

**STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DAN PERSAMAAN DIRAC
DALAM SUMUR POTENSIAL PERSEGI GANDA SIMETRI**

SKRIPSI

Oleh:
AFIFATUL HUSNA KUKUH AMRULLOH
NIM. 16640001



**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DAN PERSAMAAN DIRAC
DALAM SUMUR POTENSIAL PERSEGI GANDA SIMETRI**

SKRIPSI

**Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
AFIFATUL HUSNA KUKUH AMRULLOH
NIM. 16640001**

**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DAN PERSAMAAN DIRAC
DALAM SUMUR POTENSIAL PERSEGI GANDA SIMETRI

SKRIPSI

Oleh:

Afifatul Husna Kukuh Amrulloh
NIM. 16640001

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Pada tanggal 9 April 2021

Pembimbing I

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

Pembimbing II

Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 009

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PENGESAHAN



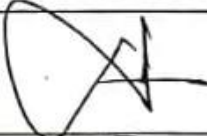

STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DAN PERSAMAAN DIRAC DALAM SUMUR POTENSIAL PERSEGI GANDA SIMETRI

SKRIPSI

Oleh:

Afifatul Husna Kukuh Amrulloh
NIM. 16640001

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 10 Juni 2021

Penguji Utama :	<u>Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji :	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u>	
Sekretaris Penguji :	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Anggota Penguji :	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Afifatul Husna Kukuh Amrulloh

NIM : 16640001

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Studi Persamaan Klein-Gordon dan Persamaan Dirac
dalam Sumur Potensial Persegi Ganda Simetri

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2021

Yang Membuat Pernyataan



Afifatul Husna Kukuh Amrulloh
NIM. 16640001

MOTTO

ALLOH DULU, ALLOH LAGI, ALLOH TERUS.

وَعَسَىٰ أَنْ تَكْرَهُوا شَيْئًا وَهُوَ خَيْرٌ لَّكُمْ وَعَسَىٰ أَنْ تُحِبُّوا شَيْئًا وَهُوَ شَرٌّ لَّكُمْ وَاللَّهُ يَعْلَمُ وَأَنْتُمْ لَا تَعْلَمُونَ

Tetapi boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi kamu menyukai sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah Mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui.

Jika keinginan-keinginan yang telah lama diikhtiarkan dan selalu di doakan bahkan di setiap nafas yang terlepas belum juga terwujud, bukan berarti Allah tidak mendengar dan tidak peduli. Tetaplah yakin bahwa,

“Allah pasti akan mengabulkan do’a-do’a ketika kita sudah siap, bukan sekedar ketika kita ingin”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah, dan segala puji bagi-Nya, karya ini Saya persembahkan kepada kedua orang tua Saya,

Bapak M. Shofwan dan Ibu Dewi Hajar

yang telah dan tak pernah peduli lelah untuk mengasah, mengasuh, medidik, membimbing, mengasihi, menyayangi, menguatkan dan senantiasa melangitkan doa dan harapan untuk membersamai langkah-langkah Saya. Serta, kedua adik Saya

M. Kholidul Fahmi Husaini dan M. Fathun Naji

yang juga selalu memberikan do'a, dukungan dan menjadi motivasi Saya untuk terus bertambah dan bertumbuh.

KATA PENGANTAR

Bismillah, Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan ridlo-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **“Studi Persamaan Klein-Gordon dan Persamaan Dirac dalam Sumur Potensial Persegi Ganda Simetri”** ini pada waktunya. Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW serta keluarga, sahabat, dan para ummatnya sampai kelak hari kiamat.

Terselesaikannya susunan skripsi ini, pastinya tidak lepas dari bantuan dan pertolongan Alloh SWT yang dikirimkan melalui berbagai pihak. Baik pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menghaturkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus pembimbing akademik dan dosen pembimbing I yang telah memberikan pengarahan kepada penulis.
2. Arista Romadani, M.Sc selaku dosen di bidang minat Fisika Teori sekaligus dosen pembimbing II yang telah dengan sabar membimbing dan memberi pengarahan kepada penulis sejak mulai menyelami bidang minat teori hingga terselesaikannya skripsi ini.
3. Muhammad Taufiqi, M.Si selaku dosen penguji yang sekaligus secara tidak langsung sebagai pembimbing III, karena senantiasa meluangkan waktunya untuk memberi pengarahan kepada penulis ketika menemui kebuntuan dan ketidakpahaman tentang sesuatu selama proses penyelesaian skripsi.
4. Erika Rani, M.Si, selaku dosen di bidang minat Fisika Teori yang telah memperkenalkan bidang minat Fisika Teori kepada penulis, membimbing dengan sabar, memberikan semangat dan motivasi melalui cerita-cerita inspiratif sekaligus tokoh-tokoh yang dapat diteladani dalam bidang minat Fisika Teori selama penulis belajar di Fisika Teori.

5. Ibu, Bapak serta Adik-adik penulis yang senantiasa memberikan dukungan, semangat, dan doa-doa yang tak pernah putus untuk menemani setiap langkah penulis.
6. Segenap dosen, karyawan, dan alumni keluarga besar Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu, baik memberi saran maupun menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sering kali penulis ajukan.
7. Keluarga besar Rumah Tahfidz Ummairah: Ustadz Sholihin, Ustadzah Nikmah, Mba Mita, Nisa', Amel, Mba Romlah, dan yang lainnya, yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, memberikan semangat, bahkan memberikan banyak sekali saran dan bantuan kepada penulis selama proses penyelesaian skripsi.
8. Rekan-rekan Fisika UIN Malang angkatan 2016, khususnya sahabat-sahabat seperjuangan di Fisika Teori, Nia, Fita, Eva, Ella yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat serta menjadi inspirator penulis agar segera menyelesaikan skripsi.
9. Juga kepada sahabat, kerabat, penasihat (guru), kakak tingkat, teman dekat, dan semua malaikat-malaikat yang sayapnya tak terlihat yang namanya tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, atas semua doa dan dukungan, ilmu dan pengalaman, serta kenangan dan kenang-kenangan yang telah diberikan.

Semoga Allah SWT memberikan balasan pahala yang tak terhingga, keberkahan yang tiada habisnya, kenikmatan yang berlipat ganda di dunia maupun di akhirat dan dibukakan pintu rahmat untuk menuju surga-Nya. Aamiin.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat, tambahan ilmu pengetahuan, dan menjadi inspirasi bagi penulis maupun bagi para pembaca, serta memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan dari para pembaca demi kebaikan tulisan-tulisan selanjutnya.

Malang, 9 April 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Batasan Masalah	6
1.5 Manfaat Penelitian	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1 Persamaan Klein-Gordon	8
2.2 Persamaan Dirac	13
2.3 Sumur Potensial Kuantum	17
2.4 Potensial Vektor dan Potensial Skalar	24
2.5 Mekanika Kuantum dalam Tinjauan Al-Qur'an	25
BAB III METODE Matriks TRANSFER	34
3.1 Solusi Persamaan Gelombang	34
3.1.1 Solusi Persamaan Klein-Gordon	36
3.1.2 Solusi Persamaan Dirac	38
3.2 Metode Matriks Transfer	44
3.2.1 Matriks Transfer Persamaan Klein-Gordon	46
3.2.2 Matriks Transfer Persamaan Dirac	48
3.3 Kondisi Fungsi Gelombang Keadaan Terikat	51
3.4 Daerah Energi untuk Fungsi Gelombang Keadaan Terikat	52
BAB IV ENERGI KEADAAN TERIKAT	56
4.1 Model VDSP (<i>Vector Double Square-well Potential</i>)	57
4.2 Model SDSP (<i>Scalar Double Square-well Potential</i>)	63
4.3 Model EDSP (<i>Equal Scalar and Vector Double Square-well Potential</i>)	70
BAB V PENUTUP	77
5.1 Kesimpulan	77
5.2 Saran	77
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sumur Potensial Tak Berhingga.....	18
Gambar 2.2	Fungsi Gelombang Partikel yang Terperangkap dalam Sumur Potensial dengan Lebar L	19
Gambar 2.3	Tingkat Energi Partikel dalam Sumur Potensial	21
Gambar 2.4	Grafik (a) Fungsi Gelombang dan (b) Rapat Probabilitas Sebuah Partikel dalam Sumur Potensial.....	23
Gambar 3.1	Skema Sumur Potensial Persegi Ganda.....	35
Gambar 4.1	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model VDSP dari Persamaan Klein-Gordon.....	58
Gambar 4.2	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model VDSP dari Persamaan Klein-Gordon pada Rentang 0 – 100000	58
Gambar 4.3	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model VDSP dari Persamaan Dirac	61
Gambar 4.4	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model VDSP dari Persamaan Dirac pada Rentang 0 – 100000	61
Gambar 4.5	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model SDSP dari Persamaan Klein-Gordon.....	64
Gambar 4.6	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model SDSP dari Persamaan Klein-Gordon pada Rentang 0 – 100000	65
Gambar 4.7	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model SDSP dari Persamaan Dirac.....	67
Gambar 4.8	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model SDSP dari Persamaan Dirac pada Rentang 0 – 100000	68
Gambar 4.9	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model EDSP dari Persamaan Klein-Gordon.....	71
Gambar 4.10	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model EDSP dari Persamaan Klein-Gordon pada Rentang 0 – 100000	71
Gambar 4.11	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model EDSP dari Persamaan Dirac.....	74
Gambar 4.12	Plot <i>Eigenvalue</i> E_n Model EDSP dari Persamaan Dirac pada Rentang 0 – 100000	74

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Skema Empat Bidang Besar dalam Mekanika	8
Tabel 4.1	Nilai <i>Eigenvalue</i> E_n Model VDSP dari Persamaan Klein-Gordon..	60
Tabel 4.2	Nilai <i>Eigenvalue</i> E_n Model VDSP dari Persamaan Dirac	63
Tabel 4.3	Nilai <i>Eigenvalue</i> E_n Model SDSP dari Persamaan Klein-Gordon...	66
Tabel 4.4	Nilai <i>Eigenvalue</i> E_n Model SDSP dari Persamaan Dirac	69
Tabel 4.5	Nilai <i>Eigenvalue</i> E_n Model EDSP dari Persamaan Klein-Gordon ..	73
Tabel 4.6	Nilai <i>Eigenvalue</i> E_n Model EDSP dari Persamaan Dirac	76

DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran A Pembuktian Persamaan
- Lampiran B Pembuktian Perhitungan Matriks Transfer Fungsi Gelombang Persamaan Klein-Gordon
- Lampiran C Pembuktian Perhitungan Matriks Transfer Fungsi Gelombang Persamaan Dirac
- Lampiran D Penurunan Persamaan T_{11}
- Lampiran E Script Grafik Solusi Persamaan T_{11}
- Lampiran F Bukti Konsultasi Skripsi

DAFTAR SIMBOL

- a = Syarat batas antar ruang pada potensial
- A_μ = Potensial vektor empat
- b = Syarat batas antar ruang pada potensial
- c = Kecepatan cahaya
- d/dx = Diferensial
- E = Energi partikel
- E_k = Energi kinetik
- E_n = Energi level ke- n
- \mathbf{E} = Energi partikel relativistik
- h = Tetapan Planck ($6,63 \times 10^{-34}$ J.s)
- H = Hamiltonian
- L = Lebar sumur potensial
- λ = Lambda, panjang gelombang
- m_0 = Massa diam partikel
- m = Massa benda bergerak
- M_{12} = Matriks transfer ruang I dan II
- M_{23} = Matriks transfer ruang II dan III
- M_{34} = Matriks transfer ruang III dan IV
- M_{45} = Matriks transfer ruang IV dan V
- n = Indeks untuk level energi
- ∇ = Nabla
- p = Momentum partikel
- \mathbf{p} = Operator momentum partikel
- p_μ = Operator momentum vektor empat
- $P(x,t)$ = Rapat probabilitas partikel
- ∂ = Diferensial parsial
- $\Psi(x,t)$ = Capital Psi, fungsi gelombang bergantung ruang dan waktu
- $\psi(x)$ = Small Psi, fungsi gelombang bergantung ruang
- $\varphi(t)$ = Small Phi, fungsi gelombang bergantung waktu

$S(x)$ = Potensial skalar
 S_a = Nilai potensial skalar penghalang pusat
 S_b = Nilai potensial skalar penghalang
 σ_x = Sigma x , matriks pauli
 σ_z = Sigma z , matriks pauli
 t = Waktu
 T = Matriks transfer seluruh ruang dalam potensial
 T_{11} = Salah satu komponen dari matriks transfer T
 $u(k)$ = Bispinor Dirac
 $v(k)$ = Bispinor Dirac
 v = Kecepatan partikel
 $V(x)$ = Potensial vektor
 V_a = Nilai potensial vektor penghalang pusat
 V_b = Nilai potensial vektor penghalang

ABSTRAK

Amrulloh, Afifatul Husna Kukuh, 2021. **Studi Persamaan Klein-Gordon dan Persamaan Dirac dalam Sumur Potensial Persegi Ganda Simetri.** Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Drs. Abdul Basid, M.Si (II) Arista Romadani, M.Sc.

Kata Kunci: Persamaan Klein-Gordon, Persamaan Dirac, *eigenvalue*, keadaan terikat

Penelitian ini mengkaji tentang keadaan terikat partikel dari persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac satu dimensi dalam sumur potensial persegi ganda simetri. Kajian teoretik ini dilakukan secara analitik dengan menggunakan metode matriks transfer untuk menentukan persamaan gelombang dan persamaan kondisi *eigenvalue*. Persamaan *eigenvalue* yang didapatkan merupakan persamaan yang sangat kompleks sehingga penyelesaiannya dilakukan secara numerik menggunakan *software* Mathematica. Nilai *eigenvalue* dari persamaan kondisi *eigenvalue* ditentukan dengan membagi model perhitungan menjadi tiga kasus, yaitu (1) VDSP, (2) SDSP, dan (3) EDSP. Dalam perhitungannya, nilai potensial penghalang pusat divariasikan mulai dari 0, 10000, 20000, 30000, 40000, dan 50000 untuk membandingkan nilai-nilai level energi yang dihasilkan ketika mengaplikasikan potensial penghalang yang berbeda. Hasil perhitungan yang diperoleh dalam penelitian ini berupa nilai-nilai *eigenvalue* sekaligus level energi dari keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda simetri dari tiga kasus.

ABSTRACT

Amrulloh, Afifatul Husna Kukuh, 2021. **Study of the Klein-Gordon and Dirac Equation in Symmetry Double Square-well Potentials.** Thesis. Departement of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor (I) Drs. Abdul Basid, M.Si (II) Arista Romadani, M.Sc

Kata Kunci: Klein-Gordon equation, Dirac equation, eigenvalue, bound state energy

The bound state of the particles from the one-dimensional Klein-Gordon and Dirac equation in a symmetric double square well potential has been studied. This theoretical study was carried out analytically using the transfer matrix method to determine the wave equation and the equation for the eigenvalue conditions. The eigenvalue equation obtained is a transcendental complex equation, so that the solution is done numerically using Mathematica software. The eigenvalue from the eigenvalue condition equation is determined by dividing the calculation model into three cases, namely (1) VDSP, (2) SDSP, and (3) EDSP. In the calculation, the potential values of the central barrier were varied from 0, 10000, 20000, 30000, 40000, and 50000 to compare the values of the energy levels generated when applying different barrier potentials. The calculation results obtained in this study are the eigenvalue as well as the energy levels of the bound state of the particles in the symmetrical double square potential well from three cases.

الملخص

أمر الله ، عفيفة الحسنى كوكوه ، ٢٠٢١. دراسة معادلة Klein-Gordon ومعادلة Dirac في البئر المحتمل ذو المربع المزدوج المتماثل. البحث اجلامعى. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا يف جامعة الإسلامية الحكومية موالان مالك إبراهيم مالنتج. املشرفة: (١) عبدالباسط, الماجستير , (١١) أريستا رمضان, الماجستير.

الكلمات المفتاحية: معادلة Klein-Gordon، معادلة Dirac ، eigenvalue ، الحالة المقيدة

حالة المقيدة لذرة من معادلة Klein-Gordon ومعادلة Dirac أحادية البعد في بئر احتمالية مربع مزدوج متماثل يفحص هذا البحث. أجريت هذه البحث النظرية بشكل تحليلي باستخدام طريقة مصفوفة التحويل لتحديد معادلة الموجة ومعادلة شرط القيمة الذاتية (eigenvalue). معادلة القيمة الذاتية التي تم الحصول عليها هي معادلة معقدة للغاية بحيث يتم الحل عددياً باستخدام تطبيق Mathematica. القيمة الذاتية لمعادلة شرط القيمة الذاتية يقسم نموذج الحساب إلى ثلاث حالات ، وهي VDSP (1) و SDSP (2) و EDSP (3) في الحساب ، تباينت القيم المحتملة للحاجز المركزي من ٠ و ١٠٠٠٠ و الحساب التي تم الحصول عليها في هذا البحث هي قيمة الذاتية بالإضافة إلى مستويات الطاقة للمعادلة المقيدة بالذرة في بئر احتمالية المربع المزدوج المتماثل من ثلاث حالات.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mekanika kuantum yang mulai ditemukan dan dikembangkan pada awal abad ke-20 telah banyak memberikan andil berupa pemahaman baru dalam dunia mikroskopis. Kelahiran mekanika kuantum ini dipicu oleh ketidakberhasilan dari konsep materi dan gelombang yang ada dalam mekanika klasik ketika menjelaskan peristiwa radiasi benda hitam. Namun, kebuntuan dan krisis fisika ini berhasil dibidani oleh para ilmuwan fisika, seperti Max Planck, Einstein, Compton, dan De Broglie, dengan ide-ide cemerlang mereka. Selanjutnya, era baru yang muncul setelah mapannya gagasan dualisme materi (partikel) - gelombang dikenal dengan era kuantum.

Materi atau partikel selalu identik dengan sesuatu yang sangat kecil atau halus. Salah satu ayat dalam Al-Qur'an yang membahas tentang sesuatu yang sangat kecil terdapat dalam QS Adz-Dzaariyaat (51): 1-6 berikut.

وَالذَّارِيَّاتِ ذُرُوءًا - ١ - فَالْحَامِلَاتِ وِقْرًا - ٢ - فَالْجَارِيَّاتِ يُسْرًا - ٣ - فَالْمُقَسِّمَاتِ أَمْرًا - ٤ -
إِنَّمَا تُوعَدُونَ لَصَادِقٍ - ٥ - وَإِنَّ الدِّينَ لَوَاقِعٌ - ٦

“Demi partikel-partikel yang sangat halus. Yang membawa beban berat. Yang mengalir dengan mudah. Yang membagi-bagi urusan. Sesungguhnya yang dijanjikan padamu pasti benar. Dan sesungguhnya pembalasan pasti terjadi.”
(QS Adz-Dzaariyaat (51): 1-6)

Secara eksplisit, ayat ini mengandung penafsiran yang mengarah pada keberadaan mekanika kuantum karena mekanika kuantum sendiri membahas tentang partikel-partikel mikroskopis sekaligus perilaku dan sifat-sifat yang dibawa oleh partikel mikroskopis tersebut. Kata *dzaariyaat* secara bahasa

merupakan jamak yang berasal dari kata *dzarrah* yang mempunyai makna semut kecil atau debu. Namun, Al-Qur'an menggunakan kata *dzarrah* untuk menyebut sesuatu yang sangat kecil dan sesuatu yang kecil ini, dalam fisika, merujuk pada atom ataupun partikel-partikel penyusunnya (Mulyono dan Ahmad, 2006).

Keadaan gerak suatu sistem dalam mekanika kuantum digambarkan oleh fungsi gelombang. Pada 1926, Erwin Schrodinger berhasil merumuskan persamaan gerak matematis untuk fungsi gelombang yang disebut persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger disebut juga sebagai persamaan gelombang nonrelativistik karena menggambarkan gerak partikel nonrelativistik. Perluasan persamaan Schrodinger ke bentuk relativistik menghasilkan persamaan baru yang disebut persamaan Klein-Gordon. Namun, fungsi gelombang dari solusi persamaan Klein-Gordon ini ternyata tidak memenuhi syarat kontinuitas karena suku waktu (t) dalam persamaan Klein-Gordon merupakan orde kedua. Kekurangan dari persamaan Klein-Gordon kemudian diperbaiki oleh Paul Dirac dengan merumuskan kembali persamaan gelombang relativistik yang mana suku waktu (t) tetap pada orde pertama, sebagaimana persamaan Schrodinger. Persamaan yang berhasil dirumuskan oleh Paul Dirac ini kemudian disebut dengan persamaan Dirac (Ficek, 2016).

Sumur kuantum atau disebut juga sumur potensial merupakan salah satu konsep dalam mekanika kuantum yang digambarkan sebagai suatu wilayah dengan lebar tertentu yang dibatasi oleh dinding potensial dan bagian dalam dari wilayah tersebut tidak terdapat potensial eksternal (Tiandho, 2016). Partikel dalam sumur potensial merupakan partikel dengan energi E tertentu yang datang pada dinding potensial V . Jika $E < V$ maka partikel akan cenderung terkurung

dalam sumur potensial atau sering kali dikatakan sebagai keadaan terikat (*bound state*) partikel. Salah satu kelas konfigurasi penting dari sumur potensial yang telah digunakan secara luas pada banyak bidang fisika, bahkan kimia, adalah sumur potensial persegi ganda. Pada dasarnya, sumur potensial persegi ganda merupakan model sumur potensial kontinu yang disederhanakan untuk deskripsi yang tepat dan realistis (Hasegawa, 2014).

Ketertarikan untuk menyelidiki solusi dari persamaan gelombang semakin besar. Selama bertahun-tahun, para peneliti terus menerus mengkaji tentang solusi persamaan gelombang dengan menggunakan berbagai metode analitik maupun numerik. Salah satu metode numerik yang diperkenalkan oleh Ghatak *et al.* (1988) untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger adalah metode pendekatan matriks. Analisis persamaan gelombang Schrodinger pada sumur kuantum dengan pendekatan matriks yang dilakukan oleh Ghatak *et al.* (1988) tersebut menghasilkan nilai eigen, fungsi gelombang keadaan terikat dan keadaan kuasi-terikat. Setelahnya, Jonsson dan Sverre (1990) mencoba mengembangkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Ghatak *et al.* (1988) dengan menentukan fungsi gelombang sekaligus level energi partikel untuk sumur potensial kuantum tunggal dan struktur *superlattice*. Hasil yang didapatkan kemudian dibandingkan dengan hasil perhitungan yang dilakukan dengan metode *Airy's function* dan metode *finite element*. Hasilnya, nilai level energi yang dihitung dengan metode matriks transfer masih akurat hingga tiga digit pertama. Beberapa tahun kemudian, metode matriks transfer tradisional atau yang dikenal dengan metode matriks transfer numerik dikembangkan oleh Ying *et al.* (2010) menjadi metode matriks transfer analitik (*Analytic Transfer Matrix, ATM*) untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger.

Ying *et al.* (2010) melakukan analisis keadaan terikat pada potensial osilator anharmonik dan potensial rasional. Hasil perhitungan dengan metode matriks transfer tidak hanya menunjukkan keakuratan untuk keadaan dasar saja, melainkan juga untuk keadaan tereksitasi. Hal ini dibuktikan dengan kesamaan hasil yang diperoleh ketika dibandingkan dengan hasil perhitungan pada penelitian sebelumnya yang menggunakan metode berbeda.

Metode matriks transfer merupakan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan persamaan diferensial orde kedua. Metode ini dapat memberikan hasil yang akurat hingga tiga sampai empat digit pertamanya (Jonsson dan Sverre, 1990). Prinsip utama dari metode matriks transfer adalah membagi wilayah potensial menjadi beberapa segmen atau ruang yang ukurannya lebih kecil dari lebar potensial yang akan ditinjau (Damayanti *et al.*, 2013).

Selain analisis persamaan gelombang Schrodinger yang merupakan persamaan gelombang nonrelativistik, analisis persamaan gelombang relativistik pada beberapa model potensial juga semakin mengalami perkembangan. Dalam analisis persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac, beberapa penulis berasumsi bahwa potensial skalar sama dengan potensial vektor untuk menyelesaikan masalah yang telah diselesaikan dalam mekanika kuantum nonrelativistik, misalnya masalah sumur potensial ganda (Zou *et al.*, 2005). Zhao *et al.* (2005) mencoba melakukan penelitian untuk membandingkan solusi persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac dalam sumur potensial ganda simetri dengan menggunakan metode mekanika kuantum supersimetri. Dari hasil

penelitiannya didapatkan persamaan energi yang identik secara matematik di antara keduanya, dengan potensial campuran yang sama.

Beberapa pokok bahasan pada penelitian yang mengambil topik tentang analisis persamaan gelombang nonrelativistik maupun relativistik pada sumur potensial di atas menunjukkan bahwa penelitian ini penting untuk dilakukan, terutama dalam menentukan fungsi gelombangnya. Dengan adanya dasar penelitian yang telah disebutkan di atas, penulis terdorong untuk melakukan penelitian atau studi terhadap persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac pada sumur potensial persegi dengan menggunakan metode matriks transfer. Penulis ingin menelaah kembali secara lebih detail konstruksi persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac satu dimensi pada sumur potensial persegi ganda simetri. Setelah itu, menentukan solusi atau fungsi gelombang dari persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac, nilai eigen (*eigenvalue*), serta menghitung nilai level energi dari partikel keadaan terikat (*bound state particle*) pada sumur potensial persegi ganda simetri.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, penulis merumuskan beberapa masalah yang akan diselesaikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana solusi atau fungsi gelombang persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac satu dimensi pada kasus sumur potensial persegi ganda simetri?

2. Bagaimana persamaan *eigenvalue* terkait fungsi gelombang keadaan terikat pada sumur potensial persegi ganda simetri dengan persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac satu dimensi?
3. Bagaimana nilai level energi dari fungsi gelombang keadaan terikat dengan persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac pada kasus sumur potensial persegi ganda simetri?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang akan dibahas, maka tujuan dilakukannya studi teoretik ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk menentukan solusi atau fungsi gelombang persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac pada kasus sumur potensial persegi ganda simetri.
2. Untuk menentukan persamaan *eigenvalue* terkait fungsi gelombang keadaan terikat pada sumur potensial persegi ganda simetri dengan persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac satu dimensi.
3. Untuk mendapatkan nilai level energi dari fungsi gelombang keadaan terikat dengan persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac pada kasus sumur potensial persegi ganda simetri.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji secara teoretik tentang solusi atau fungsi gelombang persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac satu dimensi, *eigenvalue*, serta level energi fungsi gelombang keadaan terikat pada sumur potensial persegi ganda simetri yang proses penyelesaiannya dilakukan dengan

menggunakan metode matriks transfer. Adapun jenis potensial yang digunakan dalam kajian teoretik ini adalah potensial vektor dan potensial skalar satu dimensi.

1.5 Manfaat Penelitian

Dari hasil pembahasan secara teoretik ini, diharapkan hasil yang didapatkan dapat dijadikan sebagai dasar ataupun rujukan untuk kajian tentang persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac dalam sumur potensial dengan jenis potensial lainnya. Adapun jika ditinjau dari perspektif kimia kuantum, persamaan Dirac satu dimensi dapat dimanfaatkan untuk mendeskripsikan sistem kuantum yang spektrumnya memiliki celah energi. Selain itu, model sumur kuantum dapat digunakan untuk pengembangan teknologi bidang optoelektronik seperti pemrosesan material dan laser printing.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Klein-Gordon

Mekanika klasik Newtonian, mekanika kuantum, dan teori relativitas (khusus) merupakan teori yang beroperasi dalam wilayah yang berbeda.

