$$E_i^n = 2\Delta x^2 \Delta t(2x_i e^{2t^n} - e^{2t^n})$$

Stensil bentuk diskrit persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Stensil Metode Implisit FTCS Persamaan Fokker-Planck Diskrit

Kemudian dilakukan iterasi pada persamaan (3.3) untuk $n = 1,2,\dots,L-1$ dan $i = 2,3,\dots,L-1$. Misalkan $L = 6$, maka diperoleh sistem persamaan seperti berikut:

Untuk $n = 1$ dan $i = 2,3,4,5$

$i = 2 \rightarrow -A_2^1 v_1^2 + B_2^1 v_2^2 - C_2^1 v_3^2 = D_2^1 v_2^1 + E_2^1$

$i = 3 \rightarrow -A_3^1 v_2^2 + B_3^1 v_3^2 - C_3^1 v_4^2 = D_3^1 v_3^1 + E_3^1$

$i = 4 \rightarrow -A_4^1 v_3^2 + B_4^1 v_4^2 - C_4^1 v_5^2 = D_4^1 v_4^1 + E_4^1$

$i = 5 \rightarrow -A_5^1 v_4^2 + B_5^1 v_5^2 - C_5^1 v_6^2 = D_5^1 v_5^1 + E_5^1$

Untuk $n = 2$ dan $i = 2,3,4,5$

$i = 2 \rightarrow -A_2^2 v_1^3 + B_2^2 v_2^3 - C_2^2 v_3^3 = D_2^2 v_2^2 + E_2^2$

$i = 3 \rightarrow -A_3^2 v_2^3 + B_3^2 v_3^3 - C_3^2 v_4^3 = D_3^2 v_3^2 + E_3^2$

$i = 4 \rightarrow -A_4^2 v_3^3 + B_4^2 v_4^3 - C_4^2 v_5^3 = D_4^2 v_4^2 + E_4^2$

$i = 5 \rightarrow -A_5^2 v_4^3 + B_5^2 v_5^3 - C_5^2 v_6^3 = D_5^2 v_5^2 + E_5^2$

Untuk $n = 3$ dan $i = 2, 3, 4,5$

$i = 2 \rightarrow -A_2^3 v_1^4 + B_2^3 v_2^4 - C_2^3 v_3^4 = D_2^3 v_2^3 + E_2^3$

$i = 3 \rightarrow -A_3^3 v_2^4 + B_3^3 v_3^4 - C_3^3 v_4^4 = D_3^3 v_3^3 + E_3^3$

$i = 4 \rightarrow -A_4^3 v_3^4 + B_4^3 v_4^4 - C_4^3 v_5^4 = D_4^3 v_4^3 + E_4^3$

$i = 5 \rightarrow -A_5^3 v_4^4 + B_5^3 v_5^4 - C_5^3 v_6^4 = D_5^3 v_5^3 + E_5^3$

Untuk $n = 4$ dan $i = 2, 3, 4,5$

$i = 2 \rightarrow -A_2^4 v_1^5 + B_2^4 v_2^5 - C_2^4 v_3^5 = D_2^4 v_2^4 + E_2^4$

$i = 3 \rightarrow -A_3^4 v_2^5 + B_3^4 v_3^5 - C_3^4 v_4^5 = D_3^4 v_3^4 + E_3^4$

$i = 4 \rightarrow -A_4^4 v_3^5 + B_4^4 v_4^5 - C_4^4 v_5^5 = D_4^4 v_4^4 + E_4^4$

$i = 5 \rightarrow -A_5^4 v_4^5 + B_5^4 v_5^5 - C_5^4 v_6^5 = D_5^4 v_5^4 + E_5^4$

Untuk $n = 5$ dan $i = 2, 3, 4,5$

$i = 2 \rightarrow -A_2^5 v_1^6 + B_2^5 v_2^6 - C_2^5 v_3^6 = D_2^5 v_2^5 + E_2^5$

$i = 3 \rightarrow -A_3^5 v_2^6 + B_3^5 v_3^6 - C_3^5 v_4^6 = D_3^5 v_3^5 + E_3^5$

$i = 4 \rightarrow -A_4^5 v_3^6 + B_4^5 v_4^6 - C_4^5 v_5^6 = D_4^5 v_4^5 + E_4^5$

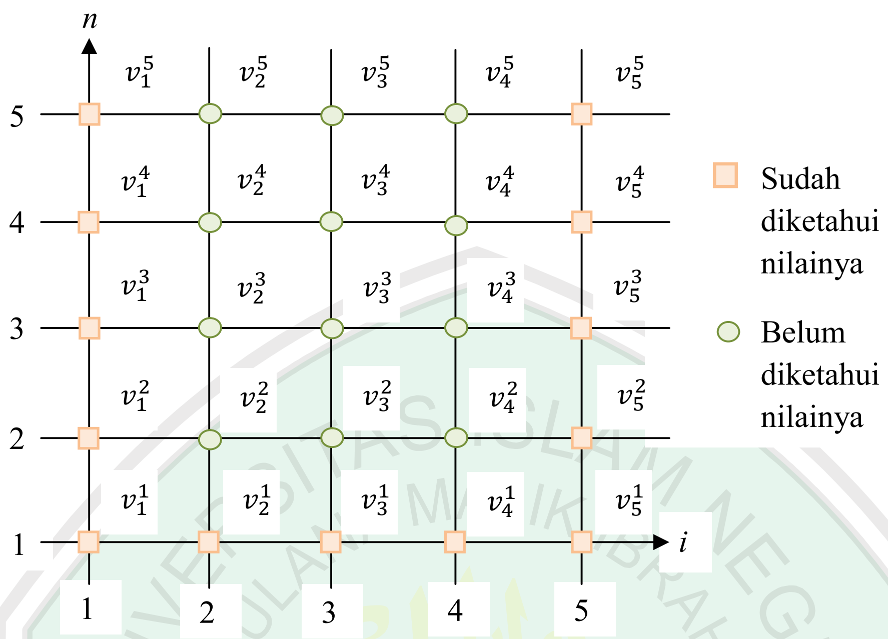
$i = 5 \rightarrow -A_5^5 v_4^6 + B_5^5 v_5^6 - C_5^5 v_6^6 = D_5^5 v_5^5 + E_5^5$

