

**INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK EDIZ PADA GRAF JACOBSON
DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

SKRIPSI

**OLEH
FAZA SILMI KAMILAH
NIM. 17610048**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK EDIZ PADA GRAF JACOBSON
DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Faza Silmi Kamilah
NIM. 17610048**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021**

**INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK EDIZ PADA GRAF JACOBSON
DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

SKRIPSI

Oleh
Faza Silmi Kamilah
NIM. 17610048

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 5 Mei 2021

Pembimbing I,



Mohammad Nasie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Pembimbing II,



Dewi Ismiarti, M.Si
NIDT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK EDIZ PADA GRAF JACOBSON
DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$**

SKRIPSI

Oleh
Faza Silmi Kamilah
NIM. 17610048

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

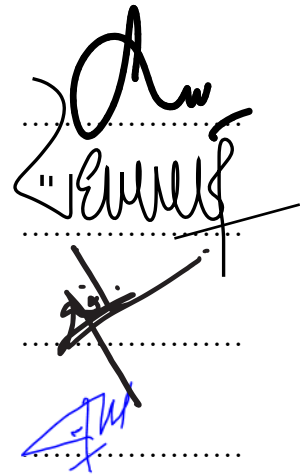
Tanggal 2 Juni 2021

Penguji Utama : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Ketua Penguji : Evawati Alisah, M.Pd

Sekretaris Penguji : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Anggota Penguji : Dewi Ismiarti, M.Si



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Faza Silmi Kamilah

NIM : 17610048

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring
Bilangan Bulat Modulo $2p$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 3 Mei 2021
Yang membuat pernyataan,



Faza Silmi Kamilah
NIM. 17610048

MOTO

“Ketahuilah bahwa kemenangan bersama kesabaran, kelapangan bersama
kesempitan dan kesulitan bersama kemudahan” – HR. Tirmidzi

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Achmad Nuchin dan ibunda Luluk Fauziah tercinta yang selalu berjuang tanpa lelah, memberikan doa, semangat, nasihat dan kasih sayang disetiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi lebih baik.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur bagi Allah Swt atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam juga tetap tercurah kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad Saw yang telah menunjukkan manusia kepada jalan yang terang (Islam).

Dalam proses penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dan motivasi kepada penulis.

5. Dewi Ismiarti, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dan motivasi kepada penulis.
6. Dr. Abdussakir, M.Pd selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah sabar dan ikhlas dalam mendidik dan memberikan ilmu kepada penulis.
8. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan doa, nasihat dan motivasi kepada penulis.
9. Teman-teman di Program Studi Matematika Angkatan 2017, terima kasih atas pengalaman berharga yang dirajut bersama.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Jurusan Matematika.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 3 Mei 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	8
2.1 Graf.....	8
2.2 Jalan, Jejak, Lintasan	8
2.3 Graf Terhubung	9
2.4 Derajat Titik.....	10
2.5 Eksentrisitas Titik.....	11
2.6 Ring	12
2.7 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan.....	13
2.8 Kongruensi Modulo n	13
2.9 Ring Bilangan Bulat Modulo n	15

2.10	Ideal	16
2.11	Ideal Maksimal	20
2.12	Jacobson Radical	21
2.13	Graf Jacobson	22
2.14	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz	22
2.15	Kajian Keislaman	22
BAB III PEMBAHASAN		26
3.1	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{2p} , $p \in \{3, 5, 7, 11\}$	26
3.1.1	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_6	26
3.1.2	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{10}	30
3.1.3	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{14}	36
3.1.4	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{22}	41
3.2	Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{2p} , $p \geq 3$, p prima	54
3.3	Integrasi Hasil Penelitian dengan Kajian Keislaman	71
BAB IV PENUTUP		73
4.1	Kesimpulan	73
4.2	Saran	73
DAFTAR PUSTAKA		74
RIWAYAT HIDUP		

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_6 \vee (\mathbb{Z}_6)$	28
Tabel 3.2	Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$	29
Tabel 3.3	Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$	29
Tabel 3.4	Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$	29
Tabel 3.5	Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_{10} \vee (\mathbb{Z}_{10})$	32
Tabel 3.6	Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$	33
Tabel 3.7	Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$	34
Tabel 3.8	Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$	34
Tabel 3.9	Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_{14} \vee (\mathbb{Z}_{14})$	37
Tabel 3.10	Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$	38
Tabel 3.11	Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$	39
Tabel 3.12	Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$	39
Tabel 3.13	Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_{22} \vee (\mathbb{Z}_{22})$	43
Tabel 3.14	Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$	45
Tabel 3.15	Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$	46
Tabel 3.16	Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$	47
Tabel 3.17	Tabel Gambar $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$	50
Tabel 3.18	Perhitungan Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$	52

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf Terhubung dan Tak Terhubung	9
Gambar 2.2	Contoh Derajat Titik	10
Gambar 2.3	Contoh Eksentrisitas Titik.....	11
Gambar 2.4	Diagram <i>Lattice</i> dari Ideal pada \mathbb{Z}_{10}	21
Gambar 3.1	Diagram <i>Lattice</i> dari Ideal pada \mathbb{Z}_6	27
Gambar 3.2	Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$	28
Gambar 3.3	Diagram <i>Lattice</i> dari Ideal pada \mathbb{Z}_{10}	31
Gambar 3.4	Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$	32
Gambar 3.5	Diagram <i>Lattice</i> dari Ideal pada \mathbb{Z}_{14}	36
Gambar 3.6	Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$	38
Gambar 3.7	Diagram <i>Lattice</i> dari Ideal pada \mathbb{Z}_{22}	42
Gambar 3.8	Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$	44

ABSTRAK

Kamilah, Faza Silmi. 2021. **Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$** . Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata Kunci: Graf Jacobson, Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$, Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz.

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal dari R . Graf Jacobson dari R , dinotasikan dengan \mathfrak{J}_R , adalah graf dengan himpunan titik $R \setminus J(R)$ sedemikian hingga dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy$ bukan anggota himpunan unit di R . Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada suatu graf terhubung sederhana G didefinisikan sebagai $\xi^{ad}(G) = \sum_{v \in V} \frac{S(v)}{e(v)}$, di mana $S(v)$ adalah jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan titik v di G dan $e(v)$ adalah eksentrisitas dari titik v di G . Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan $p \geq 3$, p prima. Penelitian ini diawali dengan membangun graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$, kemudian menghitung indeks konektivitas eksentrik Ediz dari setiap graf dan merumuskan dugaan tentang indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dan yang terakhir yaitu membuktikan dugaan yang diperoleh. Hasil penelitian ini adalah $\xi^{ad}(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \frac{p^3 - p^2 + p - 3}{2} + \frac{p^2 + p - 6}{3}$, $p \geq 3$, p prima.

ABSTRACT

Kamilah, Faza Silmi. 2021. **Ediz Eccentric Connectivity Index of the Jacobson Graph of the Ring of Integers Modulo $2p$** . Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: Jacobson graph, the Ring of Integers Modulo $2p$, Ediz Eccentric Connectivity Index.

Let R be a commutative ring with unity and $J(R)$ is the intersection of all maximal ideal of R . The Jacobson graph of R , denoted by \mathfrak{J}_R , is defined as a graph with vertex set $R \setminus J(R)$ such that two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $1 - xy$ is not an element of the unit set in R . The Ediz eccentric connectivity index of a simple connected graph G is defined as $\xi^{ad}(G) = \sum_{v \in V} \frac{S(v)}{e(v)}$, where $S(v)$ is the sum of degrees of all vertices adjacent to the vertex v in G and $e(v)$ is the eccentricity of vertex v in G . This study aims to determine the general formula of the Ediz eccentric connectivity index of the Jacobson graph of the ring of integers modulo $2p$ with $p \geq 3$, p is prime. The first step of this study is to construct a Jacobson graph of the ring of integers modulo $2p$, then calculates the Ediz eccentric connectivity index of each graph and formulates the conjectures about the Ediz eccentric connectivity index of the Jacobson graph of the ring of integers modulo $2p$, and the last is to prove the conjectures. The result of this study is $\xi^{ad}(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \frac{p^3 - p^2 + p - 3}{2} + \frac{p^2 + p - 6}{3}$, $p \geq 3$, p is prime.

ملخص

كاملة، فاز سلمى. ٢٠٢١. مئشر الربط الانحراف Ediz على المخطط جاكوبسون من حلقة أعداد صحيحة modulo $2p$. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (١) محمد نافع جوهرى الماجستير، المشرفة: (٢) دوي إسميرتي الماجستير.

الكلمات الرئيسية: مخطط جاكوبسون، حلقة أعداد صحيحة modulo $2p$ ، مئشر الربط الانحراف Ediz.

ليكن R حلقة تبادلية مع الوحدة و $J(R)$ هو تقاطع كل المثالية القصوى ل R . يعرف مخطط جاكوبسون ل R ، يرمز إليه \mathfrak{J}_R ، على أنه مخطط به مجموعة رؤوس $R \setminus J(R)$ و رأسان متميزتين x و y مجاورتين إذا وفقط إذا $1 - xy$ لا يكون عنصرا من الوحدة المحددة في R . مئشر الربط الانحراف Ediz من مخطط متصل بسط G يعرف بأنه $\xi^{ad}(G) = \sum_{v \in V} \frac{S(v)}{e(v)}$ ، حيث $S(v)$ هو مجموع درجات جمع رؤوس المجاورة لرأس v في G و $e(v)$ هو انحراف رأس v في G . تهدف هذه الدراسة إلى إيجاد الصيغة العمة لمؤشر الربط الانحراف Ediz على مخطط جاكوبسون من حلقة أعداد صحيحة modulo $2p$ مع عدد أولي، $p \geq 3$. الخطوة الأولى من هذه الدراسة هو بناء مخطط جاكوبسون من حلقة أعداد صحيحة modulo $2p$. ثم حساب المؤشر الربط الانحراف Ediz كل مخطط وصياغة تخمين حول المؤشر الربط الانحراف Ediz على مخطط جاكوبسون من حلقة أعداد صحيحة modulo $2p$ والأخير هو إثبات التخمين الذي تم الحصول عليه. نتيجة هذه الدراسة هي

$$\xi^{ad}(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \frac{p^3 - p^2 + p - 3}{2} + \frac{p^2 + p - 6}{3}, p \geq 3.$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Selama dua dekade terakhir, penerapan teori graf mengalami kemajuan besar terutama dalam bidang kimia. Teori graf berkaitan dengan manipulasi struktur dan informasi struktural. Dengan bantuan metode matematika tersebut, struktur dan sifat dari molekul dapat diselidiki dengan menggunakan graf molekulnya. Dalam istilah teori graf, graf molekul merupakan representasi rumus struktur dari suatu senyawa kimia. Graf molekul atau graf kimia adalah model molekul dimana atom diwakili oleh titik dan ikatan kimia diwakili oleh sisi (Sharafdini & Safazadeh, 2016).

Allah SWT berfirman dalam QS. at-Taubah ayat 105, yang artinya:

“Dan katakanlah, “Bekerjalah kamu, maka Allah dan Rasul-Nya serta orang-orang mukmin akan melihat amal kamu itu, dan kamu akan dikembalikan kepada Yang Maha Mengetahui yang ghaib dan yang nyata, lalu diberitakan-Nya kepada kamu apa yang telah kamu kerjakan”.”

Menurut Shihab (2002) dalam Tafsir Al-Misbah menafsirkan bahwa, *“Dan katakanlah, Bekerjalah kamu”* maksudnya, Allah memerintahkan manusia untuk bekerja semata-mata karena Allah dengan beragam amal shaleh dan bermanfaat, baik untuk diri sendiri maupun masyarakat umum. *“Maka Allah akan melihat pekerjaanmu”* maksudnya amal tadi akan dinilai dan diberi ganjaran oleh Allah. Selain itu, Rasul-Nya seta orang-orang mukmin juga akan melihat dan menilainya, kemudian mereka menyesuaikan perlakuannya sesuai dengan amal-amal tadi. *“Dan kamu akan dikembalikan kepada (Allah) Yang Maha Mengetahui yang ghaib dan yang nyata”* maksudnya manusia akan dikembalikan melalui kematian kepada Allah, lalu

manusia akan diberitahu tentang sanksi dan ganjaran yang mereka dapat sesuai dengan apa yang telah diperbuat, baik yang nampak maupun yang disembunyikan dalam hati.

Surah tersebut memerintahkan manusia untuk beramal shaleh, hal tersebut bisa dilakukan dengan berbuat, bekerja atau berusaha yang bermanfaat bagi diri sendiri maupun orang lain, seperti melakukan penelitian yang mungkin akan sangat bermanfaat untuk kehidupan selanjutnya. Dalam matematika terdapat salah satu cabang ilmu yaitu teori graf yang menarik untuk diteliti karena aplikasinya sangat luas baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu lain. Salah satu contoh terapan dari teori graf pada bidang kimia adalah, memprediksi aktivitas penghambat sitosol fosfolipase A_2 dari propan-2-one yang biasanya digunakan untuk pengobatan penyakit peradangan saraf dan katabolisme tulang rawan. Kumar & Madan (2006) dalam penelitiannya menyatakan bahwa indeks konektivitas eksentrik jauh lebih akurat dalam memprediksi aktivitas penghambat sitosol fosfolipase A_2 dari propan-2-one dibandingkan indeks Wiener dan parameter grup Zagreb.

Menurut Budayasa (2007), graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dua himpunan $(V(G), E(G))$ di mana $V(G)$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga yang mungkin kosong yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen di $E(G)$ merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di $V(G)$.

Salah satu topik menarik yang dapat dikaji pada teori graf adalah indeks topologi. Indeks topologi atau dikenal sebagai indeks konektivitas adalah bilangan

riil yang terkait dengan graf yang diperoleh dengan aturan tertentu dan tidak merubah keisomorfisan graf. Indeks topologi dapat digunakan salah satunya dalam studi hubungan struktur-aktivitas kuantitatif (QSAR) atau hubungan struktur-properti kuantitatif (QSPR) untuk memprediksi sifat fisiokimia dan bioaktivitas yang membantu dalam penemuan obat.

Salah satu jenis dari indeks topologi adalah indeks konektivitas eksentrik. Indeks konektivitas eksentrik pada sebuah graf terhubung G didefinisikan sebagai $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)e(v)$, di mana $\deg(v)$ adalah jumlah hasil kali derajat titik v dan $e(v)$ adalah eksentrisitas titik v (Morgan, dkk, 2011).

Selain itu, terdapat modifikasi dari indeks konektivitas eksentrik yaitu indeks keterhubungan langsung eksentrik atau dikenal sebagai indeks konektivitas eksentrik Ediz. Indeks konektivitas eksentrik Ediz yang diperkenalkan oleh Suleyman Ediz adalah indeks topologi suatu grafik molekul, yang didefinisikan sebagai jumlah hasil bagi dari jumlah derajat dari semua titik yang terhubung langsung dengan suatu titik di grafik molekul dengan eksentrisitas titik di grafik molekul. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung sederhana. Indeks konektivitas eksentrik Ediz dari G didefinisikan sebagai $\xi^{ad}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{S(v)}{e(v)}$, di mana $S(v)$ adalah jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan titik v dan $e(v)$ adalah eksentrisitas titik v (Akhter & Farooq, 2020).

Penelitian sebelumnya mengenai indeks konektivitas eksentrik telah diteliti oleh Morgan, dkk (2011) dengan judul *on the eccentric connectivity index of a graph*. Penelitian indeks konektivitas eksentrik Ediz telah diteliti oleh Ediz (2011) dengan judul *on the Ediz eccentric connectivity index of a graph*. Sedangkan indeks konektivitas eksentrik, indeks konektivitas eksentrik Ediz dan indeks konektivitas

eksentrik *augmented* telah diteliti oleh Reddy, dkk (2020) dengan judul *eccentric topological index of the zero divisor graph $\Gamma[\mathbb{Z}_n]$* .

Seiring perkembangan zaman, graf mulai dikembangkan dari struktur aljabar dengan dua operasi biner atau ring. Ring adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, penjumlahan (+) dan perkalian (\cdot), yang memenuhi sifat grup abelian terhadap operasi penjumlahan, tertutup dan asosiatif terhadap operasi perkalian dan distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Suatu ring dikatakan ring komutatif jika operasi perkalian bersifat komutatif (Gilbert & Gilbert, 2015).