Tabel 2.1 Skema Empat Bidang Besar dalam Mekanika

	Benda makro	Benda mikro
Kecepatan kecil	Mekanika klasik Newtonian	Mekanika kuantum
Kecepatan besar	Teori relativitas	Mekanika Kuantum Relativistik

Mekanika Newtonian yang diperkenalkan oleh Newton, pada dasarnya merupakan prinsip dari fenomena-fenomena yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi, mekanika Newtonian hanya dapat dioperasikan pada objek makro yang bergerak dengan kecepatan kecil. Adapun untuk objek makro yang bergerak dengan kecepatan tinggi (mendekati kecepatan cahaya), telah diperkenalkan teori baru oleh Einstein pada tahun 1905 yang disebut dengan teori relativitas khusus. Pada waktu yang hampir bersamaan, yaitu sekitar awal abad ke-20, lahir pula salah satu teori yang menjadi pilar bagi fisika modern. Teori yang dimaksud adalah teori mekanika kuantum yang diberlakukan untuk objek-objek mikro, seperti atom dan partikel penyusunnya. Mekanika kuantum dirumuskan oleh banyak fisikawan, di antaranya adalah Max Planck, A. Einstein, A. H. Compton, Louis de Broglie, E. Schrodinger, W. Heisenberg, dan Neils Bohr. E. Schrodinger dan W. Heisenberg kemudian disebut sebagai

pelopor mekanika kuantum karena berhasil merumuskan solusi dari salah satu kasus yang ditelaah dalam mekanika kuantum, yaitu tentang cara mendapatkan fungsi gelombang (Griffiths, 1999).

Keberhasilan Schrodinger dalam merumuskan fungsi gelombang belum dapat dikatakan sebagai puncak kejayaan teori kuantum. Sebab, setelah ditemukan dan dirumuskannya tiga pilar dasar tersebut, kembali muncul pertanyaan mengenai bagaimana menjelaskan tentang objek mikro yang bergerak dengan kecepatan tinggi, misalnya seperti elektron yang bergerak dengan kecepatan 250 juta m/s. Pertanyaan ini kemudian berhasil dipecahkan pertama kali oleh O. Klein, V. Fock, dan W. Gordon melalui upayanya dalam menggabungkan teori mekanika kuantum dan teori relativitas khusus (Purwanto, 2015a). Ketiganya mencoba melakukan modifikasi terhadap persamaan gelombang Schrodinger agar menjadi persamaan yang relevan untuk kasus relativistik. Pada akhirnya, dihasilkan suatu persamaan gelombang relativistik yang disebut dengan persamaan Klein-Fock-Gordon atau lebih dikenal dengan persamaan Klein-Gordon.

Persamaan Klein-Gordon diturunkan dengan metode yang sama dengan persamaan Schrodinger karena pada dasarnya persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan Schrodinger yang termodifikasi. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan gelombang nonrelativistik yang ditentukan melalui persamaan hubungan energi dan momentum. Sehingga, persamaan Klein-Gordon yang merupakan persamaan gelombang relativistik diturunkan melalui persamaan hubungan energi dan momentum yang relativistik.

Partikel atau benda yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya ($v \approx c$) mempunyai energi total dan momentum sebesar

$$E = mc^2, \quad p = mv. \quad (2.1)$$

Massa m dalam persamaan (2.1) adalah massa untuk benda yang bergerak, karena dalam hal ini benda atau partikel yang ditinjau adalah benda atau partikel yang bergerak. Massa untuk benda atau partikel yang bergerak besarnya adalah

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dengan m_0 adalah massa diam benda, sedangkan γ didapatkan dari transformasi Lorentz. Substitusi m ke dalam persamaan (2.1) menghasilkan

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.2)$$

Ketika E dan p pada persamaan (2.2) dikuadratkan, kemudian dilakukan substitusi dan operasi matematis di antara keduanya, maka akan didapatkan persamaan hubungan energi dan momentum relativistik sebagai berikut,

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.3)$$

Adapun energi dan momentum dalam kasus relativistik, dituliskan dalam bentuk operator, yaitu

$$\mathbf{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla, \quad (2.4)$$

Substitusi operator energi dan operator momentum ke dalam persamaan (2.3) kemudian mengoperasikan operator tersebut pada suatu fungsi gelombang $\Psi(x,t)$, menghasilkan persamaan

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4,$$

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Psi(x,t) &= (-i\hbar\nabla)^2 c^2 \Psi(x,t) + m^2 c^4 \Psi(x,t) \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} &= (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi(x,t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dalam bentuk lain, persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}\right) \Psi(x,t) = 0. \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) inilah yang kemudian disebut sebagai persamaan Klein-Gordon, dengan $\Psi(x,t)$ dinyatakan sebagai perkalian dari fungsi posisi $\psi(x)$ dan fungsi waktu $\varphi(t)$.

Dalam penelitian ini akan digunakan persamaan Klein-Gordon satu dimensi tak bergantung waktu dalam sumur potensial persegi ganda simetri. Sehingga, variabel tiga dimensi dalam persamaan (2.6), yaitu ∇ , harus direduksi menjadi bentuk satu dimensi,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \nabla = \frac{d}{dx},$$

menjadi

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}\right) \Psi(x,t) = 0.$$

Selanjutnya, dilakukan pemisahan variabel untuk mendapatkan persamaan Klein-Gordon tak bergantung waktu dengan menggunakan metode yang diadopsi dari penentuan persamaan Schrodinger tak bergantung waktu. Diketahui bahwa (Griffiths, 2005),

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \psi(x), \quad \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \varphi(t), \quad (2.7)$$

Dengan memanfaatkan persamaan (2.7) dan membagi hasilnya dengan $\psi(x)\varphi(t)$, serta meletakkan fungsi posisi dan waktu dalam ruas yang berbeda, persamaan (2.5) akan tampak menjadi,

$$-\hbar^2 \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\hbar^2 c^2 \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + m^2 c^4. \quad (2.8)$$

Ruas kiri dalam persamaan (2.8) merupakan fungsi waktu saja, sedangkan ruas kanan adalah fungsi posisi saja.

Jadi, persamaan (2.8) menyatakan kesamaan antara suatu fungsi yang hanya bergantung pada x dan fungsi lain yang hanya bergantung pada t . Kesamaan seperti ini, hanya akan terpenuhi jika dan hanya jika semua x dan t di masing-masing ruas berupa suatu tetapan atau konstanta, sehingga tidak bergantung pada x maupun t . Arti fisik tetapan atau konstanta tersebut dapat dideduksi sebagai berikut. Suku kedua ruas kanan adalah bentuk lain dari energi yang dikuadratkan. Oleh karena itu, suku-suku lainnya juga harus berdimensikan energi yang dikuadratkan, baik yang di ruas kanan maupun ruas kiri. Selanjutnya, tetapan yang dimaksud, dilambangkan dengan E^2 . Ruas kanan kemudian dapat dituliskan menjadi (Sutopo, 2005)

$$E^2 = -\hbar^2 c^2 \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + m^2 c^4. \quad (2.9)$$

Membagi ruas kanan dan ruas kiri persamaan (2.9) dengan $\hbar^2 c^2$, kemudian mengalikan hasilnya dengan fungsi posisi gelombang $\psi(x)$, akan menghasilkan persamaan Klein-Gordon satu dimensi tak bergantung waktu sebagai berikut.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2 c^2} \right) \psi(x) = 0. \quad (2.10)$$

Kasus yang ditinjau pada penelitian ini adalah kasus dalam potensial persegi ganda dengan jenis potensial yang digunakan adalah potensial vektor, $V(x)$ dan potensial skalar, $S(x)$. Oleh karena itu, perlu ditambahkan variabel berupa potensial dalam persamaan (2.10) sehingga persamaan (2.10) menjadi

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E - V(x))^2 - (mc^2 + S(x))^2}{\hbar^2 c^2} \right) \psi(x) = 0.$$

Dalam relativistik, \hbar dan c dapat diasumsikan dengan $\hbar = c = 1$ (Alhaidari, 2005), sehingga

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + (E - V(x))^2 - (m + S(x))^2 \right) \psi(x) = 0. \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) inilah yang kemudian disebut dengan persamaan Klein-Gordon satu dimensi tak bergantung waktu dalam sumur potensial persegi ganda.

2.2 Persamaan Dirac

Beberapa permasalahan masih ditemukan dalam persamaan Klein-Gordon yang telah dirumuskan sebagaimana persamaan (2.6). Pertama, adanya kemungkinan munculnya energi negatif,

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (2.12)$$

yang belum dapat diinterpretasikan secara fisik. Kedua, adanya postulat dinamika yang menghendaki persamaan orde pertama dalam waktu t , sedangkan suku waktu t pada rumusan persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan orde kedua (Griffiths, 2008).

Paul Adrien Maurice Dirac mencoba mengajukan teori kuantum baru untuk mengatasi beberapa permasalahan yang muncul pada persamaan Klein-Gordon dengan strategi yang berbeda, yaitu merumuskan persamaan gelombang relativistik dalam bentuk persamaan diferensial orde pertama. Hasil perumusan persamaan gelombang relativistik yang dilakukan oleh Paul Dirac kemudian disebut dengan persamaan Dirac dan berhasil dirumuskan pada tahun 1928 (Griffiths, 2008).

Selain berhasil dalam merumuskan persamaan gelombang relativistik, persamaan Dirac juga berhasil menjelaskan tentang gerakan elektron dan memprediksi keberadaan antipartikel dari elektron, yaitu positron, yang memiliki sifat serupa dengan elektron tetapi muatannya berlawanan. Keberadaan positron akhirnya berhasil dibuktikan empat tahun setelah kemunculan prediksi Dirac oleh Anderson pada tahun 1932 ketika mempelajari jejak yang ditinggalkan oleh sinar kosmik di ruang awan (Zettili, 2009).

Persamaan Dirac yang akan digunakan dalam diskusi ini adalah persamaan Dirac satu dimensi dalam sumur potensial persegi ganda. Dalam teori Dirac satu dimensi tidak terdapat hubungan dengan momentum sudut orbital, sehingga tidak perlu adanya spin intrinsik. Hal ini berbeda dengan teori Dirac tiga dimensi. Dalam teori Dirac tiga dimensi, partikel ditemukan memiliki spin intrinsik yang secara fundamental terkait dengan momentum sudut orbital partikel. Penurunan persamaan Dirac satu dimensi berlangsung sama dengan persamaan Dirac tiga dimensi yaitu dimulai dengan persamaan hubungan energi dan momentum relativistik (Coulter dan Carl, 1971).

Hubungan energi dan momentum relativistik pada persamaan (2.3) jika dituliskan dalam bentuk kuadrat Hamiltonian adalah,

$$H^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Karena Hamiltonian H merupakan operator energi total partikel, maka

$$H\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t).$$

Operator Hamiltonian Dirac diberikan oleh persamaan berikut dengan melibatkan α dan β sebagai koefisien.

$$H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = \alpha(pc) + \beta(mc^2). \quad (2.13)$$

Bentuk $\alpha(pc)$ pada persamaan (2.13) analog dengan bentuk $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{pc}$ yang ditemukan dalam kasus penurunan persamaan Dirac tiga dimensi. Namun, perbedaan dimensi menunjukkan bahwa dalam kasus tiga dimensi, empat matriks hermitian uniter antikomutasi harus ditemukan untuk memenuhi persamaan yang analog bentuknya dengan persamaan (2.13). Sedangkan dalam kasus satu dimensi hanya diperlukan dua matriks hermitian uniter yang akan digunakan untuk mengganti koefisien α dan β (Coulter dan Carl, 1971).

Jika operator Hamiltonian Dirac mempunyai sifat Hermitian, maka α dan β juga harus berupa hermitian. Sifat hermitian yang dimiliki α dan β ini secara tidak langsung menunjukkan bahwa α dan β merupakan variabel antikomutasi yang memenuhi hubungan,

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 0 \quad \text{dan} \quad \alpha^2 = \beta^2 = 1.$$

Sifat antikomutasi ini memunculkan sifat lain yang juga harus dimiliki α dan β , yaitu nilai eigen yang dapat memenuhi hanya ± 1 serta $\text{Tr}(\alpha) = \text{Tr}(\beta) = 0$. Akibatnya, matriks hermitian yang dapat memenuhi persamaan (2.13) harus

berupa matriks berdimensi genap. Dalam hal ini, dua matriks berdimensi genap 2×2 yang merupakan matriks Pauli diadopsi untuk matriks Dirac, yaitu

$$\alpha = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \beta = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Adanya pengaruh eksternal berupa sumur potensial ganda dengan jenis potensial berupa potensial vektor, $V(x)$ dan potensial skalar, $S(x)$ menyebabkan penambahan suku potensial pada persamaan operator Hamiltonian Dirac, sehingga operator Hamiltonian Dirac dituliskan menjadi,

$$H = \alpha(pc) + \beta(mc^2 + S(x)) + V(x), \quad (2.15)$$

dengan p merupakan operator momentum yang didefinisikan pada persamaan (2.4), m adalah massa diam partikel, dan c kecepatan cahaya. Suku potensial dalam persamaan (2.15) dapat dituliskan dengan memberikan definisi untuk potensial $U(x)$ sebagai,

$$U(x) = \beta S(x) + V(x).$$

Operator hanya dapat bekerja jika diberikan suatu fungsi gelombang. Oleh karena itu, diberikan fungsi gelombang $\Psi(x,t)$ yang merupakan perkalian dari fungsi posisi $\psi(x)$ dan fungsi waktu $\varphi(t)$, pada persamaan (2.15) sehingga menjadi

$$H\Psi(x,t) = \left(\alpha(pc) + \beta(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) \Psi(x,t), \quad (2.16)$$

Substitusi persamaan (2.16) dengan persamaan (2.14) dan menyatakan momentum p dalam bentuk operator akan didapatkan persamaan,

$$[E - V(x)]\psi(x) = [c\sigma_x(-i\hbar\nabla) + \sigma_z[mc^2 + S(x)]]\psi(x).$$

Variabel tiga dimensi ∇ dari operator momentum harus direduksi menjadi bentuk satu dimensi, menjadi

$$E\psi(x) = \left[c\sigma_x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) + \sigma_z(mc^2) + \sigma_z S(x) + V(x) \right] \psi(x). \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) disebut sebagai persamaan Dirac satu dimensi dalam sumur potensial ganda simetri dengan potensial berupa potensial vektor, $V(x)$ dan potensial skalar, $S(x)$.

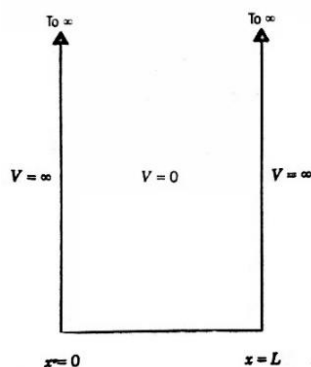
2.3 Sumur Potensial Kuantum

Jika energi potensial partikel berupa suatu konstanta, yang artinya tidak bergantung pada posisi, maka partikel tersebut dikatakan berada dalam keadaan bebas, tidak mengalami gaya. Sehingga dalam hal ini terdapat dua kemungkinan keadaan gerak partikel, yaitu diam atau bergerak lurus beraturan. Namun, pada kenyataannya tidak ada partikel yang berada dalam keadaan bebas di seluruh ruang, melainkan partikel tersebut bebas dalam ruang yang terbatas. Artinya, energi potensial konstan hanya terdapat dalam interval ruang tertentu. Potensial yang berupa suatu konstanta dalam interval tertentu dan berubah menjadi konstanta lain dalam interval lainnya disebut dengan potensial kotak. Jika terdapat satu perubahan dalam potensial, misalnya,

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{untuk } x < 0 \\ V_1 & \text{untuk } x > 0 \end{cases},$$

maka disebut potensial tangga. Jika terdapat dua kali perubahan dalam potensial maka ada dua kemungkinan jenis potensial tersebut, yaitu potensial tanggul dan potensial sumur atau lebih sering disebut sumur potensial (Sutopo, 2005).

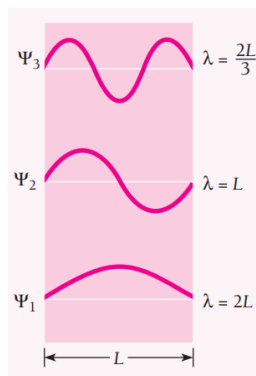
Model fisis paling sederhana yang sering kali digunakan dalam *textbooks* fisika kuantum adalah jenis sumur potensial. Sumur potensial atau disebut juga sumur kuantum merupakan salah satu konsep dalam mekanika kuantum yang digambarkan sebagai suatu wilayah dengan lebar tertentu yang dibatasi oleh dinding potensial yang bagian dalam dari wilayah tersebut tidak terdapat potensial eksternal (Tiandho, 2016).



Gambar 2.1 Sumur Potensial Tak Berhingga (Krane, 2012).

Pada gambar di atas, energi potensial V partikel bernilai tak berhingga di kedua sisi sumur dan V bernilai konstan (sama dengan nol) di dalam sumur. Sementara itu, dinding sumur yang dianggap sangat keras dan tak berhingga menyebabkan partikel hanya dapat bergerak bolak-balik di antara dinding sumur. Partikel dapat bergerak bolak-balik dan menumbuk dinding sumur tanpa kehilangan energi, sehingga energinya tetap konstan. Karena energi partikel yang tetap konstan dan tidak bisa bernilai tak berhingga, maka partikel tidak mungkin berada di luar sumur. Dalam keadaan demikian, partikel dikatakan mengalami keadaan terikat (*bound state*) yang artinya partikel terperangkap di dalam sumur dengan fungsi gelombang ψ sama dengan nol untuk $x \leq 0$ dan $x \geq L$. Jika ditinjau dari sudut pandang gelombang, partikel yang terperangkap dalam sumur potensial analog dengan gelombang berdiri pada tali yang direntangkan

antara dinding sumur. Pada kedua kasus tersebut, variabel gelombang yang berupa pergeseran gelombang transversal tali, fungsi gelombang, dan partikel bergerak, harus bernilai nol pada dinding karena gelombangnya berhenti di titik itu. Panjang gelombang yang mungkin dari partikel dalam sumur potensial ditentukan oleh lebar sumur potensial, L (Beiser, 2003).



Gambar 2.2 Fungsi Gelombang Partikel yang Terperangkap dalam Sumur Potensial dengan Lebar L (Beiser, 2003)

Sumur potensial merupakan struktur buatan satu dimensi yang dibangun untuk memudahkan dalam mengeksplorasi tingkat energi atau level energi diskrit yang dimiliki partikel, karena sebuah partikel yang terperangkap dalam sumur potensial tidak dapat memiliki sembarang energi sebagaimana energi yang dimiliki oleh partikel bebas. Keadaan partikel yang terperangkap menyebabkan adanya pembatasan panjang gelombang yang ekuivalen dengan pembatasan pada momentum sehingga juga mengakibatkan pembatasan pada energi kinetik.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m}.$$

Panjang gelombang terbesar pada Gambar 2.2 secara berturut-turut ditentukan oleh $\lambda = 2L$, $\lambda = L$, $\lambda = 2L/3$, dan seterusnya. Sehingga, panjang gelombang yang diizinkan adalah

$$\lambda_n = 2L/n, \quad \text{dengan } n = 1, 2, 3, \dots$$

Sedangkan panjang gelombang de Broglie yang berkaitan dengan sebuah benda bergerak dinyatakan oleh

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (2.18)$$

maka $mv = h/\lambda$ dan energi kinetiknya menjadi

$$E_k = \frac{h^2}{2m\lambda^2}.$$

Dalam model ini, partikel tidak memiliki energi potensial. Dengan demikian, energi yang diizinkan dimiliki oleh partikel adalah

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}. \quad (2.19)$$

Setiap energi yang diizinkan disebut sebagai tingkat energi dengan spesifikasi tingkat energi E_n diberikan oleh bilangan bulat n yang merupakan bilangan kuantum. Keadaan yang menunjukkan hanya terdapat nilai-nilai E tertentu yang dapat terjadi inilah yang disebut dengan keadaan terkuantisasi. Keadaan energi terendah, yaitu pada saat $n = 1$, dikenal sebagai keadaan dasar (*ground state*). Sedangkan keadaan dengan energi yang lebih tinggi, yaitu $n > 1$, dikenal sebagai keadaan tereksitasi (Beiser, 2003).

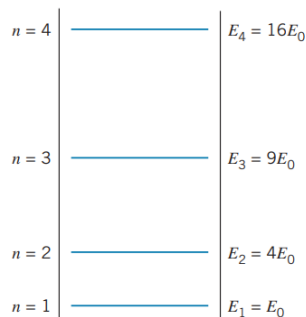
Jika diambil persamaan berikut,

$$E_0 = \frac{h^2}{8mL^2}, \quad (2.20)$$

tampak bahwa unit energi partikel ini ditentukan oleh massa partikel, m dan lebar sumur, L . Maka dapat dituliskan bahwa,

$$E_n = n^2 E_0, \quad (2.21)$$

yang menunjukkan bahwa partikel hanya dapat ditemukan dengan energi E_0 , $4E_0$, $9E_0$, dan seterusnya (Krane, 2012).



Gambar 2.3 Tingkat Energi Partikel dalam Sumur Potensial (Krane, 2012)

Eksistensi partikel dalam sumur potensial dapat dilihat dari sifat fungsi gelombang, $\Psi(x,t)$, walaupun fungsi gelombang sendiri tidak memiliki makna fisis secara langsung. Alasannya adalah, berkaitan dengan probabilitas (kemungkinan) bahwa partikel berada di titik tertentu pada waktu tertentu mempunyai nilai di antara dua batas, yaitu 0 dan 1. Sedangkan amplitudo gelombang dapat bernilai negatif yang maksudnya tidak mempunyai arti. Jadi, $\Psi(x,t)$ itu sendiri tidak bisa menjadi kuantitas yang teramati.

Akan tetapi, hal tersebut tidak berlaku untuk kuadrat besaran mutlak fungsi gelombang, $|\Psi(x,t)|^2$ yang dikenal sebagai rapat probabilitas posisi partikel.

$$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t). \quad (2.22)$$

Secara lebih tepat, $|\Psi(x,t)|^2 dV$ menyatakan kemungkinan untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh $\Psi(x,t)$ dalam elemen volume dV di sekitar posisi x pada saat t . Dalam kasus satu dimensi, probabilitas untuk menemukan partikel dalam interval x dan $x + dx$ pada waktu t adalah

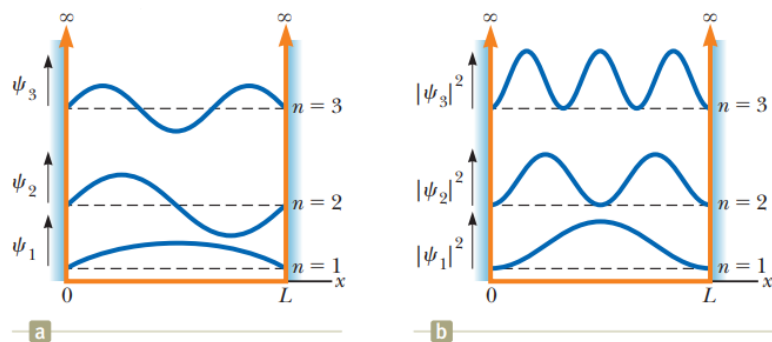
$$P(x,t) dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) dx. \quad (2.23)$$

Karena $|\Psi(x,t)|^2$ berbanding lurus dengan rapat probabilitas $P(x,t)$, maka integral rapat probabilitas atau $|\Psi(x,t)|^2$ ke seluruh ruang V harus berhingga untuk mendapatkan partikel yang diberikan (digambarkan) oleh $\Psi(x,t)$. Pernyataan matematis yang menunjukkan bahwa suatu partikel ada di dalam sumur pada waktu tertentu adalah sebagai berikut.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t) dV = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dV = 1. \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) kemudian disebut sebagai syarat normalisasi dan fungsi gelombang yang memenuhi syarat tersebut dikatakan sebagai fungsi gelombang ternormalisasi (Purwanto, 2006). Selain harus ternormalisasikan secara tepat, fungsi gelombang juga harus memenuhi beberapa syarat, di antaranya adalah turunan pertamanya harus kontinu di setiap x , berhingga, dan bernilai tunggal, agar dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan yang mempunyai makna fisis (Krane, 2012).

Fungsi gelombang $\Psi(x,t)$ dapat bernilai positif atau negatif, sedangkan rapat probabilitas $|\Psi(x,t)|^2$ selalu positif. Karena sebuah partikel dalam sumur potensial hanya dapat ditemukan dengan energi E_n , maka fungsi gelombang dan rapat probabilitas partikel tersebut menjadi berbentuk $\Psi_n(x,t)$ dan $|\Psi_n(x,t)|^2$ agar bersesuaian dengan E_n . Jika digambarkan dalam grafik tampak sebagai berikut.



Gambar 2.4 Grafik (a) Fungsi Gelombang dan (b) Rapat Probabilitas Sebuah Partikel dalam Sumur Potensial (Serway, 2010)

Probabilitas keberadaan partikel pada suatu titik tertentu dalam sumur potensial bisa sangat berbeda untuk bilangan kuantum n yang berbeda. Misalnya, $|\Psi_1(x,t)|^2$ bernilai maksimum di tengah sumur, sedangkan $|\Psi_2(x,t)|^2 = 0$ di titik yang sama. Artinya, peluang terbesar ditemukannya partikel pada keadaan energi terendah ($n = 1$) adalah di tengah sumur, sedangkan pada keadaan energi eksitasi pertama ($n = 2$), partikel tidak akan ditemukan di tengah sumur karena di titik tersebut $|\Psi_2(x,t)|^2 = 0$ (Beiser, 2003).

Sumur potensial mendasari pengembangan perangkat modern yang disebut sumur kuantum (*quantum well*). Suatu sumur kuantum dapat diproduksi dari bahan semikonduktor yang berupa film tipis yang kemudian disisipkan di antara dua lapisan semikonduktor yang memiliki *band gap* yang lebih lebar. Salah satu contoh sumur kuantum adalah AlAs/GaAs/AlAs. Bandgap dari bahan GaAs dan AlAs berturut-turut adalah $E_{g1} = 1,43 \text{ eV}$ dan $E_{g2} = 2,68 \text{ eV}$, sehingga bahan GaAs dapat disisipkan di antara bahan AlAs. Beberapa perangkat optoelektronik yang merupakan aplikasi atau terapan dari sistem sumur kuantum di antaranya adalah sumber cahaya berdaya tinggi untuk terapi medis, pemrosesan material, laser printing, dan sumber laser berfrekuensi tunggal untuk telekomunikasi optik (Siregar, 2018).

Selanjutnya, perluasan dari bentuk sumur potensial ini adalah sumur potensial persegi ganda yang merupakan model potensial yang disederhanakan dan banyak ditemukan dalam sistem kimia molekuler (Peacock-Lopez, 2006).

2.4 Potensial Vektor dan Potensial Skalar

Model fisika dan kimia yang realistis untuk interaksi multipartikel yang rumit dapat digantikan oleh medan eksternal berupa potensial dengan satu partikel yang mencerminkan karakteristik utama interaksi dengan cara yang disederhanakan. Dalam dunia empat dimensi yang lengkap, potensial eksternal seperti potensial vektor, pseudovektor, skalar, pseudoskalar, dan tensor memiliki sifat transformasi yang berbeda-beda (Karwowski, 2017). Potensial eksternal atau disebut juga dengan gaya eksternal diperhitungkan dengan menambahkan suku Hamiltonian bebas dalam operator persamaan yang dalam hal ini adalah persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac.

Pada dasarnya, persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac untuk partikel bebas dibangun dengan menggunakan dua objek yaitu operator momentum linier vektor empat $p_\mu \rightarrow -i\hbar\partial_\mu$ dan massa diam skalar m . Kemudian, diperkenalkan dua jenis kopling potensial. Salah satunya adalah *gauge invariant coupling* untuk potensial vektor empat A_μ yang diperkenalkan melalui substitusi $p_\mu \rightarrow p_\mu - gA_\mu$, dengan g merupakan parameter kopling. Sedangkan satu kopling lainnya merupakan kopling tambahan untuk potensial skalar $S(x)$ yang ditambahkan dengan substitusi $m \rightarrow m + S$ (Alhaidari, 2005).