Dengan nilai awal $v(x, 0) = x \quad , \forall x \in (0,1)$

$$v_i^1 = x_i \,, \qquad \forall i = 1, 2, 3,4,5,6$$

dan nilai batas $v(0, t) = 0 \quad , v(1, t) = e^{2t}$

$$v_1^n = 0, v_6^n = e^{2t}, \qquad \forall n = 1, 2,3,4,5,6$$



Gambar 3.2 Stensil Metode Implisit FTCS Persamaan Fokker-Planck Diskrit untuk $n = 1,2,3,4,5$ dan $i = 1,2,3,4,5$

Setelah dimasukkan nilai awal dan nilai batasnya, maka diperoleh sistem persamaan dalam bentuk matriks berikut:

Untuk $n = 1$ dan $i = 2, 3, 4,5$

$$\begin{bmatrix} B_2^1 & -C_2^1 & 0 & 0 \\ -A_3^1 & B_3^1 & -C_3^1 & 0 \\ 0 & -A_4^1 & B_4^1 & -C_4^1 \\ 0 & 0 & -A_5^1 & B_5^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^2 \\ v_3^2 \\ v_4^2 \\ v_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^1 v_2^1 + E_2^1 \\ D_3^1 v_3^1 + E_3^1 \\ D_4^1 v_4^1 + E_4^1 \\ D_5^1 v_5^1 + E_5^1 + C_5^1 v_6^2 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 2$ dan $i = 2, 3, 4,5$

$$\begin{bmatrix} B_2^2 & -C_2^2 & 0 & 0 \\ -A_3^2 & B_3^2 & -C_3^2 & 0 \\ 0 & -A_4^2 & B_4^2 & -C_4^2 \\ 0 & 0 & -A_5^2 & B_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^3 \\ v_3^3 \\ v_4^3 \\ v_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^2 v_2^2 + E_2^2 \\ D_3^2 v_3^2 + E_3^2 \\ D_4^2 v_4^2 + E_4^2 \\ D_5^2 v_5^2 + E_5^2 + C_5^2 v_6^3 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 3$ dan $i = 2, 3, 4,5$

$$\begin{bmatrix} B_2^3 & -C_2^3 & 0 & 0 \\ -A_3^3 & B_3^3 & -C_3^3 & 0 \\ 0 & -A_4^3 & B_4^3 & -C_4^3 \\ 0 & 0 & -A_5^3 & B_5^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^4 \\ v_3^4 \\ v_4^4 \\ v_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^3 v_2^3 + E_2^3 \\ D_3^3 v_3^3 + E_3^3 \\ D_4^3 v_4^3 + E_4^3 \\ D_5^3 v_5^3 + E_5^3 + C_5^3 v_6^4 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 4$ dan $i = 2, 3, 4{,}5$

$$\begin{bmatrix} B_2^4 & -C_2^4 & 0 & 0 \\ -A_3^4 & B_3^4 & -C_3^4 & 0 \\ 0 & -A_4^4 & B_4^4 & -C_4^4 \\ 0 & 0 & -A_5^4 & B_5^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^5 \\ v_3^5 \\ v_4^5 \\ v_5^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^4 v_2^4 + E_2^4 \\ D_3^4 v_3^4 + E_3^4 \\ D_4^4 v_4^4 + E_4^4 \\ D_5^4 v_5^4 + E_5^4 + C_5^4 v_6^5 \end{bmatrix}$$

Untuk $n = 5$ dan $i = 2, 3, 4{,}5$

$$\begin{bmatrix} B_2^5 & -C_2^5 & 0 & 0 \\ -A_3^5 & B_3^5 & -C_3^5 & 0 \\ 0 & -A_4^5 & B_4^5 & -C_4^5 \\ 0 & 0 & -A_5^5 & B_5^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^6 \\ v_3^6 \\ v_4^6 \\ v_5^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^5 v_2^5 + E_2^5 \\ D_3^5 v_3^5 + E_3^5 \\ D_4^5 v_4^5 + E_4^5 \\ D_5^5 v_5^5 + E_5^5 + C_5^5 v_6^6 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks tridiagonal secara umum sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} B_{i+1}^n & -C_{i+1}^n & \cdots & 0 & 0 \\ -A_{i+2}^n & B_{i+2}^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{L-2}^n & -C_{L-2}^n \\ 0 & 0 & \cdots & -A_{L-1}^n & B_{L-1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^{n+1} \\ v_3^{n+1} \\ \vdots \\ v_{L-2}^{n+1} \\ v_{L-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2^n v_2^n + E_2^n \\ D_3^n v_3^n + E_3^n \\ \vdots \\ D_{L-2}^n v_{L-2}^n + E_{L-2}^n \\ D_{L-1}^n v_{L-1}^n + E_{L-1}^n + C_{L-1}^n v_L^{n+1} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Untuk $n = 1,2, \dots, L-1$ dan $i = 1,2, .. L-1$, maka matriksnya $M_i^n v_i^{n+1} = N_i^n$, dimana M adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(L-2) \times (L-2)$ sehingga matriks M dapat dibalik (*invertible*) dan unsur v_i^n diketahui maka untuk setiap matriks N_i^n yang berukuran $(L-2) \times 1$, sistem $M_i^n v_i^{n+1} = N_i^n$ mempunyai tepat satu pemecahan, yakni $v_i^{n+1} = M^{-1} N_i^n$.