Misalkan R adalah suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal dari R . Graf Jacobson dari R yang dinotasikan oleh \mathfrak{S}_R didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(\mathfrak{S}_R) = R \setminus J(R)$ sedemikian hingga dua titik berbeda $x, y \in V(\mathfrak{S}_R)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy$ bukan himpunan unit di R (Azimi, dkk, 2012).

Penelitian terkait graf Jacobson salah satunya telah dilakukan oleh Azimi, Erfanian, & Farrokhi (2012) yaitu tentang sifat-sifat graf Jacobson pada ring komutatif. Penelitian lain dilakukan oleh Ghayour, dkk (2018) yaitu tentang beberapa hasil atau akibat dari graf Jacobson pada ring komutatif. Kemudian penelitian terbaru dilakukan oleh Novictor, dkk (2020) tentang karakteristik graf Jacobson yang dibangun dari ring \mathbb{Z}_{3^n} untuk $n > 1$.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis meneliti indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson yang dibangun dari ring komutatif dengan unsur kesatuan khususnya ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p bilangan prima atau ditulis ring \mathbb{Z}_{2p} .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana rumus umum dari indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dalam penelitian ini adalah untuk menentukan rumus umum dari indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan tentang teori graf khususnya indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
2. Penelitian ini bisa dipakai untuk bahan pengembangan dan rujukan pembelajaran tentang teori graf yang diaplikasikan pada struktur aljabar.
3. Meningkatkan peran serta Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dalam pengembangan pengetahuan keilmuan matematika.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka penelitian ini dibatasi hanya pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$ atau dapat ditulis \mathbb{Z}_{2p} dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode kajian pustaka. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji buku-buku ataupun jurnal yang berhubungan dengan topik bahasan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$, $p \in \{3,5,7,11\}$ untuk memunculkan dugaan.
2. Menentukan anggota dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
3. Membuat tabel Cayley operasi perkalian dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
4. Menentukan himpunan unit dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
5. Menentukan ideal maksimal dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
6. Menentukan Jacobson radical dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
7. Menentukan himpunan titik pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
8. Menentukan himpunan sisi pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
9. Membangun dan menggambar representasi graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
10. Menentukan derajat dan eksentrisitas untuk setiap titik pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
11. Membangun lemma dan teorema rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$, $p \geq 3$, p prima beserta pembuktiannya.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini mudah dipahami dan terarah maka digunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan dari penelitian ini.

BAB II Tinjauan Pustaka

Bab ini membahas tentang teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti seperti teori graf, indeks konektivitas eksentrik Ediz, graf Jacobson, ring bilangan bulat modulo n .

BAB III Pembahasan

Bab ini membahas tentang langkah-langkah yang dikerjakan untuk memperoleh rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan cara mencari Jacobson radikal, menggambar graf, menghitung indeks konektivitas eksentrik Ediz dan membuat dugaan rumus umum beserta pembuktiannya.

BAB IV Penutup

Bab ini membahas tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dua himpunan $(V(G), E(G))$ di mana $V(G)$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga yang mungkin kosong yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Misalkan u dan v adalah dua titik berbeda di G dan sisi $e = \{u, v\}$ (atau sering ditulis $e = uv$) di G , maka titik u dan v dikatakan terhubung langsung di G atau sisi e menghubungkan titik u dan v di G . Sedangkan sisi e dikatakan terkait langsung dengan titik u dan v , sehingga titik u dan v merupakan titik-titik akhir sisi e atau disebut ujung dari sisi e (Budayasa, 2007).

Suatu sisi pada graf yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri disebut gelang. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik berbeda pada suatu graf, maka sisi tersebut disebut sisi rangkap. Suatu graf yang tidak memiliki gelang dan tidak memiliki sisi rangkap disebut graf sederhana (Budayasa, 2007).

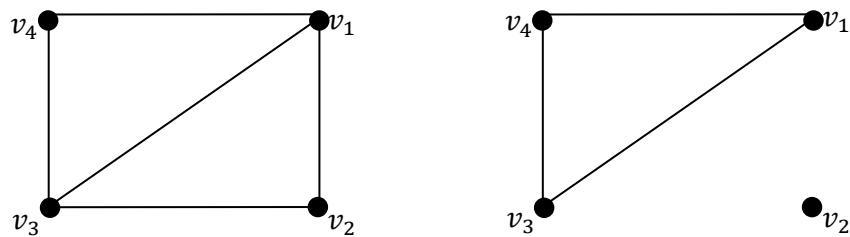
2.2 Jalan, Jejak, Lintasan

Misalkan G adalah suatu graf. Suatu jalan di G merupakan barisan berhingga tak kosong $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, di mana titik v_0 dan titik v_n berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir

W dan titik-titik v_1, v_2, \dots, v_{n-1} disebut titik internal W . Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Suatu jalan W disebut jejak jika semua sisi e_1, e_2, \dots, e_n dalam jalan W berbeda. Sedangkan suatu jalan W disebut lintasan jika semua sisi e_1, e_2, \dots, e_n dan titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ dalam jalan W berbeda (Budayasa, 2007).

2.3 Graf Terhubung

Misalkan G adalah graf dengan u dan v adalah dua titik berbeda di G . Titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat lintasan $u - v$. Sedangkan suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G tersebut terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G tersebut terdapat lintasan $u - v$. Sebaliknya, suatu graf G dikatakan tak terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G tersebut tidak terdapat lintasan $u - v$ (Chartrand, dkk, 2016).



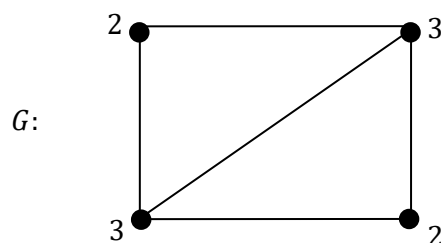
Gambar 2.1 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

Graf G pada Gambar 2.1 merupakan graf terhubung karena untuk setiap dua titik berbeda di G tersebut terdapat lintasan. Sedangkan graf H pada Gambar 2.1 merupakan graf tak terhubung karena terdapat v_1 dan v_2 , v_2 dan v_3 serta v_2 dan v_4 di H tersebut tidak terdapat lintasan.

2.4 Derajat Titik

Misalkan v adalah titik di graf G . Derajat dari titik v merupakan banyaknya titik di G yang terhubung langsung ke v atau juga bisa dikatakan banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v . Jadi, derajat dari titik v adalah jumlah titik dalam persekitarannya $N(v)$. Derajat suatu titik v di G dinotasikan dengan $deg_v(v)$ atau bisa disingkat $deg(v)$. Oleh karena itu, $deg(v) = |N(v)|$. Jika suatu titik berderajat 0 maka titik tersebut disebut titik terasing atau titik terisolasi. Sedangkan jika suatu titik berderajat 1 maka titik tersebut disebut titik ujung atau titik akhir. Suatu sisi dikatakan sebagai sisi anting-anting jika sisi tersebut terkait langsung dengan titik akhir. Derajat terbesar diantara semua titik di G disebut derajat maksimum G , dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Sedangkan derajat terkecil di antara semua titik di G disebut derajat minimum G , dinotasikan dengan $\delta(G)$ (Chartrand, dkk, 2016).

Berdasarkan Gambar 2.1, maka dapat diperoleh $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$, $N(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$ dan $N(v_4) = \{v_1, v_3\}$. Dengan demikian derajat pada masing-masing titik di graf G yaitu $deg(v_1) = 3$, $deg(v_2) = 2$, $deg(v_3) = 3$ dan $deg(v_4) = 2$. Sehingga diperoleh $\Delta(G) = 3$ dan $\delta(G) = 2$. Sehingga, derajat titik di graf G pada Gambar 2.1 dapat ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.2 Contoh Derajat Titik

2.5 Eksentrisitas Titik

Jarak titik u ke titik v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$, merupakan panjang lintasan terpendek dari suatu titik u ke titik v di G . Jika dari titik u ke titik v di G tidak terdapat lintasan atau bisa dikatakan graf tersebut merupakan graf tak terhubung maka $d(u, v) = \infty$. Sedangkan eksentrisitas dari titik u di G yang dinotasikan dengan $e(u)$ merupakan jarak maksimal dari titik u ke titik-titik lain di G . Sehingga, $e(u) = \max \{d(u, v) | v \in V(G)\}$ (Kusmayadi & Sudibyoy, 2011).

Eksentrisitas titik di graf G pada Gambar 2.1 dijabarkan sebagai berikut.

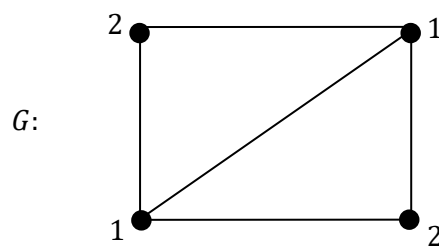
$$e(v_1) = \max\{d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, v_4)\} = \max\{1, 1, 1\} = 1$$

$$e(v_2) = \max\{d(v_2, v_1), d(v_2, v_3), d(v_2, v_4)\} = \max\{1, 1, 2\} = 2$$

$$e(v_3) = \max\{d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_4)\} = \max\{1, 1, 1\} = 1$$

$$e(v_4) = \max\{d(v_4, v_1), d(v_4, v_2), d(v_4, v_3)\} = \max\{1, 2, 1\} = 2$$

Sehingga, eksentrisitas titik di graf G pada Gambar 2.1 dapat ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 2.3 Contoh Eksentrisitas Titik

2.6 Ring

Misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, penjumlahan (+) dan perkalian (\cdot), R dikatakan sebagai ring jika memenuhi kondisi berikut.

1. Tertutup terhadap operasi penjumlahan:

Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y \in R$.

2. Asosiatif terhadap operasi penjumlahan:

Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$.

3. Memiliki unsur identitas terhadap operasi penjumlahan:

Terdapat $0 \in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku $x + 0 = 0 + x = x$.

4. Memuat unsur balikan atau invers terhadap operasi penjumlahan:

Untuk setiap $x \in R$, terdapat $-x \in R$ sedemikian hingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

5. Komutatif terhadap operasi penjumlahan:

Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y = y + x$.

6. Tertutup terhadap operasi perkalian:

Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x \cdot y \in R$.

7. Asosiatif terhadap operasi perkalian:

Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

8. Distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan:

Untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Jadi, ring adalah suatu grup abelian terhadap operasi penjumlahan, tertutup dan asosiatif terhadap operasi perkalian dan distributif operasi perkalian terhadap

operasi penjumlahan (Gilbert & Gilbert, 2015).

2.7 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Ring R dikatakan sebagai ring komutatif jika R komutatif terhadap operasi perkalian, yaitu untuk setiap $x \in R$ dan $y \in R$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$. Sedangkan R dikatakan sebagai ring dengan unsur kesatuan jika R memuat unsur kesatuan atau identitas terhadap operasi perkalian, yaitu terdapat $1 \in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ dan 1 adalah unsur kesatuan atau identitas operasi perkalian. Sehingga dapat dikatakan bahwa R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan jika R komutatif terhadap operasi perkalian dan memiliki unsur kesatuan (Gilbert & Gilbert, 2015).

Menurut (Gilbert & Gilbert, 2009), misalkan R adalah ring dengan unsur kesatuan 1 dan $x \in R$, y dikatakan invers perkalian dari x jika $x \cdot y = y \cdot x = 1$ dan x disebut unit di R . Himpunan anggota unit di R dinotasikan dengan $U(R)$. Kemudian misalkan F adalah ring dengan unsur kesatuan 1 dan setiap elemen tak nol di F mempunyai invers perkalian, maka F disebut sebagai lapangan.

2.8 Kongruensi Modulo n

Definisi 2.1

Menurut Gilbert & Gilbert (2009), misalkan $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$. Untuk $x, y \in \mathbb{Z}$, x dikatakan kongruen dengan y modulo n jika dan hanya jika $x - y$ adalah kelipatan n . Untuk menunjukkan bahwa x kongruen dengan y modulo n , dapat ditulis $x \equiv y \pmod{n}$.

Teorema 2.1

Kongruensi linier $ax \equiv b \pmod{n}$ dapat diselesaikan jika dan hanya jika FPB(a, n) = d membagi b atau ditulis $d|b$. Jika $d|b$ maka kongruensi linier tersebut memiliki d selesaian. Jika a dan n relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi linier tersebut memiliki satu selesaian (Irawan, dkk, 2014).

Teorema 2.2

Relasi kongruensi modulo n adalah relasi ekivalen pada \mathbb{Z} .

Bukti:

Misal $n > 1$ dan $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

1. Reflektif: $x \equiv x \pmod{n}$ karena $x - x = (n)(0)$.
2. Simetris: $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow x - y = nq$ untuk $q \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow y - x = n(-q) \text{ dan } -q \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$$
3. Transitif: $x \equiv y \pmod{n}$ dan $y \equiv z \pmod{n}$

$$\Rightarrow x - y = nq \text{ dan } y - z = nk \text{ dan } q, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x - z = x - y + y - z$$

$$= n(q + k), \text{ dan } q + k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \equiv z \pmod{n}$$

Jadi, relasi kongruensi adalah relasi ekivalen (Gilbert & Gilbert, 2009).

Misalkan $n \in \mathbb{Z}, n > 1$ berdasarkan Definisi 2.1 untuk $k \in \mathbb{Z}$ dapat dibentuk kelas ekivalensi yang memuat x yang dinotasikan dengan \bar{x} sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{x + kn | k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, x - 2n, x - n, x, x + n, x + 2n, \dots\} \end{aligned}$$

Seperti halnya relasi ekuivalen, dua kelas \bar{x} dan \bar{y} sama jika dan hanya jika $x \equiv y \pmod{n}$. Terdapat n kelas ekuivalen berbeda pada \mathbb{Z} terhadap relasi kongruensi modulo n , yaitu

$$\bar{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\},$$

$$\bar{1} = \{\dots, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2n + 1, \dots\},$$

$$\bar{2} = \{\dots, -2n + 2, -n + 2, 2, n + 2, 2n + 2, \dots\},$$

⋮

$$\overline{n-1} = \{\dots, -2n - 1, -n - 1, -1, n - 1, 2n - 1, \dots\}.$$

Kelas ekuivalen tersebut disebut kelas kongruensi modulo n . Sehingga diperoleh himpunan semua kelas kongruensi modulo n pada \mathbb{Z} yang dilambangkan dengan \mathbb{Z}_n sebagai berikut

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

2.9 Ring Bilangan Bulat Modulo n

Definisi 2.2

Menurut Menezes, dkk (1996) misalkan $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$. Himpunan bilangan bulat modulo n dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ adalah himpunan kelas ekuivalen dari kongruensi modulo m . Kemudian pada \mathbb{Z}_n didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y \pmod{n}} \text{ dan } \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y \pmod{n}}$$

untuk semua $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$.

Definisi 2.3

Himpunan $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$ membentuk ring komutatif dengan unsur kesatuan $\bar{1} \in \mathbb{Z}_n$. Ring tersebut disebut ring bilangan bulat modulo n (Sitohang, 2017).

Berdasarkan Gilbert & Gilbert (2009), misalkan $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$ dan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku \bar{x} unit jika dan hanya jika $\text{FPB}(x, n) = 1$. Sehingga diperoleh

$$U(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_n \mid \text{FPB}(x, n) = 1\}$$

Untuk $n = 2p$ dan p prima, maka

$$\begin{aligned} \bar{x} \in U(\mathbb{Z}_{2p}) &\Leftrightarrow (x, 2p) = 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \nmid x \text{ dan } p \nmid x \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = \overline{2k-1}, k = 1, 2, \dots, p, k \neq \frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh Lemma sebagai berikut.

Lemma 2.1

Misalkan p bilangan prima, maka

$$U(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\overline{2k-1} \mid k = 1, 2, \dots, p \text{ di mana } k \neq \frac{p+1}{2}\}.$$

2.10 Ideal

Menurut Gilbert & Gilbert (2015), misalkan R adalah ring dan I adalah himpunan bagian dari R , I disebut ideal dari R jika dan hanya jika

1. I himpunan tak kosong.
2. $x \in I$ dan $y \in I$ berlaku $x + y \in I$.
3. $x \in I$ berlaku $-x \in I$.
4. $x \in I$ dan $r \in R$ berlaku $xr, rx \in I$. Apabila hanya memenuhi salah satu yaitu

$x \in I$ dan $r \in R$ berlaku $xr \in I$ maka I disebut ideal kanan, sedangkan jika memenuhi $x \in I$ dan $r \in R$ berlaku $rx \in I$ maka I disebut ideal kiri.