Invariansi gauge dari kopling vektor memungkinkan kebebasan untuk memperbaiki gauge dengan menghilangkan gauge nonfisik tanpa mengubah

kasus atau masalah secara fisik. Beberapa pilihan untuk memperbaiki gauge yang paling umum digunakan adalah Lorentz gauge $\partial \cdot A = 0$ dan Coulomb gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Namun, banyak juga yang lebih memilih untuk menyederhanakan penyelesaian kasus atau masalah dengan menghilangkan komponen ruang dari potensial vektor ($\vec{A} = 0$). Jika digunakan pilihan ini, yaitu menghilangkan komponen ruang dari potensial vektor, kemudian menuliskan komponen waktu dari potensial vektor empat sebagai $gA_0 = V$, maka akan didapatkan dua fungsi potensial dalam persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac. Dua fungsi potensial yang dimaksud adalah potensial vektor V dan potensial skalar S sebagaimana tampak pada persamaan (2.11) dan persamaan (2.17) (Alhaidari, 2005).

2.5 Mekanika Kuantum dalam Tinjauan Al-Qur'an

Sebagian pakar dan penulis telah berusaha keras dalam mencari gagasan penting untuk sains kontemporer dari Al-Qur'an, hingga memperluas penafsiran bahasa Arab dari yang lazim. Salah satu contohnya adalah gagasan tentang atom dan partikel subatomik yang telah disebutkan dalam Al-Qur'an secara tersirat dengan menggunakan istilah *dzarrah* yang berarti partikel debu kecil, yaitu pada QS Yunus [10] ayat 61 dan QS Saba' [34] ayat 3 berikut.

وَمَا تَكُونُ فِي شَأْنٍ وَمَا تَتْلُو مِنْهُ مِنْ قُرْآنٍ وَلَا تَعْمَلُونَ مِنْ عَمَلٍ إِلَّا كُنَّا عَلَيْكُمْ شُهُودًا إِذْ تُفِيضُونَ فِيهِ وَمَا يَعْزُبُ عَنْ رَبِّكَ مِنْ مِثْقَالِ ذَرَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا فِي السَّمَاءِ وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ - ٦١

“Dan tidakkah engkau (Muhammad) berada dalam suatu urusan, dan tidak membaca suatu ayat al-Quran serta tidak pula kamu melakukan suatu pekerjaan, melainkan Kami menjadi Saksi atasmu ketika kamu melakukannya.

Tidak lengah sedikitpun dari pengetahuan Tuhan-mu biarpun sebesar zarah, baik di bumi ataupun di langit. Tidak ada sesuatu yang lebih kecil dan yang lebih besar daripada itu, melainkan semua tercatat dalam Kitab yang nyata (Lauh Mahfuzh).” (QS Yunus [10]: 61)

وَقَالَ الَّذِينَ كَفَرُوا لَا تَأْتِينَا السَّاعَةُ قُلْ بَلَىٰ وَرَبِّي لَتَأْتِيَنَّكُمْ عَالِمِ الْغَيْبِ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ
فِي السَّمَاوَاتِ وَلَا فِي الْأَرْضِ وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ - ٣

“Dan orang-orang kafir berkata, “Hari berbangkit itu tidak akan datang kepada kami.” Katakanlah, “Pasti datang, demi Tuhanku yang mengetahui yang gaib, sungguh kiamat itu pasti datang kepadamu. Tidak ada yang tersembunyi dari-Nya sebesar dzarrah pun yang ada di langit dan yang ada di bumi, dan tidak ada yang lebih kecil dan yang lebih besar daripada itu, melainkan tersebut dalam Kitab yang nyata.” (QS Saba’ [34]: 3)

Kata “itu” dalam frasa “yang lebih kecil dan yang lebih besar daripada itu” merujuk pada kata *dzarrah* yang diartikan sebagai ukuran untuk sebuah atom. Sehingga dalam kalimat “yang lebih besar daripada itu”, mengandung makna tentang suatu molekul, yaitu kumpulan dari atom-atom. Sedangkan “yang lebih kecil dari itu” dimaknai sebagai bagian-bagian atom atau komponen penyusun atom atau sejenisnya (Tim Penyusun Tafsir Ilmi, 2011).

Menurut Golshani (2003) sebagian fisikawan muslim menyamakan kata *dzarrah* dengan atom, sementara makna lazimnya adalah semut kecil atau partikel debu kecil. Makna tentang sesuatu yang sangat kecil, tidak dapat dibelah dan dibagi lagi ini mengarah pada pengertian atom dahulu. Mengingat bahwa istilah atom, menurut Democritus dan Leucippus, berasal dari bahasa Yunani yaitu dari kata *atomos* yang diartikan sebagai bagian terkecil suatu benda yang tidak dapat dibagi-bagi lagi. Atom diibaratkan sebagai bola pejal yang berukuran sangat kecil. Bola pejal yang sangat kecil ini tidak dapat dimusnahkan, namun dapat bergabung dan berpisah membentuk berbagai bentuk objek makroskopik.

Keyakinan bahwa atom merupakan bola pejal yang sangat kecil ini pada akhirnya runtuh di akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20. Hasil penelitian para ilmuwan modern menunjukkan bahwa atom sebagai butiran terkecil ternyata masih dapat dibelah dan dibagi-bagi lagi. Atom, dalam perkembangannya, diartikan sebagai satu kesatuan materi yang terdiri atas inti atom yang di dalamnya terdapat proton dan neutron, dan elektron-elektron yang bergerak mengelilingi inti atom (Purwanto, 2015b).

Penelitian lebih lanjut yang dilakukan oleh David J. Gross, Frankl Wilczek dan H. David Politzer tahun 1973, menemukan bahwa inti atom (proton dan neutron) tersusun atas materi kecil yang terikat dengan kuat, disebut quark. Kekuatan yang mengikat quark dalam proton dan neutron akan semakin bertambah kuat hingga akhirnya tidak dapat dipisahkan lagi (Dyayadi, 2008). Dalam Kamus Fisika yang ditulis oleh Setyawan (2004), dikatakan bahwa kata *dzarrah* merupakan istilah untuk materi yang halus, berupa partikel. Dengan demikian, *dzarrah* ditafsirkan sebagai istilah lain untuk partikel atau lebih tepatnya partikel elementer.

Berbicara mengenai *dzarrah* atau partikel elementer, tidak akan terlepas dari kajian tentang gagasan dasar dan seluk-beluk mekanika kuantum yang saat ini dipercaya sebagai kerangka teori mutakhir bagi atom dan telah berhasil meruntuhkan fondasi Newtonian. Kelahiran teori kuantum dipicu oleh kegagalan prinsip materi yang dimiliki mekanika Newtonian dan prinsip gelombang Maxwell dalam menjelaskan tentang munculnya distribusi radiasi benda hitam pada akhir abad ke-19. Pada mulanya, fenomena yang dialami oleh materi adalah khusus untuk materi dan tidak akan terjadi pada gelombang. Begitu juga

dengan fenomena gelombang yang hanya dapat terjadi pada gelombang. Materi terkurung dalam ruang, bersifat diskrit, bergerak dengan melompat dan dapat mengalami tumbukan, sedangkan gelombang dapat tersebar dalam ruang, bersifat kontinu, bergerak dengan merambat dan tidak mengalami tumbukan melainkan mengalami interferensi dan difraksi (Purwanto, 2015a).

Krisis dan kebuntuan fisika ini akhirnya sedikit teratasi setelah diperkenalkannya paket energi bagi gelombang elektromagnetik dalam rongga benda hitam oleh ahli fisika Jerman, Max Planck. Dalam hipotesis yang diajukan, Max Planck menyatakan bahwa gelombang elektromagnetik direpresentasikan sebagai osilator yang hanya dapat memancarkan dan menyerap energi dalam satuan energi yang disebut kuantum, sebesar $h\nu$. Gagasan tentang paket gelombang Max Planck kemudian diadopsi dan dipertajam oleh Einstein dengan menyatakan bahwa cahaya terpaket adalah foton. Gagasan Einstein ini justru berhasil menjelaskan hasil eksperimen yang disebut efek fotolistrik, yaitu fenomena terpancarnya elektron dari pelat katoda setelah disinari cahaya dengan frekuensi tertentu. Lebih lanjut, A.H. Compton mengajukan usul yang lebih berani dengan menyatakan bahwa foton, cahaya dengan dengan paket energi $h\nu$ mempunyai momentum p seperti partikel. Gagasan Compton ini berhasil menjelaskan hamburan cahaya oleh atom yang dikenal sebagai efek Compton. Ide dasar dari ketiga ilmuwan ini pada dasarnya adalah tentang gelombang yang mempunyai sifat partikel (Purwanto, 2015a).

Pada tahun 1924, dengan mempertimbangkan sifat simetri, Louis de Broglie mengajukan hipotesis yang sangat berani dalam disertasinya yang menyatakan bahwa partikel juga mempunyai sifat gelombang. Menurut Louis de

Broglie, partikel bermassa m yang bergerak dengan laju v dan mempunyai momentum p , mempunyai panjang gelombang $\lambda = h/p$. Gagasan Louis de Broglie ini melahirkan konsep dualisme materi (partikel) – gelombang. Artinya, gelombang dapat bersifat sebagai materi dan materi dapat bersifat sebagai gelombang. Hipotesis Louis de Broglie mampu menjelaskan hasil eksperimen tentang berkas elektron yang dikenakan pada kristal nikel yang dilakukan oleh C.J. Davisson dan L.H. Germer satu tahun setelahnya. Hasilnya, elektron terhambur dan membentuk pola difraksi, yang mana dalam pandangan Newton-Maxwell telah diketahui bahwa difraksi hanya dimiliki oleh gelombang. Artinya, gagasan Louis de Broglie dalam desertasinya adalah benar. Dengan demikian, telah lahir era baru yang dikenal dengan era kuantum yang ditandai dengan munculnya konsep dualisme materi-gelombang. Penamaan era kuantum ini merujuk pada istilah awal yang digunakan oleh Max Planck, yaitu kuantum (paket, tunggal) (Purwanto, 2006).

Berbicara tentang paket energi atau yang biasa disebut dengan istilah kuantum, Allah SWT telah berfirman dalam Al-Qur'an surat An-Nuur ayat 35 yang berbunyi,

اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ مِثْلُ نُورِهِ كَمِشْكُوتٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبَارَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ نُورٌ عَلَى نُورٍ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ - ٣٥

“Allah (Pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. Perumpamaan cahaya-Nya, seperti sebuah lubang yang tidak tembus, yang di dalamnya ada pelita besar. Pelita itu di dalam tabung kaca, (dan) tabung kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang banyak berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur (sesuatu) dan tidak pula di sebelah barat(nya), yang minyaknya (saja) hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. Cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis), Allah membimbing kepada cahaya-Nya bagi orang

yang Dia kehendaki, dan Allah membuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia. Dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.” (QS An-Nuur [24]: 35)

Secara literal, kata *nuurun* ‘*alaa nuurin* dalam ayat tersebut berarti cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis). Adapun mengenai makna dari “cahaya di atas cahaya” ini, para mufassir memiliki definisi yang beragam.

Dari Ibnu Abbas, Al-Aufi telah meriwayatkan bahwa makna yang dimaksud dari “cahaya di atas cahaya” adalah menggambarkan iman seorang hamba beserta amalnya. Sedangkan Ubay bin Ka’ab telah berkata berkaitan dengan firman Allah yang mempunyai arti “cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis)” ialah orang mukmin bergelimang di dalam lima cahaya, yakni ucapannya adalah cahaya, amal perbuatannya adalah cahaya, tempat masuknya adalah cahaya, tempat keluarnya adalah cahaya, dan tempat kembalinya di hari kiamat kelak yang diterangi oleh cahaya ialah surga (Ibnu Katsir, 2007).

Ulama lainnya, As-Saddi, juga mengungkapkan pandangannya terkait makna firman-Nya, “cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis)”, adalah cahaya api dan cahaya minyak. Apabila cahaya api dan cahaya minyak bertemu maka keduanya akan bersatu dan menerangi. Akan tetapi, masing-masing tidak dapat menerangi jika tidak berpasangan. Demikian pula cahaya Al-Qur’an dan cahaya iman yang tidak akan bercahaya kecuali dengan keberadaan antara satu dengan yang lainnya (Ibnu Katsir, 2007).

Secara saintifik, Purwanto (2015a) memberikan tafsiran terhadap “cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis)” dengan makna spektrum cahaya. Ketika cahaya dilewatkan pada prisma segitiga melalui satu sisi, maka cahaya yang keluar pada sisi prisma lainnya akan berupa sebaran pita warna-warni yang teratur. Gejala

semacam ini dianggap mampu menggambarkan cahaya yang berlapis-lapis, yang bertumpuk-tumpuk.

Eksperimen terhadap cahaya pertama kali dilakukan pada tahun 1666 oleh Isaac Newton. Newton membiarkan cahaya matahari masuk ke dalam rumahnya melalui sebuah celah kecil, lalu melintasi ruang gelap dan jatuh miring pada permukaan prisma kaca segitiga. Berkas sinar yang keluar dari prisma kaca segitiga kemudian ditangkap dengan menggunakan layar putih. Akan tetapi, yang didapatkan bukan lagi bitnik sinar putih, melainkan sebaran pita warna-warni yang teratur yaitu merah, oranye, kuning, hijau, biru dan ungu. Sebaran pita warna-warni inilah yang disebut sebagai spektrum (Purwanto, 2015a).

Cara lain untuk memahami kaitan antara kuantum dengan konsep “cahaya di atas cahaya” atau cahaya yang bertumpuk-tumpuk ini adalah pada fenomena radiasi benda hitam. Sistem yang mendekati benda hitam ideal adalah benda padat berongga yang diberi lubang kecil dari rongga ke permukaan. Gelombang elektromagnetik yang masuk melalui lubang akan terpantul berulang-ulang oleh permukaan rongga yang setiap pantulan tersebut menyerap energi yang dimiliki oleh gelombang elektromagnetik hingga akhirnya semua energi terserap habis. Pada tahun 1900, Max Planck mengemukakan bahwa gelombang elektromagnetik di dalam rongga berperilaku seperti osilator harmonik dan memancarkan atau menyerap energi dalam satuan paket energi yang disebut kuantum $h\nu$. Osilator ini tidak dapat memancarkan atau menyerap energi sembarang, melainkan hanya sejumlah bilangan bulat kali satu paket energi. Dengan asumsi bahwa energi radiasi hanya dalam bentuk paket-paket, Max Planck berhasil menjelaskan distribusi energi oleh benda hitam. Ketika menerapkan fungsi

distribusi dalam termostatik, Max Planck menggunakan anggapan bahwa cahaya dapat bertumpuk-tumpuk pada suatu keadaan. (Purwanto, 2015a).

Distribusi energi dari osilator harmonik tidak kontinyu, melainkan terkuantisasi, sama halnya dengan energi partikel keadaan terikat. Partikel yang mengalami keadaan terikat dalam sumur potensial juga memiliki energi yang berbentuk diskrit. Hal ini disebabkan karena adanya pembatasan panjang gelombang yang ekuivalen dengan pembatasan pada momentum yang juga mengakibatkan pembatasan pada energi kinetik. Akibatnya, sebuah partikel yang terperangkap dalam sumur potensial tidak dapat memiliki sembarang energi sebagaimana energi yang dimiliki oleh partikel bebas, melainkan energinya terkuantisasi membentuk level-level energi.

Selain dari sisi literal, juga dilakukan peninjauan terhadap surat An-Nuur ayat 35 dari sisi gramatikal. Di dalam tata bahasa umum, huruf *athaf wawu* seharusnya dirangkai dengan kata yang berjenis sama, misalnya kata bermakna tunggal dengan tunggal, atau jamak dengan jamak. Kesetaraan yang dapat dikatakan merupakan bagian dari simetri ini akan dilihat sebagai keselarasan gramatikal. Pertama, simetri *laa syarqiyyatin – laa gharbiyyatin*, tidak di timur – tidak pula di barat. Arah timur selalu berpasangan dengan arah barat yang artinya keberadaan arah timur akan menuntut keberadaan arah barat, begitu juga sebaliknya. Ungkapan simbolis semacam ini tentunya mewakili karakteristik ciptaan Allah yang lain. Misalnya alam semesta yang dalam banyak hal memperlihatkan penampakan simetrinya sehingga menampakkan keindahan (Purwanto, 2015b).

Selain alam semesta, simetri juga terjadi dalam banyak hal, seperti manusia, tumbuhan, hewan, hingga benda-benda pada tingkat molekuler. Bahkan kesetimbangan dan kesimetrisan dalam penciptaan tubuh manusia ini telah ditegaskan dalam firman Allah SWT yaitu,

–الَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّاكَ فَعَدَلَكَ– ٧

“Yang telah menciptakanmu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh) mu seimbang.” (QS Al-Infithar [82]: 7)

Pola simetri ini, selain disukai juga telah diaplikasikan oleh manusia ke dalam berbagai hal, salah satunya yaitu pada penelitian tingkat molekuler. Kesetimbangan dan kesimetrisan pada tingkat molekuler ini tidak hanya telah diterapkan oleh Louis de Broglie dalam disertasinya saja, melainkan juga oleh Paul Dirac. Dua tahun setelah kegagalan O. Klein dan W. Gordon dalam menyatukan teori kuantum dan teori relativitas khusus, Paul Dirac memperkenalkan teori yang sederhana, indah, dan egaliter. Sederhana karena persamaan yang dimaksud muncul hanya dalam bentuk orde pertama. Adapun dikatakan bersifat egaliter karena, baik ruang maupun waktu, muncul dalam orde yang sama yaitu persamaan diferensial orde pertama. Sedangkan disebut indah karena berangkat dari bentuk matematika tersebut, Paul Dirac dapat memprediksi keberadaan antipartikel sekaligus pasangan dari elektron (Purwanto, 2015a).

Dalam penelitian ini, juga diterapkan sifat simetri yaitu berupa sumur potensial persegi ganda simetri. Gambaran sumur potensial yang meliputi tinggi sumur potensial pembatas, lebar sumur, dan sumur potensial pusat bagian kiri dan kanan mempunyai ukuran yang sama dan simetri.

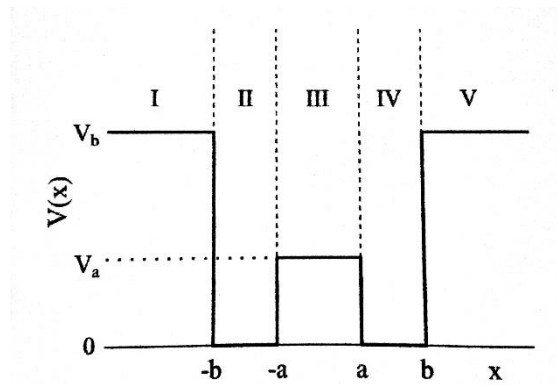
BAB III

METODE MATRIKS TRANSFER

3.1 Solusi Persamaan Gelombang

Persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac merupakan persamaan gelombang relativistik berbentuk persamaan diferensial yang jika diselesaikan akan menghasilkan solusi berupa fungsi gelombang, $\psi(x)$. Fungsi gelombang sendiri merupakan pendeskripsi keadaan gerak sistem yang memuat informasi tentang sistem yang dimaksud. Karena, melalui fungsi gelombang dapat diketahui distribusi probabilitas partikel dalam ruang waktu tertentu serta momentum linier yang dimiliki partikel. Mengingat bahwa besaran-besaran dinamis seperti gaya, energi kinetik, energi potensial, momentum sudut, dan sejenisnya dapat dinyatakan sebagai fungsi posisi dan momentum sudut (Sutopo, 2005).

Besaran-besaran dinamis tersebut dapat diketahui atau ditentukan nilainya melalui pengukuran. Postulat tentang pengukuran menyatakan bahwa mengukur dalam konteks fisika kuantum adalah mengerjakan operator yang mewakili besaran fisika yang diukur pada fungsi gelombang yang mendeskripsikan keadaan sistem saat pengukuran (Sutopo, 2005). Dalam hal ini, fungsi gelombang yang akan ditentukan adalah fungsi gelombang persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac dalam sumur potensial persegi ganda simetri.



Gambar 3.1 Skema Sumur Potensial Persegi Ganda (Hasegawa, 2014)

Sebagaimana tampak pada gambar di atas, sumur potensial persegi ganda dibagi menjadi lima bagian yang dipisahkan oleh garis putus-putus dan diberi nama ruang I, II, III, IV, dan V. Pembagian potensial menjadi lima ruang ini didasarkan pada nilai dari potensial-potensial yang dimiliki oleh sumur potensial tersebut. Notasi V digunakan jika potensial yang digunakan adalah potensial vektor dan notasi S digunakan sebagai lambang jika potensial yang digunakan berupa potensial skalar.

Bagian tepi dari sumur potensial atau disebut juga potensial batas merupakan bagian yang memiliki potensial V sebesar V_b dan bagian ini hanya terbatas ketika $x \leq -b$ dan $x > b$. Baik di sisi kiri maupun kanan potensial bernilai sama, yaitu V_b , karena sumur potensial yang digunakan adalah sumur potensial ganda simetri. Selanjutnya, bagian ini ditentukan sebagai ruang I untuk sisi kiri dan ruang V untuk sisi kanan. Bagian kedua yaitu bagian dalam sumur potensial yang tidak terpengaruh oleh adanya potensial penghalang atau dengan kata lain $V = 0$. Seperti halnya ruang sebelumnya, ruang ini juga mempunyai bagian yang saling simetri di sisi kiri dan kanan. Batas-batas potensial bernilai 0 ini adalah ketika $-b < x \leq -a$ dan $a < x \leq b$, yang kemudian ruang tanpa potensial ini ditetapkan sebagai ruang II dan IV berturut-turut untuk sisi kiri dan

kanan. Satu bagian yang terakhir yaitu pusat sumur potensial ganda yang memiliki potensial V sebesar V_a dan berada dalam rentang $-a < x \leq a$. Selanjutnya bagian pusat dari sumur potensial ganda ini ditetapkan sebagai ruang III.

Pemaparan di atas merupakan bentuk pembagian ruang dan penggunaan notasi untuk potensial ketika potensial yang digunakan berupa potensial vektor. Adapun jika potensial yang digunakan berupa potensial skalar, maka notasi yang digunakan adalah S_a dan S_b . Dalam bentuk yang lebih sederhana, penjelasan di atas dapat diekspresikan oleh persamaan berikut untuk potensial vektor,

$$V(x) = \begin{cases} V_b & \text{untuk } x \leq -b & \text{ruang I} \\ 0 & \text{untuk } -b < x \leq -a & \text{ruang II} \\ V_a & \text{untuk } -a < x \leq a & \text{ruang III,} \\ 0 & \text{untuk } a < x \leq b & \text{ruang IV} \\ V_b & \text{untuk } x > b & \text{ruang V} \end{cases}$$

dan persamaan berikut untuk potensial skalar $S(x)$,

$$S(x) = \begin{cases} S_b & \text{untuk } x \leq -b & \text{ruang I} \\ 0 & \text{untuk } -b < x \leq -a & \text{ruang II} \\ S_a & \text{untuk } -a < x \leq a & \text{ruang III.} \\ 0 & \text{untuk } a < x \leq b & \text{ruang IV} \\ S_b & \text{untuk } x > b & \text{ruang V} \end{cases}$$

3.1.1 Solusi Persamaan Klein-Gordon

Persamaan Klein-Gordon satu dimensi tak bergantung waktu dalam sumur potensial persegi ganda didefinisikan oleh persamaan berikut.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E - V(x))^2 - (mc^2 + S(x))^2}{\hbar^2 c^2} \right) \psi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Sebagaimana tampak pada Gambar 3.1, sumur potensial persegi ganda dibagi menjadi lima ruang. Bentuk solusi persamaan gelombang di setiap ruang pada dasarnya adalah sama. Akan tetapi, masing-masing fungsi gelombang tetap

bergantung pada syarat batas dan besar potensial dari ruang yang ditempati oleh fungsi tersebut.

Jika diamati secara seksama, bentuk persamaan Klein-Gordon satu dimensi yang dituliskan dalam persamaan (3.1) akan lebih mudah diselesaikan dengan memberikan pemisalan berupa konstanta tertentu untuk suku kedua. Apabila suku kedua dari persamaan (3.1) dimisalkan sebagai C^2 ,

$$C^2 = \frac{(E - V(x))^2 - (mc^2 + S(x))^2}{\hbar^2 c^2}. \quad (3.2)$$

Maka persamaan (3.1) dapat dituliskan menjadi

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + C^2 \right) \psi(x) = 0. \quad (3.3)$$

Sehingga, solusi persamaan Klein-Gordon satu dimensi adalah sebagai berikut

$$\psi(x) = Ae^{icx} + Be^{-icx}, \quad (3.4)$$

sebagaimana dibuktikan dalam lampiran A, dengan

$$C = \frac{\sqrt{(E - V(x) + mc^2 + S(x))(E - V(x) - mc^2 - S(x))}}{\hbar c}. \quad (3.5)$$

Jadi, solusi persamaan gelombang untuk setiap ruang memiliki bentuk yang sama dengan persamaan (3.4). Langkah selanjutnya adalah melakukan substitusi variabel $V(x)$ dan $S(x)$ sesuai dengan ketentuan nilai potensial untuk masing-masing ruang dan didapatkan

$$\psi_1(x) = A_1 e^{iqx} + B_1 e^{-iqx}, \quad \text{untuk ruang I } x \leq -b \quad (3.6)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}, \quad \text{untuk ruang II } -b \leq x \leq -a \quad (3.7)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ipx} + B_3 e^{-ipx}, \quad \text{untuk ruang III } -a \leq x \leq a \quad (3.8)$$

$$\psi_4(x) = A_4 e^{ikx} + B_4 e^{-ikx}, \quad \text{untuk ruang IV } a \leq x \leq b \quad (3.9)$$

$$\psi_5(x) = A_5 e^{iqx} + B_5 e^{-iqx}, \quad \text{untuk ruang } V \ x \geq b \quad (3.10)$$

dengan p , q , dan k adalah konstanta C yang variabelnya telah disesuaikan.

$$p = \frac{\sqrt{(E - V_a + mc^2 + S_a)(E - V_a - mc^2 - S_a)}}{\hbar c}, \quad (3.11)$$

$$q = \frac{\sqrt{(E - V_b + mc^2 + S_b)(E - V_b - mc^2 - S_b)}}{\hbar c}, \quad (3.12)$$

$$k = \frac{\sqrt{(E + mc^2)(E - mc^2)}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{\hbar c}. \quad (3.13)$$

3.1.2 Solusi Persamaan Dirac

Persamaan Dirac satu dimensi dalam sumur potensial persegi ganda didefinisikan oleh persamaan berikut.

$$E\psi(x) = \left[c\sigma_x \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) + \sigma_z (mc^2 + S(x)) + V(x) \right] \psi(x). \quad (3.14)$$

Fungsi $\psi(x)$ merupakan spinor Dirac yang mengandung dua komponen, yaitu

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Substitusi matriks pauli pada persamaan (2.14) dan komponen spinor Dirac pada persamaan (3.15) ke dalam persamaan Dirac (3.14), akan menghasilkan

$$E\psi_+(x) = [mc^2 + S(x) + V(x)]\psi_+(x) - i\hbar c \frac{d}{dx} \psi_-(x), \quad (3.16)$$

$$E\psi_-(x) = [-mc^2 - S(x) + V(x)]\psi_-(x) - i\hbar c \frac{d}{dx} \psi_+(x). \quad (3.17)$$

Berdasarkan persamaan (3.16), dapat ditentukan bahwa $\psi_+(x)$ adalah

$$\psi_+(x) = \left(\frac{i\hbar c}{(E - mc^2 - V(x) - S(x))} \right) \left(\frac{d}{dx} \psi_-(x) \right).$$

Sedangkan persamaan (3.17) memberikan petunjuk bahwa $\psi_-(x)$ adalah

$$\psi_{-}(x) = \left(\frac{i\hbar c}{(E + mc^2 - V(x) + S(x))} \right) \left(\frac{d}{dx} \psi_{+}(x) \right).$$

Substitusi $\psi_{+}(x)$ ke dalam $\psi_{-}(x)$ atau sebaliknya, akan menghasilkan

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E + mc^2 - V(x) + S(x))(E - mc^2 - V(x) - S(x))}{\hbar^2 c^2} \right) \psi_{+}(x) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E + mc^2 - V(x) + S(x))(E - mc^2 - V(x) - S(x))}{\hbar^2 c^2} \right) \psi_{-}(x) = 0.$$

Jika dituliskan dalam bentuk $\psi(x)$, maka

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E + mc^2 - V(x) + S(x))(E - mc^2 - V(x) - S(x))}{\hbar^2 c^2} \right) \psi(x) = 0, \quad (3.18)$$

dengan $\psi(x)$ merupakan komponen $\psi_{+}(x)$ dan $\psi_{-}(x)$. Jika suku kedua persamaan (3.18) diasumsikan sebagai k^2 seperti halnya pada persamaan Klein-Gordon, maka persamaan (3.18) tidak lain merupakan bentuk persamaan gelombang yang memiliki solusi umum sebagai berikut.

$$\psi(x) = Ae^{ikx}u(k) + Be^{-ikx}v(k), \quad (3.19)$$

dengan $u(k)$ dan $v(k)$ merupakan kumpulan bispinor Dirac satu dimensi.