3.2 Penyelesaian Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS

Penyelesaian persamaan Fokker-Planck pada daerah batas $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq t \leq 1$. Dipilih nilai $\Delta x = 0{,}1$ dan $\Delta t = 0{,}01$, sehingga diperoleh nilai

$x = 0; 0{,}1; 0{,}2; \dots ; 1$ dan $t = 0; 0{,}01; 0{,}02; \dots ; 1$. Dituliskan persamaan Fokker-Planck diskrit berikut:

$$-A_i^n v_{i-1}^{n+1} + B_i^n v_i^{n+1} - C_i^n v_{i+1}^{n+1} = D_i^n v_i^n + E_i^n \tag{3.5}$$

dimana

$$A_i^n = \left(2x_i e^{3t^n}\Delta t - \Delta t\Delta x\right)$$

$$B_i^n = \left(4x_i e^{3t^n}\Delta t + 2\Delta x^2\right)$$

$$C_i^n = \left(2x_i e^{3t^n}\Delta t + \Delta t\Delta x\right)$$

$$D_i^n = \left(2\Delta x^2\right)$$

$$E_i^n = 2\Delta x^2 \Delta t\left(2x_i e^{2t^n} - e^{2t^n}\right)$$

Kemudian dilakukan perhitungan untuk nilai A_i^n, B_i^n, C_i^n, D_i^n, dan E_i^n menggunakan program Matlab (R2010a) yang disajikan dalam bentuk tabel berikut ini:

Tabel 3.1 Nilai $A_i^n = \left(2x_i e^{3t^n}\Delta t - \Delta t\Delta x\right)$

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	-0,001	-0,001	-0,001	$\cdots$	-0,001
$x_2 = 0{,}1$	0,001	0,0011	0,0011	$\cdots$	0,0392
$x_3 = 0{,}2$	0,003	0,0031	0,0032	$\cdots$	0,0793
$x_4 = 0{,}3$	0,005	0,0052	0,0054	$\cdots$	0,1195
$x_5 = 0{,}4$	0,007	0,0072	0,0075	$\cdots$	0,1597
$x_6 = 0{,}5$	0,009	0,0093	0,0096	$\cdots$	0,1999
$x_7 = 0{,}6$	0,011	0,0114	0,0117	$\cdots$	0,2400
$x_8 = 0{,}7$	0,013	0,0134	0,0139	$\cdots$	0,2802
$x_9 = 0{,}8$	0,015	0,0155	0,0160	$\cdots$	0,3204
$x_{10} = 0{,}9$	0,017	0,0175	0,0181	$\cdots$	0,3605
$x_{11} = 1$	0,019	0,0196	0,0202	$\cdots$	0,4007

Tabel 3.2 Nilai $B_i^n = \left(4x_i e^{3t^n}\Delta t + 2\Delta x^2\right)$

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_2 = 0{,}1$	0,024	0,0241	0,0242	$\cdots$	0,1003
$x_3 = 0{,}2$	0,028	0,0282	0,0285	$\cdots$	0,1807
$x_4 = 0{,}3$	0,032	0,0324	0,0327	$\cdots$	0,2610
$x_5 = 0{,}4$	0,036	0,0365	0,0370	$\cdots$	0,3414
$x_6 = 0{,}5$	0,04	0,0406	0,0412	$\cdots$	0,4217
$x_7 = 0{,}6$	0,044	0,0447	0,0455	$\cdots$	0,5021
$x_8 = 0{,}7$	0,048	0,0489	0,0497	$\cdots$	0,5824
$x_9 = 0{,}8$	0,052	0,0530	0,0540	$\cdots$	0,6627
$x_{10} = 0{,}9$	0,056	0,0571	0,0582	$\cdots$	0,7431
$x_{11} = 1$	0,06	0,0612	0,0625	$\cdots$	0,8234

Tabel 3.3 Nilai $C_i^n = \left(2x_i e^{3t^n}\Delta t + \Delta t\Delta x\right)$

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0,001	0,001	0,001	$\cdots$	0,001
$x_2 = 0{,}1$	0,003	0,0031	0,0031	$\cdots$	0,0412
$x_3 = 0{,}2$	0,005	0,0051	0,0052	$\cdots$	0,0813
$x_4 = 0{,}3$	0,007	0,0072	0,0074	$\cdots$	0,1215
$x_5 = 0{,}4$	0,009	0,0092	0,0095	$\cdots$	0,1617
$x_6 = 0{,}5$	0,011	0,0113	0,0116	$\cdots$	0,2019
$x_7 = 0{,}6$	0,013	0,0134	0,0137	$\cdots$	0,2420
$x_8 = 0{,}7$	0,015	0,0154	0,0159	$\cdots$	0,2822
$x_9 = 0{,}8$	0,017	0,0175	0,0180	$\cdots$	0,3224
$x_{10} = 0{,}9$	0,019	0,0195	0,0201	$\cdots$	0,3625
$x_{11} = 1$	0,021	0,0216	0,0222	$\cdots$	0,4027

Tabel 3.4 Nilai $D_i^n = 2\Delta x^2$

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_2 = 0{,}1$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_3 = 0{,}2$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_4 = 0{,}3$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_5 = 0{,}4$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_6 = 0{,}5$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_7 = 0{,}6$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_8 = 0{,}7$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_9 = 0{,}8$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_{10} = 0{,}9$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02
$x_{11} = 1$	0,02	0,02	0,02	$\cdots$	0,02