Menurut Hasan (2018), ideal dibagi menjadi dua jenis yaitu ideal tak sejati dan ideal sejati. Ideal I dari R disebut ideal tak sejati jika $I = R$. Sebaliknya, ideal I dari R disebut ideal sejati jika $I \neq R$. Ideal sejati dibagi lagi menjadi dua jenis, yaitu ideal sejati trivial dan ideal sejati nontrivial. Ideal I dari R disebut ideal sejati trivial jika $I = \{0\}$ dan disebut ideal sejati nontrivial jika $I \neq R$ dan $I \neq \{0\}$. Apabila R adalah ring komutatif maka ideal kiri juga merupakan ideal kanan.

Teorema 2.3

Suatu himpunan bagian I dari ring R adalah ideal dari R jika

- (i) $I \neq \emptyset$
- (ii) $(\forall x, y \in I) x - y \in I$
- (iii) $(\forall x \in I) (\forall r \in R) x \cdot r \in I$ dan $r \cdot x \in I$

(Gallian, 2013).

Teorema 2.4

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $a \in R$ maka $\langle a \rangle = \{r \cdot a | r \in R\}$ merupakan ideal di R .

Bukti:

- (i) Perhatikan bahwa $0 \in R$
 Karena $0 \cdot a = 0$ untuk sebarang $a \in R$ maka $0 \in \langle a \rangle$
 $\therefore \langle a \rangle \neq \emptyset$
- (ii) Ambil $x, y \in \langle a \rangle$ yang berarti $x = r_1 \cdot a$ dan $y = r_2 \cdot a$, untuk suatu $r_1, r_2 \in R$

R

Akan dibuktikan bahwa $x - y \in \langle a \rangle$

$$x - y = x + (-y) = r_1 \cdot a + (-r_2 \cdot a) = r_1 \cdot a + (-r_2 \cdot (a)) = (r_1 + (-r_2)) \cdot a = r_3 \cdot a, \text{ dengan } r_3 = (r_1 + (-r_2)) \in R$$

$$\therefore x - y \in \langle a \rangle.$$

(iii) Ambil $x \in R$ dan $y \in \langle a \rangle$ yang berarti $y = r \cdot a$ untuk suatu $r \in R$.

Akan dibuktikan $x \cdot y \in \langle a \rangle$ dan $y \cdot x \in \langle a \rangle$.

$$x \cdot y = x \cdot (r \cdot a) = (x \cdot r) \cdot a = r_4 \cdot a, \text{ dengan } r_4 = x \cdot r \in R$$

dan

$$y \cdot x = (r \cdot a) \cdot x = (r \cdot x) \cdot a = (x \cdot r) \cdot a = r_4 \cdot a, \text{ dengan } r_4 = x \cdot r \in R$$

$$\therefore x \cdot y \in \langle a \rangle \text{ dan } y \cdot x \in \langle a \rangle.$$

Jadi terbukti bahwa $\langle a \rangle$ merupakan ideal di R (Sulistya, 2001).

Definisi 2.4

Jika $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $a \in R$, maka $\langle a \rangle = \{r \cdot a | r \in R\}$ disebut ideal utama yang dibangun oleh a (Sulistya, 2001).

Teorema 2.5

Misalkan $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ dan I adalah ideal dari \mathbb{Z}_n maka terdapat $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga $I = \langle \bar{a} \rangle$.

Bukti:

(i) $I = \{\bar{0}\}$.

Karena $I = \{\bar{0}\}$ maka jelas bahwa $I = \langle \bar{0} \rangle$.

(ii) $I \neq \{\bar{0}\}$.

Karena $I \neq \{\bar{0}\}$ maka dapat dipilih kelas terkecil dari I selain $\bar{0}$.

Misalkan $\bar{a} \in I$, $0 < a \leq x$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{\bar{0}\}$.

Kemudian jelas bahwa $\langle \bar{a} \rangle \subseteq I$.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa $I \subseteq \langle \bar{a} \rangle$.

Misalkan $\bar{b} \in I$.

Dengan menggunakan algoritma pembagian, tulis $b = qa + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq$

$r < a$.

Maka, $r = b - qa$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \overline{b - qa} \\ &= \underbrace{\bar{b}}_{\in I} - \underbrace{\bar{qa}}_{\in I} \in I \end{aligned}$$

Akibatnya, $\bar{r} = \bar{0}$.

Diperoleh, $\bar{b} = \bar{qa} = \bar{q}\bar{a}$.

Berarti, $\bar{b} \in \langle \bar{a} \rangle$.

Jadi, $I \subseteq \langle \bar{a} \rangle$.

Karena $I \subseteq \langle \bar{a} \rangle$ dan $\langle \bar{a} \rangle \subseteq I$, maka $I = \langle \bar{a} \rangle$.

Misalkan R adalah ring dengan unsur kesatuan dan I ideal dari R .

(i) Jika $1 \in I$, maka $I = R$.

(ii) Jika I memuat unit, maka $I = R$.

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa jika $1 \in I$, maka $I = R$.

Jelas bahwa $I \subseteq R$.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa $R \subseteq I$, artinya $r \in I$ untuk setiap $r \in R$.

Ambil $r \in R$.

Perhatikan bahwa

$$r = \underbrace{r}_{\in R} \cdot \underbrace{1}_{\in I} \in I$$

Jadi, $R \subseteq I$.

Karena $I \subseteq R$ dan $R \subseteq I$, maka $I = R$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa jika I memuat unit, maka $I = R$.

Misalkan $u \in I$ adalah unit.

Maka terdapat $u^{-1} \in R$.

Perhatikan bahwa

$$1 = \underbrace{u}_{\in I} \cdot \underbrace{u^{-1}}_{\in R} \in I$$

Karena $1 \in I$, maka berdasarkan bagian (i) dapat disimpulkan bahwa $I = R$.

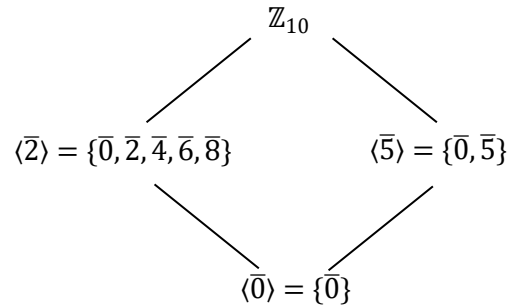
2.11 Ideal Maksimal

Menurut Gallian (2013), misalkan I adalah suatu ideal dari ring komutatif R dan $I \neq R$. Ideal I dikatakan ideal maksimal dari R jika terdapat ideal lain A dari R sedemikian hingga $I \subseteq A \subseteq R$, maka $A = I$ atau $A = R$. Dengan kata lain, ideal I dari R dikatakan ideal maksimal dari R jika tidak terdapat ideal sejati lain dari R yang memuat I .

Contoh:

Berdasarkan Teorema 2.5 ideal-ideal dari \mathbb{Z}_{10} adalah $\langle \bar{x} \rangle$ dengan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{10}$. Diperoleh semua ideal dari \mathbb{Z}_{10} adalah $\langle \bar{0} \rangle = \{ \bar{0} \}$, $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \mathbb{Z}_{10}$, $\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8} \}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{5} \}$. Ideal-ideal tersebut dapat digambarkan

dalam diagram *lattice* berikut.



Gambar 2.4 Diagram *Lattice* dari Ideal pada \mathbb{Z}_{10}

Dari Gambar 2.4 tersebut dapat diketahui bahwa ideal maksimal dari ring \mathbb{Z}_{10} adalah $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$. Ideal $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ bukan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} karena ideal tersebut termuat dalam $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$. Sedangkan ideal $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$ merupakan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} karena ideal tersebut tidak termuat dalam ideal sejati lain.

2.12 Jacobson Radical

Definisi 2.5

Menurut Novictor, dkk (2020), misalkan R adalah ring komutatif, Jacobson radical yang dinotasikan dengan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal dari R . Jacobson radical dari R dituliskan:

$$J(R) = \bigcap \{M : M \text{ adalah ideal maksimal dari ring } R\}.$$

Contoh:

Telah diketahui ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} adalah $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$.

Sehingga diperoleh Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{10} adalah $J(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \cap \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}\}$.

2.13 Graf Jacobson

Definisi 2.6

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan, graf Jacobson dari R yang dinotasikan oleh \mathfrak{J}_R didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(\mathfrak{J}_R) = R \setminus J(R)$ dan dua titik $x, y \in V(\mathfrak{J}_R)$ dengan $x \neq y$ terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy \notin U(R)$ (Azimi, dkk, 2013).

2.14 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada sebuah graf terhubung sederhana G yang dinotasikan dengan $\xi^{ad}(G)$ didefinisikan sebagai jumlah hasil bagi dari jumlah derajat dari semua titik yang terhubung langsung dengan suatu titik di G dengan eksentrisitas titik di G . Indeks konektivitas eksentrik Ediz dari suatu graf terhubung sederhana G didefinisikan sebagai

$$\xi^{ad}(G) = \sum_{v \in V} \frac{S(v)}{e(v)},$$

di mana $S(v)$ adalah jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan titik v dan $e(v)$ adalah eksentrisitas titik v (Akhter & Farooq, 2020).

2.15 Kajian Keislaman

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada subbab 2.1 sebelumnya tentang pengertian graf, suatu graf dapat diartikan sebagai titik-titik yang dihubungkan oleh sisi. Dalam al-Qur'an terdapat berbagai isyarat tentang konsep teori graf, salah satunya adalah firman Allah dalam QS. an-Nisaa' ayat 1, yang artinya:

“Wahai sekalian manusia, bertakwalah kepada Rabb-mu yang telah menciptakan dari diri yang satu, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan daripada keduanya Allah memperkembangbiakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada

Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturahmi. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu.”

Menurut Al-Mubarakfuri (2007), ayat tersebut berisi ajakan kepada seluruh manusia agar bertakwa, mengingatkan penciptaan dan silaturahmi. Allah memerintahkan manusia untuk beribadah kepada Allah yang tidak ada sekutu bagi-Nya. Kemudian Allah menyadarkan manusia tentang kekuasaan-Nya yang telah menciptakan manusia dari satu jiwa, yaitu Adam dan kemudian dari tulang rusuknya diciptakan Hawa. Kemudian dari keduanya dilahirkan laki-laki dan perempuan yang banyak sekali. Setelah itu, manusia diajak agar bertakwa kepada Allah dan menjaga hubungan silaturahmi dengan mengingatkan bahwa Allah akan selalu mengawasi mereka.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa antara manusia satu dengan manusia lainnya harus memperhatikan persaudaraan, atau dengan kata lain menjalin hubungan silaturahmi. Hal tersebut merupakan salah satu representasi dari graf pada al-Quran, seperti yang telah diketahui bahwa graf secara singkat dapat diartikan sebagai titik-titik yang dihubungkan oleh sisi. Dalam hal ini manusia diibaratkan sebagai titik dan hubungan silaturahmi tersebut adalah sisi.

Selanjutnya, teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan hubungan antara satu titik dengan titik lainnya. Aplikasi dari konsep teori graf tersebut sangat luas, baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu lain. Dalam bidang kimia, teori graf berkaitan dengan manipulasi struktur dan informasi struktural. Dengan bantuan metode matematika tersebut, struktur dan sifat dari molekul dapat diselidiki dengan menggunakan graf molekulnya. Dalam istilah teori graf, graf

molekul atau graf kimia adalah model molekul dimana atom diwakili oleh titik dan ikatan kimia diwakili oleh sisi.

Allah SWT berfirman dalam QS. at-Taubah ayat 105, yang artinya:

“Dan katakanlah, “Bekerjalah kamu, maka Allah dan Rasul-Nya serta orang-orang mukmin akan melihat amal kamu itu, dan kamu akan dikembalikan kepada Yang Maha Mengetahui yang ghaib dan yang nyata, lalu diberitakan-Nya kepada kamu apa yang telah kamu kerjakan”.”

Menurut Shihab (2002) dalam Tafsir Al-Misbah menafsirkan bahwa, *“Dan katakanlah, Bekerjalah kamu”* maksudnya, Allah memerintahkan manusia untuk bekerja semata-mata karena Allah dengan beragam amal shaleh dan bermanfaat, baik untuk diri sendiri maupun masyarakat umum. *“Maka Allah akan melihat pekerjaanmu”* maksudnya amal tadi akan dinilai dan diberi ganjaran oleh Allah. Selain itu, Rasul-Nya serta orang-orang mukmin juga akan melihat dan menilainya, kemudian mereka menyesuaikan perlakuannya sesuai dengan amal-amal tadi. *“Dan kamu akan dikembalikan kepada (Allah) Yang Maha Mengetahui yang ghaib dan yang nyata”* maksudnya manusia akan dikembalikan melalui kematian kepada Allah, lalu manusia akan diberitahu tentang sanksi dan ganjaran yang mereka dapat sesuai dengan apa yang telah diperbuat, baik yang nampak maupun yang disembunyikan dalam hati.

Ayat tersebut memerintahkan manusia untuk selalu beramal shaleh yang salah satunya bisa dilakukan dengan berbuat, bekerja atau berusaha yang bermanfaat bagi diri sendiri maupun orang lain. Sebagaimana dalam Islam, seorang hamba diharuskan menjadi hamba yang *Nafi’un lighoirihi* atau hamba yang bermanfaat bagi orang lain. Salah satu cara memberi manfaat kepada orang lain yaitu dengan ilmu. Ilmu yang dimaksud bukan hanya ilmu agama saja, melainkan juga ilmu dunia seperti keahlian dan pengetahuan.

Menurut Hamka (1994) dalam Tafsir al-Azhar juzu' 11, hal. 37, QS. at-Taubah ayat 105 tersebut dihubungkan dengan QS. al-Isra' ayat 84, yang artinya:

“Katakanlah: “Tiap-tiap orang beramal menurut bakatnya, tetapi Tuhan engkau lebih mengetahui siapakah yang lebih mendapat petunjuk dalam perjalanan”.”

Sehingga, berdasarkan uraian tersebut dapat diketahui bahwa Allah memerintahkan manusia untuk bekerja menurut bakat dan bawaan, menurut tenaga dan kemampuan, menurut keahlian atau ilmu yang dimilikinya dengan tujuan untuk memberikan manfaat bagi dirinya dan orang lain. Sebagai seorang matematikawan kita dapat menerapkan ilmu kita, seperti yang dilakukan oleh Kumar & Madan (2006) yang menghubungkan konsep teori graf ini dengan ilmu kimia untuk memprediksi aktivitas penghambat sitosol fosfolipase A_2 dari propan-2-one dengan menggunakan beberapa indeks topologi seperti indeks konektivitas eksentrik, indeks Wiener dan parameter grup Zagreb. Penghambat sitosol fosfolipase A_2 sendiri biasanya digunakan untuk pengobatan penyakit peradangan saraf dan katabolisme tulang rawan. Penelitian ini menunjukkan bahwa indeks konektivitas eksentrik jauh lebih akurat dalam memprediksi aktivitas penghambat sitosol fosfolipase A_2 dari propan-2-one dibandingkan indeks Wiener dan parameter grup Zagreb. Dalam literatur matematika, indeks konektivitas eksentrik merupakan jumlah hasil kali eksentrisitas titik dan derajat titik pada semua titik di graf yang terhubung.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring \mathbb{Z}_{2p} di mana $p \geq 3$ dan p adalah suatu bilangan prima. Dalam pencarian rumus, terlebih dahulu dilakukan percobaan dengan mencari nilai indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$ dan \mathbb{Z}_{22} , yang kedua yaitu membuktikan dugaan yang diperoleh pada percobaan sebelumnya yang nantinya akan diperoleh lemma dan teorema, dan yang terakhir adalah integrasi hasil penelitian dengan kajian keislaman.

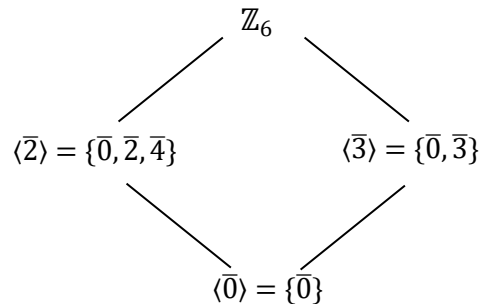
3.1 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{2p} , $p \in \{3, 5, 7, 11\}$

Subbab ini membahas penentuan rumus indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring \mathbb{Z}_{2p} di mana $p \geq 3$ dan p adalah suatu bilangan prima yang nantinya akan dihasilkan dugaan dan akan dibuktikan pada subbab berikutnya. Percobaan ini menggunakan ring $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$ dan \mathbb{Z}_{22} untuk menentukan rumus umum tersebut.