Akan tetapi, solusi ini masih memerlukan pembuktian apakah $u(k)$ dan $v(k)$ dapat memenuhi persamaan Dirac satu dimensi atau sebaliknya. Pembuktian ini dilakukan dengan mengoperasikan fungsi gelombang persamaan (3.19) ke dalam persamaan Dirac satu dimensi.

$$E(e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)) = \left[-i\hbar c \sigma_x \frac{d}{dx} + \sigma_z (mc^2 + S(x)) + V(x) \right] (e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)). \quad (3.20)$$

Jika diketahui bahwa

$$\frac{d}{dx} (e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)) = ik(e^{ikx}u(k) - e^{-ikx}v(k)),$$

maka

$$\begin{aligned}
E(e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)) &= -i\hbar c\sigma_x \left(ik \left(e^{ikx}u(k) - e^{-ikx}v(k) \right) \right) \\
&\quad + \left(\sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) (e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)) \\
&= \hbar kc\sigma_x \left(e^{ikx}u(k) - e^{-ikx}v(k) \right) \\
&\quad + \left(\sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) (e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)) \\
&= \left(\hbar kc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) e^{ikx}u(k) \\
&\quad - \left(\hbar kc\sigma_x - \sigma_z(mc^2 + S(x)) - V(x) \right) \\
&\quad e^{-ikx}v(k) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Konstanta k dapat bernilai positif maupun negatif, sebagaimana

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{(E + mc^2 - V(x) + S(x))(E - mc^2 - V(x) - S(x))}{\hbar^2 c^2}, \\
k &= \pm \sqrt{\frac{(E + mc^2 - V(x) + S(x))(E - mc^2 - V(x) - S(x))}{\hbar^2 c^2}}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Dan jika diketahui bahwa

$$k = \pm p/\hbar, \quad \rightarrow \quad \pm \hbar k = p.$$

maka persamaan (3.21) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
E(e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)) &= \left(pc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) e^{ikx}u(k) \\
&\quad + \left(pc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) e^{-ikx}v(k), \\
&= \left(pc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) \\
&\quad (e^{ikx}u(k) + e^{-ikx}v(k)).
\end{aligned}$$

dengan k dalam persamaan $p = \hbar k$ bernilai positif untuk suku-suku yang mengandung komponen $u(k)$ dan bernilai negatif untuk suku-suku yang mengandung komponen $v(k)$. Dengan menuliskan persamaan $u(k)$ dan $v(k)$ secara terpisah serta menuliskan p dalam bentuk $\hbar k$, akan didapatkan

$$Ee^{ikx}u(k) = \left(\hbar kc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) e^{ikx}u(k),$$

$$Eu(k) = \left(\hbar kc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) u(k), \quad (3.23)$$

dan

$$Ee^{-ikx}v(k) = \left(\hbar(-k)c\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) e^{-ikx}v(k),$$

$$Ev(k) = \left(\hbar(-k)c\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) v(k). \quad (3.24)$$

Persamaan (3.23) dan (3.24) menunjukkan bahwa $u(k)$ dan $v(k)$ memenuhi untuk persamaan Dirac. Artinya, solusi persamaan gelombang pada persamaan (3.19) memenuhi sebagai solusi persamaan Dirac. Sebagaimana fungsi gelombang $\psi(x)$ atau spinor Dirac yang memiliki dua komponen, $u(k)$ dan $v(k)$ juga mengandung dua komponen yang dituliskan sebagai berikut.

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad v(k) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Nilai $u(k)$ ditentukan dengan cara menyelesaikan persamaan (3.23) sebagai berikut.

$$Eu(k) = \left(\hbar kc\sigma_x + \sigma_z(mc^2 + S(x)) + V(x) \right) u(k)$$

$$[E - \hbar kc\sigma_x - \sigma_z(mc^2 + S(x)) - V(x)]u(k) = 0$$

$$\left[(E - V(x)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \hbar kc \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (mc^2 + S(x)) \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} E - V(x) - (mc^2 + S(x)) & -\hbar kc \\ -\hbar kc & E - V(x) + (mc^2 + S(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Jika dijabarkan dalam bentuk persamaan biasa, menjadi

$$\left(E - V(x) - (mc^2 + S(x)) \right) u_1 - \hbar kc u_2 = 0,$$

$$u_1 = \frac{\hbar kc}{\left(E - V(x) - (mc^2 + S(x)) \right)} u_2.$$

Dan,

$$(E - V(x) + (mc^2 + S(x)))u_2 - \hbar kc u_1 = 0,$$

$$u_2 = \frac{\hbar kc}{(E - V(x) - (mc^2 + S(x)))} u_1.$$

Jika $u_1 = 1$, maka

$$u_2 = \frac{\hbar kc}{(E - V(x) - (mc^2 + S(x)))}.$$

Sehingga

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\hbar kc}{(E - V(x) - (mc^2 + S(x)))} \end{pmatrix}$$

Penentuan v_1 dan v_2 , dilakukan dengan cara yang sama dengan penentuan $u(k)$. Akan tetapi, nilai k untuk komponen yang mengandung $v(k)$ adalah negatif. Dengan demikian, nilai komponen $v(k)$, yaitu v_1 dan v_2 , adalah sebagai berikut.

$$v(k) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\hbar kc}{(E - V(x) - (mc^2 + S(x)))} \end{pmatrix}$$

Lebih singkatnya, $u(k)$ dan $v(k)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v(k) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

dengan α adalah

$$\alpha = \frac{\hbar kc}{(E - V(x) - (mc^2 + S(x)))} \quad (3.26)$$

Seperti halnya solusi persamaan Klein-Gordon, solusi persamaan Dirac satu dimensi dalam sumur potensial persegi ganda simetri ditentukan dengan membagi potensial menjadi lima ruang. Jika telah diketahui bahwa bentuk solusi

persamaan Dirac satu dimensi tampak seperti persamaan (3.19), maka dengan melakukan substitusi untuk komponen-komponen yang dimiliki setiap ruang, solusi persamaan Dirac satu dimensi untuk ruang I, II, III, IV, dan V adalah sebagai berikut.

$$\psi_1(x) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} e^{iqx} + B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} e^{-iqx}, \quad \text{untuk } x \leq -b \quad (3.27)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{ikx} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad \text{untuk } -b \leq x \leq -a \quad (3.28)$$

$$\psi_3(x) = A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} e^{ipx} + B_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \text{untuk } -a \leq x \leq a \quad (3.29)$$

$$\psi_4(x) = A_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{ikx} + B_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad \text{untuk } a \leq x \leq b \quad (3.30)$$

$$\psi_5(x) = A_5 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} e^{iqx} + B_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} e^{-iqx}, \quad \text{untuk } x \geq b \quad (3.31)$$

dengan p , q , dan k adalah konstanta k pada persamaan (3.22) yang mana variabel-variabelnya telah disubstitusi sesuai dengan potensial yang berkaitan untuk masing-masing ruang.

$$p = \frac{\sqrt{(E + mc^2 - V_a + S_a)(E - mc^2 - V_a - S_a)}}{\hbar c}, \quad (3.32)$$

$$q = \frac{\sqrt{(E + mc^2 - V_b + S_b)(E - mc^2 - V_b - S_b)}}{\hbar c}, \quad (3.33)$$

$$k = \frac{\sqrt{(E + mc^2)(E - mc^2)}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{\hbar c}. \quad (3.34)$$

Dan α , β , dan γ , menurut persamaan (3.26) adalah

$$\alpha = \frac{\hbar c k}{(E + mc^2)}, \quad (3.35)$$

$$\beta = \frac{\hbar cq}{(E + mc^2 - V_b + S_b)}, \quad (3.36)$$

$$\gamma = \frac{\hbar cp}{(E + mc^2 - V_a + S_a)}. \quad (3.37)$$

3.2 Metode Matriks Transfer

Dalam beberapa tahun terakhir, kegiatan penelitian yang mengarah pada pengembangan perangkat optoelektronik berdasarkan struktur sumur kuantum mengalami peningkatan yang cukup signifikan. Mengingat kompleksitas dari fenomena kuantum, studi perangkat yang berkaitan dengan kuantum biasanya bergantung pada observasi atau penyelidikan secara numerik. Observasi secara numerik dilakukan untuk mensimulasikan kinerja perangkat yang dikembangkan pada komputer agar hasilnya sesuai dengan perangkat yang dikehendaki. Selain itu, observasi secara numerik juga berguna untuk lebih memahami sifat fisik perangkat baru yang dikembangkan. Oleh karena itu, sangat dibutuhkan pengetahuan dalam bidang komputasi numerik agar mampu mengimplementasikan masalah yang dihadapi dalam perangkat yang dikembangkan, ke dalam bentuk pemodelan pada komputer. Disamping itu, juga dibutuhkan metode sederhana yang mudah diterapkan dan relatif cepat, namun dapat memberikan hasil yang akurat.

Salah satu algoritma sederhana yang akurat dan cepat untuk menyelesaikan persamaan gelombang secara numerik adalah metode matriks transfer. Metode matriks transfer merupakan metode numerik umum yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan yang berkaitan dengan persamaan diferensial orde dua. Penyelesaian dengan metode ini dapat memberikan hasil

yang akurat hingga tiga digit dan tiga digit pertama ini dalam beberapa aplikasi sudah dianggap cukup untuk mewakili digit selanjutnya (Jonsson, 1990).

Sebelum memulai perhitungan dengan menggunakan metode matriks transfer, terlebih dahulu sistem atau potensial dibagi menjadi beberapa bagian. Oleh sebab itu, metode ini banyak diaplikasikan untuk sistem berlapis, seperti *superlattice* atau kristal fotonik serta material-material dalam bidang optik yang memiliki sistem multilayer. Selanjutnya, amplitudo dari dua solusi fundamental di kedua sisi potensial dihubungkan oleh matriks (Sánchez-Soto, 2012).

Langkah awal yang dilakukan dalam perhitungan dengan metode matriks transfer adalah menentukan solusi persamaan gelombang di masing-masing ruang. Setelah itu, menerapkan syarat kontinuitas untuk fungsi gelombang. Syarat kontinuitas fungsi gelombang memberikan pengertian bahwa fungsi gelombang antarruang beserta turunan pertamanya bernilai sama di posisi antar muka atau posisi syarat batas. Jadi, pada Gambar 3.1, fungsi gelombang $\psi(x)$ beserta turunan pertamanya $d\psi/dx$ di ruang I dan ruang II bernilai sama ketika di posisi $x = -b$.

$$\psi_1(-b) = \psi_2(-b),$$

dan turunannya,

$$\left. \frac{d\psi_1(x)}{d(x)} \right|_{x=-b} = \left. \frac{d\psi_2(x)}{d(x)} \right|_{x=-b}.$$

Demikian juga dengan fungsi gelombang $\psi(x)$ beserta turunan pertamanya $d\psi/dx$ di ruang II dan ruang III bernilai sama ketika $x = -a$. Fungsi gelombang $\psi(x)$ beserta turunan pertamanya $d\psi/dx$ di ruang III dan ruang IV bernilai sama ketika $x = a$, dan fungsi gelombang $\psi(x)$ beserta turunan pertamanya $d\psi/dx$ di

ruang IV dan ruang V bernilai sama ketika $x = b$. Setelah didapatkan hubungan antarruang, dilakukan penyusunan matriks transfer M sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_{12} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

untuk ruang I dan II dan matriks transfer T ,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}$$

untuk seluruh ruang yang dalam hal ini adalah lima ruang, dengan T adalah matriks 2×2 dan diperoleh dari hasil perkalian matriks M_{12} , M_{23} , M_{34} , dan M_{45} .

Keadaan terikat partikel dalam sumur potensial ganda ditunjukkan dengan ketentuan bahwa $A_1 = B_5 = 0$. Hal ini didasarkan pada tafsiran suku eksponensial pada fungsi gelombang yang menyatakan bahwa eksponen berpangkat positif, seperti e^{ikx} ditafsirkan sebagai gelombang bidang yang merambat ke kanan, sedangkan eksponen berpangkat negatif, seperti e^{-ikx} ditafsirkan sebagai gelombang bidang yang merambat ke kiri. Dalam kondisi partikel yang terikat dalam sumur potensial, tidak ada partikel yang merambat dari arah kiri ke kanan di ruang I, sehingga $A_1 = 0$. Sedangkan $B_5 = 0$ didasarkan pada anggapan bahwa tidak akan ada partikel yang merambat dari kanan ke kiri di ruang V, karena partikel terikat dalam sumur.

3.2.1 Matriks Transfer Persamaan Klein-Gordon

Fungsi gelombang persamaan Klein-Gordon untuk masing-masing ruang dalam sumur potensial persegi ganda simetri telah didapatkan. Langkah selanjutnya adalah menerapkan syarat kontinuitas fungsi gelombang. Fungsi gelombang persamaan Klein-Gordon di ruang I yang ditunjukkan oleh

persamaan (3.6) akan bernilai sama dengan solusi persamaan gelombang di ruang II yang ditunjukkan oleh (3.7), ketika berada di titik $x = -b$.

$$\begin{aligned}\psi_1(-b) &= \psi_2(-b) \\ A_1 e^{-iqb} + B_1 e^{iqb} &= A_2 e^{-ikb} + B_2 e^{ikb}\end{aligned}\quad (3.38)$$

dan turunan pertamanya,

$$iqA_1 e^{-iqb} - iqB_1 e^{iqb} = ikA_2 e^{-ikb} - ikB_2 e^{ikb}.\quad (3.39)$$

Mengalikan persamaan (3.38) dengan iq , kemudian melakukan operasi penjumlahan dan pengurangan dengan persamaan (3.39), akan didapatkan hasil berupa persamaan koefisien A_1 dan B_1 sebagai berikut.

$$A_1 = A_2 \frac{(q+k)}{2q} e^{i(q-k)b} + B_2 \frac{(q-k)}{2q} e^{i(q+k)b}$$

dan,

$$B_1 = A_2 \frac{(q-k)}{2q} e^{-i(q+k)b} + B_2 \frac{(q+k)}{2q} e^{-i(q-k)b}$$

Koefisien A_1 dan B_1 tersebut dapat disusun dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(q+k)}{2q} e^{i(q-k)b} & \frac{(q-k)}{2q} e^{i(q+k)b} \\ \frac{(q-k)}{2q} e^{-i(q+k)b} & \frac{(q+k)}{2q} e^{-i(q-k)b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{pmatrix} \frac{(k+q)}{2q} e^{-i(k-q)b} & -\frac{(k-q)}{2q} e^{i(q+k)b} \\ -\frac{(k-q)}{2q} e^{-i(k+q)b} & \frac{(k+q)}{2q} e^{i(k-q)b} \end{pmatrix} = M_{12}.\quad (3.40)$$

Matriks penghubung yang disimbolkan dengan M_{12} inilah yang disebut sebagai matriks transfer untuk fungsi gelombang di ruang I dan II.

Matriks transfer penghubung ruang II dan III, III dan IV, serta IV dan V disimbolkan dengan M_{23} , M_{34} , serta M_{45} diperoleh dengan cara yang sama dengan perhitungan M_{12} . Perhitungan matriks transfer M_{23} , M_{34} , serta M_{45} yang dijabarkan dalam lampiran B menghasilkan persamaan berikut.

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-p)a} & \frac{(k-p)}{2k} e^{i(k+p)a} \\ \frac{(k-p)}{2k} e^{-i(k+p)a} & \frac{(k+p)}{2k} e^{-i(k-p)a} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{(k+p)}{2p} e^{i(k-p)a} & -\frac{(k-p)}{2p} e^{-i(k+p)a} \\ -\frac{(k-p)}{2p} e^{i(k+p)a} & \frac{(k+p)}{2p} e^{-i(k-p)a} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} & \frac{(k-q)}{2k} e^{-i(k+q)b} \\ \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} & \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-q)b} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Selain matriks transfer antarruang, juga dilakukan perhitungan matriks transfer untuk seluruh ruang. Matriks transfer untuk seluruh ruang merupakan matriks berukuran 2×2 yang disimbolkan dengan T diperoleh dari hasil perkalian M_{12} , M_{23} , M_{34} , dan M_{45} . Dalam persamaan, penulisan matriks T adalah sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

3.2.2 Matriks Transfer Persamaan Dirac

Solusi persamaan Dirac di masing-masing ruang potensial telah ditentukan dan secara berturut-turut dituliskan dalam persamaan (3.27) sampai dengan persamaan (3.31). Penerapan syarat kontinuitas untuk solusi persamaan Dirac dalam ruang I dan II memberikan

$$\psi_1(-b) = \psi_2(-b),$$

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} e^{-iqb} + B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} e^{iqb} = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{-ikb} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} e^{ikb},$$

$$A_1 \begin{pmatrix} e^{-iqb} \\ \beta e^{-iqb} \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} e^{iqb} \\ -\beta e^{iqb} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} e^{-ikb} \\ \alpha e^{-ikb} \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} e^{ikb} \\ -\alpha e^{ikb} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{-iqb} & e^{iqb} \\ \beta e^{-iqb} & -\beta e^{iqb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ikb} & e^{ikb} \\ \alpha e^{-ikb} & -\alpha e^{ikb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Adapun syarat kontinuitas untuk $\psi_2(x)$ dan $\psi_3(x)$ dapat diterapkan ketika $x = -a$, untuk $\psi_3(x)$ dan $\psi_4(x)$ dapat diterapkan ketika $x = a$, dan untuk $\psi_4(x)$ dan $\psi_5(x)$ dapat diterapkan ketika $x = b$. Dengan menerapkan langkah yang sama dengan persamaan (3.45), maka hubungan antarpersamaan gelombang pada kondisi batas $x = -a$, $x = a$, dan $x = b$ secara berturut-turut dituliskan oleh persamaan berikut.

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ \alpha e^{-ika} & -\alpha e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ipa} & e^{ipa} \\ \gamma e^{-ipa} & -\gamma e^{ipa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{ipa} & e^{-ipa} \\ \gamma e^{ipa} & -\gamma e^{-ipa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ \alpha e^{ika} & -\alpha e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{ikb} & e^{-ikb} \\ \alpha e^{ikb} & -\alpha e^{-ikb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iqb} & e^{-iqb} \\ \beta e^{iqb} & -\beta e^{-iqb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}.$$

Matriks transfer untuk persamaan gelombang di ruang I dan ruang II dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_{12} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Untuk mendapatkan bentuk persamaan seperti persamaan (3.46), maka matriks 2×2 pada ruas kiri harus bernilai 1. Invers matriks dari matriks 2×2 pada ruas kiri tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} e^{-iqb} & e^{iqb} \\ \beta e^{-iqb} & -\beta e^{iqb} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{iqb}}{2} & \frac{e^{iqb}}{2\beta} \\ \frac{e^{-iqb}}{2} & -\frac{e^{-iqb}}{2\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Selanjutnya, mengalikan persamaan (3.45) dari kiri, baik ruas kanan maupun ruas kiri, dengan invers matriks pada persamaan (3.47) akan menghasilkan

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} & -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \\ -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{-ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

dengan

$$\begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} & -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \\ -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{-ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix} = M_{12}. \quad (3.49)$$

Matriks transfer M_{23} untuk ruang II dan III, M_{34} untuk ruang III dan IV, serta M_{45} untuk ruang IV dan V, juga diperoleh dengan cara yang sama dengan matriks transfer M_{12} untuk ruang I dan II. Sebagaimana dijabarkan dalam lampiran C, matriks transfer antarruang tersebut adalah sebagai berikut.

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k-p)} & \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k+p)} \\ \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k+p)} & \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k-p)} & -\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k+p)} \\ -\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k+p)} & \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} & \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k+q)} \\ \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

Adapun matriks transfer untuk seluruh ruang dapat ditentukan dengan cara mengalikan seluruh matriks transfer antarruang sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_{12}M_{23}M_{34}M_{45} \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Jika $M_{12}M_{23}M_{34}M_{45} = T$, maka

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

3.3 Kondisi Fungsi Gelombang Keadaan Terikat

Matriks transfer untuk seluruh ruang dalam sumur potensial persegi ganda simetri, baik dalam tinjauan persamaan Klein-Gordon maupun persamaan Dirac ditunjukkan oleh persamaan berikut

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}.$$

Eigenvalue dari fungsi gelombang keadaan terikat dalam sumur potensial persegi ganda simetri dapat diperoleh dengan mengatur $A_1 = B_5 = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} A_1 &= T_{11}A_5 + T_{12}B_5 \\ 0 &= T_{11}A_5 + T_{12}(0) \\ 0 &= T_{11}A_5 + 0 \\ 0 &= T_{11}A_5. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Persamaan (3.56) telah menunjukkan bahwa $T_{11} = 0$. Sedangkan A_5 tidak bernilai 0 karena A_5 merupakan koefisien atau amplitudo dari gelombang bidang yang merambat ke kanan dan dalam keadaan terikat gelombang bidang yang merambat ke kanan ini masih dimungkinkan memiliki nilai, $A_5 \neq 0$.

Perhitungan T_{11} untuk menentukan kondisi *eigenvalue* dari sumur potensial ganda dengan persamaan Klein-Gordon dijabarkan dalam lampiran B memberikan hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned}
T_{11} = & \frac{e^{2iqb}}{16k^2pq} \{ (k+p)^2 [(k+q)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (k-q)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \\
& + (k-p)^2 [(k-q)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (k+q)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \\
& + 2(k^2 - q^2)(k^2 - p^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \} = 0, \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Dengan komponen p , q dan k merupakan variabel yang telah dituliskan dalam (3.11) hingga (3.13). Adapun perhitungan T_{11} dari persamaan Dirac dijabarkan dalam lampiran C memberikan hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
T_{11} = & \frac{e^{2iqb}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{ (\alpha+\gamma)^2 [(\alpha+\beta)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (\alpha-\beta)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \\
& + (\alpha-\gamma)^2 [(\alpha-\beta)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (\alpha+\beta)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \\
& + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \} = 0 \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Dengan komponen p , q , k , α , β dan γ merupakan variabel yang telah ditentukan sebagaimana dalam persamaan (3.32) hingga (3.37).

3.4 Daerah Energi untuk Fungsi Gelombang Keadaan Terikat

Daerah energi (*energy range*) untuk fungsi gelombang keadaan terikat bergantung pada tiga besaran, yaitu $V_b - S_b$ dan mc^2 . Ini didasarkan pada persamaan vektor gelombang k dan q berikut,

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\sqrt{(E + mc^2)(E - mc^2)}}{\hbar c} = \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{\hbar c} \\
q &= \frac{\sqrt{(E - V_b + mc^2 + S_b)(E - V_b - mc^2 - S_b)}}{\hbar c}.
\end{aligned}$$

Adapun besaran $V_a - S_a$ yang muncul dalam persamaan vektor gelombang p berikut, tidak berpengaruh terhadap penentuan daerah energi untuk fungsi gelombang keadaan terikat dalam sumur potensial karena V_a dan S_a merupakan potensial yang berada di tengah-tengah dan membagi sumur potensial serta nilainya dapat divariasikan.

$$p = \frac{\sqrt{(E + mc^2 - V_a + S_a)(E - mc^2 - V_a - S_a)}}{\hbar c},$$

Persamaan vektor gelombang k membawa pada persamaan energi sebagai berikut

$$E = \pm mc^2$$

yang memperlihatkan bahwa spektrum energi pada partikel terdiri dari dua bagian, yaitu bagian positif dan bagian negatif. Bagian positif dimulai dari $E = +mc^2$ hingga positif tak berhingga $+\infty$, sedangkan bagian negatif dimulai dari $E = -mc^2$ hingga negatif tak berhingga $-\infty$. Sehingga, dari sini terlihat adanya jurang pemisah (gap) dengan lebar $2mc^2$ antara dua bagian energi eigen. Adapun persamaan vektor gelombang q mengarahkan nilai E pada persamaan batas atas (E_U) dan batas bawah (E_L) untuk daerah energi fungsi gelombang keadaan terikat yang ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_U &= V_b + S_b + mc^2 \\ E_L &= V_b - S_b - mc^2. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Selanjutnya, bergantung pada besaran-besaran $V_b - S_b$ dan mc^2 tersebut, sifat vektor gelombang k dan q berubah-ubah dalam tiga kasus, yaitu

- (a) $V_b - S_b \geq 2mc^2$,
- (b) $0 \leq V_b - S_b < 2mc^2$,

$$(c) V_b - S_b < 0.$$

Vektor gelombang k merupakan vektor gelombang untuk fungsi gelombang yang berada di ruang II dan IV, bagian dalam sumur potensial, sedangkan q merupakan vektor gelombang untuk fungsi gelombang yang berada di ruang I dan V, bagian potensial pembatas sumur potensial. Keadaan terikat partikel dalam sumur potensial akan muncul ketika k berupa bilangan real dan q berupa imajiner, karena hal tersebut mengarahkan pada adanya gelombang bidang pada ruang II dan IV serta melenyapkan atau meniadakan gelombang pada ruang I dan V. Ketika keadaan tersebut terpenuhi, keadaan terikat partikel akan muncul tanpa memperhatikan apakah vektor gelombang p dalam ruang III bernilai real atau imajiner.

Daerah energi fungsi gelombang keadaan terikat untuk kasus (a), (b), dan (c) kemudian berturut-turut diberikan oleh

$$E_L < E < E_U \quad (3.59)$$

$$mc^2 < E < E_U \quad (3.60)$$

$$mc^2 < E < E_U \text{ atau } E_L < E < -mc^2. \quad (3.61)$$

Munculnya kondisi energi negatif dari $E_L < E < -mc^2$ pada persamaan (3.61), mengekspresikan keadaan terikat untuk antipartikel.

Pada penelitian ini, terdapat tiga kasus khusus yang digunakan sebagai model perhitungan *eigenvalue* keadaan terikat dan dijabarkan sebagai berikut:

- 1) Sumur potensial persegi ganda vektor atau VDSP (*Vector Double Square-well Potential*) yaitu ketika $S_b = 0$ dengan batas daerah energi keadaan terikat sebagai berikut,

$$E_L < E < E_U$$

$$V_b - mc^2 < E < V_b + mc^2 \quad (3.62)$$

- 2) Sumur potensial persegi ganda skalar atau SDSP (*Scalar Double Square-well Potential*) yaitu ketika $V_b = 0$, dan batas daerah energi kondisi keadaan terikat sebagai berikut,

$$mc^2 < E < E_U$$

$$mc^2 < E < S_b + mc^2 \quad (3.63)$$

- 3) Sumur potensial persegi ganda vektor dan skalar atau ESDP (*Equal Scalar and Vector Double Square-well Potentials*) yaitu ketika potensial skalar sama dengan potensial vektor, baik potensial penghalang ($S_a = V_a$) maupun potensial batas ($S_b = V_b$). Batas daerah energi untuk keadaan terikat dalam kasus EDSP ini adalah sebagai berikut

$$mc^2 < E < E_U$$

$$mc^2 < E < 2S_b + mc^2. \quad (3.64)$$

BAB IV ENERGI KEADAAN TERIKAT

Persamaan kondisi *eigenvalue* untuk fungsi gelombang keadaan terikat yang didapatkan dari hasil perkalian matriks transfer antar ruang dari persamaan Klein-Gordon adalah

$$\begin{aligned}
 T_{11} = & \frac{e^{2iqb}}{16k^2pq} \{ (k+p)^2 [(k+q)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (k-q)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \\
 & + (k-p)^2 [(k-q)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (k+q)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \\
 & + 2(k^2 - q^2)(k^2 - p^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \} = 0, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

dan dari persamaan Dirac diperoleh

$$\begin{aligned}
 T_{11} = & \frac{e^{2iqb}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{ (\alpha+\gamma)^2 [(\alpha+\beta)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (\alpha-\beta)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \\
 & + (\alpha-\gamma)^2 [(\alpha-\beta)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (\alpha+\beta)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \\
 & + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \}. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.1) dan (4.2) merupakan jenis persamaan yang sangat kompleks. Jika dilakukan penurunan secara analitik, akan menghasilkan persamaan sebagaimana dijabarkan dalam lampiran D, yang mana hasil dari penurunan tersebut belum menyederhanakan bentuk persamaan melainkan hanya merubah ke bentuk trigonometri yang juga memiliki bentuk sangat kompleks. Persamaan (4.1) dan (4.2) kemudian diselesaikan melalui pemrograman dengan menggunakan *software* Mathematica untuk menentukan nilai numerik *eigenvalue*. Nilai *eigenvalue* E yang diperoleh dari penyelesaian menggunakan pemrograman kemudian dituliskan dengan notasi E_n dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ merupakan indeks yang menunjukkan adanya level energi dari fungsi gelombang keadaan terikat.