Tabel 3.5 Nilai $E_i^n = 2\Delta x^2 \Delta t\left(2x_i e^{2t^n} - e^{2t^n}\right)$

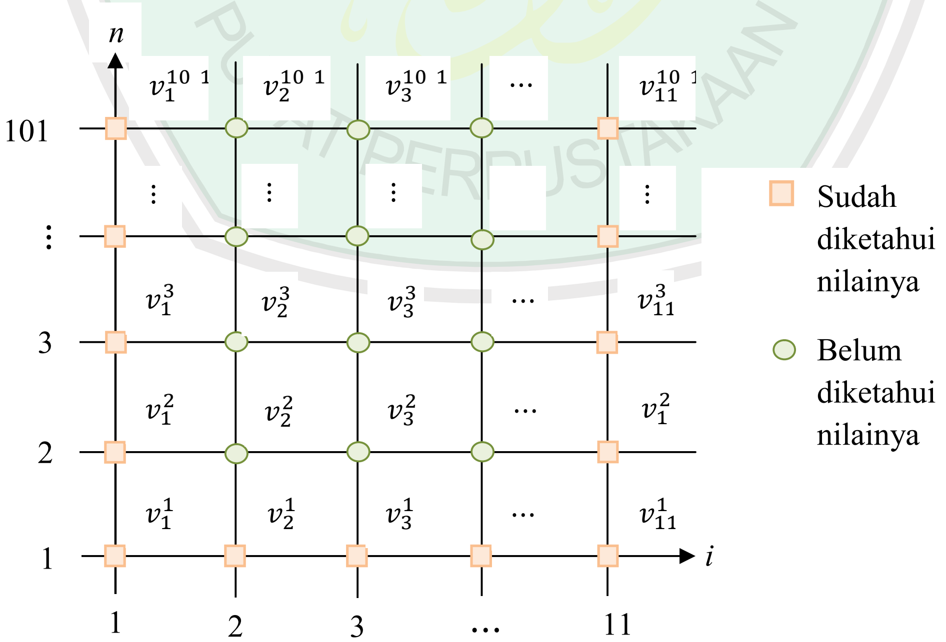
	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	-0,0002	-0,0002	-0,0002	$\cdots$	-0,0015
$x_2 = 0{,}1$	-0,0002	-0,0002	-0,0002	$\cdots$	-0,0012
$x_3 = 0{,}2$	-0,0001	-0,0001	-0,0001	$\cdots$	-0,0009
$x_4 = 0{,}3$	-0,0001	-0,0001	-0,0001	$\cdots$	-0,0006
$x_5 = 0{,}4$	-0,0000	-0,0000	-0,0000	$\cdots$	-0,0003
$x_6 = 0{,}5$	0	0	0	$\cdots$	0
$x_7 = 0{,}6$	0,0000	0,0000	0,0000	$\cdots$	0,0003
$x_8 = 0{,}7$	0,0001	0,0001	0,0001	$\cdots$	0,0006
$x_9 = 0{,}8$	0,0001	0,0001	0,0001	$\cdots$	0,0009
$x_{10} = 0{,}9$	0,0002	0,0002	0,0002	$\cdots$	0,0012
$x_{11} = 1$	0,0002	0,0002	0,0002	$\cdots$	0,0015

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas $v(0,t) = 0$ dan $v(1,t) = e^{2t}$, sehingga

$$v_1^n = 0, v_{11}^n = e^{2t}, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots, 101$$

dan iterasi kondisi awal $v(x,0) = x$ pada waktu ke n dan jarak ke i dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v_i^1 = x_i\,, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, 11$$



Gambar 3.3 Stensil Metode Implisit FTCS Persamaan Fokker-Planck Diskrit untuk $n = 1,2,\cdots,101$ dan $i = 1,2,\cdots,11$

Tabel 3.6 Kondisi Awal dan Kondisi Batas

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0	0	0	$\cdots$	0
$x_2 = 0{,}1$	0,1	-	-	$\cdots$	-
$x_3 = 0{,}2$	0,2	-	-	$\cdots$	-
$x_4 = 0{,}3$	0,3	-	-	$\cdots$	-
$x_5 = 0{,}4$	0,4	-	-	$\cdots$	-
$x_6 = 0{,}5$	0,5	-	-	$\cdots$	-
$x_7 = 0{,}6$	0,6	-	-	$\cdots$	-
$x_8 = 0{,}7$	0,7	-	-	$\cdots$	-
$x_9 = 0{,}8$	0,8	-	-	$\cdots$	-
$x_{10} = 0{,}9$	0,9	-	-	$\cdots$	-
$x_{11} = 1$	1	1,0202	1,0408	$\cdots$	7,3891

Setelah diperoleh nilai $A_i^n, B_i^n, C_i^n, D_i^n$ dan E_i^n serta kondisi batas dan kondisi awal maka iterasi persamaan (3.5) dapat diuraikan menjadi berikut:

Untuk $n = 1$ dan $i = 2, 3, 4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10$

$i = 2 \rightarrow -0{,}001v_1^2 + 0{,}024v_2^2 - 0{,}003v_3^2 = 0{,}02v_2^1 - 0{,}0002$

$-0{,}001(0) + 0{,}024v_2^2 - 0{,}003v_3^2 = 0{,}02(0{,}1) - 0{,}0002$

$0 + 0{,}024v_2^2 - 0{,}003v_3^2 = 0{,}002 - 0{,}0002$

$0{,}024v_2^2 - 0{,}003v_3^2 = 0{,}0018$

$i = 3 \rightarrow -0{,}003v_2^2 + 0{,}028v_3^2 - 0{,}005v_4^2 = 0{,}02v_3^1 - 0{,}0001$