3.1.1 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_6

Himpunan anggota dari ring bilangan bulat modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh $U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. Selanjutnya akan ditentukan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_6 , maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari \mathbb{Z}_6 .

Ideal dari \mathbb{Z}_6 adalah $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$, $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \mathbb{Z}_6$, $\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, dan $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Kemudian ideal maksimal dari \mathbb{Z}_6 dapat dilihat pada diagram *lattice* berikut.



Gambar 3.1 Diagram *Lattice* dari Ideal pada \mathbb{Z}_6

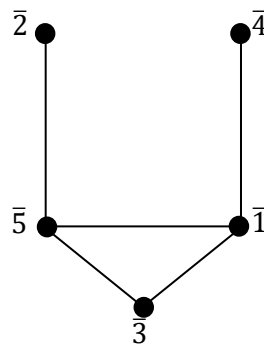
Dari Gambar 3.1 tersebut dapat diketahui ideal maksimal dari \mathbb{Z}_6 adalah $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Ideal $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ bukan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_6 karena ideal tersebut termuat dalam $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Sedangkan ideal $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dan $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ merupakan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_6 karena ideal tersebut tidak termuat dalam ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_6 adalah $J(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \cap \{\bar{0}, \bar{3}\} = \{\bar{0}\}$.

Berdasarkan definisi graf Jacobson diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ adalah $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}) = \mathbb{Z}_6 \setminus J(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dan selanjutnya akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan pada tabel berikut.

Tabel 3.1 Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$

$\bar{y} \backslash \bar{x}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$

Sehingga diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ adalah $E(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}) = \{(\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{5})\}$. Oleh karena itu dapat digambarkan graf Jacobson $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ sebagai berikut.

**Gambar 3.2** Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat diketahui bahwa graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ tersebut adalah graf sederhana dan terhubung. Selanjutnya, dapat diketahui derajat titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.2 Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\deg(v)$	3	1	2	1	3

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$, titik \bar{p} mempunyai derajat $p - 1$ yaitu $\deg(\bar{3}) = 2$, titik $\overline{p-1}$ dan titik $\overline{p+1}$ mempunyai derajat 1 yaitu $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = 1$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ mempunyai derajat p yaitu $\deg(\bar{1}) = \deg(\bar{5}) = 3$.

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat diketahui juga jarak dan eksentrisitas titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.3 Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$

$d(u, v)$		v				
		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
u	$\bar{1}$	0	2	1	1	1
	$\bar{2}$	2	0	2	3	1
	$\bar{3}$	1	2	0	2	1
	$\bar{4}$	1	3	2	0	2
	$\bar{5}$	1	1	1	2	0

Tabel 3.4 Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$e(v)$	2	3	2	3	2

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mempunyai eksentrisitas 2 yaitu $e(\bar{1}) = e(\bar{3}) = e(\bar{5}) = 2$ dan titik $\overline{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ mempunyai eksentrisitas 3 yaitu $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = 3$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas dari masing-masing titik di $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$ sebagai berikut.

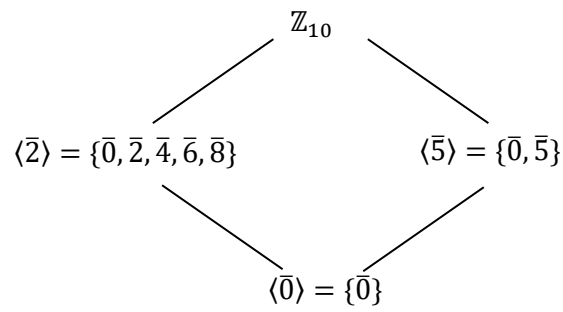
$$\begin{aligned}
\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}) &= \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4}) + \deg(\bar{5})}{e(\bar{1})} + \frac{\deg(\bar{5})}{e(\bar{2})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{5})}{e(\bar{3})} \\
&\quad + \frac{\deg(\bar{1})}{e(\bar{4})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2}) + \deg(\bar{3})}{e(\bar{5})} \\
&= \frac{2 + 1 + 3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3 + 3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3 + 1 + 2}{2} \\
&= \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)}{2} \right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 3)}{3} \right) \\
&\quad + \left(1 \times \frac{(2 \times 3)}{2} \right) \\
&= 6 + 2 + 3 \\
&= 11
\end{aligned}$$

Jadi, indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson \mathbb{Z}_6 adalah 11.

3.1.2 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{10}

Himpunan anggota dari ring bilangan bulat modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh $U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$. Selanjutnya akan ditentukan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{10} , maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} .

Ideal dari \mathbb{Z}_{10} adalah $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$, $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \mathbb{Z}_{10}$, $\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$. Kemudian ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} dapat dilihat pada diagram *lattice* berikut.



Gambar 3.3 Diagram *Lattice* dari Ideal pada \mathbb{Z}_{10}

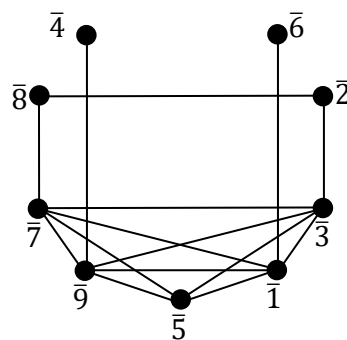
Dari Gambar 3.3 tersebut dapat diketahui ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} adalah $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$. Ideal $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ bukan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} karena ideal tersebut termuat dalam $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$. Sedangkan ideal $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}\}$ merupakan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{10} karena ideal tersebut tidak termuat dalam ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{10} adalah $J(\mathbb{Z}_{10}) = \{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}\} \cap \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}\}$.

Berdasarkan definisi graf Jacobson diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ adalah $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}) = \mathbb{Z}_{10} \setminus J(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$ dan selanjutnya akan dicari titik yang terhubung langsung melalui perhitungan pada tabel berikut.

Tabel 3.5 Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_{10} \vee (\mathbb{Z}_{10})$

$\bar{y} \backslash \bar{x}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$

Sehingga diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ adalah $E(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}) = \{(\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{8}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{3}, \bar{9}), (\bar{4}, \bar{9}), (\bar{5}, \bar{7}), (\bar{5}, \bar{9}), (\bar{7}, \bar{8}), (\bar{7}, \bar{9})\}$. Oleh karena itu dapat digambarkan graf Jacobson $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ sebagai berikut.

**Gambar 3.4** Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat diketahui bahwa graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ tersebut adalah graf sederhana dan terhubung. Selanjutnya, dapat diketahui derajat titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ adalah sebagai berikut

Tabel 3.6 Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$		$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\deg(v)$	5	2	5	1	4	1	5		2	5

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$, titik \bar{p} mempunyai derajat $p - 1$ yaitu $\deg(\bar{5}) = 4$, titik $\overline{p - 1}$ dan titik $\overline{p + 1}$ mempunyai derajat 1 yaitu $\deg(\bar{4}) = \deg(\bar{6}) = 1$, titik $\overline{2k - 1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{\frac{p+1}{2}\}$ mempunyai derajat p yaitu $\deg(\bar{1}) = \deg(\bar{3}) = \deg(\bar{7}) = \deg(\bar{9}) = 5$ dan titik $\overline{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p - 1\} \setminus \{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\}$ mempunyai derajat 2 yaitu $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{8}) = 2$.

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat diketahui juga jarak dan eksentrisitas titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.7 Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$

$d(u, v)$		v								
		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
u	$\bar{1}$	0	2	1	2	1	1	1	2	2
	$\bar{2}$	2	0	1	3	2	3	2	1	2
	$\bar{3}$	1	1	0	2	1	2	1	2	1
	$\bar{4}$	2	3	$\bar{2}$	0	2	3	2	3	1
	$\bar{5}$	1	2	1	2	0	2	2	2	1
	$\bar{6}$	1	3	2	3	2	0	2	3	2
	$\bar{7}$	1	2	1	2	1	2	0	1	1
	$\bar{8}$	2	1	2	3	2	3	1	0	2
	$\bar{9}$	1	2	1	1	1	2	1	2	0

Tabel 3.8 Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$e(v)$	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mempunyai eksentrisitas 2 yaitu $e(\bar{1}) = e(\bar{3}) = e(\bar{5}) = e(\bar{7}) = e(\bar{9}) = 2$ dan titik $\overline{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ mempunyai eksentrisitas 3 yaitu $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = 3$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas dari masing-masing titik di $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$ sebagai berikut.

$$\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}) = \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{6}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9})}{e(\bar{1})} + \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{8})}{e(\bar{2})}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9})}{e(\bar{3})} + \frac{\deg(\bar{9})}{e(\bar{4})} \\
& + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9})}{e(\bar{5})} + \frac{\deg(\bar{1})}{e(\bar{6})} \\
& + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{8}) + \deg(\bar{9})}{e(\bar{7})} \\
& + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{7})}{e(\bar{8})} \\
& + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7})}{e(\bar{9})} \\
& = \frac{5 + 4 + 1 + 5 + 5}{2} + \frac{5 + 2}{3} + \frac{5 + 2 + 4 + 5 + 5}{2} + \frac{5}{3} \\
& \quad + \frac{5 + 5 + 5 + 5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5 + 5 + 4 + 2 + 5}{2} + \frac{2 + 5}{3} \\
& \quad + \frac{5 + 5 + 1 + 4 + 5}{2} \\
& = \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 4) + (3 \times 5)}{2} \right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 5)}{3} \right) \\
& \quad + \left(2 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 4) + (3 \times 5)}{2} \right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 5)}{3} \right) \\
& \quad + \left(1 \times \frac{(4 \times 5)}{2} \right) \\
& = \left(2 \times \frac{20}{2} \right) + \left(2 \times \frac{7}{3} \right) + \left(2 \times \frac{21}{2} \right) + \left(2 \times \frac{5}{3} \right) + \left(1 \times \frac{20}{2} \right) \\
& = 20 + \frac{14}{3} + 21 + \frac{10}{3} + 10 \\
& = 59
\end{aligned}$$

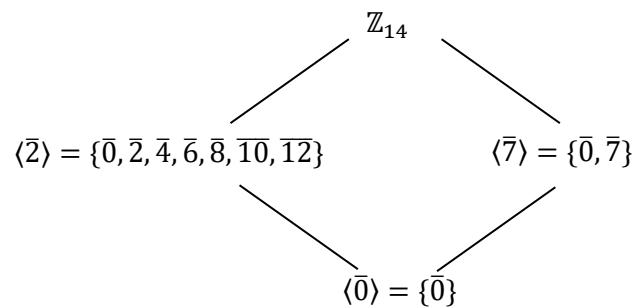
Jadi, indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson \mathbb{Z}_{10} adalah 59.

3.1.3 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{14}

Himpunan anggota dari ring bilangan bulat modulo 14 adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}\}$. Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh $U(\mathbb{Z}_{14}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}\}$. Selanjutnya akan ditentukan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{14} , maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{14} .

Ideal dari \mathbb{Z}_{14} adalah $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$, $\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \langle \bar{11} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \mathbb{Z}_{14}$, $\langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ dan $\langle \bar{7} \rangle = \{\bar{0}, \bar{7}\}$.

Kemudian ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{14} dapat dilihat pada diagram *lattice* berikut.



Gambar 3.5 Diagram *Lattice* dari Ideal pada \mathbb{Z}_{14}

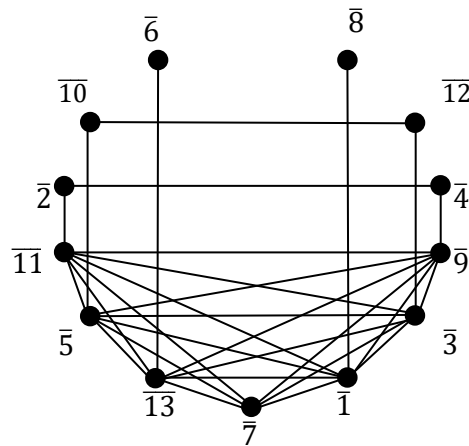
Dari Gambar 3.5 tersebut dapat diketahui ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{14} adalah $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ dan $\langle \bar{7} \rangle = \{\bar{0}, \bar{7}\}$. Ideal $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ bukan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{14} karena ideal tersebut termuat dalam $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ dan $\langle \bar{7} \rangle = \{\bar{0}, \bar{7}\}$. Sedangkan ideal $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$ dan $\langle \bar{7} \rangle = \{\bar{0}, \bar{7}\}$ merupakan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{14} karena ideal tersebut tidak termuat dalam ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{14} adalah $J(\mathbb{Z}_{14}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\} \cap \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}\}$.

Berdasarkan definisi graf Jacobson diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ adalah $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}) = \mathbb{Z}_{14} \vee (\mathbb{Z}_{14}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}\}$ dan selanjutnya akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan pada tabel berikut.

Tabel 3.9 Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_{14} \vee (\mathbb{Z}_{14})$

$\bar{y} \backslash \bar{x}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{13}$	$\bar{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{13}$	$\bar{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{11}$	$\bar{5}$	$\bar{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{11}$	$\bar{5}$	$\bar{13}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{13}$	$\bar{5}$	$\bar{11}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{13}$	$\bar{5}$	$\bar{11}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$
$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$
$\bar{10}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{13}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{11}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{13}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{11}$
$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$
$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$
$\bar{13}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$

Sehingga diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ adalah $E(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}) = \{(\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{8}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{11}), (\bar{1}, \bar{13}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{11}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{3}, \bar{9}), (\bar{3}, \bar{11}), (\bar{3}, \bar{12}), (\bar{3}, \bar{13}), (\bar{4}, \bar{9}), (\bar{5}, \bar{7}), (\bar{5}, \bar{9}), (\bar{5}, \bar{10}), (\bar{5}, \bar{11}), (\bar{5}, \bar{13}), (\bar{6}, \bar{13}), (\bar{7}, \bar{9}), (\bar{7}, \bar{11}), (\bar{7}, \bar{13}), (\bar{9}, \bar{11}), (\bar{9}, \bar{13}), (\bar{10}, \bar{12}), (\bar{11}, \bar{13})\}$. Oleh karena itu dapat digambarkan graf Jacobson $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ sebagai berikut.



Gambar 3.6 Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat diketahui bahwa graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ tersebut adalah graf sederhana dan terhubung. Selanjutnya, dapat diketahui derajat titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.10 Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\deg(v)$	7	2	7	2	7	1	6	1	7	2	7	2	7

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$, titik \bar{p} mempunyai derajat $p - 1$ yaitu $\deg(\bar{7}) = 6$, titik $\overline{p-1}$ dan titik $\overline{p+1}$ mempunyai derajat 1 yaitu $\deg(\bar{6}) = \deg(\bar{8}) = 1$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ mempunyai derajat p yaitu $\deg(\bar{1}) = \deg(\bar{3}) = \deg(\bar{9}) = \deg(\bar{11}) = \deg(\bar{13}) = 7$ dan titik $\overline{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\} \setminus \left\{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right\}$ mempunyai derajat 2 yaitu $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{10}) = \deg(\bar{12}) = 2$.