Nilai dari variabel massa m , konstanta Planck \hbar , dan kecepatan cahaya c yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan (4.1) dan (4.2) diadopsi dari nilai dalam satuan atom, yaitu $m = \hbar = 1$ dan $c = 137,036$.

4.1 Model VDSP (*Vector Double Square-well Potential*)

Kasus khusus pertama untuk kondisi keadaan terikat yang secara tidak langsung juga merupakan model perhitungan nilai *eigenvalue* yang pertama adalah VDSP (*Vector Double Square-well Potential*). Pada model perhitungan yang pertama ini, jenis potensial yang digunakan hanya potensial vektor saja. Sedangkan potensial skalar, baik S_a maupun S_b bernilai sama dengan 0. Adapun tetapan nilai yang digunakan untuk variabel-variabel lain yang terlibat adalah $V_b = 50000$, $a = 0,01$, dan $b = 0,02$. Sementara itu, nilai potensial penghalang pusat V_a divariasikan mulai dari 0 sampai dengan 50000 dengan beda variasi 10000.

Daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk kasus VDSP telah ditentukan, yaitu berada di antara batas atas (E_U) dan batas bawah (E_L).

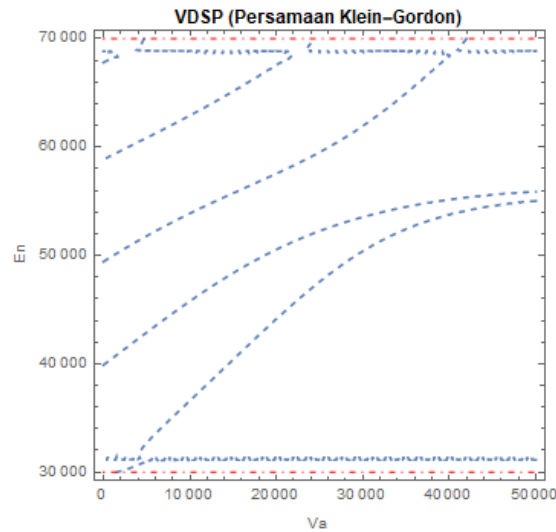
$$E_L < E_n < E_U$$

$$V_b - S_b - mc^2 < E_n < V_b + S_b + mc^2$$

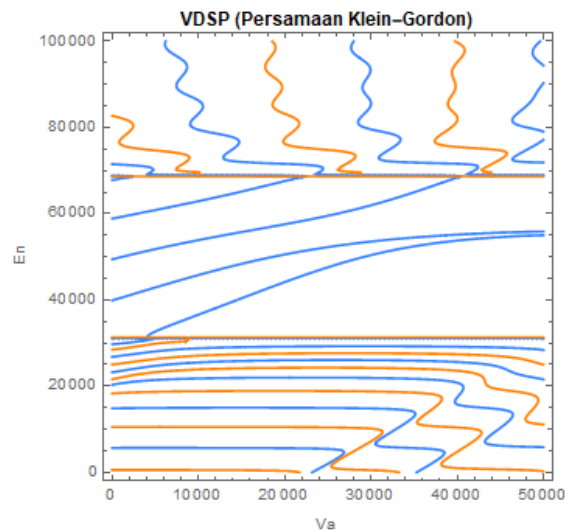
$$50000 - 0 - 137,036^2 < E_n < 50000 + 0 + 137,036^2$$

$$31221,134 < E_n < 68778,865 \quad (4.3)$$

Plot hasil perhitungan nilai *eigenvalue* E_n dari fungsi gelombang keadaan terikat pada kasus VDSP dengan persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac ditunjukkan oleh Gambar 4.1 dan Gambar 4.3.



Gambar 4.1 Plot *Eigenvalue* E_n Model VDSP dari Persamaan Klein-Gordon



Gambar 4.2 Plot *Eigenvalue* E_n Model VDSP dari Persamaan Klein-Gordon pada Rentang 0 – 100000

Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 merupakan visualisasi dari persamaan (4.1) dalam bentuk dua dimensi untuk model VDSP dari persamaan Klein-Gordon yang diperoleh melalui pemrograman dengan menggunakan *software* Mathematica. Keduanya merupakan plot *eigenvalue* E_n sebagai fungsi V_a , dengan nilai V_a yang divariasikan mulai dari 0, 10000, 20000, 30000, 40000, dan 50000. Kurva berwarna biru pada Gambar 4.1 menunjukkan solusi dari persamaan (4.1) sekaligus representasi dari *eigenvalue* keadaan terikat partikel, dengan ketentuan batas atas dan batas bawah daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur

potensial persegi ganda untuk kasus VDSP telah ditunjukkan oleh persamaan (4.3). Satu variasi nilai V_a tidak hanya memiliki satu *eigenvalue* saja, melainkan terdapat beberapa nilai yang berupa tingkatan-tingkatan atau disebut level energi. Adanya level energi inilah yang menyebabkan notasi *eigenvalue* yang sebelumnya dinyatakan sebagai E menjadi dituliskan dengan notasi E_n , dengan n merupakan indeks yang menunjukkan level energi dan mempunyai nilai $n = 1, 2, 3, \dots$ dan seterusnya. Salah satu contohnya adalah pada *eigenvalue* ketika $V_a = 10000$. Dari titik $V_a = 10000$, jika ditarik garis lurus ke atas, maka garis tersebut akan melewati beberapa kurva biru (garis putus-putus berwarna biru). Ketika garis tersebut bertemu dengan kurva biru pertama, maka itulah yang disebut sebagai *eigenvalue* pertama. Ketika melewati kurva biru kedua, maka itulah yang disebut sebagai *eigenvalue* kedua, dan seterusnya. Kurva biru pertama yang dilewati oleh garis yang ditarik dari titik $V_a = 10000$ tersebut menunjukkan bahwa n dalam E_n sama dengan 1, kurva biru kedua menunjukkan bahwa n dalam E_n sama dengan 2, begitu juga dengan kurva-kurva selanjutnya yang dilewati oleh garis yang ditarik dari titik $V_a = 10000$ tadi. Jadi, dari Gambar 4.1 dapat diketahui bahwa nilai *eigenvalue* untuk $V_a = 10000$ terdiri dari lima tingkat yang artinya terdapat 5 level energi dan $n = 1 - 5$.

Gambar 4.2 merupakan plot *eigenvalue* yang memperlihatkan rentang nilai *eigenvalue* dengan peninjauan yang lebih lebar, yaitu mulai 0 hingga 100000. Berbeda dengan Gambar 4.1, pada Gambar 4.2 terdapat dua buah kurva yaitu kurva berwarna biru dan kurva berwarna oranye, yang mana keduanya menunjukkan solusi dari persamaan (4.1). Perbedaannya adalah, kurva berwarna biru menunjukkan bagian real dari solusi persamaan (4.1), sedangkan kurva

orange merupakan solusi bagian imajiner. Pada Gambar 4.2, ketika nilai energi berada di antara 31221,134 dan 68778,865, kurva yang muncul hanya kurva biru atau kurva real saja. Artinya, rentang tersebut merupakan rentang energi untuk kondisi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda. Sedangkan ketika $E < 31221,134$ atau $E > 68778,865$, solusi yang muncul terdiri dari bilangan real dan imajiner.

Adapun untuk nilai numerik dari *eigenvalue* E_n berdasarkan Gambar 4.1 ditunjukkan oleh tabel berikut.

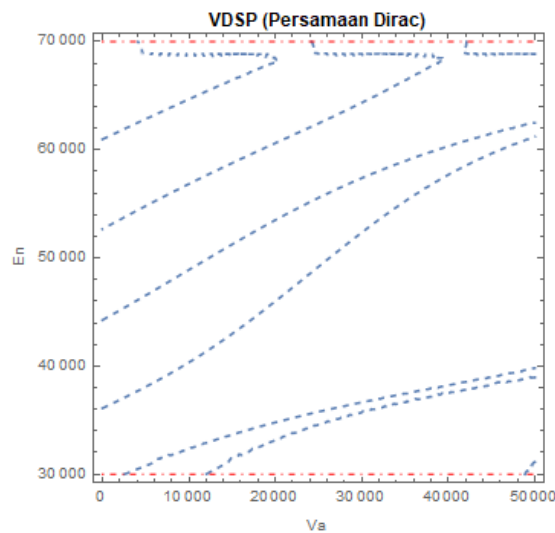
Tabel 4.1 Nilai *Eigenvalue* E_n Model VDSP dari Persamaan Klein-Gordon

V_a	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0	31226	40587	49573	59192	—	—
10000	31357	36587	46192	52896	62982	—
20000	31493	44684	50856	56523	67245	68239
30000	31498	50855	53824	62447	—	—
40000	31501	54167	55528	67952	—	—
50000	31551	54672	56229	—	—	—

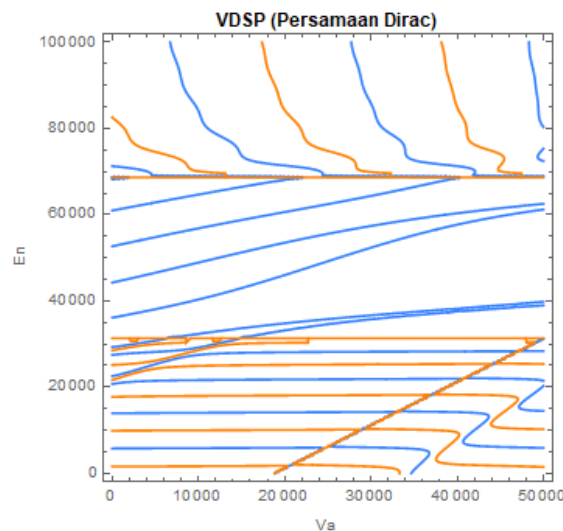
Tabel 4.1 di atas merupakan tabel yang menunjukkan nilai numerik E_n berdasarkan Gambar 4.1. Kolom paling kiri merupakan kolom nilai V_a yang divariasikan sebagaimana sumbu x dalam Gambar 4.1. Nilai *eigenvalue* dikelompokkan berdasarkan indeks n atau berdasarkan level energinya. Pada saat $V_a = 0$ yang artinya sumur potensial persegi ganda berubah menjadi sumur potensial tunggal, nilai *eigenvalue* berturut-turut dari level yang paling dasar adalah 31226, 40587, 49573, dan 59192. Terdapat empat nilai *eigenvalue* yang artinya terdapat empat level energi yang dimiliki oleh partikel dalam sumur dengan nilai-nilai yang masih berada dalam rentang 31221,134 dan 68778,865. Begitu juga dengan *eigenvalue* untuk $V_a = 10000$ hingga $V_a = 50000$, nilai

eigenvalue atau level energi tidak kurang dari 31221,134 dan tidak lebih dari 68778,865.

Plot *eigenvalue* dengan model VDSP berikutnya ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 4.3 Plot *Eigenvalue* E_n Model VDSP dari Persamaan Dirac



Gambar 4.4 Plot *Eigenvalue* E_n Model VDSP dari Persamaan Dirac pada Rentang 0 – 100000

Gambar 4.3 dan Gambar 4.4 merupakan visualisasi dari persamaan (4.2), yaitu persamaan kondisi *eigenvalue* dari persamaan Dirac, dalam bentuk dua dimensi untuk model VDSP. Keduanya merupakan plot *eigenvalue* E_n sebagai fungsi V_a yang diperoleh melalui pemrograman dengan menggunakan *software*

Mathematica, dengan nilai V_a yang divariasikan mulai dari 0, 10000, 20000, 30000, 40000, dan 50000. Kurva berwarna biru pada Gambar 4.3 menunjukkan solusi dari persamaan (4.2) sekaligus representasi dari *eigenvalue* keadaan terikat partikel. Batas atas dan batas bawah daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk kasus VDSP ditunjukkan oleh garis horizontal berwarna merah pada Gambar 4.3. Sedangkan penentuan batas atas dan batas bawah tersebut telah ditunjukkan oleh persamaan (4.3). Persamaan (4.2) diselesaikan dengan mensubstitusikan nilai dari variasi V_a ke dalam persamaan (4.2), sehingga dihasilkan solusi berupa plot *eigenvalue* dengan satu nilai V_a memiliki beberapa nilai *eigenvalue* yang nilainya bertingkat-tingkat atau disebut level energi. Jumlah *eigenvalue* untuk setiap V_a berbeda-beda, yang dapat dilihat dari berapa banyak kurva biru yang dilalui oleh garis yang ditarik dari titik V_a tersebut.

Sementara itu, Gambar 4.4 memperlihatkan plot *eigenvalue* sebagai fungsi V_a untuk model VDSP dari persamaan Dirac dengan tinjauan rentang E_n yang lebih panjang, yaitu mulai 0 hingga 100000. Dua buah kurva yaitu kurva berwarna biru dan kurva berwarna oranye pada Gambar 4.4 berturut-turut menunjukkan solusi bagian real dan bagian imajiner dari persamaan (4.2). Tampak pada bagian tengah Gambar 4.4, ketika nilai energi berada di antara 31221,134 dan 68778,865, kurva yang muncul hanya kurva biru atau kurva real saja. Artinya, kondisi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda berada dalam rentang tersebut, sebagaimana persamaan (4.3). Sedangkan di luar batas tersebut, bukan merupakan daerah energi keadaan terikat partikel karena solusi yang muncul terdiri dari bilangan real dan imajiner.

Selanjutnya, nilai numerik dari *eigenvalue* E_n berdasarkan Gambar 4.3 ditunjukkan oleh tabel berikut.

Tabel 4.2 Nilai *Eigenvalue* E_n Model VDSP dari Persamaan Dirac

V_a	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0	36094	44258	52673	60979	68268	–
10000	32331	40333	48902	56852	64693	–
20000	33131	34790	45998	53513	60637	68138
30000	35701	36662	52358	57401	64378	–
40000	37482	38247	57698	60351	68482	–
50000	38955	39838	61201	62564	–	–

Kolom paling kiri pada Tabel 4.2 merupakan kolom yang berisi nilai V_a yang divariasikan sebagaimana sumbu x dalam Gambar 4.3. Sedangkan nilai E_n diperlihatkan dalam sumbu y . Pada saat $V_a = 0$, sumur potensial persegi ganda berubah menjadi sumur potensial tunggal karena tidak terdapat potensial penghalang di dalamnya. Jumlah *eigenvalue* pada keadaan tersebut adalah lima, sehingga $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Nilai tersebut berturut-turut dari level yang paling dasar adalah 36094, 44258, 52673, 60979, dan 68268. Jika diperhatikan secara keseluruhan, nilai numerik *eigenvalue* dalam Tabel 4.2 baik untuk $V_a = 0$, $V_a = 10000$, hingga $V_a = 50000$, berada di antara 31221,134 dan 68778,865. Hal ini sesuai dengan persamaan (4.3) tentang batas bawah dan batas atas energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda simetri untuk model VDSP.

4.2 Model SDSP (*Scalar Double Square-well Potential*)

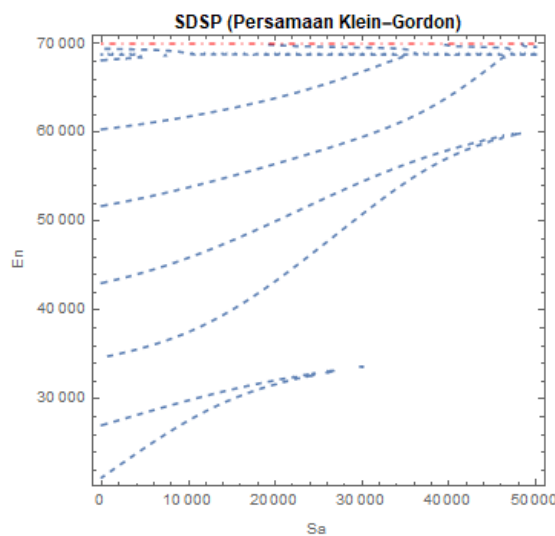
Model perhitungan nilai *eigenvalue* yang kedua adalah SDSP (*Scalar Double Square-well Potential*). Berbeda dengan model perhitungan sebelumnya, pada model perhitungan yang kedua ini, jenis potensial yang digunakan hanya potensial skalar saja. Sedangkan potensial vektor, baik V_a maupun V_b bernilai 0

($V_a = V_b = 0$). Adapun tetapan nilai yang digunakan untuk variabel-variabel lain yang terlibat adalah $S_b = 50000$, $a = 0,01$, dan $b = 0,02$. Sementara itu, nilai potensial penghalang pusat S_a divariasikan mulai dari 0 sampai dengan 50000 dengan beda variasi 10000.

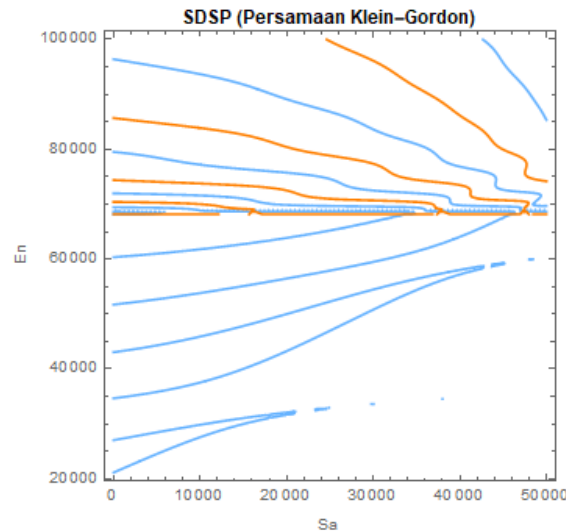
Daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk kasus SDSP telah ditentukan, yaitu berada di antara batas atas dan batas bawah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 mc^2 &< E < E_U \\
 mc^2 &< E < S_b + mc^2 \\
 137,036^2 &< E_n < 50000 + 137,036^2 \\
 18778,865 &< E_n < 68778,865
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Plot hasil perhitungan nilai *eigenvalue* E_n dari fungsi gelombang keadaan terikat pada kasus SDSP dengan persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac ditunjukkan oleh Gambar 4.5 dan Gambar 4.7.



Gambar 4.5 Plot *Eigenvalue* E_n Model SDSP dari Persamaan Klein-Gordon



Gambar 4.6 Plot *Eigenvalue* E_n Model SDSP dari Persamaan Klein-Gordon pada Rentang 0 – 100000

Seperti halnya Gambar 4.1 dan Gambar 4.2, Gambar 4.5 dan Gambar 4.6 juga merupakan visualisasi dari persamaan (4.1) dalam bentuk dua dimensi yang diperoleh melalui pemrograman dengan menggunakan *software* Mathematica. Keduanya merupakan plot *eigenvalue* E_n sebagai fungsi S_a dari model SDSP, dengan nilai S_a yang divariasikan mulai dari 0, 10000, 20000, 30000, 40000, dan 50000. Kurva berwarna biru pada Gambar 4.5 menunjukkan solusi dari persamaan (4.1) sekaligus representasi dari *eigenvalue* keadaan terikat partikel, dengan ketentuan batas atas dan batas bawah daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk kasus SDSP telah ditunjukkan oleh persamaan (4.4). Untuk satu variasi nilai S_a tidak hanya memiliki satu *eigenvalue* saja, melainkan terdapat beberapa nilai yang mana nilai tersebut tersusun bertingkat-tingkat atau disebut level energi. Salah satu contohnya adalah *eigenvalue* ketika $S_a = 10000$. Jika ditarik garis lurus ke atas dari titik $S_a = 10000$, maka garis tersebut akan melewati beberapa kurva biru (garis putus-putus berwarna biru). Titik pertemuan atau perpotongan garis tersebut dengan kurva biru pertama itulah yang disebut sebagai *eigenvalue* pertama, E_1 . Ketika

dilanjutkan kembali, maka garis tadi akan berpotongan dengan kurva biru kedua yang kemudian disebut sebagai *eigenvalue* kedua, E_2 , dan seterusnya. Jadi, dari Gambar 4.5 tersebut dapat diketahui bahwa nilai *eigenvalue* untuk $S_a = 10000$ terdiri dari 6 tingkat yang artinya terdapat 6 level energi dan $n = 1 - 6$.

Pada Gambar 4.6, persamaan kondisi *eigenvalue* (persamaan (4.1)) diplot dengan tinjauan rentang nilai E_n mulai dari 0 hingga 100000. Hasilnya, pada plot *eigenvalue* tersebut terdapat dua buah kurva yaitu kurva berwarna biru dan kurva berwarna oranye. Perbedaan dari keduanya adalah, kurva berwarna biru menunjukkan solusi bagian real dari persamaan (4.1), sedangkan kurva oranye merupakan solusi bagian imajinernya. Pada Gambar 4.6, tampak bahwa ketika nilai energi berada di antara 18778,865 dan 68778,865, kurva yang muncul hanya kurva biru atau kurva real saja. Artinya, daerah tersebut merupakan daerah energi untuk kondisi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda. Sedangkan ketika $E < 18778,865$ atau $E > 68778,865$, solusi yang muncul terdiri dari bilangan real dan imajiner, yang menunjukkan solusi lengkap dari persamaan (4.1).

Adapun nilai numerik dari *eigenvalue* E_n berdasarkan Gambar 4.5 ditunjukkan oleh tabel berikut.

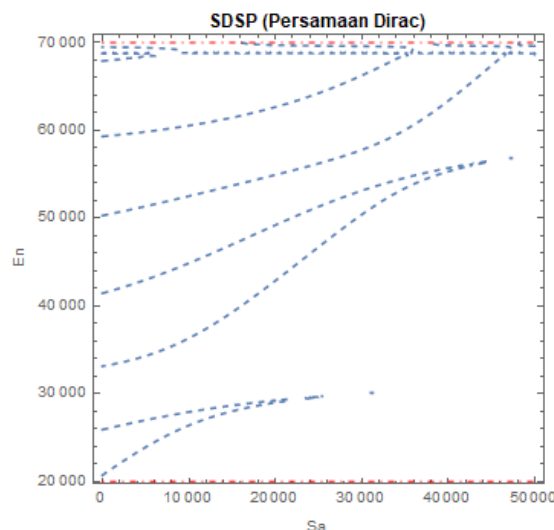
Tabel 4.3 Nilai *Eigenvalue* E_n Model SDSP dari Persamaan Klein-Gordon

S_a	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0	21615	26629	35072	42664	52157	60251
10000	27138	29387	37128	45592	53539	62156
20000	31039	31965	43697	50593	56118	64398
30000	32830	33178	50256	55087	59910	66464
40000	34552	34985	56982	58365	—	—
50000	34729	35591	60087	60256	—	—

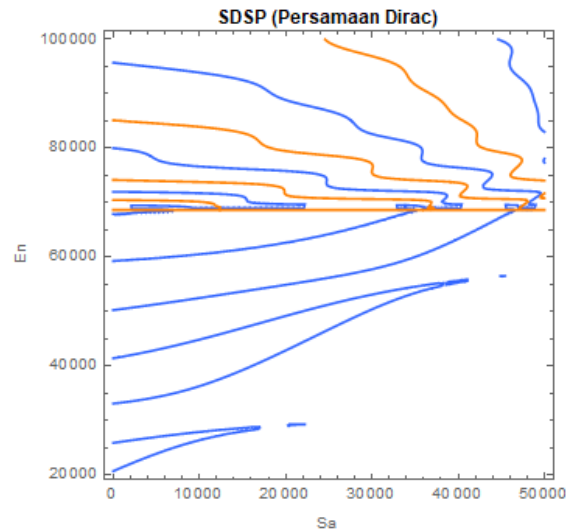
Nilai numerik dari E_n pada Tabel 4.3 diperoleh dari titik-titik perpotongan garis-garis yang ditarik dari setiap titik S_a pada sumbu horizontal, yaitu 0, 10000,

20000, 30000, 40000 dan 50000, dengan kurva berwarna biru. Perpotongan garis vertikal yang terbentuk tadi dengan kurva biru pertama dituliskan sebagai E_n pertama dengan $n = 1$. Kolom paling kiri pada Tabel 4.3 merupakan kolom nilai S_a yang divariasikan sebagaimana sumbu x dalam Gambar 4.5. Sedangkan nilai E_n diperlihatkan dalam sumbu y dan dalam Tabel 4.3 dituliskan sesuai dengan tingkat berapa status energi tersebut. Pada saat $S_a = 10000$, jumlah *eigenvalue* adalah enam, sehingga $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Nilai tersebut berturut-turut dari level yang paling dasar adalah 27138, 29387, 37128, 45592, 53539, dan 62156. Jika diperhatikan secara keseluruhan, nilai numerik *eigenvalue* dalam Tabel 4.3 baik untuk $S_a = 0$, $S_a = 10000$, hingga $S_a = 50000$, berada di antara 18778,865 dan 68778,865. Hal ini sesuai dengan persamaan (4.4) tentang batas bawah dan batas atas energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda simetri untuk model SDSP.

Plot selanjutnya dari model SDSP adalah *eigenvalue* E_n dari persamaan Dirac yang ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 4.7 Plot *Eigenvalue* E_n Model SDSP dari Persamaan Dirac



Gambar 4.8 Plot *Eigenvalue* E_n Model SDSP dari Persamaan Dirac pada Rentang 0 – 100000

Gambar 4.7 dan Gambar 4.8 merupakan visualisasi dari persamaan (4.2), yaitu persamaan kondisi *eigenvalue* dari persamaan Dirac dalam bentuk dua dimensi untuk model SDSP. Keduanya merupakan plot *eigenvalue* E_n sebagai fungsi S_a yang diperoleh melalui pemrograman dengan menggunakan *software* Mathematica, dengan nilai S_a yang divariasikan mulai dari 0, 10000, 20000, 30000, 40000, dan 50000. Kurva berwarna biru pada Gambar 4.7 menunjukkan solusi dari persamaan (4.2) sekaligus representasi dari *eigenvalue* keadaan terikat partikel. Penentuan batas atas dan batas bawah dari persamaan kondisi keadaan terikat partikel tersebut ditentukan melalui perhitungan yang dijabarkan pada persamaan (4.4). Kemudian, dalam Gambar 4.7, batas atas dan batas bawah daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk kasus VDSP ditunjukkan oleh garis horizontal berwarna merah pada bagian atas dan bawah gambar. Persamaan (4.2) tidak hanya menghasilkan satu solusi saja, melainkan beberapa solusi. Hal ini ditunjukkan oleh adanya beberapa kurva berwarna biru yang tersusun bertingkat yang muncul pada Gambar 4.7. Kurva berwarna biru yang tersusun bertingkat tersebut menunjukkan adanya tingkatan

energi atau level energi partikel ketika mengalami atau berada dalam keadaan terikat.