$-0{,}003v_2^2 + 0{,}028v_3^2 - 0{,}005v_4^2 = 0{,}02(0{,}2) - 0{,}0001$

$-0{,}003v_2^2 + 0{,}028v_3^2 - 0{,}005v_4^2 = 0{,}0039$

$i = 4 \rightarrow -0{,}005v_3^2 + 0{,}032v_4^2 - 0{,}007v_5^2 = 0{,}02v_4^1 - 0{,}0001$

$-0{,}005v_3^2 + 0{,}032v_4^2 - 0{,}007v_5^2 = 0{,}02(0{,}3) - 0{,}0001$

$-0{,}005v_3^2 + 0{,}032v_4^2 - 0{,}007v_5^2 = 0{,}0059$

$i = 5 \rightarrow -0{,}007v_4^2 + 0{,}036v_5^2 - 0{,}009v_6^2 = 0{,}02v_5^1 - 0{,}0000$

$-0{,}007v_4^2 + 0{,}036v_5^2 - 0{,}009v_6^2 = 0{,}02(0{,}4) - 0{,}0000$

$-0{,}007v_4^2 + 0{,}036v_5^2 - 0{,}009v_6^2 = 0{,}008$

$i = 6 \rightarrow -0{,}009v_5^2 + 0{,}04v_6^2 - 0{,}011v_7^2 = 0{,}02v_6^1 + 0$

$$-0{,}009v_5^2 + 0{,}04v_6^2 - 0{,}011v_7^2 = 0{,}02(0{,}5)$$

$$-0{,}009v_5^2 + 0{,}04v_6^2 - 0{,}011v_7^2 = 0{,}01$$

$$i = 7 \rightarrow -0{,}011v_6^2 + 0{,}044v_7^2 - 0{,}013v_8^2 = 0{,}02v_7^1 + 0{,}0000$$

$$-0{,}011v_6^2 + 0{,}044v_7^2 - 0{,}013v_8^2 = 0{,}02(0{,}6)$$

$$-0{,}011v_6^2 + 0{,}044v_7^2 - 0{,}013v_8^2 = 0{,}012$$

$$i = 8 \rightarrow -0{,}013v_7^2 + 0{,}048v_8^2 - 0{,}015v_9^2 = 0{,}02v_8^1 + 0{,}0001$$

$$-0{,}013v_7^2 + 0{,}048v_8^2 - 0{,}015v_9^2 = 0{,}02(0{,}7) + 0{,}0001$$

$$-0{,}013v_7^2 + 0{,}048v_8^2 - 0{,}015v_9^2 = 0{,}0141$$

$$i = 9 \rightarrow -0{,}015v_8^2 + 0{,}052v_9^2 - 0{,}017v_{10}^2 = 0{,}02v_9^1 + 0{,}0001$$

$$-0{,}015v_8^2 + 0{,}052v_9^2 - 0{,}017v_{10}^2 = 0{,}02(0{,}8) + 0{,}0001$$

$$-0{,}015v_8^2 + 0{,}052v_9^2 - 0{,}017v_{10}^2 = 0{,}0161$$

$$i = 10 \rightarrow -0{,}017v_9^2 + 0{,}056v_{10}^2 - 0{,}019v_{11}^2 = 0{,}02v_{10}^1 + 0{,}0002$$

$$-0{,}017v_9^2 + 0{,}056v_{10}^2 - 0{,}019v_{11}^2 = 0{,}02(0{,}9) + 0{,}0002$$

$$-0{,}017v_9^2 + 0{,}056v_{10}^2 - 0{,}019(1{,}0202) = 0{,}0182$$

$$-0{,}017v_9^2 + 0{,}056v_{10}^2 - 0{,}019838 = 0{,}0182$$

$$-0{,}017v_9^2 + 0{,}056v_{10}^2 = 0{,}0375838$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}024 & -0{,}003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}003 & 0{,}028 & -0{,}005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}005 & 0{,}032 & -0{,}007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}007 & 0{,}036 & -0{,}009 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}009 & 0{,}04 & -0{,}011 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}011 & 0{,}044 & -0{,}013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}013 & 0{,}048 & -0{,}015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}015 & 0{,}052 & -0{,}017 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}017 & 0{,}056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^2 \\ v_3^2 \\ v_4^2 \\ v_5^2 \\ v_6^2 \\ v_7^2 \\ v_8^2 \\ v_9^2 \\ v_{10}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0018 \\ 0{,}0039 \\ 0{,}0059 \\ 0{,}008 \\ 0{,}01 \\ 0{,}012 \\ 0{,}0141 \\ 0{,}0161 \\ 0{,}0375838 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2^2 \\ v_3^2 \\ v_4^2 \\ v_5^2 \\ v_6^2 \\ v_7^2 \\ v_8^2 \\ v_9^2 \\ v_{10}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,024 & -0,003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,003 & 0,028 & -0,005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,005 & 0,032 & -0,007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,007 & 0,036 & -0,009 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,009 & 0,04 & -0,011 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,011 & 0,044 & -0,013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,013 & 0,048 & -0,015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,015 & 0,052 & -0,017 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,017 & 0,056 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,0018 \\ 0,0039 \\ 0,0059 \\ 0,008 \\ 0,01 \\ 0,012 \\ 0,0141 \\ 0,0161 \\ 0,0375838 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2^2 \\ v_3^2 \\ v_4^2 \\ v_5^2 \\ v_6^2 \\ v_7^2 \\ v_8^2 \\ v_9^2 \\ v_{10}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1022 \\ 0,2042 \\ 0,3062 \\ 0,4082 \\ 0,5102 \\ 0,6122 \\ 0,7142 \\ 0,8162 \\ 0,9182 \end{bmatrix}$$

Jadi ketika $t_2 = 0,01$ diperoleh solusi $v_2^2 = 0,1022$, $v_3^2 = 0,2042$, $v_4^2 = 0,3062$, $v_5^2 = 0,4082$, $v_6^2 = 0,5102$, $v_7^2 = 0,6122$, $v_8^2 = 0,7142$, $v_9^2 = 0,8162$, $v_{10}^2 = 0,9182$. Dengan mengunakan langkah yang sama dilakukan iterasi sampai diperoleh nilai ketika $t_{101} = 1$. Untuk mempermudah perhitungan maka digunakan program Matlab (R2010a), sehingga diperoleh solusi numerik dari persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS yang disajikan dalam Tabel 3.7 dan untuk program lengkapnya dapat dilihat di Lampiran 1.