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat diketahui juga jarak dan eksentrisitas titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.11 Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$

$d(u, v)$		v												
		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
u	$\bar{1}$	0	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1
	$\bar{2}$	2	0	2	1	2	3	2	3	2	3	1	3	2
	$\bar{3}$	1	2	0	2	$\bar{1}$	2	1	2	1	2	1	1	1
	$\bar{4}$	1	1	2	0	2	3	2	3	1	3	2	3	2
	$\bar{5}$	1	2	1	2	0	2	1	2	1	1	1	2	1
	$\bar{6}$	2	3	2	3	2	0	2	3	2	2	2	3	1
	$\bar{7}$	1	2	1	2	1	2	0	2	1	2	1	2	1
	$\bar{8}$	1	3	2	3	2	3	2	0	2	3	2	3	2
	$\bar{9}$	1	2	1	1	1	2	1	2	0	2	1	2	1
	$\overline{10}$	2	3	2	3	1	3	2	3	2	0	2	3	2
	$\overline{11}$	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	0	2	1
	$\overline{12}$	2	3	1	2	2	3	2	3	2	3	2	0	2
	$\overline{13}$	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	0

Tabel 3.12 Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$e(v)$	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mempunyai eksentrisitas 2 yaitu $e(\bar{1}) = e(\bar{3}) = e(\bar{5}) = e(\bar{7}) = e(\bar{9}) = e(\overline{11}) = e(\overline{13}) = 2$ dan titik $\overline{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ mempunyai eksentrisitas 3 yaitu $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = e(\overline{10}) = e(\overline{12}) = 3$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas dari masing-masing titik di $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
& \xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}) \\
&= \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{8}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{1})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{4}) + \deg(\bar{11})}{e(\bar{2})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{12}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{3})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{9})}{e(\bar{4})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{10}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{5})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{13})}{e(\bar{6})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{7})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1})}{e(\bar{8})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{9})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{5}) + \deg(\bar{12})}{e(\bar{10})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{11})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{10})}{e(\bar{12})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{6}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11})}{e(\bar{13})} \\
&= \frac{7+7+6+1+7+7+7}{2} + \frac{2+7}{3} + \frac{7+7+6+7+7+2+7}{2} + \frac{2+7}{3} \\
&+ \frac{7+7+6+7+2+7+7}{2} + \frac{7}{3} + \frac{7+7+7+7+7+7}{2} + \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

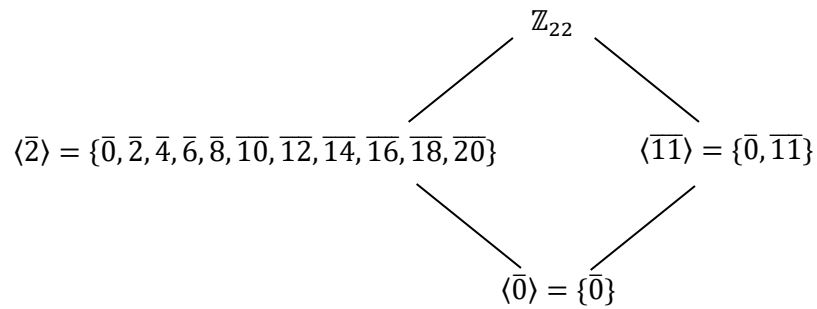
$$\begin{aligned}
& + \frac{7+7+2+7+6+7+7}{2} + \frac{7+2}{3} + \frac{7+2+7+7+6+7+7}{2} \\
& + \frac{7+2}{3} + \frac{7+7+7+1+6+7+7}{2} \\
& = \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 6) + (5 \times 7)}{2} \right) + \left(4 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 7)}{3} \right) \\
& + \left(4 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 6) + (5 \times 7)}{2} \right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 7)}{3} \right) + \left(1 \times \frac{(6 \times 7)}{2} \right) \\
& = \left(2 \times \frac{42}{2} \right) + \left(4 \times \frac{9}{3} \right) + \left(4 \times \frac{43}{2} \right) + \left(2 \times \frac{7}{3} \right) + \left(1 \times \frac{42}{2} \right) \\
& = 42 + 12 + 86 + \frac{14}{3} + 21 \\
& = 161 + \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

Jadi, indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson \mathbb{Z}_{14} adalah $161 + \frac{14}{3}$.

3.1.4 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{22}

Himpunan anggota dari ring bilangan bulat modulo 22 adalah $\mathbb{Z}_{22} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}\}$. Berdasarkan Lemma 2.1 diperoleh $U(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{13}, \bar{15}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{21}\}$. Selanjutnya akan ditentukan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{22} , maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{22} .

Ideal dari \mathbb{Z}_{22} adalah $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}, \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \bar{9} \rangle = \langle \bar{13} \rangle = \langle \bar{15} \rangle = \langle \bar{17} \rangle = \langle \bar{19} \rangle = \mathbb{Z}_6, \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = \langle \bar{8} \rangle = \langle \bar{10} \rangle = \langle \bar{12} \rangle = \langle \bar{14} \rangle = \langle \bar{16} \rangle = \langle \bar{18} \rangle = \langle \bar{20} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$ dan $\langle \bar{11} \rangle = \{\bar{0}, \bar{11}\}$. Kemudian ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{22} dapat dilihat pada diagram *lattice* berikut.



Gambar 3.7 Diagram *Lattice* dari Ideal pada \mathbb{Z}_{22}

Dari Gambar 3.7 dapat diketahui ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{22} adalah $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$ dan $\langle \bar{11} \rangle = \{\bar{0}, \bar{11}\}$. Ideal $\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$ bukan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{22} karena ideal tersebut termuat dalam $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$ dan $\langle \bar{11} \rangle = \{\bar{0}, \bar{11}\}$. Sedangkan ideal $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$ dan $\langle \bar{11} \rangle = \{\bar{0}, \bar{11}\}$ merupakan ideal maksimal dari \mathbb{Z}_{22} karena ideal tersebut tidak termuat dalam ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson radical dari \mathbb{Z}_{22} adalah $J(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\} \cap \{\bar{0}, \bar{11}\} = \{\bar{0}\}$.

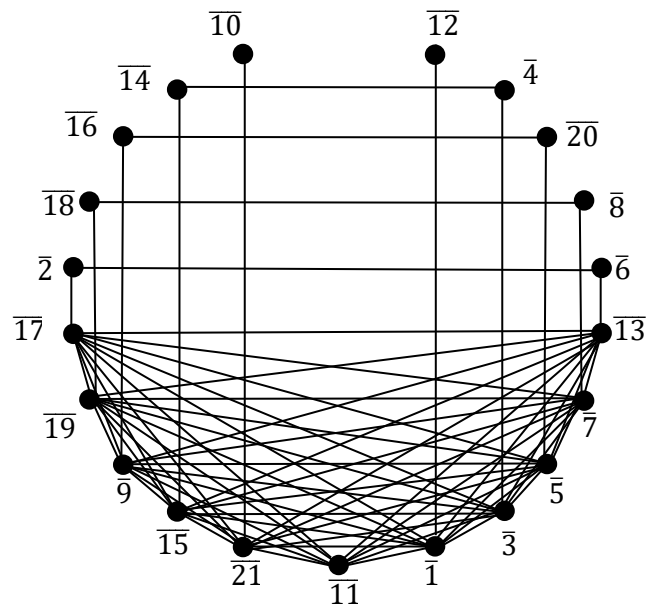
Berdasarkan definisi graf Jacobson diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$ adalah $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}) = \mathbb{Z}_{22} \setminus J(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}\}$ dan selanjutnya akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan pada tabel berikut.

Tabel 3.13 Tabel $\bar{1} - \bar{x}\bar{y}$ dari $\mathbb{Z}_{22} \setminus V(\mathbb{Z}_{22})$

$\bar{y} \backslash \bar{x}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{21}$	$\bar{20}$	$\bar{19}$	$\bar{18}$	$\bar{17}$	$\bar{16}$	$\bar{15}$	$\bar{14}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{21}$	$\bar{19}$	$\bar{17}$	$\bar{15}$	$\bar{13}$	$\bar{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{21}$	$\bar{19}$	$\bar{17}$	$\bar{15}$	$\bar{13}$	$\bar{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{20}$	$\bar{17}$	$\bar{14}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{21}$	$\bar{18}$	$\bar{15}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{19}$	$\bar{16}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{19}$	$\bar{15}$	$\bar{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{21}$	$\bar{17}$	$\bar{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{19}$	$\bar{15}$	$\bar{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{21}$	$\bar{17}$	$\bar{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{18}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{20}$	$\bar{15}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{19}$	$\bar{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{21}$	$\bar{16}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\bar{17}$	$\bar{11}$	$\bar{5}$	$\bar{21}$	$\bar{15}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{19}$	$\bar{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{17}$	$\bar{11}$	$\bar{5}$	$\bar{21}$	$\bar{15}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$	$\bar{19}$	$\bar{13}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{16}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{17}$	$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{18}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{19}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{20}$	$\bar{13}$	$\bar{6}$	$\bar{21}$	$\bar{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{15}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{15}$	$\bar{7}$	$\bar{21}$	$\bar{13}$	$\bar{5}$	$\bar{19}$	$\bar{11}$	$\bar{3}$	$\bar{17}$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	$\bar{15}$	$\bar{7}$	$\bar{21}$	$\bar{13}$	$\bar{5}$	$\bar{19}$	$\bar{11}$	$\bar{3}$	$\bar{17}$	$\bar{9}$
$\bar{9}$	$\bar{14}$	$\bar{5}$	$\bar{18}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{17}$	$\bar{8}$	$\bar{21}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{16}$	$\bar{7}$	$\bar{20}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{15}$	$\bar{6}$	$\bar{19}$	$\bar{10}$
$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{3}$	$\bar{15}$	$\bar{5}$	$\bar{17}$	$\bar{7}$	$\bar{19}$	$\bar{9}$	$\bar{21}$	$\bar{11}$	$\bar{1}$	$\bar{13}$	$\bar{3}$	$\bar{15}$	$\bar{5}$	$\bar{17}$	$\bar{7}$	$\bar{19}$	$\bar{9}$	$\bar{21}$	$\bar{11}$
$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$
$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{21}$	$\bar{9}$	$\bar{19}$	$\bar{7}$	$\bar{17}$	$\bar{5}$	$\bar{15}$	$\bar{3}$	$\bar{13}$	$\bar{1}$	$\bar{11}$	$\bar{21}$	$\bar{9}$	$\bar{19}$	$\bar{7}$	$\bar{17}$	$\bar{5}$	$\bar{15}$	$\bar{3}$	$\bar{13}$
$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{19}$	$\bar{6}$	$\bar{15}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{20}$	$\bar{7}$	$\bar{16}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{21}$	$\bar{8}$	$\bar{17}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{18}$	$\bar{5}$	$\bar{14}$
$\bar{14}$	$\bar{9}$	$\bar{17}$	$\bar{3}$	$\bar{11}$	$\bar{19}$	$\bar{5}$	$\bar{13}$	$\bar{21}$	$\bar{7}$	$\bar{15}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\bar{17}$	$\bar{3}$	$\bar{11}$	$\bar{19}$	$\bar{5}$	$\bar{13}$	$\bar{21}$	$\bar{7}$	$\bar{15}$
$\bar{15}$	$\bar{8}$	$\bar{15}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{14}$	$\bar{21}$	$\bar{6}$	$\bar{13}$	$\bar{20}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{19}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{18}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{17}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{16}$
$\bar{16}$	$\bar{7}$	$\bar{13}$	$\bar{19}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{15}$	$\bar{21}$	$\bar{5}$	$\bar{11}$	$\bar{17}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{13}$	$\bar{19}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{15}$	$\bar{21}$	$\bar{5}$	$\bar{11}$	$\bar{17}$
$\bar{17}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{16}$	$\bar{21}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{14}$	$\bar{19}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{15}$	$\bar{20}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{18}$
$\bar{18}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{13}$	$\bar{17}$	$\bar{21}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{11}$	$\bar{15}$	$\bar{19}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{13}$	$\bar{17}$	$\bar{21}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{15}$	$\bar{19}$
$\bar{19}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{16}$	$\bar{19}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{15}$	$\bar{18}$	$\bar{21}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{17}$	$\bar{20}$
$\bar{20}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$	$\bar{15}$	$\bar{17}$	$\bar{19}$	$\bar{21}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{11}$	$\bar{13}$	$\bar{15}$	$\bar{17}$	$\bar{19}$	$\bar{21}$
$\bar{21}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$	$\bar{0}$

Sehingga diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$ adalah $E(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}) =$
 $\{(\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{7}), (\bar{1}, \bar{9}), (\bar{1}, \bar{11}), (\bar{1}, \bar{12}), (\bar{1}, \bar{13}), (\bar{1}, \bar{15}), (\bar{1}, \bar{17}), (\bar{1}, \bar{19}),$
 $(\bar{1}, \bar{21}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{17}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{7}), (\bar{3}, \bar{9}), (\bar{3}, \bar{11}), (\bar{3}, \bar{13}), (\bar{3}, \bar{15}),$

$(\bar{3}, \bar{17}), (\bar{3}, \bar{19}), (\bar{3}, \bar{21}), (\bar{4}, \bar{14}), (\bar{5}, \bar{7}), (\bar{5}, \bar{9}), (\bar{5}, \bar{11}), (\bar{5}, \bar{13}), (\bar{5}, \bar{15}), (\bar{5}, \bar{17}),$
 $(\bar{5}, \bar{19}), (\bar{5}, \bar{20}), (\bar{5}, \bar{21}), (\bar{6}, \bar{13}), (\bar{7}, \bar{8}), (\bar{7}, \bar{9}), (\bar{7}, \bar{11}), (\bar{7}, \bar{13}), (\bar{7}, \bar{15}), (\bar{7}, \bar{17}),$
 $(\bar{7}, \bar{19}), (\bar{7}, \bar{21}), (\bar{8}, \bar{18}), (\bar{9}, \bar{11}), (\bar{9}, \bar{13}), (\bar{9}, \bar{15}), (\bar{9}, \bar{16}), (\bar{9}, \bar{17}), (\bar{9}, \bar{19}), (\bar{9}, \bar{21}),$
 $(\bar{10}, \bar{21}), (\bar{11}, \bar{13}), (\bar{11}, \bar{15}), (\bar{11}, \bar{17}), (\bar{11}, \bar{19}), (\bar{11}, \bar{21}), (\bar{13}, \bar{15}), (\bar{13}, \bar{17}),$
 $(\bar{13}, \bar{19}), (\bar{13}, \bar{21}), (\bar{14}, \bar{15}), (\bar{15}, \bar{17}), (\bar{15}, \bar{19}), (\bar{15}, \bar{21}), (\bar{16}, \bar{20}), (\bar{17}, \bar{19}),$
 $(\bar{17}, \bar{21}), (\bar{18}, \bar{19}), (\bar{19}, \bar{21})\}. Oleh karena itu dapat digambarkan graf Jacobson$
 $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{22}}$ sebagai berikut.



Gambar 3.8 Graf $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{22}}$

Berdasarkan Gambar 3.8, dapat diketahui bahwa graf $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{22}}$ tersebut adalah graf sederhana dan terhubung. Selanjutnya, dapat diketahui derajat titik dari $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{22}}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.14 Tabel Derajat Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$
$\deg(v)$	11	2	11	2	11	2	11	2	11	1	10	1	11	2	11	2	11	2	11	2	11

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$, titik \bar{p} mempunyai derajat $p - 1$ yaitu $\deg(\bar{11}) = 10$, titik $\overline{p-1}$ dan titik $\overline{p+1}$ mempunyai derajat 1 yaitu $\deg(\bar{10}) = \deg(\bar{12}) = 1$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ mempunyai derajat p yaitu $\deg(\bar{1}) = \deg(\bar{3}) = \deg(\bar{5}) = \deg(\bar{7}) = \deg(\bar{9}) = \deg(\bar{13}) = \deg(\bar{15}) = \deg(\bar{17}) = \deg(\bar{19}) = \deg(\bar{21}) = 11$ dan titik $\bar{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\} \setminus \left\{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right\}$ mempunyai derajat 2 yaitu $\deg(\bar{2}) = \deg(\bar{4}) = \deg(\bar{6}) = \deg(\bar{8}) = \deg(\bar{14}) = \deg(\bar{16}) = \deg(\bar{18}) = \deg(\bar{20}) = 2$.