Sementara itu, Gambar 4.8 memperlihatkan plot *eigenvalue* sebagai fungsi S_a untuk model SDSP dari persamaan Dirac dengan tinjauan rentang E_n yang lebih panjang, yaitu mulai 0 hingga 100000. Dua buah kurva yang terbentuk, yaitu kurva berwarna biru dan kurva berwarna oranye, pada Gambar 4.8 berturut-turut menunjukkan solusi bagian real dan bagian imajiner dari persamaan (4.2). Dalam daerah 0 hingga 100000, keadaan terikat partikel ditunjukkan oleh daerah yang hanya mengandung solusi real saja. Dalam hal ini, tampak bahwa daerah yang hanya mengandung solusi real terletak pada bagian tengah Gambar 4.8, yaitu ketika nilai energi berada di antara 18778,865 dan 68778,865. Sedangkan di luar batas tersebut, bukan merupakan daerah energi keadaan terikat partikel karena solusi yang muncul mengandung nilai imajiner.

Adapun nilai numerik dari *eigenvalue* E_n berdasarkan Gambar 4.7 ditunjukkan oleh tabel berikut.

Tabel 4.4 Nilai *Eigenvalue* E_n Model SDSP dari Persamaan Dirac

S_a	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0	20717	25911	33141	41456	50304	59333
10000	26391	27922	36332	44884	52525	60563
20000	28974	29274	42887	49226	54951	62682
30000	30005	30053	50428	53151	57805	66289
40000	30550	30559	55330	55744	63405	—
50000	30898	30899	57218	57265	—	—

Tabel 4.4 merupakan tabel yang menunjukkan nilai numerik E_n berdasarkan Gambar 4.7. Kolom paling kiri merupakan kolom nilai V_a yang divariasikan sebagaimana sumbu x dalam Gambar 4.7. Nilai *eigenvalue* dalam Tabel 4.4 dikelompokkan berdasarkan indeks n atau berdasarkan level energinya. Pada saat $S_a = 0$, artinya sumur potensial persegi ganda berubah menjadi sumur potensial

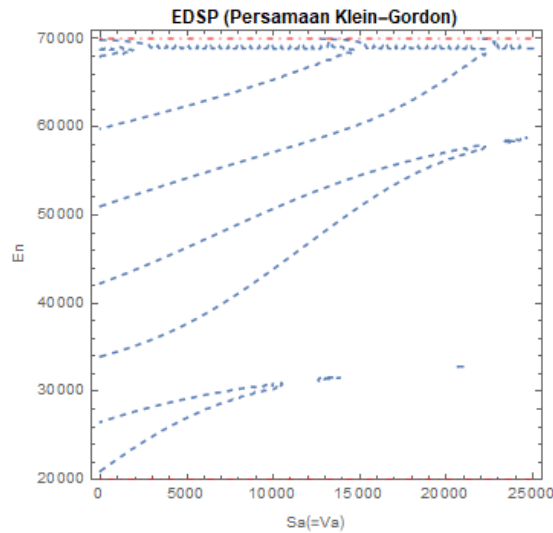
tunggal, nilai *eigenvalue* berturut-turut dari level yang paling dasar adalah 20717, 25911, 33141, 41456, 50304, dan 59333. Terdapat enam nilai *eigenvalue* yang artinya ada enam level energi yang dimiliki oleh partikel dalam sumur ketika $S_a = 0$. Jika diperhatikan secara keseluruhan, semua nilai *eigenvalue* dalam Tabel 4.4, ketika $S_a = 0$, $S_a = 10000$, hingga $S_a = 50000$, berada dalam rentang 18778,865 dan 68778,865. Artinya, nilai *eigenvalue* dalam Table 4.4 yang dihitung secara numerik, sesuai dengan daerah energi yang dihitung secara analitik pada persamaan (4.4).

4.3 Model EDSP (*Equal Scalar and Vector Double Square-well Potential*)

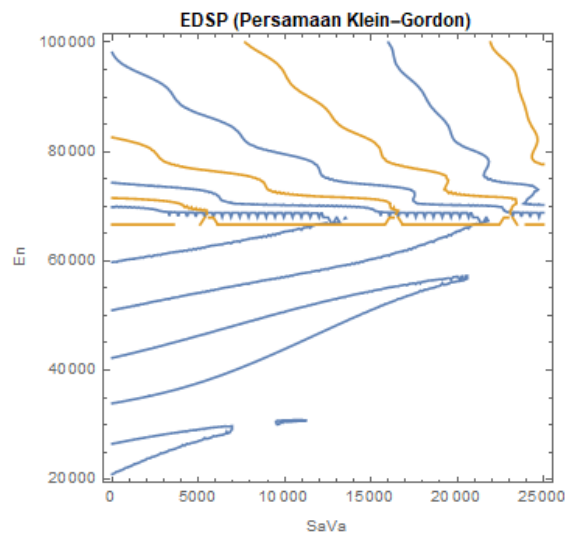
Model EDSP atau *Equal Scalar and Vector Double Square-well Potential* merupakan model potensial yang potensial skalarnya diasumsikan sama dengan potensial vektor ($S = V$). Tetapan nilai yang digunakan untuk variabel-variabel yang terlibat adalah $S_b = V_b = 25000$, $a = 0,01$, dan $b = 0,02$. Pada model EDSP, nilai potensial penghalang pusat yang digunakan $S_a (= V_a)$ divariasikan mulai dari 0 sampai dengan 25000 dan beda variasi 5000. Adapun daerah energi, dengan batas atas dan batas bawah yang telah ditentukan untuk model EDSP adalah

$$\begin{aligned}
 mc^2 &< E < E_U \\
 mc^2 &< E < V_b + S_b + mc^2 \\
 137,036^2 &< E < 25000 + 25000 + 137,036^2 \\
 18778,865 &< E < 68778,865
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Perhitungan nilai *eigenvalue* E_n dilakukan terhadap fungsi gelombang keadaan terikat dari persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac yang ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 4.9 Plot *Eigenvalue* E_n Model EDSP dari Persamaan Klein-Gordon



Gambar 4.10 Plot *Eigenvalue* E_n Model EDSP dari Persamaan Klein-Gordon pada Rentang 0 – 100000

Gambar 4.9 merupakan visualisasi dari persamaan (4.1) dalam bentuk dua dimensi yang diperoleh melalui pemrograman dengan menggunakan *software* Mathematica. Persamaan (4.1) yang merupakan persamaan kondisi *eigenvalue* E_n diplot sebagai fungsi $S_a (= V_a)$ dengan model perhitungan EDSP, dan nilai $S_a (= V_a)$ divariasikan mulai dari 0, 5000, 10000, 15000, 20000, dan 25000. Sumbu

x merupakan representasi dari nilai $S_a (= V_a)$, sedangkan nilai *eigenvalue* direpresentasikan oleh sumbu y dan kurva biru yang terdapat dalam Gambar 4.9. Adapun ketentuan batas atas dan batas bawah daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk kasus EDSP telah ditunjukkan oleh persamaan (4.5). Untuk satu variasi nilai S_a tidak hanya memiliki satu *eigenvalue* saja, melainkan terdapat beberapa nilai dan nilai tersebut tersusun bertingkat-tingkat membentuk level energi. Salah satu contohnya adalah *eigenvalue* ketika $S_a (= V_a)$ bernilai 5000. Jika ditarik garis lurus ke atas dari titik $S_a (= V_a) = 5000$, maka garis tersebut akan melewati beberapa kurva biru (garis putus-putus berwarna biru). Titik pertemuan atau perpotongan garis tersebut dengan kurva biru pertama itulah yang disebut sebagai *eigenvalue* pertama, E_1 . Ketika dilanjutkan kembali, maka garis tadi akan berpotongan dengan kurva biru kedua yang kemudian disebut sebagai *eigenvalue* kedua, E_2 , dan seterusnya. Jadi, dari Gambar 4.9 tersebut dapat diketahui bahwa nilai *eigenvalue* untuk $S_a (= V_a) = 5000$ terdiri dari enam tingkat yang artinya terdapat 6 level energi dengan $n = 1 - 6$.

Gambar 4.10, juga merupakan plot persamaan kondisi *eigenvalue* dari persamaan (4.1) yang diplot dengan tinjauan rentang nilai E_n mulai dari 0 hingga 100000. Hasilnya, pada plot *eigenvalue* tersebut terdapat dua buah kurva yaitu kurva berwarna biru dan kurva berwarna oranye. Perbedaan dari keduanya adalah, kurva berwarna biru menunjukkan solusi bagian real dari persamaan (4.1), sedangkan kurva oranye merupakan solusi bagian imajiner. Namun, pada Gambar 4.10, tampak daerah yang hanya diisi oleh kurva biru saja dan daerah tersebut berada di antara 18778,865 dan 68778,865. Hal ini bermakna bahwa

daerah tersebut merupakan daerah energi untuk kondisi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda. Sedangkan ketika $E < 18778,865$ atau $E > 68778,865$, solusi yang muncul terdiri dari bilangan real dan imajiner, yang menunjukkan solusi lengkap dari persamaan (4.1).

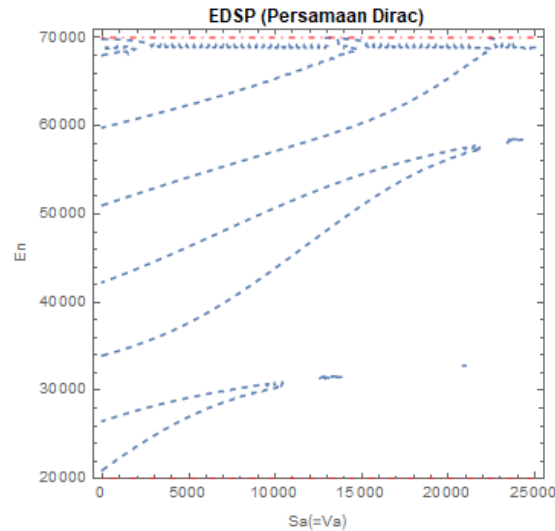
Adapun nilai numerik dari *eigenvalue* E_n berdasarkan Gambar 4.9 ditunjukkan oleh tabel berikut.

Tabel 4.5 Nilai *Eigenvalue* E_n Model EDSP dari Persamaan Klein-Gordon

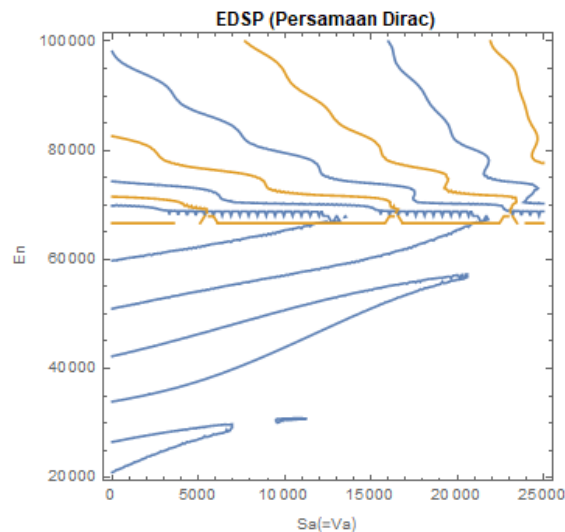
$S_a(=V_a)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
0	21275	26629	35072	42664	52157	60251
5000	27138	29387	37128	45592	53539	62156
10000	31039	31965	43697	50593	56118	64398
15000	32830	33178	50256	55087	59910	66464
20000	34552	34985	56982	58365	64572	—
25000	34729	35591	60087	60256	—	—

Tabel 4.5 menunjukkan penjabaran nilai numerik *eigenvalue* E_n dari Gambar 4.9. Nilai-nilai numerik ini didapatkan pada titik-titik hasil perpotongan antara garis yang ditarik ke arah vertikal dari titik-titik $S_a(=V_a)$ pada sumbu horizontal dengan kurva biru yang terbentuk dari hasil penyelesaian persamaan (4.1). Satu garis vertikal akan melalui beberapa kurva biru yang kemudian disebut level energi. Kurva biru pertama yang dilalui dituliskan dengan indeks $n = 1$ dan seterusnya. Kemudian, nilainya dituliskan dalam Tabel 4.5 sesuai dengan pengelompokannya masing-masing. Jika diperhatikan secara keseluruhan, semua nilai *eigenvalue* dalam Tabel 4.5, ketika $S_a(=V_a) = 0$, $S_a(=V_a) = 5000$, hingga $S_a(=V_a) = 25000$, berada dalam rentang 18778,865 dan 68778,865. Artinya, nilai *eigenvalue* dalam Table 4.5 yang dihitung secara numerik, sesuai dengan daerah energi yang dihitung secara analitik pada persamaan (4.5).

Gambar berikut menunjukkan *eigenvalue* E_n fungsi gelombang keadaan terikat bergantung variasi $S_a (= V_a)$ untuk model EDSP yang diperoleh melalui analisis dengan persamaan Dirac.



Gambar 4.11 Plot *Eigenvalue* E_n Model EDSP dari Persamaan Dirac



Gambar 4.12 Plot *Eigenvalue* E_n Model EDSP dari Persamaan Dirac pada Rentang 0 – 100000

Gambar 4.11 dan Gambar 4.12 merupakan visualisasi dari persamaan (4.2), yaitu persamaan kondisi *eigenvalue* dari persamaan Dirac, dalam bentuk dua dimensi untuk model EDSP. Keduanya merupakan plot *eigenvalue* E_n sebagai fungsi $S_a (= V_a)$ yang diperoleh melalui pemrograman dengan menggunakan *software* Mathematica. Nilai $S_a (= V_a)$ divariasikan mulai dari 0, 5000, 10000,

15000, 20000, dan 25000. Kurva berwarna biru pada Gambar 4.11 menunjukkan solusi dari persamaan (4.2) sekaligus representasi dari *eigenvalue* keadaan terikat partikel. Batas atas dan batas bawah daerah energi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda untuk model EDSP ditunjukkan oleh garis horizontal berwarna merah pada Gambar 4.11. Sedangkan penentuan batas atas dan batas bawah tersebut telah ditunjukkan oleh persamaan (4.5). Persamaan (4.2) diselesaikan dengan mensubstitusikan nilai dari variasi $S_a (= V_a)$ ke dalam persamaan (4.2), sehingga menghasilkan solusi berupa plot *eigenvalue* dengan setiap titik $S_a (= V_a)$ memiliki beberapa nilai *eigenvalue* yang nilainya bertingkat-tingkat membentuk level energi. Jumlah *eigenvalue* untuk setiap variasi $S_a (= V_a)$ berbeda-beda, yang dapat dilihat dari berapa banyak kurva biru yang dilalui oleh garis yang ditarik dari titik $S_a (= V_a)$ tersebut.

Sementara itu, Gambar 4.12 memperlihatkan visualisasi persamaan (4.2) sebagai fungsi $S_a (= V_a)$ untuk model EDSP dari persamaan Dirac dengan tinjauan rentang E_n yang lebih panjang, yaitu mulai 0 hingga 100000. Dua buah kurva yaitu kurva berwarna biru dan kurva berwarna oranye, pada Gambar 4.12 berturut-turut menunjukkan solusi bagian real dan bagian imajiner dari persamaan (4.2). Tampak pada bagian tengah Gambar 4.12, ketika nilai energi berada di antara 18778,865 dan 68778,865, kurva yang muncul hanya kurva biru atau kurva real saja. Artinya, kondisi keadaan terikat partikel dalam sumur potensial persegi ganda berada dalam rentang tersebut, sebagaimana persamaan (4.5). Sedangkan di luar batas tersebut, bukan merupakan daerah energi keadaan terikat partikel karena solusi yang muncul terdiri dari bilangan real dan imajiner.

Adapun nilai numerik dari *eigenvalue* E_n berdasarkan Gambar 4.11 ditunjukkan oleh tabel berikut.

Tabel 4.6 Nilai *Eigenvalue* E_n Model EDSP dari Persamaan Dirac

$S_a(=V_a)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
0	20964	26537	33957	42275	51009	59830	68049
5000	27000	29182	37683	46335	54203	62401	–
10000	30265	30892	43890	50736	57166	65397	–
15000	31801	31991	50984	54516	60342	–	–
20000	32676	32742	56203	57180	65442	–	–
25000	33261	33286	58707	58924	–	–	–

Pada Gambar (4.11), garis berwarna biru merupakan solusi persamaan dan (4.2) yang sekaligus merupakan nilai untuk *eigenvalue* E_n untuk model EDSP. Sedangkan garis putus-putus berwarna merah yang berada di bagian bawah dan bagian atas plot berturut-turut merupakan batas minimum dan maksimum energi untuk fungsi gelombang keadaan terikat yang dihitung dengan model EDSP. Nilai numerik *eigenvalue* E_n fungsi gelombang keadaan terikat yang terdapat dalam Tabel 4.6 ditentukan oleh titik-titik perpotongan garis vertikal $S_a(=V_a)$ dengan kurva biru. Masing-masing nilai pada titik-titik perpotongan tersebut kemudian dituliskan pada Tabel 4.6 sesuai dengan tingkatannya. Titik perpotongan dengan kurva biru pertama menunjukkan bahwa titik tersebut merupakan nilai energi paling dasar dengan indeks n dalam E_n bernilai 1. Adapun titik perpotongan kedua, memberikan arti bahwa nilai tersebut merupakan *eigenvalue* level kedua dengan indeks n dalam E_n bernilai 2, dan seterusnya. Jika diamati secara menyeluruh, nilai-nilai energi dalam Tabel 4.6 tersebut hanya berada dalam rentang 18778,865 hingga 68778,865. Hal ini sesuai dengan perhitungan secara analitik daerah energi untuk *bound state* pada kasus EDSP yang dijabarkan pada persamaan (4.5).

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian tentang analisis persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac dalam sumur potensial persegi ganda simetri, kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Fungsi gelombang dalam setiap ruang pada potensial yang telah dibagi menjadi lima ruang mempunyai bentuk yang sama dengan solusi persamaan diferensial orde 2 dan hanya dibedakan oleh syarat batas serta nilai potensial pada masing-masing ruang yang ditempati.
2. Persamaan kondisi *eigenvalue* fungsi gelombang keadaan terikat pada sistem ini merupakan jenis *transcendental complex equation* atau persamaan yang sangat kompleks sehingga untuk mendapatkan bentuk eksplisit dari E_n tidak dilakukan secara analitik, melainkan digunakan pendekatan numerik.
3. Nilai level energi yang didapatkan dari hasil perhitungan dengan menggunakan *software* Mathematica berada di antara batas atas dan batas bawah daerah energi fungsi gelombang keadaan terikat yang telah ditentukan untuk masing-masing kasus, yaitu $31221,134 < E_n < 68778,865$ untuk model VDSP dan $18778,865 < E_n < 68778,865$ untuk SDSP dan EDSP.

5.2 Saran

Penelitian ini merupakan awal atau dasar untuk melakukan penelitian lebih lanjut terkait pencarian nilai energi untuk sumur potensial dengan dimensi yang

lebih tinggi sehingga nantinya dapat dikembangkan lebih lanjut ke tahap aplikasi atau bidang terapan terutama dalam bidang optik dan material yang melibatkan komponen berlapis.

DAFTAR PUSTAKA

- Alhaidari, A. D. 2005. *Dirac and Klein-Gordon Equations with Equal Scalar and Vector Potentials*. Physics Letters A 349, 87-97. Available online 19 September 2005.
- Beiser, Arthur. 2003. *Concepts of Modern Physics, Sixth Edition*. United States of America: McGraw-Hill Companies.
- Coulter, Byron L. dan Carl G. Adler. 1971. *The Relativistic One-Dimensional Square Potential*. American Journal of Physics 39, 305. Published online on 07 July 2005.
- Damayanti, Irene Devi, *et al.* 2013. *Analisis Dinamika Kuantum Partikel Menggunakan Matriks Transfer*. Makassar: Universitas Hasanuddin.
- Departemen Agama RI. 2015. *Al-Qur'an dan Terjemahan*. Bandung: Diponegoro
- Dyayadi, M.T. 2008. *Alam Semesta Bertawaf (Keajaiban Sains dalam Al-Qu'an)*. Yogyakarta: Lingkaran.
- Ficek, Zbigniew. 2016. *Quantum Physics for Beginners*. Perancis: Pan Stanford Publishing.
- Ghatak, Ajoy K., *et al.* 1988. *A Novel Numerical Technique for Solving the One-Dimensional Schrodinger Equation Using Matrix Approach – Application to Quantum Well Structures*. IEEE Journal of Quantum Electronics 24, 1524. Published on August 1988
- Golshani, Mehdi. 2003. *Filsafat Sains Menurut Al-Qur'an*. Bandung: Mizan.
- Griffiths, David J. 1999. *Introduction to Electrodynamics, Third Edition*. New Jersey, United States of America: Prentice Hall, Inc
- Griffiths, David J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics, Second Edition*. United States of America: Pearson Education, Inc.
- Griffiths, David J. 2008. *Introduction to Elementary Particles, Second Revised Edition*. Jerman: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.
- Hasegawa, Hideo. 2014. *Bound States of the One-Dimensional Dirac Equation for Scalar and Vector Double Square Well Potentials*. Physica E 59, 192-201. Available online 23 January 2014.
- Ibnu Katsir. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Diterjemahkan oleh M. Abdul Ghoffar E. M. dan Abu Ihsan al-Atsari. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

- Jonsson, Bjorn dan Sverre T. Eng. 1990. *Solving the Schrodinger Equation in Arbitrary Quantum Well Potential Profiles Using the Transfer Matrix Method*. IEEE Journal of Quantum Electronics 26, No. 11. Published on November 1990.
- Karwowski, Jacek, *et al.* 2017. *Dirac Operator and Its Properties*, dalam Wenjian Liu (Ed.). *Handbook of Relativistic Quantum Chemistry*. Verlag, Berlin, Heidelberg: Springer.
- Krane, Kenneth S. 2012. *Modern Physics, Third Edition*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.
- Mulyono, Agus dan Ahmad Abtokhi. 2006. *Fisika dan Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Peacock-Lopez, Enrique. 2006. *Exact Solutions of the Quantum Double Square Well Potential*. The Chemical Educator.
- Purwanto, Agus. 2006. *Fisika Kuantum*. Yogyakarta: Penerbit Gava Media.
- Purwanto, Agus. 2015a. *Ayat-Ayat Semesta: Sisi-sisi Al-Qur'an yang Terlupakan*. Bandung: Mizan.
- Purwanto, Agus. 2015b. *Nalar Ayat-Ayat Semesta: Menjadikan Al-Qur'an sebagai Basis Konstruksi Ilmu Pengetahuan*. Bandung: Mizan.
- Sánchez-Soto, Luis L., *et al.* 2012. *The Transfer Matrix: A Geometrical Perspective*. Physics Report 513, 191-227.
- Serway, Raymond A. dan Jr. John W. Jewett. 2010. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Eight Edition*. United States of America: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Setyawan, Lilik Hidayat. 2004. *Kamus Fisika Bergambar*. Bandung: Pakar Raya.
- Siregar, Rustam E. 2018. *Fisika Kuantum: Teori dan Aplikasi*. Jawa Barat: Universitas Padjadjaran.
- Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM Press.
- Tiandho, Yuant. 2016. *Partikel Dirac dalam Sumur Potensial Dinamis*. Jurnal EduMatSains. Vol. 1. No. 1. Bandung: Universitas Telkom.
- Tim Penyusun Tafsir Ilmi. 2011. *Cahaya dalam Perspektif Al-Qur'an dan Sains*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an, Kementerian Agama RI.
- Ying, He, *et al.* 2010. *Energy Eigenvalues from an Analytical Transfer Matrix Method*. Chin. Phys. B 19 No. 4, 040306.

Zettili, Neurodine. 2009. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications, Second Edition*. United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd.

Zhao, Xing-Qiang, *et al.* 2005. *Bound States of Relativistic Particles in the Generalized Symmetrical Double Well Potential*. *Physics Letter A* 337, 189-196.

Zou, Xia, *et al.* 2005. *Bound States of the Dirac Equation with Vector and Scalar Eckart Potentials*. *Physics Letter A* 346, 54-64.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A PEMBUKTIAN PERSAMAAN

Persamaan 3.1

Persamaan gelombang

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E - V(x))^2 - (mc^2 + S(x))^2}{\hbar^2 c^2} \right) \psi(x) = 0.$$

Dengan mengambil pemisalan

$$C^2 = \frac{(E - V(x))^2 - (mc^2 + S(x))^2}{\hbar^2 c^2}$$

Maka,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + C^2 \right) \psi(x) = 0, \tag{A.1}$$

Jika $d/dx = D$, maka persamaan (A.1) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(D^2 + C^2)\psi(x) = 0$$

Sehingga terdapat dua kemungkinan, yaitu

$$(D^2 + C^2) = 0 \quad \text{dan} \quad \psi(x) = 0$$

Kemungkinan kedua tidak mungkin terjadi karena fungsi gelombang bernilai tidak sama dengan 0, ($\psi(x) \neq 0$). Dengan demikian,

$$D^2 = -C^2$$

$$D = \sqrt{-C^2} = \pm iC.$$

Sementara itu,

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = D\psi(x)$$

$$d\psi(x) = D\psi(x) dx$$

$$\frac{1}{\psi(x)} d\psi(x) = D dx$$

$$\int \frac{1}{\psi(x)} d\psi(x) = \int D dx$$

$$\ln \psi(x) = Dx + Constant$$

$$\psi(x) = e^{Dx} \tag{A.2}$$

Substitusi nilai D ke dalam persamaan (A.2), akan didapatkan

$$\psi(x) = e^{\pm iCa}$$

$$\psi(x) = e^{iCa} + e^{-iCa}. \tag{A.3}$$

LAMPIRAN B
PEMBUKTIAN PERHITUNGAN MATRIKS TRANSFER
FUNGSI GELOMBANG PERSAMAAN KLEIN-GORDON

Matriks Transfer M_{23}

Persamaan gelombang untuk ruang II dan III ketika $x = -a$,

$$\psi_2(-a) = \psi_3(-a)$$

$$A_2 e^{-ika} + B_2 e^{ika} = A_3 e^{-ipa} + B_3 e^{ipa} \quad (\text{B.1})$$

dan turunan pertamanya,

$$ikA_2 e^{-ika} - ikB_2 e^{ika} = ipA_3 e^{-ipa} - ipB_3 e^{ipa}. \quad (\text{B.2})$$

Mengalikan persamaan (B.1) dengan ik , kemudian mengoperasikannya dengan penjumlahan dan pengurangan pada persamaan (B.2), didapatkan hasil

$$A_2 = A_3 \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-p)a} + B_3 \frac{(k-p)}{2k} e^{i(k+p)a}$$

dan,

$$B_2 = A_3 \frac{(k-p)}{2k} e^{-i(k+p)a} + B_3 \frac{(k+p)}{2k} e^{-i(k-p)a}$$

Didapatkan matriks transfer M_{23} dari hasil penyusunan koefisien A_2 dan B_2 dalam bentuk matriks

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-p)a} & \frac{(k-p)}{2k} e^{i(k+p)a} \\ \frac{(k-p)}{2k} e^{-i(k+p)a} & \frac{(k+p)}{2k} e^{-i(k-p)a} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Matriks Transfer M_{34}

Persamaan gelombang untuk ruang III dan III ketika $x = a$,

$$\psi_3(a) = \psi_4(a)$$

$$A_3 e^{ipa} + B_3 e^{-ipa} = A_4 e^{ika} + B_4 e^{-ika} \quad (\text{B.4})$$

dan turunan pertamanya,

$$ipA_3e^{ipa} - ipB_3e^{-ipa} = ikA_4e^{ika} - ikB_4e^{-ika}. \quad (\text{B.5})$$

Mengalikan persamaan (B.4) dengan ip , kemudian mengoperasikannya dengan penjumlahan dan pengurangan pada persamaan (B.5), didapatkan hasil

$$A_3 = A_4 \frac{(k+p)}{2p} e^{i(k-p)a} - B_4 \frac{(k-p)}{2p} e^{-i(k+p)a}$$

dan,

$$B_3 = -A_4 \frac{(k-p)}{2p} e^{i(k+p)a} + B_4 \frac{(k+p)}{2p} e^{-i(k-p)a}$$

Didapatkan matriks transfer M_{34} dari hasil penyusunan koefisien A_3 dan B_3 dalam bentuk matriks

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{(k+p)}{2p} e^{i(k-p)a} & -\frac{(k-p)}{2p} e^{-i(k+p)a} \\ -\frac{(k-p)}{2p} e^{i(k+p)a} & \frac{(k+p)}{2p} e^{-i(k-p)a} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Matriks Transfer M_{34}