Tabel 3.7 Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck dengan Metode Implisit FTCS

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0,01$	$t_3 = 0,02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0	0	0	$\cdots$	0
$x_2 = 0,1$	0,1	0,1022	0,1044	$\cdots$	0,7401
$x_3 = 0,2$	0,2	0,2042	0,2085	$\cdots$	1,4794
$x_4 = 0,3$	0,3	0,3062	0,3125	$\cdots$	2,2185
$x_5 = 0,4$	0,4	0,4082	0,4166	$\cdots$	2,9573
$x_6 = 0,5$	0,5	0,5102	0,5206	$\cdots$	3,6961
$x_7 = 0,6$	0,6	0,6122	0,6246	$\cdots$	4,4347
$x_8 = 0,7$	0,7	0,7142	0,7287	$\cdots$	5,1733
$x_9 = 0,8$	0,8	0,8162	0,8327	$\cdots$	5,9119
$x_{10} = 0,9$	0,9	0,9182	0,9368	$\cdots$	6,6505
$x_{11} = 1$	1	1,0202	1,0408	$\cdots$	7,3891

3.3 Perbandingan Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Fokker-Planck

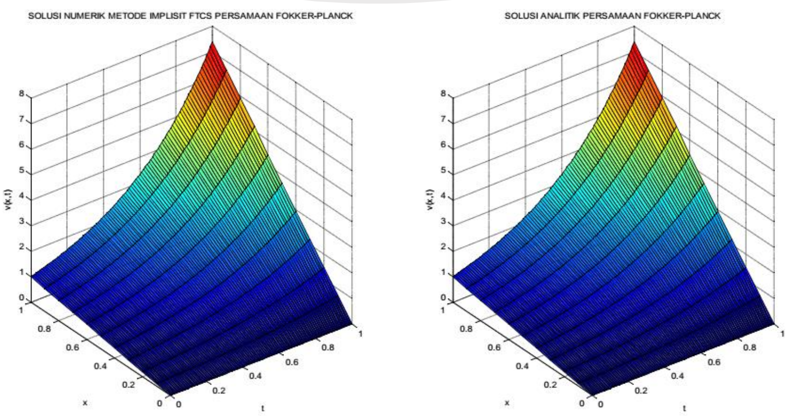
Telah diuraikan di bab sebelumnya bahwa solusi numerik dari suatu persamaan diferensial tidak tepat sama dengan solusi analitiknya, terdapat beda antara solusi analitik dan solusi numeriknya yang disebut dengan kesalahan (*error*). Solusi numerik merupakan solusi pendekatan dengan perhitungan yang berulang-ulang (iteratif), begitu juga dengan persamaan Fokker-Planck yang diselesaikan menggunakan metode implisit FTCS tentunya mempunyai perbedaan antara solusi numerik dan solusi analitiknya. Perbedaan itulah yang disebut dengan kesalahan (*error*).

Di subbab sebelumnya dijelaskan bahwa persamaan Fokker-Planck (2.14) mempunyai solusi analitik (eksak) sebagai berikut:

$$v(x,t) = xe^{2t}$$

(Hussain dan Alwan, 2013: 1748)

Kemudian untuk perbandingan, maka solusi analitik dari persamaan Fokker-Planck (2.14) dibuat grafik tiga dimensinya dengan Δx dan Δt sama seperti pada solusi numerik dengan menggunakan program Matlab (R2010a) yang disajikan dalam Gambar 3.4 berikut:



Gambar 3.4 Grafik 3D Perbandingan Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Fokker-Planck dengan $\Delta x = 0{,}1$ dan $\Delta t = 0{,}01$

Secara sekilas dari Gambar 3.4 tampak bahwa grafik solusi numerik dan solusi analitik dari persamaan Fokker-Planck sangat mirip. Tetapi sebenarnya terdapat perbedaan antara keduanya yang mana perbedaan tersebut sangatlah kecil sekali. Oleh karena itu disajikan tabel solusi analitik dari persamaan Fokker-Planck (2.14) untuk dijadikan perbandingan dengan solusi numerik yang telah disajikan pada Tabel 3.7.