Berdasarkan Gambar 3.8, dapat diketahui juga jarak dan eksentrisitas titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.15 Tabel Jarak Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$

$d(u, v)$		v																				
		$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$
u	$\bar{1}$	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1
	$\bar{2}$	2	0	2	3	2	1	2	2	2	3	3	3	2	3	2	3	1	3	2	3	2
	$\bar{3}$	1	2	0	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
	$\bar{4}$	2	3	1	0	2	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	3	2	3	2	3	2
	$\bar{5}$	1	2	1	2	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	1
	$\bar{6}$	2	1	2	3	2	0	2	3	2	3	2	3	1	3	2	3	2	3	2	3	2
	$\bar{7}$	1	2	1	2	1	2	0	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
	$\bar{8}$	2	2	2	3	2	3	1	0	2	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	3	2
	$\bar{9}$	1	2	1	2	1	2	1	2	0	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1
	$\bar{10}$	2	3	2	3	2	3	2	3	2	0	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	1
	$\bar{11}$	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
	$\bar{12}$	1	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	0	2	3	2	3	2	3	2	3	2
	$\bar{13}$	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	0	2	1	2	1	2	1	2	1
	$\bar{14}$	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	0	1	3	2	3	2	3	2
	$\bar{15}$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	0	2	1	2	1	2	1
	$\bar{16}$	2	3	2	3	2	3	2	3	1	3	2	3	2	3	2	0	2	3	2	1	2
	$\bar{17}$	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	2	1	2	1
	$\bar{18}$	2	3	2	3	2	3	2	1	2	3	2	3	2	3	2	3	2	0	1	3	2
	$\bar{19}$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	0	2	1
	$\bar{20}$	2	3	2	3	1	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	3	2	0	2
	$\bar{21}$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0

Tabel 3.16 Tabel Eksentrisitas Titik dari $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$

v	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$
$e(v)$	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Dapat disimpulkan bahwa pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$, titik $\overline{2k-1}$ untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ mempunyai eksentrisitas 2 yaitu $e(\bar{1}) = e(\bar{3}) = e(\bar{5}) = e(\bar{7}) = e(\bar{9}) = e(\bar{11}) = e(\bar{13}) = e(\bar{15}) = e(\bar{17}) = e(\bar{19}) = e(\bar{21}) = 2$ dan titik $\overline{2a}$ untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ mempunyai eksentrisitas 3 yaitu $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = e(\bar{10}) = e(\bar{12}) = e(\bar{14}) = e(\bar{16}) = e(\bar{18}) = e(\bar{20}) = 3$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas dari masing-masing titik di $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$ sebagai berikut.

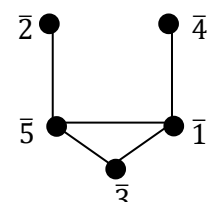
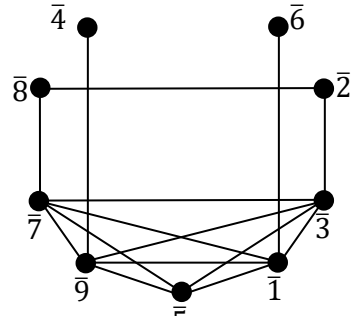
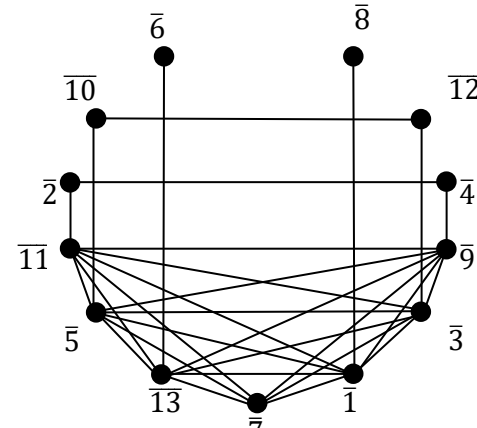
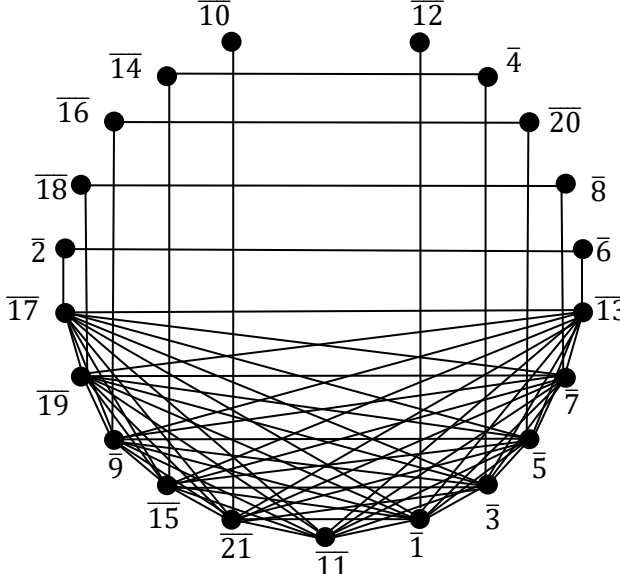
$$\begin{aligned}
\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}) = & \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{12}) + \deg(\bar{13}) + \deg(\bar{15}) + \deg(\bar{17}) + \deg(\bar{19}) + \deg(\bar{21})}{e(\bar{1})} \\
& + \frac{\deg(\bar{6}) + \deg(\bar{17})}{e(\bar{2})} + \\
& \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{4}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13}) + \deg(\bar{15}) + \deg(\bar{17}) + \deg(\bar{19}) + \deg(\bar{21})}{e(\bar{3})} \\
& + \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{14})}{e(\bar{4})} + \\
& \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13}) + \deg(\bar{15}) + \deg(\bar{17}) + \deg(\bar{19}) + \deg(\bar{20}) + \deg(\bar{21})}{e(\bar{5})} \\
& + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{13})}{e(\bar{6})} + \\
& \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{8}) + \deg(\bar{9}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13}) + \deg(\bar{15}) + \deg(\bar{17}) + \deg(\bar{19}) + \deg(\bar{21})}{e(\bar{7})} \\
& + \frac{\deg(\bar{7}) + \deg(\bar{18})}{e(\bar{8})} + \\
& \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5}) + \deg(\bar{7}) + \deg(\bar{11}) + \deg(\bar{13}) + \deg(\bar{15}) + \deg(\bar{16}) + \deg(\bar{17}) + \deg(\bar{19}) + \deg(\bar{21})}{e(\bar{9})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{11+11+11+2+11+11+10+11+11+11+11}{2} + \frac{2+11}{3} \\
& + \frac{11+11+11+11+11+10+11+2+11+11+11}{2} + \frac{11+2}{3} \\
& + \frac{11+2+11+11+11+11+10+11+11+11+11}{2} + \frac{2+11}{3} \\
& + \frac{11+11+11+11+11+10+11+11+11+2+11}{2} + \frac{11+2}{3} \\
& + \frac{11+11+11+11+11+1+10+11+11+11+11}{2} \\
= & \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 10) + (9 \times 11)}{2} \right) + \left(8 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 11)}{3} \right) + \left(8 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 10) + (9 \times 11)}{2} \right) \\
& + \left(2 \times \frac{(1 \times 11)}{3} \right) + \left(1 \times \frac{(10 \times 11)}{2} \right) \\
= & \left(2 \times \frac{110}{2} \right) + \left(8 \times \frac{13}{3} \right) + \left(8 \times \frac{111}{2} \right) + \left(2 \times \frac{11}{3} \right) + \left(1 \times \frac{110}{2} \right) \\
= & 110 + \frac{104}{3} + 444 + \frac{22}{3} + 55 \\
= & 651
\end{aligned}$$

Jadi, indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson \mathbb{Z}_{22} adalah 651.

Berdasarkan perhitungan dan pengamatan indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z}_{10} , \mathbb{Z}_{14} dan \mathbb{Z}_{22} dapat dibentuk tabel graf sebagai berikut.

Tabel 3.17 Tabel Gambar $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$

p	G	Gambar Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$
3	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}} = \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$	
5	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2 \cdot 5}} = \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$	
7	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2 \cdot 7}} = \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$	
11	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2 \cdot 11}} = \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$	

Lanjutan Tabel 3.17 Tabel Gambar $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$

p	G	Gambar Graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$
\vdots	\vdots	\vdots
$p \geq 3$	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2,p}} = \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$	

Selain itu, berdasarkan perhitungan indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z}_{10} , \mathbb{Z}_{14} dan \mathbb{Z}_{22} dapat dibuat tabel untuk memudahkan dalam mencari pola, dengan mengelompokkan titik-titik yang mempunyai keterhubungan yang sama.

Tabel 3.18 Perhitungan Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$

p	G	$\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}})$
3	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_6}$	$11 = \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)}{2}\right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 3)}{3}\right) + \left(1 \times \frac{(2 \times 3)}{2}\right)$
5	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{10}}$	$59 = \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 4) + (3 \times 5)}{2}\right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 5)}{3}\right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 4) + (3 \times 5)}{2}\right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 5)}{3}\right) + \left(1 \times \frac{(4 \times 5)}{2}\right)$
7	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{14}}$	$161 + \frac{14}{3} = \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 6) + (5 \times 7)}{2}\right) + \left(4 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 7)}{3}\right) + \left(4 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 6) + (5 \times 7)}{2}\right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 7)}{3}\right) + \left(1 \times \frac{(6 \times 7)}{2}\right)$
11	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{22}}$	$651 = \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times 10) + (9 \times 11)}{2}\right) + \left(8 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 11)}{3}\right) + \left(8 \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times 10) + (9 \times 11)}{2}\right) + \left(2 \times \frac{(1 \times 11)}{3}\right) + \left(1 \times \frac{(10 \times 11)}{2}\right)$
⋮	⋮	⋮

Lanjutan **Tabel 3.18** Perhitungan Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$

p	G	$\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}})$
$p \in \{3, 5, 7, 11\}$	$\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$	$ \begin{aligned} &= \left(2 \times \frac{(1 \times 1) + (1 \times (p-1)) + ((p-2) \times p)}{2} \right) \\ &\quad + \left((p-3) \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times p)}{3} \right) \\ &\quad + \left((p-3) \times \frac{(1 \times 2) + (1 \times (p-1)) + ((p-2) \times p)}{2} \right) \\ &\quad + \left(2 \times \frac{(1 \times p)}{3} \right) + \left(1 \times \frac{((p-1) \times p)}{2} \right) \\ &= \left(2 \times \frac{1+p-1+p^2-2p}{2} \right) + \left((p-3) \times \frac{2+p}{3} \right) \\ &\quad + \left((p-3) \times \frac{2+p-1+p^2-2p}{2} \right) + \left(2 \times \frac{p}{3} \right) \\ &\quad + \left(1 \times \frac{p^2-p}{2} \right) \\ &= \left(2 \times \frac{p^2-p}{2} \right) + \left((p-3) \times \frac{2+p}{3} \right) \\ &\quad + \left((p-3) \times \frac{p^2-p+1}{2} \right) + \left(2 \times \frac{p}{3} \right) + \left(1 \times \frac{p^2-p}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2p^2-2p}{2} \right) + \left(\frac{2p+p^2-6-3p}{3} \right) \\ &\quad + \left(\frac{p+p^3-p^2-3-3p^2+3p}{2} \right) + \left(\frac{2p}{3} \right) + \left(\frac{p^2-p}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2p^2-2p}{2} \right) + \left(\frac{p^2-p-6}{3} \right) + \left(\frac{p^3-4p^2+4p-3}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{2p}{3} \right) + \left(\frac{p^2-p}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2p^2-2p}{2} + \frac{p^3-4p^2+4p-3}{2} + \frac{p^2-p}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{p^2-p-6}{3} + \frac{2p}{3} \right) \\ &= \frac{p^3-p^2+p-3}{2} + \frac{p^2+p-6}{3} \end{aligned} $

Sehingga dari pengamatan tersebut diperoleh dugaan rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring \mathbb{Z}_{2p} di mana $p \geq 3$ dan p bilangan prima adalah sebagai berikut.

$$\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \sum_{v \in V} \frac{S(v)}{e(v)} = \frac{p^3 - p^2 + p - 3}{2} + \frac{p^2 + p - 6}{3}.$$

3.2 Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring \mathbb{Z}_{2p} , $p \geq 3$, p prima

Pada subbab ini akan dibuktikan dugaan rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring \mathbb{Z}_{2p} di mana $p \geq 3$ dan p bilangan prima berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya. Dugaan tersebut akan dibuktikan dan menjadi teorema.

Lemma 3.1

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$, maka \mathbb{Z}_{2p} memiliki tepat dua ideal sejati tak nol berbeda, yaitu $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$, khususnya $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$ masing-masing adalah ideal maksimal di \mathbb{Z}_{2p} .

Bukti:

- Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2p}$, $\bar{x} = \bar{2}k$, $k = 1, 2, \dots, p-1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{2} \rangle$.

Karena $\bar{x} = \bar{2}k = \bar{2} \cdot \bar{k}$ maka $\bar{x} \in \langle \bar{2} \rangle$.

Akibatnya $\langle \bar{x} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle$.

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{2} \rangle \subseteq \langle \bar{x} \rangle$.

Klaim $\bar{2} \in \langle \bar{x} \rangle$.

Kemudian akan dicari $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p}$ sehingga $\bar{2} = \bar{a} \cdot \bar{k}$.

Perhatikan bahwa,

$$xa \equiv 2 \pmod{2p}$$

$$\Leftrightarrow (2k)a \equiv 2 \pmod{2p}$$

memiliki solusi karena $\text{FPB}(2k, 2p) = 2$, dan $2|2$.

Artinya terdapat $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p}$ sehingga $\bar{2} = \bar{a} \cdot \bar{k}$.

Jadi $\bar{2} \in \langle \bar{x} \rangle$.

Sehingga $\langle \bar{2} \rangle \subseteq \langle \bar{x} \rangle$.

Dengan demikian, karena $\langle \bar{x} \rangle \subseteq \langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{2} \rangle \subseteq \langle \bar{x} \rangle$ maka $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{2} \rangle$.

- Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{2p}$, $\bar{x} = \overline{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots, p$ dan $k \neq \frac{p+1}{2}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{x} \rangle = \mathbb{Z}_{2p}$.

Perhatikan bahwa karena $x \neq p$ maka $\text{FPB}(x, 2p) = 1$.

Oleh karena itu, \bar{x} adalah unit di \mathbb{Z}_{2p} .

Akibatnya $\langle \bar{x} \rangle = \mathbb{Z}_{2p}$.

- Untuk $\bar{x} = \bar{0}$.

Karena $\bar{x} = \bar{0}$ maka jelas bahwa $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{0} \rangle$.

- Untuk $\bar{x} = \bar{p}$.

Klaim bahwa $\langle \bar{p} \rangle \not\subseteq \langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle \not\subseteq \langle \bar{p} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle \neq \mathbb{Z}_{2p}$.

Karena p prima, $p \neq 2$ maka $2 \nmid p$, oleh karena itu $\langle \bar{p} \rangle \not\subseteq \langle \bar{2} \rangle$.

Persamaan $2a \equiv p \pmod{2p}$ tidak memiliki solusi karena $\text{FPB}(2, 2p) = 2$, dan

$2 \nmid p$, artinya $\bar{2} \notin \langle \bar{p} \rangle$, akibatnya $\langle \bar{2} \rangle \not\subseteq \langle \bar{p} \rangle$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{p} \rangle \neq \mathbb{Z}_{2p}$.

Klaim $\bar{1} \notin \langle \bar{p} \rangle$.

Persamaan $pa \equiv 1 \pmod{2p}$ tidak memiliki solusi karena $\text{FPB}(p, 2p) = p$, dan

$p \nmid 1$, artinya $\bar{1} \notin \langle \bar{p} \rangle$.

Jadi $\langle \bar{p} \rangle \neq \mathbb{Z}_{2p}$.

Dengan demikian itu $\langle \bar{p} \rangle$ adalah ideal sejati dari \mathbb{Z}_{2p} yang tidak termuat dan memuat $\langle \bar{2} \rangle$.

Jadi $\langle \bar{2} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$ masing-masing adalah ideal maksimal di \mathbb{Z}_{2p} .

Lemma 3.2

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$, maka $J(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{0}\}$.

Bukti:

Ambil $\bar{x} \in \langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{p} \rangle = J(\mathbb{Z}_{2p})$.

Akan dibuktikan bahwa $\bar{x} = \bar{0}$.

Karena $\langle \bar{p} \rangle = \{\bar{0}, \bar{p}\}$ maka $\bar{x} = 0$ atau $\bar{x} = \bar{p}$.

Perhatikan bahwa $\bar{p} \notin \langle \bar{2} \rangle$ karena $2a \equiv p \pmod{2p}$ tidak memiliki solusi.

Jadi haruslah $\bar{x} \in \langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{p} \rangle$ jika dan hanya jika $\bar{x} = \bar{0}$.

Dengan demikian $J(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{0}\}$.

Lemma 3.3

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$, maka $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \mathbb{Z}_{2p} \setminus \{0\}$.

Bukti:

Telah diketahui bahwa $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \mathbb{Z}_{2p} \setminus J(\mathbb{Z}_{2p})$, berdasarkan Lemma 3.2 jelas

bahwa $V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \mathbb{Z}_{2p} \setminus \{0\}$.

Lemma 3.4

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ berlaku

$$\deg(\overline{2k-1}) = \begin{cases} p-1, & k = \frac{p+1}{2} \\ p, & k \neq \frac{p+1}{2} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus \{0\}$.

Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, \bar{x} dan \bar{y} terhubung langsung jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} \bar{1} - \bar{x}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p}) &\Leftrightarrow \bar{1} - \bar{x}\bar{y} = \bar{a}, \text{ untuk suatu } \bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus U(\mathbb{Z}_{2p}) \\ &\Leftrightarrow -\bar{x}\bar{y} = \bar{a} - \bar{1}, \text{ untuk suatu } \bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus U(\mathbb{Z}_{2p}) \\ &\Leftrightarrow -xy \equiv a - 1 \pmod{2p}, \text{ untuk suatu } \bar{a} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus U(\mathbb{Z}_{2p}) \end{aligned}$$

- Jika $k = \frac{p+1}{2}$ maka $2k - 1 = p$.

$-py \equiv a - 1 \pmod{2p}$ memiliki solusi jika dan hanya jika $\text{FPB}(-p, 2p) = p \mid a - 1$, untuk $0 \leq a < 2p$,

$$a - 1 = 0 \text{ atau } a - 1 = p$$

$$a = 1 \text{ atau } a = p + 1$$

Perhatikan bahwa untuk $a = 1$, $\bar{a} \in U(\mathbb{Z}_{2p})$ dan untuk $a = p + 1$, $\bar{a} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Jadi $\bar{1} - \bar{p}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$ hanya dipenuhi oleh $\bar{1} - \bar{p}\bar{y} = \overline{p+1}$ dengan sebanyak p solusi \bar{y} yang memenuhi.

Perhatikan bahwa untuk $\bar{y} = \bar{p}$ berlaku $\bar{1} - \bar{p}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$ karena $\text{FPB}(1 - p^2, 2p) = 2 \neq 1$.

Dengan demikian terdapat $p - 1$ solusi $\bar{y} \neq \bar{p}$ yang memenuhi $\bar{1} - \bar{x}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Oleh karena itu $\deg(\overline{2k-1}) = p - 1$ untuk $k = \frac{p+1}{2}$.

- Jika $k \neq \frac{p+1}{2}$ maka $2k - 1 \neq p$.

$-(2k - 1)y \equiv a - 1 \pmod{2p}$ memiliki solusi jika dan hanya jika

$$\text{FPB}(-(2k - 1), 2p) = 1 | a - 1$$

Artinya untuk semua $a = p$ dan $a = 2t, t = 0, 1, \dots, p - 1$,

$$-(2k - 1)y \equiv a - 1 \pmod{2p}$$

memiliki tepat satu solusi yaitu $\bar{y} = \overline{-(2k - 1)^{-1}(a - 1)}$ yang nilainya berbeda untuk setiap a yang berbeda.

Perhatikan bahwa $\bar{y} = \overline{2k - 1}$ merupakan salah satu solusinya karena

$$\text{FPB}(1 - (2k - 1)(2k - 1), 2p) = \text{FPB}(1 - (4k^2 - 4k + 1), 2p) \neq 1.$$

Dengan demikian terdapat p solusi \bar{y} yang memenuhi keterhubungan langsung dengan $\overline{2k - 1}$.

Oleh karena itu $\deg(\overline{2k - 1}) = p$, untuk $k \neq \frac{p+1}{2}$.

Lemma 3.5

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, titik $\overline{2k - 1}$ terhubung langsung dengan titik $\overline{2t - 1}$, untuk semua $k, t \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $k \neq t$.

Bukti:

Misalkan $k, t \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $k \neq t$, maka

$$\begin{aligned} \bar{1} - (\overline{2k - 1})(\overline{2t - 1}) &= \bar{1} - \overline{(4kt - 2k - 2t + 1)} \\ &= \bar{1} - \overline{(2(2kt - k - t) + 1)} \\ &= \overline{2(k + t - 2kt)} \end{aligned}$$

Perhatikan $\text{FPB}(2(k + t - 2kt), 2p) \neq 1$.

Oleh karena itu $\overline{2(k + t - 2kt)} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Jadi $\bar{1} - (\overline{2k-1})(\overline{2t-1}) \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Dengan demikian $(\overline{2k-1})$ terhubung langsung dengan $(\overline{2t-1})$, untuk semua $k, t \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $k \neq t$.

Lemma 3.6

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{\frac{p+1}{2}\}$ terdapat secara tunggal $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ sehingga $\overline{2k-1}$ terhubung langsung dengan $\overline{2a}$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.4 $\deg(\overline{2k-1}) = p$, dan berdasarkan Lemma 3.5 $\overline{2k-1}$ terhubung langsung dengan $\overline{2t-1}$ untuk setiap $t = 1, 2, \dots, p$ dan $k \neq t$. Oleh karena itu terdapat tepat satu $\bar{y} \in V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}})$, $\bar{y} = \overline{2a}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ yang terhubung langsung dengan $\overline{2k-1}$, $k \neq \frac{p+1}{2}$.

Lemma 3.7

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ berlaku

$$\deg(\overline{2a}) = \begin{cases} 1, & a \in \left\{ \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \right\} \\ 2, & a \notin \left\{ \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \right\} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus \{\bar{0}\}$.

Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, \bar{x} dan \bar{y} yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}\bar{1} - \bar{x}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p}) &\Leftrightarrow \bar{1} - \bar{x}\bar{y} = \bar{b}, \text{ untuk suatu } \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus U(\mathbb{Z}_{2p}) \\ &\Leftrightarrow -\bar{x}\bar{y} = \bar{b} - \bar{1}, \text{ untuk suatu } \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus U(\mathbb{Z}_{2p}) \\ &\Leftrightarrow -xy \equiv b - 1 \pmod{2p}, \text{ untuk suatu } \bar{b} \in \mathbb{Z}_{2p} \setminus U(\mathbb{Z}_{2p})\end{aligned}$$

- Jika $a = \frac{p-1}{2}$ maka $2a = p - 1$.

$-(p-1)y \equiv b - 1 \pmod{2p}$ memiliki solusi jika dan hanya jika $\text{FPB}(-(p-1), 2p) = 2|b-1$, yang mana hanya dipenuhi oleh $b = p$.

Untuk $b = p$,

$$-(p-1)y \equiv b - 1 \pmod{2p}$$

memiliki dua solusi.

Jadi $\bar{1} - \overline{p-1}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$ hanya dipenuhi oleh $\bar{1} - \overline{p-1}\bar{y} = \bar{p}$ dengan sebanyak dua solusi \bar{y} yang memenuhi.

Perhatikan bahwa untuk $\bar{y} = \overline{p-1}$ berlaku $\bar{1} - \overline{p-1}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$ karena $\text{FPB}(1 - (p^2 - 2p + 1), 2p) = \text{FPB}(-p^2 + 2p, 2p) = p \neq 1$.

Dengan demikian hanya terdapat satu solusi $\bar{y} \neq \overline{p-1}$ yang memenuhi $\bar{1} - \bar{x}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Oleh karena itu $\deg(\overline{p-1}) = 1$, untuk $k = \frac{p-1}{2}$.

- Jika $a = \frac{p+1}{2}$ maka $2a = p + 1$.

$-(p+1)y \equiv b - 1 \pmod{2p}$ memiliki solusi jika dan hanya jika $\text{FPB}(-(p+1), 2p) = 2|b-1$, yang hanya dipenuhi oleh $b = p$.

Untuk $b = p$,

$$-(p+1)y \equiv b - 1 \pmod{2p}$$

memiliki dua solusi.

Jadi $\bar{1} - \overline{p+1}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$ hanya dipenuhi oleh $\bar{1} - \overline{p+1}\bar{y} = \bar{p}$ dengan sebanyak dua solusi \bar{y} yang memenuhi.

Perhatikan bahwa untuk $\bar{y} = \overline{p+1}$ berlaku $\bar{1} - \overline{p+1}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$ karena $\text{FPB}(1 - (p^2 + 2p + 1), 2p) = \text{FPB}(-p^2 - 2p, 2p) = p \neq 1$.

Dengan demikian hanya terdapat satu solusi $\bar{y} \neq \overline{p+1}$ yang memenuhi $\bar{1} - \bar{x}\bar{y} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Oleh karena itu $\deg(\overline{p+1}) = 1$, $k = \frac{p+1}{2}$.

- Jika $a \neq \frac{p-1}{2}$ dan $a \neq \frac{p+1}{2}$ maka $2a \neq p-1$ dan $2a \neq p+1$

$-(2a)y \equiv b-1 \pmod{2p}$ memiliki solusi jika dan hanya jika $\text{FPB}(-(2a), 2p) = 2|b-1$

Artinya untuk semua $b = p$,

$$-(2a)y \equiv b-1 \pmod{2p}$$

memiliki tepat dua solusi yaitu $\bar{y} = \overline{-(2a)^{-1}(p-1)}$.

Perhatikan bahwa $\bar{y} = \overline{2a}$ merupakan salah satu solusinya karena $\text{FPB}(1 - (2a)(2a), 2p) = \text{FPB}(1 - 4a^2, 2p) \neq 1$.

Perhatikan bahwa $\bar{y} = \overline{2k-1}$ merupakan salah satu solusinya karena $\text{FPB}(1 - (2a)(2k-1), 2p) = \text{FPB}(1 - (4ak - 2a), 2p) \neq 1$.

Dengan demikian terdapat dua solusi $\bar{y} = \overline{2a}$ dan $\bar{y} = \overline{2k-1}$ yang memenuhi keterhubungan langsung dengan $\overline{2a}$.

Oleh karena itu $\deg(\overline{2a}) = 2$, untuk $a \neq \frac{p-1}{2}$ dan $a \neq \frac{p+1}{2}$.

Lemma 3.8

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk setiap $a \in \{1, 2, \dots, p-1\} \setminus \left\{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right\}$ terdapat secara tunggal $c \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ sehingga $\overline{2a}$ terhubung langsung dengan $\overline{2c}$ dan $a \neq c$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.7 $\deg(\overline{2a}) = 2$, dan berdasarkan Lemma 3.6 untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ terdapat secara tunggal $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ sehingga $\overline{2k-1}$ terhubung langsung dengan $\overline{2a}$. Oleh karena itu terdapat tepat satu $\bar{y} \in V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}})$, $\bar{y} = \overline{2c}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan $a \neq c$.

Lemma 3.9

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, titik $\overline{p-1}$ hanya terhubung langsung dengan titik $\overline{2p-1}$ dan titik $\overline{p+1}$ hanya terhubung langsung dengan titik $\bar{1}$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.7 $\deg(\overline{2a}) = 1$, $a \in \left\{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right\}$, artinya titik $\overline{p-1}$ dan titik $\overline{p+1}$ masing-masing hanya terhubung langsung dengan satu titik, yaitu

- Untuk titik $\overline{p-1}$ terhubung langsung dengan titik $\overline{2p-1}$

$$\begin{aligned} \bar{1} - (\overline{p-1})(\overline{2p-1}) &= \bar{1} - \overline{(2p^2 - p - 2p + 1)} \\ &= \bar{1} - \overline{(2p^2 - 3p + 1)} \\ &= \overline{-2p^2 + 3p} \end{aligned}$$

Perhatikan $\text{FPB}(-2p^2 + 3p, 2p) = p$.

Oleh karena itu $\overline{-2p^2 + 3p} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Jadi $\bar{1} - (\overline{p-1})(\overline{2p-1}) \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Dengan demikian $(\overline{p-1})$ terhubung langsung dengan $(\overline{2p-1})$.

- Untuk titik $\overline{p+1}$ terhubung langsung dengan titik $\bar{1}$

$$\begin{aligned}\bar{1} - (\overline{p+1})(\bar{1}) &= \bar{1} - (\overline{p+1}) \\ &= \overline{-p}\end{aligned}$$

Perhatikan $\text{FPB}(-p, 2p) = p$.

Oleh karena itu $\overline{-p} \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Jadi $\bar{1} - (\overline{p+1})(\bar{1}) \notin U(\mathbb{Z}_{2p})$.

Dengan demikian $(\overline{p+1})$ terhubung langsung dengan $(\bar{1})$.

Sekarang akan ditentukan titik-titik yang terhubung langsung, untuk mempermudah pengerjaan, titik-titik pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$ dibagi menjadi tujuh himpunan dan dimisalkan sebagai berikut.

$$V_1 = \{p\}$$

$$V_2 = \{p-1\}$$

$$V_3 = \{p+1\}$$

$$V_4 = \{1\}$$

$$V_5 = \{2p-1\}$$

$$V_6 = \{2k \mid k = 1, 2, \dots, p-1 \text{ dan } k \neq \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\}$$

$$V_7 = \{2k-1 \mid k = 1, 2, \dots, p \text{ dan } k \neq 1, \frac{p+1}{2}, p\}$$

dimana $|V_1| = 1, |V_2| = 1, |V_3| = 1, |V_4| = 1, |V_5| = 1, |V_6| = p-3$ dan $|V_7| = p-3$.

Lemma 3.10

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Persekitaran suatu titik pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$ yaitu,

- $N(V_1) = \{V_4, V_5, V_7\}$.
- $N(V_2) = \{V_5\}$.
- $N(V_3) = \{V_4\}$.
- $N(V_4) = \{V_1, V_3, V_5, V_7\}$.
- $N(V_5) = \{V_1, V_2, V_4, V_7\}$.
- $N(V_6) = \{V_6, V_7\}$, di mana V_6 terhubung langsung dengan tepat satu titik berbeda di V_6 dan tepat satu titik di V_7 .
- $N(V_7) = \{V_1, V_4, V_5, V_6, V_7\}$, di mana V_6 terhubung langsung dengan tepat satu titik di V_6 dan terhubung langsung ke setiap titik di V_7 kecuali dirinya sendiri.

Bukti:

- $N(V_1) = N(\overline{p})$

Berdasarkan Lemma 3.5 \overline{p} terhubung langsung dengan $\overline{2k - 1}$ untuk semua $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $k \neq \frac{p+1}{2}$. Sehingga $N(\overline{p}) = \{\overline{2k - 1}\}$, untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{\frac{p+1}{2}\}$ atau dapat ditulis $N(V_1) = \{V_4, V_5, V_7\}$.

- $N(V_2) = N(\overline{p - 1})$

Berdasarkan Lemma 3.8 $\overline{p - 1}$ hanya terhubung langsung dengan $\overline{2p - 1}$. Sehingga $N(\overline{p - 1}) = \{\overline{2p - 1}\}$ atau dapat ditulis $N(V_2) = \{V_5\}$.

- $N(V_3) = N(\overline{p + 1})$

Berdasarkan Lemma 3.8 $\overline{p + 1}$ hanya terhubung langsung dengan $\overline{1}$. Sehingga $N(\overline{p + 1}) = \{\overline{1}\}$ atau dapat ditulis $N(V_3) = \{V_4\}$.

- $N(V_4) = N(\overline{1})$

Berdasarkan Lemma 3.5 $\bar{1}$ terhubung langsung dengan $\overline{2k-1}$ untuk semua $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $k \neq 1$. Kemudian berdasarkan Lemma 3.6 $\bar{1}$ terhubung langsung dengan tepat satu $\overline{2a}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan berdasarkan Lemma 3.8 titik itu adalah $\overline{p+1}$. Sehingga $N(\bar{1}) = \{\overline{2k-1}, \overline{p+1}\}$, untuk setiap $k \in \{2, \dots, p\}$ atau dapat ditulis $N(V_4) = \{V_1, V_3, V_5, V_7\}$.

- $N(V_5) = N(\overline{2p-1})$

Berdasarkan Lemma 3.5 $\overline{2p-1}$ terhubung langsung dengan $\overline{2k-1}$ untuk semua $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Kemudian berdasarkan Lemma 3.6 $\overline{2p-1}$ terhubung langsung dengan tepat satu $\overline{2a}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan berdasarkan Lemma 3.8 titik itu adalah $\overline{p-1}$. Sehingga $N(\overline{2p-1}) = \{\overline{2k-1}, \overline{p-1}\}$, untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ atau dapat ditulis $N(V_5) = \{V_1, V_2, V_4, V_7\}$.

- $N(V_6) = N(2a), a \notin \left\{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right\}$

Berdasarkan Lemma 3.6 $\overline{2k-1}$ dengan $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ terhubung langsung dengan tepat satu $\overline{2a}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan berdasarkan Lemma 3.8 $\overline{2a}$ terhubung langsung dengan tepat satu $\overline{2c}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan $a \neq c$. Sehingga $N(\overline{2a}) = \{\overline{2k-1}, \overline{2c}\}$, untuk tepat satu $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ dan tepat satu $a, c \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan $a \neq c$ atau dapat ditulis $N(V_6) = \{V_6, V_7\}$, di mana V_6 terhubung langsung dengan tepat satu titik berbeda di V_6 dan tepat satu titik di V_7 .