Persamaan gelombang untuk ruang IV dan V ketika $x = b$,

$$\psi_4(b) = \psi_5(b)$$

$$A_4e^{ikb} + B_4e^{-ikb} = A_5e^{iqb} + B_5e^{-iqb} \quad (\text{B.7})$$

dan turunan pertamanya,

$$ikA_4e^{ikb} - ikB_4e^{-ikb} = iqA_5e^{iqb} - iqB_5e^{-iqb}. \quad (\text{B.8})$$

Mengalikan persamaan (B.7) dengan ik , kemudian mengoperasikannya dengan penjumlahan dan pengurangan pada persamaan (B.8), didapatkan hasil

$$A_4 = A_5 \frac{(q+k)}{2k} e^{i(q-k)b} - B_5 \frac{(q-k)}{2k} e^{-i(q+k)b}$$

dan,

$$B_4 = -A_5 \frac{(q-k)}{2k} e^{i(q+k)b} + B_5 \frac{(q+k)}{2k} e^{-i(q-k)b}$$

Didapatkan matriks transfer M_{45} dari hasil penyusunan koefisien A_4 dan B_4 dalam bentuk matriks

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(q+k)}{2k} e^{i(q-k)b} & -\frac{(q-k)}{2k} e^{-i(q+k)b} \\ -\frac{(q-k)}{2k} e^{i(q+k)b} & \frac{(q+k)}{2k} e^{-i(q-k)b} \end{pmatrix}$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} & \frac{(k-q)}{2k} e^{-i(k+q)b} \\ \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} & \frac{(k+q)}{2k} e^{i(k-q)b} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Matriks Transfer T

$$T = M_{12} M_{23} M_{34} M_{45}$$

Jika dilakukan pemisalan terhadap M_{12} , M_{23} , M_{34} , dan M_{45} sebagai berikut,

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(k+q)}{2q} e^{-i(k-q)b} & -\frac{(k-q)}{2q} e^{i(q+k)b} \\ -\frac{(k-q)}{2q} e^{-i(k+q)b} & \frac{(k+q)}{2q} e^{i(k-q)b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-p)a} & \frac{(k-p)}{2k} e^{i(k+p)a} \\ \frac{(k-p)}{2k} e^{-i(k+p)a} & \frac{(k+p)}{2k} e^{-i(k-p)a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{(k+p)}{2p} e^{i(k-p)a} & -\frac{(k-p)}{2p} e^{-i(k+p)a} \\ -\frac{(k-p)}{2p} e^{i(k+p)a} & \frac{(k+p)}{2p} e^{-i(k-p)a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} & \frac{(k-q)}{2k} e^{-i(k+q)b} \\ \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} & \frac{(k+q)}{2k} e^{i(k-q)b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

maka,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} (ae + bg)i + (af + bh)k & (ae + bg)j + (af + bh)l \\ (ce + dg)i + (cf + dh)k & (ce + dg)j + (cf + dh)l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

dengan,

$$T_{11} = (ae + bg)im + (af + bh)km + (ae + bg)jo + (af + bh)lo,$$

$$T_{12} = (ae + bg)in + (af + bh)kn + (ae + bg)jp + (af + bh)lp,$$

$$T_{21} = (ce + dg)im + (cf + dh)km + (ce + dg)jo + (cf + dh)lo,$$

$$T_{22} = (ce + dg)in + (cf + dh)kn + (ce + dg)jp + (cf + dh)lp.$$

Substitusi nilai $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k,$ dan l untuk mendapatkan nilai

$T_{11}, T_{12}, T_{21},$ dan T_{22} .

$$T_{11} = (ae + bg)im + (af + bh)km + (ae + bg)jo + (af + bh)lo$$

$$T_{11} = aeim + bgim + afkm + bhkm + aejo + bgjo + aflo + bhlo$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{(k+q)}{2q} e^{-i(k-q)b} \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-p)a} \frac{(k+p)}{2p} e^{i(k-p)a} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} \\ &\quad - \frac{(k-q)}{2q} e^{i(q+k)b} \frac{(k-p)}{2k} e^{-i(k+p)a} \frac{(k+p)}{2p} e^{i(k-p)a} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} \\ &\quad - \frac{(k+q)}{2q} e^{-i(k-q)b} \frac{(k-p)}{2k} e^{i(k+p)a} \frac{(k-p)}{2p} e^{i(k+p)a} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(k-q)}{2q} e^{i(q+k)b} \frac{(k+p)}{2k} e^{-i(k-p)a} \frac{(k-p)}{2p} e^{i(k+p)a} \frac{(k+q)}{2k} e^{-i(k-q)b} \\
& - \frac{(k+q)}{2q} e^{-i(k-q)b} \frac{(k+p)}{2k} e^{i(k-p)a} \frac{(k-p)}{2p} e^{-i(k+p)a} \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} \\
& + \frac{(k-q)}{2q} e^{i(q+k)b} \frac{(k-p)}{2k} e^{-i(k+p)a} \frac{(k-p)}{2p} e^{-i(k+p)a} \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} \\
& + \frac{(k+q)}{2q} e^{-i(k-q)b} \frac{(k-p)}{2k} e^{i(k+p)a} \frac{(k+p)}{2p} e^{-i(k-p)a} \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} \\
& - \frac{(k-q)}{2q} e^{i(q+k)b} \frac{(k+p)}{2k} e^{-i(k-p)a} \frac{(k+p)}{2p} e^{-i(k-p)a} \frac{(k-q)}{2k} e^{i(k+q)b} \\
T_{11} = & \frac{(k+q)(k+p)(k+p)(k+q)}{16k^2pq} e^{2iqb-2ikb+2ika-2ipa} \\
& - \frac{(k-q)(k-p)(k+p)(k+q)}{16k^2pq} e^{2iqb-2ipa} \\
& - \frac{(k+q)(k-p)(k-p)(k+q)}{16k^2pq} e^{2iqb-2ikb+2ika+2iqa} \\
& + \frac{(k-q)(k+p)(k-p)(k+q)}{16k^2pq} e^{2iqb+2ipa} \\
& - \frac{(k+q)(k+p)(k-p)(k-q)}{16k^2pq} e^{2iqb-2ipa} \\
& + \frac{(k-q)(k-p)(k-p)(k-q)}{16k^2pq} e^{2iqb+2ikb-2ika-2ipa} \\
& + \frac{(k+q)(k-p)(k+p)(k-q)}{16k^2pq} e^{2iqb+2ipa} \\
& - \frac{(k-q)(k+p)(k+p)(k-q)}{16k^2pq} e^{2iqb+2ikb-2ika+2ipa} \\
T_{11} = & \frac{(k+q)^2(k+p)^2}{16k^2pq} e^{2i(k(a-b)+qb-pa)} - \frac{(k^2-q^2)(k^2-p^2)}{16k^2pq} e^{2i(qb-pa)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(k+q)^2(k-p)^2}{16k^2pq}e^{2i(k(a-b)+qb+pa)} + \frac{(k^2-q^2)(k^2-p^2)}{16k^2pq}e^{2i(qb-pa)} \\
& -\frac{(k^2-q^2)(k^2-p^2)}{16k^2pq}e^{2i(qb-pa)} + \frac{(k-q)^2(k-p)^2}{16k^2pq}e^{2i(k(b-a)+qb-pa)} \\
& +\frac{(k^2-q^2)(k^2-p^2)}{16k^2pq}e^{2i(qb-pa)} - \frac{(k-q)^2(k+p)^2}{16k^2pq}e^{2i(k(b-a)+qb+pa)} \\
T_{11} = & \frac{e^{2iqb}}{16k^2pq} \{ (k+p)^2 [(k+q)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (k-q)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \\
& + (k-p)^2 [(k-q)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (k+q)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \\
& + 2(k^2-q^2)(k^2-p^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \} \tag{B.10}
\end{aligned}$$

LAMPIRAN C
PEMBUKTIAN PERHITUNGAN MATRIKS TRANSFER
FUNGSI GELOMBANG PERSAMAAN DIRAC

Matriks Transfer M_{12}

Persamaan berikut,

$$\begin{pmatrix} e^{-iqb} & e^{iqb} \\ \beta e^{-iqb} & -\beta e^{iqb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ikb} & e^{ikb} \\ \alpha e^{-ikb} & -\alpha e^{ikb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (C.1)$$

diubah ke dalam bentuk berikut,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_{12} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengasumsikan,

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-iqb} & e^{iqb} \\ \beta e^{-iqb} & -\beta e^{iqb} \end{pmatrix} \text{ dan } Y_1 = \begin{pmatrix} e^{-ikb} & e^{ikb} \\ \alpha e^{-ikb} & -\alpha e^{ikb} \end{pmatrix},$$

maka

$$X_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = Y_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (C.2)$$

Sebagaimana sifat matriks $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, mengalikan persamaan (C.2)

dengan X_1^{-1} (invers matriks X_1) dari kiri, akan didapatkan

$$\begin{aligned} X_1^{-1} X_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= X_1^{-1} Y_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= X_1^{-1} Y_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (C.3)$$

dengan $X_1^{-1} Y_1 = M_{12}$.

$$X_1^{-1} = \frac{1}{(e^{-iqb})(-\beta e^{iqb}) - (e^{iqb})(\beta e^{-iqb})} \begin{pmatrix} -\beta e^{iqb} & -e^{iqb} \\ -\beta e^{-iqb} & e^{-iqb} \end{pmatrix}$$

$$X_1^{-1} = \frac{1}{-\beta - \beta} \begin{pmatrix} -\beta e^{iqb} & -e^{iqb} \\ -\beta e^{-iqb} & e^{-iqb} \end{pmatrix}$$

$$X_1^{-1} = \frac{1}{-2\beta} \begin{pmatrix} -\beta e^{iqb} & -e^{iqb} \\ -\beta e^{-iqb} & e^{-iqb} \end{pmatrix}$$

$$X_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{iqb}}{2} & \frac{e^{iqb}}{2\beta} \\ \frac{e^{-iqb}}{2} & -\frac{e^{-iqb}}{2\beta} \end{pmatrix}.$$

Sehingga,

$$M_{12} = X_1^{-1} Y_1$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{e^{iqb}}{2} & \frac{e^{iqb}}{2\beta} \\ \frac{e^{-iqb}}{2} & -\frac{e^{-iqb}}{2\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ikb} & e^{ikb} \\ \alpha e^{-ikb} & -\alpha e^{ikb} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ib(k-q)}}{2} + \frac{\alpha e^{-ib(k-q)}}{2\beta} & \frac{e^{ib(k+q)}}{2} - \frac{\alpha e^{ib(k+q)}}{2\beta} \\ \frac{e^{-ib(k+q)}}{2} - \frac{\alpha e^{-ib(k+q)}}{2\beta} & \frac{e^{ib(k-q)}}{2} + \frac{\alpha e^{ib(k-q)}}{2\beta} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{\beta e^{-ib(k-q)}}{2\beta} + \frac{\alpha e^{-ib(k-q)}}{2\beta} & \frac{\beta e^{ib(k+q)}}{2\beta} - \frac{\alpha e^{ib(k+q)}}{2\beta} \\ \frac{\beta e^{-ib(k+q)}}{2\beta} - \frac{\alpha e^{-ib(k+q)}}{2\beta} & \frac{\beta e^{ib(k-q)}}{2\beta} + \frac{\alpha e^{ib(k-q)}}{2\beta} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(\beta + \alpha)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} & \frac{(\beta - \alpha)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \\ \frac{(\beta - \alpha)}{2\beta} e^{-ib(k+q)} & \frac{(\beta + \alpha)}{2\beta} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} & -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \\ -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{-ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

Matriks Transfer M_{23}

Persamaan berikut,

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ \alpha e^{-ika} & -\alpha e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ipa} & e^{ipa} \\ \gamma e^{-ipa} & -\gamma e^{ipa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

diubah ke dalam bentuk,

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = M_{23} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengasumsikan

$$X_2 = \begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ \alpha e^{-ika} & -\alpha e^{ika} \end{pmatrix} \text{ dan } Y_2 = \begin{pmatrix} e^{-ipa} & e^{ipa} \\ \gamma e^{-ipa} & -\gamma e^{ipa} \end{pmatrix},$$

maka

$$X_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = Y_2 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Sebagaimana sifat matriks $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, maka mengalikan persamaan (C.6)

dengan X_2^{-1} (invers matriks X_2) dari kiri, akan didapatkan

$$\begin{aligned} X_2^{-1} X_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} &= X_2^{-1} Y_2 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} &= X_2^{-1} Y_2 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

dengan $X_2^{-1} Y_2 = M_{23}$.

$$X_2^{-1} = \frac{1}{(e^{-ika})(-\alpha e^{ika}) - (e^{ika})(\alpha e^{-ika})} \begin{pmatrix} -\alpha e^{ika} & -e^{ika} \\ -\alpha e^{-ika} & e^{-ika} \end{pmatrix}$$

$$X_2^{-1} = \frac{1}{-\alpha - \alpha} \begin{pmatrix} -\alpha e^{ika} & -e^{ika} \\ -\alpha e^{-ika} & e^{-ika} \end{pmatrix}$$

$$X_2^{-1} = \frac{1}{-2\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha e^{ika} & -e^{ika} \\ -\alpha e^{-ika} & e^{-ika} \end{pmatrix}$$

$$X_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{ika}}{2} & \frac{e^{ika}}{2\alpha} \\ \frac{e^{-ika}}{2} & -\frac{e^{-ika}}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$M_{23} = X_2^{-1}Y_2$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{e^{ika}}{2} & \frac{e^{ika}}{2\alpha} \\ \frac{e^{-ika}}{2} & -\frac{e^{-ika}}{2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ipa} & e^{ipa} \\ \gamma e^{-ipa} & -\gamma e^{ipa} \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{e^{ia(k-p)}}{2} + \frac{\gamma e^{ia(k-p)}}{2\alpha} & \frac{e^{ia(k+p)}}{2} - \frac{\gamma e^{ia(k+p)}}{2\alpha} \\ \frac{e^{-ia(k+p)}}{2} - \frac{\gamma e^{-ia(k+p)}}{2\alpha} & \frac{e^{-ia(k-p)}}{2} + \frac{\gamma e^{-ia(k-p)}}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha e^{ia(k-p)}}{2\alpha} + \frac{\gamma e^{ia(k-p)}}{2\alpha} & \frac{\alpha e^{ia(k+p)}}{2\alpha} - \frac{\gamma e^{ia(k+p)}}{2\alpha} \\ \frac{\alpha e^{-ia(k+p)}}{2\alpha} - \frac{\gamma e^{-ia(k+p)}}{2\alpha} & \frac{\alpha e^{-ia(k-p)}}{2\alpha} + \frac{\gamma e^{-ia(k-p)}}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k-p)} & \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k+p)} \\ \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k+p)} & \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix}. \quad (C.8)$$

Matriks Transfer M_{34}

Persamaan berikut,

$$\begin{pmatrix} e^{ipa} & e^{-ipa} \\ \gamma e^{ipa} & -\gamma e^{-ipa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ \alpha e^{ika} & -\alpha e^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad (C.9)$$

diubah dalam bentuk,

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M_{34} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengasumsikan

$$X_3 = \begin{pmatrix} e^{ipa} & e^{-ipa} \\ \gamma e^{ipa} & -\gamma e^{-ipa} \end{pmatrix} \text{ dan } Y_3 = \begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ \alpha e^{ika} & -\alpha e^{-ika} \end{pmatrix},$$

maka

$$X_3 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = Y_3 \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix}. \quad (C.10)$$

Sebagaimana sifat matriks $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, maka mengalikan persamaan

(C.10) dengan X_3^{-1} (invers matriks X_3) dari kiri, akan didapatkan

$$X_3^{-1}X_3 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = X_3^{-1}Y_3 \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = X_3^{-1}Y_3 \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

dengan $X_3^{-1}Y_3 = M_{34}$.

$$X_3^{-1} = \frac{1}{(e^{ipa})(-\gamma e^{-ipa}) - (e^{-ipa})(\gamma e^{ipa})} \begin{pmatrix} -\gamma e^{-ipa} & -e^{-ipa} \\ -\gamma e^{ipa} & e^{ipa} \end{pmatrix}$$

$$X_3^{-1} = \frac{1}{-\gamma - \gamma} \begin{pmatrix} -\gamma e^{-ipa} & -e^{-ipa} \\ -\gamma e^{ipa} & e^{ipa} \end{pmatrix}$$

$$X_3^{-1} = \frac{1}{-2\gamma} \begin{pmatrix} -\gamma e^{-ipa} & -e^{-ipa} \\ -\gamma e^{ipa} & e^{ipa} \end{pmatrix}$$

$$X_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ipa}}{2} & \frac{e^{-ipa}}{2\gamma} \\ \frac{e^{ipa}}{2} & -\frac{e^{ipa}}{2\gamma} \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$M_{34} = X_3^{-1}Y_3$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ipa}}{2} & \frac{e^{-ipa}}{2\gamma} \\ \frac{e^{ipa}}{2} & -\frac{e^{ipa}}{2\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ \alpha e^{ika} & -\alpha e^{-ika} \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{e^{ia(k-p)}}{2} + \frac{\alpha e^{ia(k-p)}}{2\gamma} & \frac{e^{-ia(k+p)}}{2} - \frac{\alpha e^{-ia(k+p)}}{2\gamma} \\ \frac{e^{ia(k+p)}}{2} - \frac{\alpha e^{ia(k+p)}}{2\gamma} & \frac{e^{-ia(k-p)}}{2} + \frac{\alpha e^{-ia(k-p)}}{2\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{34} &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma e^{ia(k-p)}}{2\gamma} + \frac{\alpha e^{ia(k-p)}}{2\gamma} & \frac{\gamma e^{-ia(k+p)}}{2\gamma} - \frac{\alpha e^{-ia(k+p)}}{2\gamma} \\ \frac{\gamma e^{ia(k+p)}}{2\gamma} - \frac{\alpha e^{ia(k+p)}}{2\gamma} & \frac{\gamma e^{-ia(k-p)}}{2\gamma} + \frac{\alpha e^{-ia(k-p)}}{2\gamma} \end{pmatrix} \\
M_{34} &= \begin{pmatrix} \frac{(\gamma + \alpha)}{2\gamma} e^{ia(k-p)} & \frac{(\gamma - \alpha)}{2\gamma} e^{-ia(k+p)} \\ \frac{(\gamma - \alpha)}{2\gamma} e^{ia(k+p)} & \frac{(\gamma + \alpha)}{2\gamma} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix} \\
M_{34} &= \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k-p)} & -\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k+p)} \\ -\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k+p)} & \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix} \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Matriks Transfer M_{45}

Persamaan berikut,

$$\begin{pmatrix} e^{ikb} & e^{-ikb} \\ \alpha e^{ikb} & -\alpha e^{-ikb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iqb} & e^{-iqb} \\ \beta e^{iqb} & -\beta e^{-iqb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}. \tag{C.13}$$

diubah dalam bentuk,

$$\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = M_{45} \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengasumsikan

$$X_4 = \begin{pmatrix} e^{ikb} & e^{-ikb} \\ \alpha e^{ikb} & -\alpha e^{-ikb} \end{pmatrix} \text{ dan } Y_4 = \begin{pmatrix} e^{iqb} & e^{-iqb} \\ \beta e^{iqb} & -\beta e^{-iqb} \end{pmatrix},$$

maka

$$X_4 \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = Y_4 \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}. \tag{C.14}$$

Sebagaimana sifat matriks $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, maka mengalikan persamaan

(C.14) dengan X_4^{-1} (invers matriks X_4) dari kiri, akan didapatkan

$$X_4^{-1}X_4 \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = X_4^{-1}Y_4 \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = X_4^{-1}Y_4 \begin{pmatrix} A_5 \\ B_5 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

dengan $X_4^{-1}Y_4 = M_{45}$.

$$X_4^{-1} = \frac{1}{(e^{ikb})(-\alpha e^{-ikb}) - (e^{-ikb})(\alpha e^{ikb})} \begin{pmatrix} -\alpha e^{-ikb} & -e^{-ikb} \\ -\alpha e^{ikb} & e^{ikb} \end{pmatrix}$$

$$X_4^{-1} = \frac{1}{-\alpha - \alpha} \begin{pmatrix} -\alpha e^{-ikb} & -e^{-ikb} \\ -\alpha e^{ikb} & e^{ikb} \end{pmatrix}$$

$$X_4^{-1} = \frac{1}{-2\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha e^{-ikb} & -e^{-ikb} \\ -\alpha e^{ikb} & e^{ikb} \end{pmatrix}$$

$$X_4^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ikb}}{2} & \frac{e^{-ikb}}{2\alpha} \\ \frac{e^{ikb}}{2} & -\frac{e^{ikb}}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$M_{45} = X_4^{-1}Y_4$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ikb}}{2} & \frac{e^{-ikb}}{2\alpha} \\ \frac{e^{ikb}}{2} & -\frac{e^{ikb}}{2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iqb} & e^{-iqb} \\ \beta e^{iqb} & -\beta e^{-iqb} \end{pmatrix}$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ib(k-q)}}{2} + \frac{\beta e^{-ib(k-q)}}{2\alpha} & \frac{e^{-ib(k+q)}}{2} - \frac{\beta e^{-ib(k+q)}}{2\alpha} \\ \frac{e^{ib(k+q)}}{2} - \frac{\beta e^{ib(k+q)}}{2\alpha} & \frac{e^{ib(k-q)}}{2} + \frac{\beta e^{-ib(k-q)}}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha e^{-ib(k-q)}}{2\alpha} + \frac{\beta e^{-ib(k-q)}}{2\alpha} & \frac{\alpha e^{-ib(k+q)}}{2\alpha} - \frac{\beta e^{-ib(k+q)}}{2\alpha} \\ \frac{\alpha e^{ib(k+q)}}{2\alpha} - \frac{\beta e^{ib(k+q)}}{2\alpha} & \frac{\alpha e^{ib(k-q)}}{2\alpha} + \frac{\beta e^{ib(k-q)}}{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} & \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k+q)} \\ \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Matriks Transfer T

$$T = M_{12}M_{23}M_{34}M_{45},$$

Jika dilakukan pemisalan

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} & -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \\ -\frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{-ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k-p)} & \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k+p)} \\ \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k+p)} & \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k-p)} & -\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k+p)} \\ -\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k+p)} & \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k-p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$M_{45} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} & \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k+q)} \\ \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} & \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{ib(k-q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

maka

$$T = M_{12}M_{23}M_{34}M_{45}$$

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} (ae + bg)i + (af + bh)k & (ae + bg)j + (af + bh)l \\ (ce + dg)i + (cf + dh)k & (ce + dg)j + (cf + dh)l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

dengan

$$T_{11} = (ae + bg)im + (af + bh)km + (ae + bg)jo + (af + bh)lo,$$

$$T_{12} = (ae + bg)in + (af + bh)kn + (ae + bg)jp + (af + bh)lp,$$

$$T_{21} = (ce + dg)im + (cf + dh)km + (ce + dg)jo + (cf + dh)lo,$$

$$T_{22} = (ce + dg)in + (cf + dh)kn + (ce + dg)jp + (cf + dh)lp.$$

Substitusi nilai $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k,$ dan l untuk mendapatkan nilai

$T_{11}, T_{12}, T_{21},$ dan $T_{22}.$

$$T_{11} = (ae + bg)im + (af + bh)km + (ae + bg)jo + (af + bh)lo$$

$$T_{11} = aeim + bgim + afkm + bhkm + aejo + bgjo + aflo + bhlo$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k-p)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k-p)} \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} \\ &\quad - \frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k+p)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k-p)} \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k+p)} \left(-\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k+p)} \right) \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} \\ &\quad - \frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k-p)} \left(-\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{ia(k+p)} \right) \frac{(\alpha + \beta)}{2\alpha} e^{-ib(k-q)} \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k-p)} \left(-\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k+p)} \right) \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} \\ &\quad - \frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k+p)} \left(-\frac{(\alpha - \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k+p)} \right) \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta)}{2\beta} e^{-ib(k-q)} \frac{(\alpha - \gamma)}{2\alpha} e^{ia(k+p)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k-p)} \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} \\ &\quad - \frac{(\alpha - \beta)}{2\beta} e^{ib(k+q)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\alpha} e^{-ia(k-p)} \frac{(\alpha + \gamma)}{2\gamma} e^{-ia(k-p)} \frac{(\alpha - \beta)}{2\alpha} e^{ib(k+q)} \\ T_{11} &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ikb+2ika-2ipa} \\ &\quad - \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ipa} \\ &\quad - \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma)(\alpha + \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ikb+2ika+2ipa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma)(\alpha + \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ipa} \\
& - \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ipa} \\
& + \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ikb-2ika-2ipa} \\
& + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha - \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ipa} \\
& - \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma)(\alpha - \beta)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ikb-2ika+2ipa} \\
T_{11} = & \frac{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \gamma)^2}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ikb+2ika-2ipa} - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ipa} \\
& - \frac{(\alpha + \beta)^2(\alpha - \gamma)^2}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ikb+2ika+2ipa} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ipa} \\
& - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb-2ipa} + \frac{(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ikb-2ika-2ipa} \\
& + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ipa} - \frac{(\alpha - \beta)^2(\alpha + \gamma)^2}{16\alpha^2\beta\gamma} e^{2iqb+2ikb-2ika+2ipa} \\
T_{11} = & \frac{e^{2iqb}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{ (\alpha + \gamma)^2 [(\alpha + \beta)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (\alpha - \beta)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \\
& + (\alpha - \gamma)^2 [(\alpha - \beta)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (\alpha + \beta)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \\
& + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \} \tag{C.17}
\end{aligned}$$

LAMPIRAN D
PENURUNAN PERSAMAAN T_{11}

Penurunan Persamaan T_{11} Persamaan Dirac

$$T_{11} = \frac{e^{2iqb}}{16\alpha^2\beta\gamma} \left\{ (\alpha + \gamma)^2 [(\alpha + \beta)^2 e^{2i(k(a-b)-pa)} - (\alpha - \beta)^2 e^{-2i(k(a-b)-pa)}] \right. \\ \left. + (\alpha - \gamma)^2 [(\alpha - \beta)^2 e^{-2i(k(a-b)+pa)} - (\alpha + \beta)^2 e^{2i(k(a-b)+pa)}] \right. \\ \left. + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \right\}$$

$$0 = \frac{e^{2iqb}}{16\alpha^2\beta\gamma} \left\{ (\alpha + \gamma)^2 [(\alpha + \beta)^2 e^{2ik(a-b)} e^{-2ipa} - (\alpha - \beta)^2 e^{-2ik(a-b)} e^{2ipa}] \right. \\ \left. + (\alpha - \gamma)^2 [(\alpha - \beta)^2 e^{-2ik(a-b)} e^{-2ipa} - (\alpha + \beta)^2 e^{2ik(a-b)} e^{2ipa}] \right. \\ \left. + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \right\}$$