Tabel 3.8 Solusi Analitik Persamaan Fokker-Planck

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0	0	0	$\cdots$	0
$x_2 = 0{,}1$	0,1	0,1020	0,1041	$\cdots$	0,7389
$x_3 = 0{,}2$	0,2	0,2040	0,2082	$\cdots$	1,4778
$x_4 = 0{,}3$	0,3	0,3061	0,3122	$\cdots$	2,2167
$x_5 = 0{,}4$	0,4	0,4081	0,4163	$\cdots$	2,9556
$x_6 = 0{,}5$	0,5	0,5101	0,5204	$\cdots$	3,6945
$x_7 = 0{,}6$	0,6	0,6121	0,6245	$\cdots$	4,4334
$x_8 = 0{,}7$	0,7	0,7141	0,7286	$\cdots$	5,1723
$x_9 = 0{,}8$	0,8	0,8162	0,8326	$\cdots$	5,9112
$x_{10} = 0{,}9$	0,9	0,9182	0,9367	$\cdots$	6,6502
$x_{11} = 1$	1	1,0202	1,0408	$\cdots$	7,3891

Dari Tabel 3.7 dan Tabel 3.8 dapat dilihat perbedaan antara solusi numerik dan solusi analitik. Misalnya ketika $t = 0{,}01$ dan $x = 0{,}1$ dapat diketahui bahwa solusi numerik persamaan Fokker-Planck (2.14) sebesar $0{,}1022$ dan solusi analitiknya sebesar $0{,}1020$ sehingga terdapat perbedaan sebesar $0{,}0002$ yang dinamakan dengan kesalahan atau *error*. Maka untuk mengetahui besar kesalahan atau *error* dari solusi persamaan Fokker-Planck akan dilakukan perhitungan *error* seperti yang telah diuraikan pada bab sebelumnya. Berikut merupakan tabel besar kesalahan yang dihasilkan dari solusi numerik persamaan Fokker-Planck:

Tabel 3.9 Nilai *Error* Solusi Numerik Persamaan Fokker-Planck

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0{,}01$	$t_3 = 0{,}02$	$\cdots$	$t_{101} = 1$
$x_1 = 0$	0	0	0	$\cdots$	0
$x_2 = 0{,}1$	0	0,0002	0,0003	$\cdots$	0,0012
$x_3 = 0{,}2$	0	0,0002	0,0003	$\cdots$	0,0016
$x_4 = 0{,}3$	0	0,0001	0,0003	$\cdots$	0,0017
$x_5 = 0{,}4$	0	0,0001	0,0002	$\cdots$	0,0017
$x_6 = 0{,}5$	0	0,0001	0,0002	$\cdots$	0,0015
$x_7 = 0{,}6$	0	0,0001	0,0002	$\cdots$	0,0013
$x_8 = 0{,}7$	0	0,0001	0,0001	$\cdots$	0,0010
$x_9 = 0{,}8$	0	0,0000	0,0001	$\cdots$	0,0007
$x_{10} = 0{,}9$	0	0,0000	0,0000	$\cdots$	0,0003
$x_{11} = 1$	0	0	0	$\cdots$	0

Dari Tabel 3.9 dapat diketahui bahwa perbedaan antara solusi numerik persamaan Fokker-Planck (2.14) sangat kecil atau mendekati nol. Sehingga dapat dikatakan bahwa solusi numerik persamaan Fokker-Planck (2.14) dengan metode implisit FTCS (*Forward Time Center Space*) mendekati solusi analitik (eksak).

3.4 Solusi Numerik dalam Kajian Islam

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*). Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik (eksak) yang disebut dengan solusi numerik.

Solusi numerik diperoleh dari perhitungan yang berulang-ulang menggunakan data sebelumnya (data historis) sehingga bukan berasal dari ramalan. Solusi numerik ini diperoleh dari sebuah penelitian *arithmetic* untuk memperoleh penyelesaian dari suatu persamaan matematika apabila solusi analitik sulit diperoleh, sehingga solusi numerik tergolong kategori *zan* (perkiraan) dan bukannya kategori *yakin* (pasti) karena terdapat kesalahan antara solusi numerik dengan solusi analitiknya.

Pada penelitian ini dilakukan perhitungan *arithmetic* untuk memperoleh solusi numerik untuk persamaan Fokker-Planck (2.14) menggunakan metode implisit FTCS (*Forward Time Center Space*) yang solusi analitiknya sudah diketahui sebelumnya, sehingga bisa dijadikan perbandingan antara kedua solusi tersebut. Solusi numerik dari persamaan (2.14) ini diperoleh dengan beberapa langkah hingga diperoleh solusi numerik $v(x,t)$ menggunakan program Matlab (R2010a) untuk mempermudah dan mempersingkat perhitungan, karena dilakukan perhitungan secara iteratif (berulang-ulang) untuk memperoleh solusi perkiraannya. Kemudian dibuat grafik dari solusi numerik dan solusi analitik persamaan Fokker-Planck tersebut. Solusi numerik yang diperoleh dari perhitungan tidak tepat sama dengan solusi analitiknya. Terdapat perbedaan antara kedua solusi tersebut yang telah disajikan dalam Tabel 3.9 sehingga solusi numerik dari persamaan (2.14) tergolong dalam kategori *zan* (perkiraan) dari solusi analitiknya. Dari penjelasan di atas dapat diketahui bahwa perhitungan ini bukanlah tergolong ramalan karena berasal dari dalil *hisabiyah*, sehingga tidak bertentangan dengan surah Luqman ayat 34.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS (*Forward Time Center Space*) mendekati solusi analitiknya. Hasil dari program Matlab (R2010a) menunjukkan bahwa terdapat perbedaan antara solusi numerik dan solusi analitik persamaan Fokker-Planck.
2. Perbedaan *error* solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan metode implisit FTCS yang diperoleh dari perhitungan Matlab (R2010a) sangat kecil atau mendekati nol, sehingga metode implisit FTCS dikatakan sebagai metode yang baik untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk menggunakan metode numerik dengan nilai parameter, nilai awal, dan nilai batas yang berbeda dan beragam untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck, atau dapat juga dengan menggunakan metode numerik yang lain, misalnya dengan *Variational Iteration Method (VIM)*.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Albani, M.N. 2006. *Shahih Sunan Abu Daud*. Terjemahan Abd. Mufid Ihsan dan M. Soban Rohman. Jakarta: Pustaka Azzam.