- $N(V_7) = N(2k-1), k \neq \frac{p+1}{2}$

Berdasarkan Lemma 3.5 $\overline{2k-1}$ terhubung langsung dengan titik $\overline{2t-1}$, untuk semua $k, t \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $k \neq t$ dan berdasarkan Lemma 3.6 $\overline{2k-1}$ dengan

$k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ terhubung langsung dengan tepat satu $\overline{2a}$ dengan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Sehingga $N(\overline{2k-1}) = \{\overline{2t-1}, \overline{2a}\}$, untuk setiap $k \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \left\{\frac{p+1}{2}\right\}$ dan tepat satu $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dan $a \neq c$ atau sapat ditulis $N(V_7) = \{V_1, V_4, V_5, V_6, V_7\}$, di mana V_6 terhubung langsung dengan tepat satu titik di V_6 dan terhubung langsung ke setiap titik di V_7 kecuali dirinya sendiri.

Lemma 3.11

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan suatu titik pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$ yaitu,

$$S(2k-1) = \begin{cases} p^2 - p, & \text{dan } k = 1, \frac{p+1}{2}, p \\ p^2 - p + 1, & \text{dan } k \neq 1, \frac{p+1}{2}, p \end{cases}$$

dan

$$S(2a) = \begin{cases} p, & \text{dan } a = \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \\ p+2, & \text{dan } a \neq \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \end{cases}$$

Bukti:

- $S(V_1) = S(\bar{p})$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_1 adalah $|V_4| \deg(V_4) + |V_5| \deg(V_5) + |V_7| \deg(V_7) = (1)(p) + (1)(p) + (p-3)(p) = p + p + p^2 - 3p = p^2 - p$.

- $S(V_2) = S(\overline{p-1})$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_2 adalah $|V_5| \deg(V_5) = (1)(p) = p$.

- $S(V_3) = S(\overline{p+1})$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_3 adalah $|V_4| \deg(V_4) = (1)(p) = p$.

- $S(V_4) = S(\overline{1})$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_4 adalah $|V_1| \deg(V_1) + |V_3| \deg(V_3) + |V_5| \deg(V_5) + |V_7| \deg(V_7) = (1)(p-1) + (1)(1) + (1)(p) + (p-3)(p)$
 $= p-1 + 1 + p + p^2 - 3p = p^2 - p$.

- $S(V_5) = S(\overline{2p-1})$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_5 adalah $|V_1| \deg(V_1) + |V_2| \deg(V_2) + |V_4| \deg(V_4) + |V_7| \deg(V_7) = (1)(p-1) + (1)(1) + (1)(p) + (p-3)(p) = p-1 + 1 + p + p^2 - 3p = p^2 - p$.

- $S(V_6) = S(\overline{2a}), a \notin \left\{ \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \right\}$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_6 adalah $(1) \deg(V_6) + (1) \deg(V_7) = (1)(2) + (1)(p) = p+2$.

- $S(V_7) = S(\overline{2k-1}), k \neq \frac{p+1}{2}$

Berdasarkan Lemma 3.10, jumlah derajat semua titik yang terhubung langsung dengan anggota V_7 adalah $|V_1| \deg(V_1) + |V_4| \deg(V_4) + |V_5| \deg(V_5) + (1) \deg(V_6) + (|V_7| - 1) \deg(V_7) = (1)(p-1) + (1)(p)$

$$+(1)(p) + (1)(2) + (p - 3 - 1)(p) = p - 1 + p + p + 2 + p^2 - 4p = p^2 - p + 1.$$

Lemma 3.12

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $a \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$, eksentrisitas pada $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}$ yaitu,

$$e(v) = \begin{cases} 2, & \text{dan } v = 2k + 1 \\ 3, & \text{dan } v = 2a \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $x, y \in V(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}})$

- $e(V_1) = e(\bar{p})$

Misalkan $x \in V_1$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in V_4$ atau $y \in V_5$ atau $y \in V_7$ dan $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_2$ atau $y \in V_3$ atau $y \in V_6$ maka $e(V_1) = 2$.

- $e(V_2) = e(\overline{p-1})$

Misalkan $x \in V_2$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in V_5$, $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_1$ atau $y \in V_4$ atau $y \in V_7$ dan $d(x, y) = 3$ jika $y \in V_3$ atau $y \in V_6$ maka $e(V_2) = 3$.

- $e(V_3) = e(\overline{p+1})$

Misalkan $x \in V_3$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in V_4$, $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_1$ atau $y \in V_5$ atau $y \in V_7$ dan $d(x, y) = 3$ jika $y \in V_2$ atau $y \in V_6$ maka $e(V_3) = 3$.

- $e(V_4) = e(\bar{1})$

Misalkan $x \in V_4$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in$

V_1 atau $y \in V_3$ atau $y \in V_5$ atau $y \in V_7$ dan $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_2$ atau $y \in V_6$ maka $e(V_4) = 2$.

- $e(V_5) = e(\overline{2p-1})$

Misalkan $x \in V_5$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in V_1$ atau $y \in V_2$ atau $y \in V_4$ atau $y \in V_7$ dan $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_3$ atau $y \in V_6$ maka $e(V_5) = 2$.

- $e(V_6) = e(\overline{2a}), a \notin \left\{ \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2} \right\}$

Misalkan $x \in V_6$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in V_6$ atau $y \in V_7$ dengan syarat $1 - xy = p$, $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_1$ atau $y \in V_4$ atau $y \in V_5$ atau $y \in V_7$, untuk $y \in V_7$ dengan syarat $1 - xy \neq p$ dan $d(x, y) = 3$ jika $y \in V_2$ atau $y \in V_3$ atau $y \in V_6$, untuk $y \in V_6$ dengan syarat $1 - xy \neq p$ maka $e(V_6) = 3$.

- $e(V_7) = e(\overline{2k-1}), k \neq \frac{p+1}{2}$

Misalkan $x \in V_7$, berdasarkan Lemma 3.10 maka $d(x, y) = 1$ jika $y \in V_1$ atau $y \in V_4$ atau $y \in V_5$ atau $y \in V_6$ dengan syarat $1 - xy = p$ atau $y \in V_7$ dan $d(x, y) = 2$ jika $y \in V_2$ atau $y \in V_3$ atau $y \in V_6$, untuk $y \in V_6$ dengan syarat $1 - xy \neq p$ maka $e(V_7) = 2$.

Teorema

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan $p \geq 3$ dan p bilangan prima adalah

$$\xi^{ad}(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \frac{p^3 - p^2 + p - 3}{2} + \frac{p^2 + p - 6}{3}.$$

Bukti:

Misalkan p bilangan prima, $p \geq 3$. Pada graf $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{2p}}$, untuk $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ dan $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, berdasarkan Lemma 3.11 dan Lemma 3.12 maka indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah

$$\begin{aligned}
\xi^{ad}(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{2p}}) &= \sum_{k=1}^p \frac{S(v_{2k-1})}{e(v_{2k-1})} + \sum_{a=1}^{p-1} \frac{S(v_{2a})}{e(v_{2a})} \\
&= \sum_{k=1, \frac{p+1}{2}, p} \frac{S(v_{2k-1})}{e(v_{2k-1})} + \sum_{k=1, \frac{p+1}{2}, p}^p \frac{S(v_{2k-1})}{e(v_{2k-1})} + \sum_{a=\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}} \frac{S(v_{2a})}{e(v_{2a})} \\
&\quad + \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}}}^{p-1} \frac{S(v_{2a})}{e(v_{2a})} \\
&= (3) \cdot \left(\frac{p^2-p}{2}\right) + (p-3) \cdot \left(\frac{p^2-p+1}{2}\right) + (2) \cdot \left(\frac{p}{3}\right) \\
&\quad + (p-3) \cdot \left(\frac{p+2}{3}\right) \\
&= \frac{3p^2-3p}{2} + \frac{p^3-p^2+p-3p^2+3p-3}{2} + \frac{2p}{3} \\
&\quad + \frac{p^2+2p-3p-6}{3} \\
&= \frac{3p^2-3p}{2} + \frac{p^3-4p^2+4p-3}{2} + \frac{2p}{3} + \frac{p^2-p-6}{3} \\
&= \frac{p^3-p^2+p-3}{2} + \frac{p^2+p-6}{3}.
\end{aligned}$$

3.3 Integrasi Hasil Penelitian dengan Kajian Keislaman

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada bab II tentang kajian teori graf dalam al-Qur'an, QS. at-Taubah ayat 105 dimana setiap manusia dianjurkan untuk menjadi hamba yang *Nafi'un lighoirihi* atau hamba yang bermanfaat bagi orang lain. Berdasarkan penjelasan ayat yang artinya

“Dan katakanlah, “Bekerjalah kamu, maka Allah dan Rasul-Nya serta orang-orang mukmin akan melihat amal kamu itu, dan kamu akan dikembalikan kepada Yang Maha Mengetahui yang ghaib dan yang nyata, lalu diberitakan-Nya kepada kamu apa yang telah kamu kerjakan”.”

Menurut Shihab (2002) dalam Tafsir Al-Misbah menafsirkan bahwa, *“Dan katakanlah, Bekerjalah kamu”* maksudnya, Allah memerintahkan manusia untuk bekerja semata-mata karena Allah dengan beragam amal shaleh dan bermanfaat, baik untuk diri sendiri maupun masyarakat umum. *“Maka Allah akan melihat pekerjaanmu”* maksudnya amal tadi akan dinilai dan diberi ganjaran oleh Allah. Selain itu, Rasul-Nya serta orang-orang mukmin juga akan melihat dan menilainya, kemudian mereka menyesuaikan perlakuannya sesuai dengan amal-amal tadi. *“Dan kamu akan dikembalikan kepada (Allah) Yang Maha Mengetahui yang ghaib dan yang nyata”* maksudnya manusia akan dikembalikan melalui kematian kepada Allah, lalu manusia akan diberitahu tentang sanksi dan ganjaran yang mereka dapat sesuai dengan apa yang telah diperbuat, baik yang nampak maupun yang disembunyikan dalam hati.

Menurut Hamka (1994) dalam Tafsir al-Azhar juzu' 11, hal. 37, QS. at-Taubah ayat 105 tersebut dihubungkan dengan QS. al-Isra' ayat 84, yang artinya:

“Katakanlah: “Tiap-tiap orang beramal menurut bakatnya, tetapi Tuhan engkau lebih mengetahui siapakah yang lebih mendapat petunjuk dalam perjalanan”.”

Sehingga, berdasarkan uraian tersebut dapat diketahui bahwa Allah memerintahkan

manusia untuk bekerja sesuai keahlian atau ilmu yang dimilikinya dengan tujuan untuk memberikan manfaat bagi dirinya dan orang lain. Sebagai umat muslim dan seorang matematikawan, maka selayaknya anjuran tersebut kita amalkan salah satunya dengan menghasilkan rumus baru agar dapat menyelesaikan suatu permasalahan matematika. Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah pembaca dalam melakukan penelitian atau perhitungan berdasarkan teorema-teorema baru yang telah terbentuk.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan, dapat diambil kesimpulan berupa teorema bahwa rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$ di mana $p \geq 3$ dan p bilangan prima adalah sebagai berikut:

$$\xi^{ad}(\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_{2p}}) = \frac{p^3 - p^2 + p - 3}{2} + \frac{p^2 + p - 6}{3}.$$

4.2 Saran

Penelitian ini membahas masalah tentang indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $2p$ di mana $p \geq 3$ dan p bilangan prima. Penelitian selanjutnya diharapkan membahas masalah tentang indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf dan modulo lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Akhter, S. & Farooq, R. 2020. The Eccentric Adjacency Index of Unicyclic Graphs and Trees. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13 (1): 1-16.
- Al-Mubarakfuri, S.S. 2007. *Shahih Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 2*. Penerjemah, Abu Ihsan al-Atsari; Editor, Abu Hasan Sirojuddin Hasan Bashri, Lc. Bogor: Pustaka Ibnu Katsir.
- Azimi, A., Erfanian, A., & Farrokhi, M. 2012. The Jacobson Gaph of Commutative Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 12 (3).
- Budayasa, I.K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University.
- Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Press.
- Ediz, S. 2011. On the Ediz Eccentric Connectivity Index of a Graph. *Optoelectronics and Advance Materials Rapid Communications*, 5 (11): 1263–1264.
- Gallian, J.A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra Eight Edition*. USA: Brooks/ Cole Cengage Learning.
- Ghayour, H., Erfanian, A., & Azimi, A. 2018. Some Results on the Jacobson Graph of a Commutative Ring. *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo*, 67 (1): 33–41.
- Gilbert, L dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra, Seventh Edition*. USA: Brooks/ Cole Cengage Learning.
- Gilbert, L dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra, Eight Edition*. USA: Brooks/ Cole Cengage Learning.
- Hamka. 1994. *Tafsir al-Azhar, Juzu' XI*. Surabaya: Yayasan Nurul Islam.
- Hasan, M.F. 2018. *Sifat-Sifat Submodul Maksimal dalam Modul Perkalian*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Irawan, Wahyu Hengki dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki PRESS.
- Kumar, V., & Madan, A.K. 2006. Application of Graph Theory : Prediction of Cytosolic Phospholipase A₂ Inhibitory Activity of propan-2-ones. *Journal of Mathematical Chemistry*, 39 (314): 511-521.
- Kusmayadi, T.A., & Sudibyoy, N.A. 2011. Eccentric Digraph of Cocktail Party Graph and Hypercube. *IPTEK, The Journal for Technology and Science*, 22

(4): 198-204.

Menezes, A. J., Oorschot, P. C. Van, & Vanstone, S. A. 1996. *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press.

Morgan, M.J., Mukwembi, S., & Swart, H.C. 2011. On the Eccentric Connectivity Index of a Graph. *Discrete Mathematics*, 311 (13): 1229-234.

Reddy, B.S., Jain, R.S., & Laxmikanth, N. 2020. *Eccentric Topological Index of the Zero Divisor graph $\Gamma[\mathbb{Z}_n]$* . arXiv:2001.01220v1.

Novictor, A., Susilowati, L. & Fatmawati. 2020. Jacobson Graph Construction of Ring \mathbb{Z}_{3^n} for $n > 1$. *Journal of Physics: Conference Series*, 1494 (012016): 1-7.

Sharafdini, R., & Safazadeh, M. 2016. On Eccentric Adjacency index of Several Infinite Classes of Fullerenes. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 2 (5): 1–11.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian AlQur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Sitohang, T.R. 2017. *Kriptosistem Gabungan antara S-Ecies dan RSA*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.

Sulistya, H.P. 2001. *Ring Semisederhana Jacobson*. Skripsi tidak dipublikasikan. Sleman: Universitas Sanarta Dharma.

RIWAYAT HIDUP



Faza Silmi Kamilah, lahir di Pasuruan pada tanggal 24 September 1998, biasa dipanggil Silmi. Anak kedua dari empat bersaudara yang dilahirkan dari pasangan Bapak Achmad Nuchin dan Ibu Luluk Fauziyah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Glagahsari 1 Kecamatan Sukorejo Kabupaten Pasuruan dan lulus pada tahun 2011. Kemudian melanjutkan Pendidikan di MTs Maarif Kecamatan Sukorejo Kabupaten Pasuruan dan lulus pada tahun 2014. Setelah itu menempuh Pendidikan di MA Maarif Kecamatan Sukorejo Kabupaten Pasuruan dan lulus pada tahun 2017. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah Program Studi Matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 558933 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Faza Silmi Kamilah
NIM : 17610048
Fakultas/ Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II : Dewi Ismiarti, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	12 Februari 2021	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	1.
2	24 Februari 2021	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3	8 Maret 2021	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4	22 Maret 2021	Melanjutkan Pembuktian	4.
5	25 Maret 2021	ACC untuk diseminarkan	5.
6	9 April 2021	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	6.
7	27 April 2021	ACC Kajian Keagamaan	7.
8	30 April 2021	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	8.
9	3 Mei 2021	Revisi Bab I, Bab II & Bab III	9.
10	3 Mei 2021	ACC untuk disidangkan	10.

Malang,
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001