Diberikan pemisalan sebagai berikut:

$$(\alpha + \gamma)^2 = A$$

$$(\alpha - \gamma)^2 = B$$

$$(\alpha + \beta)^2 = C$$

$$(\alpha - \beta)^2 = D$$

$$2k(a - b) = X$$

$$2pa = Y$$

$$2qb = Z$$

Selanjutnya,

$$0 = \frac{e^{2iqb}}{16\alpha^2\beta\gamma} \left\{ (\alpha + \gamma)^2 (\alpha + \beta)^2 e^{2ik(a-b)} e^{-2ipa} \right. \\ \left. - (\alpha + \gamma)^2 (\alpha - \beta)^2 e^{-2ik(a-b)} e^{2ipa} \right. \\ \left. + (\alpha - \gamma)^2 (\alpha - \beta)^2 e^{-2ik(a-b)} e^{-2ipa} \right. \\ \left. - (\alpha - \gamma)^2 (\alpha + \beta)^2 e^{2ik(a-b)} e^{2ipa} \right. \\ \left. + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) [e^{2ipa} - e^{-2ipa}] \right\}$$

$$0 = \frac{e^{iz}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{ACe^{iX}e^{-iY} - ADe^{-iX}e^{iY} + BDe^{-iX}e^{-iY} - BCe^{iX}e^{iY} \\ + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)[e^{iY} - e^{-iY}]\}$$

$$0 = \frac{e^{iz}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{AC(\cos X + i \sin X)(\cos Y - i \sin Y) \\ - AD(\cos X - i \sin X)(\cos Y + i \sin Y) \\ + BD(\cos X - i \sin X)(\cos Y - i \sin Y) \\ - BC(\cos X + i \sin X)(\cos Y + i \sin Y) \\ + 2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)[(2i \sin Y)]\}$$

$$0 = \frac{e^{iz}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{AC \cos X \cos Y - ACi \cos X \sin Y + ACi \sin X \cos Y \\ + AC \sin X \sin Y - AD \cos X \cos Y - ADi \cos X \sin Y \\ + ADi \sin X \cos Y - AD \sin X \sin Y + BD \cos X \cos Y \\ - BDi \cos X \sin Y - BDi \sin X \cos Y - BD \sin X \sin Y \\ - BC \cos X \cos Y - BCi \cos X \sin Y - BCi \sin X \cos Y \\ + BC \sin X \sin Y + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y\}$$

$$0 = \frac{e^{iz}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{AC \cos X \cos Y - AD \cos X \cos Y + BD \cos X \cos Y \\ - BC \cos X \cos Y + AC \sin X \sin Y - AD \sin X \sin Y \\ - BD \sin X \sin Y + BC \sin X \sin Y - ACi \cos X \sin Y \\ - ADi \cos X \sin Y - BDi \cos X \sin Y - BCi \cos X \sin Y \\ + ACi \sin X \cos Y + ADi \sin X \cos Y - BDi \sin X \cos Y \\ - BCi \sin X \cos Y + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y\}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{e^{iz}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{ (AC - AD + BD - BC) \cos X \cos Y \\
&\quad + (AC - AD - BD + BC) \sin X \sin Y \\
&\quad - i(AC + AD + BD + BC) \cos X \sin Y \\
&\quad + i(AC + AD - BD - BC) \sin X \cos Y \\
&\quad + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \}
\end{aligned}$$

Perhitungan $(AC - AD + BD - BC)$

$$AC - AD + BD - BC$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha + \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 \\
&\quad - (\alpha - \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 \\
&= (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad + (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad - (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad - \alpha^4 + 2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \\
&\quad + \alpha^4 - 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad - \alpha^4 - 2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \\
&= 16\alpha^2\beta\gamma \\
&= 16\alpha^2\beta\gamma
\end{aligned}$$

Perhitungan $(AC - AD - BD + BC)$

$$AC - AD - BD + BC$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha + \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 \\
&\quad + (\alpha - \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 \\
&= (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad - (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad + (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad - \alpha^4 + 2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \\
&\quad - \alpha^4 + 2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma - 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \\
&\quad + \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma - 4\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8\alpha^3\beta + 8\alpha\beta\gamma^2 \\
&= 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2)
\end{aligned}$$

Perhitungan $(AC + AD + BD + BC)$

$$AC + AD + BD + BC$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha + \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 \\
&\quad + (\alpha - \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 \\
&= (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad + (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad + (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad + \alpha^4 - 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma - 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad + \alpha^4 - 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad + \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3\gamma - 4\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&= 4\alpha^4 + 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\gamma^2 + 4\beta^2\gamma^2 \\
&= 4(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) \\
&= 4(\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)) \\
&= 4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2)
\end{aligned}$$

Perhitungan $(AC + AD - BD - BC)$

$$AC + AD - BD - BC$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha + \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \beta)^2 \\
&\quad - (\alpha - \gamma)^2(\alpha + \beta)^2 \\
&= (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad - (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&\quad - (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\
&= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad + \alpha^4 - 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma - 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\
&\quad - \alpha^4 + 2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma - 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \\
&\quad - \alpha^4 - 2\alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\gamma + 4\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \\
&= 8\alpha^3\gamma + 8\alpha\beta^2\gamma
\end{aligned}$$

$$= 8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2)$$

Selanjutnya dilakukan substitusi,

$$0 = \frac{e^{iZ}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{(AC - AD + BD - BC) \cos X \cos Y \\ + (AC - AD - BD + BC) \sin X \sin Y \\ - i(AC + AD + BD + BC) \cos X \sin Y \\ + i(AC + AD - BD - BC) \sin X \cos Y \\ + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y\}$$

$$0 = \frac{e^{iZ}}{16\alpha^2\beta\gamma} \{16\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y + 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \\ - 4i(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y + 8i\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \\ + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y\}$$

$$0 = \frac{\cos Z + i \sin Z}{16\alpha^2\beta\gamma} \{16\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y + 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \\ - 4i(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y + 8i\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \\ + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y\}$$

$$0 = \frac{1}{16\alpha^2\beta\gamma} \{16\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y \cos Z + 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \cos Z \\ - 4i(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y \cos Z \\ + 8i\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \cos Z \\ + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \cos Z + 16i\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y \sin Z \\ + 8i\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \sin Z \\ + 4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y \sin Z \\ - 8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \sin Z \\ - 4(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \sin Z\}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{16\alpha^2\beta\gamma} & \{16\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y \cos Z + 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \cos Z \\
& + 4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y \sin Z \\
& - 8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \sin Z \\
& - 4(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \sin Z + 16i\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y \sin Z \\
& + 8i\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \sin Z \\
& - 4i(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y \cos Z \\
& + 8i\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \cos Z \\
& + 4i(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \cos Z\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{16\alpha^2\beta\gamma} & \{[16\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y \cos Z + 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \cos Z \\
& + 4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y \sin Z \\
& - 8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \sin Z \\
& - 4(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \sin Z] \\
& + i[16\alpha^2\beta\gamma \cos X \cos Y \sin Z + 8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2) \sin X \sin Y \sin Z \\
& - 4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2) \cos X \sin Y \cos Z \\
& + 8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \sin X \cos Y \cos Z \\
& + 4(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2) \sin Y \cos Z]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\frac{16\alpha^2\beta\gamma}{16\alpha^2\beta\gamma} \cos X \cos Y \cos Z + \frac{8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \sin X \sin Y \cos Z \right. \\
& + \frac{4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \cos X \sin Y \sin Z \\
& - \frac{8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \sin X \cos Y \sin Z \\
& \left. - \frac{4(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \sin Y \sin Z \right] \\
& + i \left[\frac{16\alpha^2\beta\gamma}{16\alpha^2\beta\gamma} \cos X \cos Y \sin Z + \frac{8\alpha\beta(\alpha^2 + \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \sin X \sin Y \sin Z \right. \\
& - \frac{4(\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \cos X \sin Y \cos Z \\
& + \frac{8\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \sin X \cos Y \cos Z \\
& \left. + \frac{4(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{16\alpha^2\beta\gamma} \sin Y \cos Z \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\cos X \cos Y \cos Z + \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)}{2\alpha\gamma} \sin X \sin Y \cos Z \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \cos X \sin Y \sin Z \\
& \left. - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha\beta} \sin X \cos Y \sin Z - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \sin Y \sin Z \right] \\
& + i \left[\cos X \cos Y \sin Z + \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)}{2\alpha\gamma} \sin X \sin Y \sin Z \right. \\
& - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \cos X \sin Y \cos Z \\
& \left. + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha\beta} \sin X \cos Y \cos Z + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \sin Y \cos Z \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\cos 2k(a - b) \cos 2pa \cos 2qb + \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)}{2\alpha\gamma} \sin 2k(a - b) \sin 2pa \cos 2qb \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \cos 2k(a - b) \sin 2pa \sin 2qb \\
& - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha\beta} \sin 2k(a - b) \cos 2pa \sin 2qb \\
& \left. - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \sin 2pa \sin 2qb \right] \\
& + i \left[\cos 2k(a - b) \cos 2pa \sin 2qb \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)}{2\alpha\gamma} \sin 2k(a - b) \sin 2pa \sin 2qb \\
& - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \cos 2k(a - b) \sin 2pa \cos 2qb \\
& + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2\alpha\beta} \sin 2k(a - b) \cos 2pa \cos 2qb \\
& \left. + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}{4\alpha^2\beta\gamma} \sin 2pa \cos 2qb \right]
\end{aligned}$$

LAMPIRAN E

SCRIPT GRAFIK SOLUSI PERSAMAAN T_{11}

1. Plot *eigenvalue* E_n model VDSP dari persamaan Klein-Gordon (Gambar 4.1) dan plot *eigenvalue* E_n model VDSP dari persamaan Klein-Gordon pada rentang 0 – 100000 (Gambar 4.2)

```
(*VDSP*)
Clear[f];

f[Va_, En_] := Module[{Vb = 50 000, a = 0.01, b = 0.02, c = 137.036, k, p, q},
  k = Sqrt[En^2 - c^4] / c;
  p = Sqrt[(En + c^2 - Va) * (En - c^2 - Va)] / c;
  q = Sqrt[(En + c^2 - Vb) * (En - c^2 - Vb)] / c;
  Simplify[
    (E^(2*I*q*b) / (16*k^2*p*q) *
      ((k+p)^2 * ((k+q)^2 * E^(2*I*(k*(a-b) - p*a)) -
        (k-q)^2 * E^(-2*I*(k*(a-b) - p*a))) +
      ((k-p)^2 * ((k-q)^2 * E^(-2*I*(k*(a-b) + p*a)) -
        (k+q)^2 * E^(2*I*(k*(a-b) + p*a))) +
      2*(k^2 - q^2) * (k^2 - p^2) *
      (E^(2*I*p*a) - E^(-2*I*p*a))))];

If[True,
  Block[{En, Va, tab, cols = {RGBColor[0.2, 0.5, 1], RGBColor[1, 0.5, 0]},
    prVa = {0, 50 000}, prEn = {30 000, 70 000}},
    (*Desired Va values and function heights*)
    en0s = Range[First[prEn], Last[prEn], 40 000];
    va0s = Range[First[prVa], Last[prVa], 10 000];
    cntVa0s = Length[va0s];
    (*Define function; f is defined globally*)
    If[False, Print[f[Va, En]]];

    (*Show real part of function-values*)
    Print[ContourPlot[{Re[f[Va, En]]}, {Va, First[prVa], Last[prVa]},
      {En, First[prEn], Last[prEn]}, PlotRange -> All,
      ContourStyle -> Dashed, PlotPoints -> {50, 40}, MaxRecursion -> 2,
      FrameLabel -> {"Va", "En"}, PlotLegends -> {"Re(f)"},
      PlotLabel -> Style["VDSP (Persamaan Klein-Gordon)", Black, Bold],
      AxesOrigin -> Automatic, Frame -> True,
      Epilog -> {Darker[Black], Thin, DotDashed, Red,
        Line[{{First[prVa], #}, {Last[prVa], #}} & /@ en0s}]];

    (*Show real and imaginary part of function-values*)
    Print[ContourPlot[{Re[f[Va, En]], Im[f[Va, En]]}, {Va, 0, 50 000},
      {En, 0, 100 000}, PlotRange -> All, ContourStyle -> cols,
      PlotPoints -> {100, 100}, MaxRecursion -> 2, FrameLabel -> {"Va", "En"},
      PlotLabel -> Style["VDSP (Persamaan Klein-Gordon)", Black, Bold],
      PlotLegends -> {"Re(f)", "Im(f)"}]];];];
```

2. Plot *eigenvalue* E_n model VDSP dari persamaan Dirac (Gambar 4.3) dan plot *eigenvalue* E_n model VDSP dari persamaan Dirac pada rentang 0 – 100000 (Gambar 4.4)

```

In[1]:= (*VDSP*)
Clear[f];

f[Va_, En_] :=
Module[{Vb = 50000, a = 0.01, b = 0.02, c = 137.036, k, p, q, α, β, γ},
k = Sqrt[En^2 - c^4] / c;
p = Sqrt[(En + c^2 - Va) * (En - c^2 - Va)] / c;
q = Sqrt[(En + c^2 - Vb) * (En - c^2 - Vb)] / c;
α = Sqrt[(En - c^2) / (En + c^2)];
β = Sqrt[(En - c^2 - Vb) / (En + c^2 - Vb)];
γ = Sqrt[(En - c^2 - Va) / (En + c^2 - Va)];
Simplify[
(E^(2*I*q*b) / (16*α^2*β*γ) *
((α+γ)^2 * ((α+β)^2 * E^(2*I*(k*(a-b) - p*a)) -
(α-β)^2 * E^(-2*I*(k*(a-b) - p*a))) +
((α-γ)^2 * ((α-β)^2 * E^(-2*I*(k*(a-b) + p*a)) -
(α+β)^2 * E^(2*I*(k*(a-b) + p*a))) +
2*(α^2 - β^2) * (α^2 - γ^2) *
(E^(2*I*p*a) - E^(-2*I*p*a))))];

If[True,
Block[{En, Va, tab, cols = {RGBColor[0.2, 0.5, 1], RGBColor[1, 0.5, 0]},
prVa = {0, 50000}, prEn = {30000, 70000}},
(*Desired Va values and function heights*)
en0s = Range[First[prEn], Last[prEn], 40000];
va0s = Range[First[prVa], Last[prVa], 10000];
cntVa0s = Length[va0s];
(*Define function; f is defined globally*)
If[False, Print[f[Va, En]]];

(*Show real part of function-values*)
Print[ContourPlot[{Re[f[Va, En]]}, {Va, First[prVa], Last[prVa]},
{En, First[prEn], Last[prEn]}, PlotRange -> All,
ContourStyle -> Dashed, PlotPoints -> {50, 40}, MaxRecursion -> 2,
FrameLabel -> {"Va", "En"}, PlotLegends -> {"Re(f)"},
PlotLabel -> Style["VDSP (Persamaan Dirac)", Black, Bold],
AxesOrigin -> Automatic, Frame -> True,
Epilog -> {Darker[Black], Thin, DotDashed, Red,
Line[{{First[prVa], #}, {Last[prVa], #}} & /@ en0s}}];

(*Show real and imaginary part of function-values*)
Print[ContourPlot[{Re[f[Va, En]], Im[f[Va, En]]}, {Va, 0, 50000},
{En, 0, 100000}, PlotRange -> All, ContourStyle -> cols,
PlotPoints -> {100, 100}, MaxRecursion -> 2, FrameLabel -> {"Va", "En"},
PlotLegends -> {"Re(f)", "Im(f)"},
PlotLabel -> Style["VDSP (Persamaan Dirac)", Black, Bold]]];];

```


3. Plot *eigenvalue* E_n model SDSP dari persamaan Klein-Gordon (Gambar 4.5) dan plot *eigenvalue* E_n model SDSP dari persamaan Klein-Gordon pada rentang 0 – 100000 (Gambar 4.6)

```

In[1]:= (*SDSP*)
Clear[f];

f[Sa_, En_] := Module[{Sb = 50 000, a = 0.01, b = 0.02, c = 137.036, k, p, q},
  k = Sqrt[En^2 - c^4] / c;
  p = Sqrt[(En + c^2 + Sa) * (En - c^2 - Sa)] / c;
  q = Sqrt[(En + c^2 + Sb) * (En - c^2 - Sb)] / c;
  Simplify[
    (E^(2*I*q*b) / (16*k^2*p*q) *
      (((k+p)^2) * ((k+q)^2*E^(2*I*(k(a-b) - p*a)) -
        (k-q)^2*E^(-2*I*(k(a-b) - p*a))) +
      ((k-p)^2) * ((k-q)^2*E^(-2*I*(k(a-b) + p*a)) -
        (k+q)^2*E^(2*I*(k(a-b) + p*a))) +
      2*(k^2 - q^2) * (k^2 - p^2) *
      (E^(2*I*p*a) - E^(-2*I*p*a))))];
  If[True,
    Block[{En, Sa, tab, cols = {RGBColor[0.2, 0.5, 1], RGBColor[1, 0.5, 0]},
      prSa = {0, 50 000}, prEn = {20 000, 70 000}},
      (*Desired Sa values and function heights*)
      en0s = Range[First[prEn], Last[prEn], 50 000];
      sa0s = Range[First[prSa], Last[prSa], 10 000];
      cntSa0s = Length[sa0s];
      (*Define function;f is defined globally*)
      If[False, Print[f[Sa, En]]];

      (*Show real part of function-values*)
      Print[ContourPlot[{Re[f[Sa, En]]}, {Sa, First[prSa], Last[prSa]},
        {En, First[prEn], Last[prEn]}, PlotRange -> All,
        ContourStyle -> Dashed, PlotPoints -> {100, 100}, MaxRecursion -> 2,
        FrameLabel -> {"Sa", "En"}, PlotLegends -> {"Re(f)"},
        PlotLabel -> Style["SDSP (Persamaan Klein-Gordon)", Black, Bold],
        AxesOrigin -> Automatic, Frame -> True,
        Epilog -> {Darker[Black], Thin, DotDashed, Red,
          Line[{{First[prSa], #}, {Last[prSa], #}} & /@ en0s]}];

      (*Show real and imaginary part of function-values*)
      Print[ContourPlot[{Re[f[Sa, En]], Im[f[Sa, En]]}, {Sa, 0, 50 000},
        {En, 10 000, 100 000}, PlotRange -> All, ContourStyle -> cols,
        PlotPoints -> {100, 100}, MaxRecursion -> 2, FrameLabel -> {"Sa", "En"},
        PlotLabel -> Style["SDSP (Persamaan Klein-Gordon)", Black, Bold],
        PlotLegends -> {"Re(f)", "Im(f)"}];];];

```

4. Plot *eigenvalue* E_n model SDSP dari persamaan Dirac (Gambar 4.7) dan plot *eigenvalue* E_n model SDSP dari persamaan Dirac pada rentang 0 – 100000 (Gambar 4.8)

```

In[7]:= (*SDSP*)
Clear[f];

f[Sa_, En_] :=
Module[{Sb = 50000, a = 0.01, b = 0.02, c = 137.036, k, p, q, α, β, γ},
k = Sqrt[En^2 - c^4] / c;
p = Sqrt[(En + c^2 + Sa) * (En - c^2 - Sa)] / c;
q = Sqrt[(En + c^2 + Sb) * (En - c^2 - Sb)] / c;
α = Sqrt[(En - c^2) / (En + c^2)];
β = Sqrt[(En - c^2 - Sb) / (En + c^2 + Sb)];
γ = Sqrt[(En - c^2 - Sa) / (En + c^2 + Sa)];
Simplify[
(E^(2*I*q*b) / (16*α^2*β*γ) *
((α+γ)^2 * (α+β)^2 * E^(2*I*(k*(a-b) - p*a)) -
(α-β)^2 * E^(-2*I*(k*(a-b) - p*a))) +
((α-γ)^2 * (α-β)^2 * E^(-2*I*(k*(a-b) + p*a)) -
(α+β)^2 * E^(2*I*(k*(a-b) + p*a))) +
2*(α^2 - β^2) * (α^2 - γ^2) *
(E^(2*I*p*a) - E^(-2*I*p*a)))]];

If[True,
Block[{En, Sa, tab, cols = {RGBColor[0.2, 0.4, 1], RGBColor[1, 0.5, 0]},
prSa = {0, 50000}, prEn = {20000, 70000}},
(*Desired Sa values and function heights*)
en0s = Range[First[prEn], Last[prEn], 50000];
sa0s = Range[First[prSa], Last[prSa], 10000];
cntSa0s = Length[sa0s];
(*Define function; f is defined globally*)
If[False, Print[f[Sa, En]]];

(*Show real part of function-values*)
Print[ContourPlot[{Re[f[Sa, En]]}, {Sa, First[prSa], Last[prSa]},
{En, First[prEn], Last[prEn]}, PlotRange -> All,
ContourStyle -> Dashed, PlotPoints -> {100, 100}, MaxRecursion -> 2,
FrameLabel -> {"Sa", "En"}, PlotLegends -> {"Re(f)"},
PlotLabel -> Style["SDSP (Persamaan Dirac)", Black, Bold],
AxesOrigin -> Automatic, Frame -> True,
Epilog -> {Darker[Black], Thin, DotDashed, Red,
Line[{{First[prSa], #}, {Last[prSa], #}} & /@ en0s]}]];

(*Show real and imaginary part of function-values*)
Print[ContourPlot[{Re[f[Sa, En]], Im[f[Sa, En]]}, {Sa, 0, 50000},
{En, 0, 100000}, PlotRange -> All, ContourStyle -> cols,
PlotPoints -> {100, 100},
PlotLabel -> Style["SDSP (Persamaan Dirac)", Black, Bold],
MaxRecursion -> 2, FrameLabel -> {"Sa", "En"},
PlotLegends -> {"Re(f)", "Im(f)"}]];];];

```

5. Plot *eigenvalue* E_n model EDSP dari persamaan Klein-Gordon (Gambar 4.9) dan plot *eigenvalue* E_n model EDSP dari persamaan Klein-Gordon pada rentang 0 – 100000 (Gambar 4.10)

```
(*EDSP*)
Clear[f];

f[SaVa_, En_] :=
Module[{Sb = 25000, Vb = 25000, a = 0.01, b = 0.02, c = 137.036, k, p, q},
k = Sqrt[En^2 - c^4] / c;
p = Sqrt[(En + c^2) * (En - c^2 - 2 * SaVa)] / c;
q = Sqrt[(En + c^2 - Vb + Sb) * (En - c^2 - Vb - Sb)] / c;
Simplify[
(E^(2*I*q*b) / (16*k^2*p*q) *
((k + p)^2 * ((k + q)^2 * E^(2*I*(k*(a - b) - p*a)) -
(k - q)^2 * E^(-2*I*(k*(a - b) - p*a))) +
((k - p)^2 * ((k - q)^2 * E^(-2*I*(k*(a - b) + p*a)) -
(k + q)^2 * E^(2*I*(k*(a - b) + p*a))) +
2*(k^2 - q^2) * (k^2 - p^2) *
(E^(2*I*p*a) - E^(-2*I*p*a))))]];

If[True,
Block[{En, SaVa, tab,
cols = {RGBColor[0.2, 0.5, 1], RGBColor[1, 0.5, 0]},
prSaVa = {0, 25000}, prEn = {20000, 70000}},
(*Desired Va values and function heights*)
en0s = Range[First[prEn], Last[prEn], 50000];
sava0s = Range[First[prSaVa], Last[prSaVa], 5000];
cntSaVa0s = Length[sava0s];
(*Define function; f is defined globally*)
If[False, Print[f[SaVa, En]]];

(*Show real part of function-values*)
Print[ContourPlot[{Re[f[SaVa, En]]},
{SaVa, First[prSaVa], Last[prSaVa]}, {En, First[prEn], Last[prEn]},
PlotRange -> All, ContourStyle -> Dashed, PlotPoints -> {50, 40},
MaxRecursion -> 2, FrameLabel -> {"Sa(=Va)", "En"},
PlotLegends -> {"Re(f)"},
PlotLabel -> Style["EDSP (Persamaan Klein-Gordon)", Black, Bold],
AxesOrigin -> Automatic, Frame -> True,
Epilog -> {Darker[Black], Thin, DotDashed, Red,
Line[{{First[prSaVa], #}, {Last[prSaVa], #}} & /@ en0s}}]];

(*Show real and imaginary part of function-values*)
Print[ContourPlot[{Re[f[SaVa, En]], Im[f[SaVa, En]]}, {SaVa, 0, 25000},
{En, 0, 100000}, PlotRange -> All, ContourStyle -> cols,
PlotPoints -> {50, 40}, MaxRecursion -> 2, FrameLabel -> {"SaVa", "En"},
PlotLabel -> Style["EDSP (Persamaan Klein-Gordon)", Black, Bold],
PlotLegends -> {"Re(f)", "Im(f)"}]];

```

6. Plot *eigenvalue* E_n model EDSP dari persamaan Dirac (Gambar 4.11) dan plot *eigenvalue* E_n model EDSP dari persamaan Dirac pada rentang 0 – 100000 (Gambar 4.12)

```

In[10]:= (*EDSP*)
Clear[f];

f[SaVa_, En_] :=
Module[{Sb = 25000, Vb = 25000, a = 0.01, b = 0.02, c = 137.036,
  k, p, q, α, β, γ},
  k = Sqrt[En^2 - c^4] / c;
  p = Sqrt[(En + c^2) * (En - c^2 - 2 * SaVa)] / c;
  q = Sqrt[(En + c^2) * (En - c^2 - Vb - Sb)] / c;
  α = Sqrt[(En - c^2) / (En + c^2)];
  β = Sqrt[(En - c^2 - Vb - Sb) / (En + c^2)];
  γ = Sqrt[(En - c^2 - 2 * SaVa) / (En + c^2)];
  Simplify[
    (E^(2 * I * q * b) / (16 * α^2 * β * γ) *
      ((α + γ)^2 * ((α + β)^2 * E^(2 * I * (k * (a - b) - p * a)) -
        (α - β)^2 * E^(-2 * I * (k * (a - b) - p * a))) +
      ((α - γ)^2 * ((α - β)^2 * E^(2 * I * (k * (a - b) + p * a)) -
        (α + β)^2 * E^(2 * I * (k * (a - b) + p * a))) +
      2 * (α^2 - β^2) * (α^2 - γ^2) *
      (E^(2 * I * p * a) - E^(-2 * I * p * a))))];

If[True,
  Block[{En, SaVa, tab,
    cols = {RGBColor[0.4, 0.7, 1], RGBColor[1, 0.5, 0]},
    prSaVa = {0, 25000}, prEn = {20000, 70000}},
    (*Desired Va values and function heights*)
    en0s = Range[First[prEn], Last[prEn], 50000];
    sava0s = Range[First[prSaVa], Last[prSaVa], 5000];
    cntSaVa0s = Length[sava0s];
    (*Define function; f is defined globally*)
    If[False, Print[f[SaVa, En]]];

    (*Show real part of function-values*)
    Print[ContourPlot[{Re[f[SaVa, En]]},
      {SaVa, First[prSaVa], Last[prSaVa]},
      {En, First[prEn], Last[prEn]}, PlotRange → All,
      ContourStyle → Dashed, PlotPoints → {60, 40}, MaxRecursion → 2,
      FrameLabel → {"Sa(=Va)", "En"}, PlotLegends → {"Re(f)"},
      PlotLabel → Style["EDSP (Persamaan Dirac)", Black, Bold],
      AxesOrigin → Automatic, Frame → True,
      Epilog → {Darker[Black], Thin, DotDashed, Red,
        Line[{{First[prSaVa], #}, {Last[prSaVa], #}} & /@ en0s}}]];

    (*Show real and imaginary part of function-values*)
    Print[ContourPlot[{Re[f[SaVa, En]], Im[f[SaVa, En]]},
      {SaVa, 0, 25000}, {En, 0, 100000}, PlotRange → All,
      ContourStyle → cols, PlotPoints → {50, 40}, MaxRecursion → 2,
      FrameLabel → {"Sa(=Va)", "En"},
      PlotLabel → Style["EDSP (Persamaan Dirac)", Black, Bold],
      PlotLegends → {"Re(f)", "Im(f)"}]];

```



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Afifatul Husna Kukuh Amrulloh
NIM : 16640001
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Fisika
Judul Skripsi : Studi Persamaan Klein-Gordon dan Persamaan Dirac dalam Sumur Potensial Persegi Ganda Simetri
Pembimbing I : Drs. Abdul Basid, M.Si
Pembimbing II : Arista Romadani, M.Sc

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	28 Juli 2020	Konsultasi Judul	/
2	19 Agustus 2020	Konsultasi BAB I	/
3	1 September 2020	ACC Bab I	/
4	22 September 2020	Konsultasi BAB II	/
5	28 September 2020	Konsultasi BAB II dan III	/
6	7 Oktober 2020	ACC Proposal Penelitian Skripsi	/
7	24 Desember 2020	Konsultasi Bab IV	/
8	15 Februari 2021	Konsultasi Bab IV (Penurunan Rumus)	/
9	29 Maret 2021	Konsultasi Bab IV (Pemrograman)	/
10	6 April 2021	Konsultasi Integrasi	/
11	9 April 2021	ACC BAB IV	/
12	28 April 2021	ACC Integrasi	/
13	30 April 2021	Konsultasi Abstrak dan BAB V	/
14	2 Mei 2021	Konsultasi Penulisan dan Abstrak	/
15	4 Mei 2021	ACC Skripsi	/

Malang, 15 Juni 2021

Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
19650504 199003 1 003