Al-Albani, M.N. 2005. *Mukhtashar Shahih Muslim*. Terjemahan Elly Lathifah, S.Pd. Jakarta: Gema Insani.

Al-Maragi, A.M. 1992. *Tafsir Al-Maragi*. Terjemahan Abu Bakar B. dkk. Semarang: Toha Putra.

Al-Qurthubi, S.I. 2009. *Al Jami' li Ahkaam Al-Qur'an.* Terjemahan Fathurrahman Abdul Hamid, dkk. Jakarta: Pustaka Azzam.

Anonim. 2014. Nubuat (online) (http://id.wikipedia.org/wiki/Nubuat) diakses Rabu 28-01-2015 14:11.

Cain, J.W., & Reynolds, A.M. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical Systems.* Virginia: Virginia Commonwealth University.

Causon, D.M., & Mingham, C.G. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs.* Frederiksberg: Ventus Publishing ApS.

Chapra, S.C., & Canale, R.P. 2007. *Numerical Methods for Engineers with Software and Programming Applications*. Terjemahan S. Sardy. Jakarta: UI Press.

Faqih, A.K. 2004. *Tafsir Nurul Quran Jilid IV*. Terjemahan Rudi Mulyono. Jakarta: Al-Huda.

Hasan, M. 2015. *Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada Persamaan Panas*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Hussain, E.A., & Alwan, Z.M. 2013. The Finite Volume Method for Solving Systems of Non-Linear Initial Boundary blems for PDE's. *Applied Mathematical Sciences* 7(35):1737-1755.

Ibnu-Katsir. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E. M. dan Abu Ihsan al-Atsari. Bogor: PT. Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Mutholi'ah, E. 2008. *Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Muyassaroh, S. 2014. *Penyelesaian Persamaan Differensial Parsial Fokker-Planck dengan Metode Garis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pichler, L., Masud, A., & Bergman, L.A. 2011. Numerical Solution of The Fokker-Planck Equation by Finite Difference and Finite Element Methods-A Comparative Study. *3rd ECCOMAS Thematic Conference on Computaional Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*.

Quthub, S. 2004. *Fi Zhilalil-Qur'an.* Terjemahan As'ad Yasin, dkk. Jakarta: Gema Insani Press.

Salim, S. 2007. *Syarah Riyadhush Shalihin Jilid V*. Terjemahan A. Sjinqithy Djamaluddin. Bogor: PT. Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Tatari, M., Dehghan, M., & Razzaghi, M. 2007. Application of The Adomian Decomposition Method for the Fokker-Planck Equation. *Mathematical and Computer Modelling* 45: 639-650.

Torvattanabun, M., & Duangpithak, S. 2011. Numerical Solution of Fokker-Planck Equation by Variational Iteration Method. *Int. Journal of Math. Analysis*, 5(44): 2193-2201.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer.* Yogyakarta: Beta Offset.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Matlab Perbandingan Solusi Numerik Implisit FTCS dan Solusi Analitik serta *Error* Perhitungan Persamaan Fokker-Planck

```
clc,clear all
clf
format long

% interval x dan t
dx=0.1; % delta x
dt=0.01; % delta t
x=0:dx:1;
t=0:dt:1;
nx=length(x);
mt=length(t);
v=zeros(nx,mt);

% SOLUSI NUMERIK
% kondisi batas dan kondisi awal
for i=1:nx
    for n=1:mt
        v(i,1)=x(i);
        v(1,n)=0;
        v(nx,n)=exp(2*t(n));
    end
end
v;

% nilai A, B, C, D, E
for i=1:nx
    for n=1:mt
        A(i,n)=(2*x(i)*exp(3*t(n))*dt)-(dt*dx);
        B(i,n)=(4*x(i)*exp(3*t(n))*dt)+(2*(dx)^2);
        C(i,n)=(2*x(i)*exp(3*t(n))*dt)+(dt*dx);
        D(i,n)=(2*(dx)^2);
        E(i,n)=(2*((dx)^2))*dt*(2*x(i)*exp(2*t(n))-exp(2*t(n)));
    end
end
A;B;C;D;E;

M=zeros(nx-2,nx);
N=zeros(nx-2,1);

% M elemen matriks (ruas kiri)dan N elemen matriks (ruas kanan)
for n=1:mt-1;
for i=1:nx-2;
        M(i,i,(n))=-A(i+1,n);
        M(i,i+1,(n))=B(i+1,n);
        M(i,i+2,(n))=-C(i+1,n);

        MM(:,:,(n))=M(:,2:nx-1,(n));
```

Lampiran 1. (Lanjutan)

```
        P(:,:,(n))=inv(MM(:,:,(n)));

        N(i,1,(n))=D(i+1,n).*v(i+1,n)+E(i+1,n);
        N(nx-
2,1,(n))=D(i+1,n).*v(i+1,n)+E(i+1,n)+C(i+1,n)*v(nx,n+1);

        v(2:nx-1,n+1)=P(:,:,(n))*N(:,1,(n));
end
end
vnum=v(:,1:mt);
figure(1)
subplot(1,2,1)
surf(t,x,vnum)
grid on
xlabel('t');ylabel('x');zlabel('v(x,t)');
title('SOLUSI NUMERIK METODE IMPLISIT FTCS PERSAMAAN FOKKER-
PLANCK')

% SOLUSI ANALITIK
for i=1:nx
    for n=1:mt
        veksak(i,n)=x(i)*exp(2*t(n));
    end
end
veksak;
%figure(2)
subplot(1,2,2)
surf(t,x,veksak)
grid on
xlabel('t');ylabel('x');zlabel('v(x,t)');
title('SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN FOKKER-PLANCK')


% KESALAHAN (EROR)
Ee=veksak-vnum; %kesalahan absolut
```