STUDI PERUSAKAN SIMETRI CPT (*CHARGE CONJUGATION, PARITY, TIME REVERSAL*) PADA OSILASI NEUTRINO

SKRIPSI

Oleh:
ELLA DWI CAHYANI
NIM. 16640062

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

STUDI PERUSAKAN SIMETRI CPT (*CHARGE CONJUGATION, PARITY, TIME REVERSAL*) PADA OSILASI NEUTRINO

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ELLA DWI CAHYANI
NIM. 16640062

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI PERUSAKAN SIMETRI CPT (*CHARGE CONJUGATION, PARITY, TIME REVERSAL*) PADA OSILASI NEUTRINO

SKRIPSI

Oleh:
Ella Dwi Cahyani
NIM. 16640062

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Pada tanggal: 22 April 2021

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Abdul Basid, M.Si	Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19650504 199003 1 003	NIP. 19900905 201903 1 018

Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
JURUSAN FISIKA

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI PERUSAKAN SIMETRI CPT (*CHARGE CONJUGATION, PARITY, TIME REVERSAL*) PADA OSILASI NEUTRINO

SKRIPSI

Oleh:
Ella Dwi Cahyani
NIM. 16640062

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji
Dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada tanggal, 27 Mei 2021

Penguji Utama :	Erna Hastuti, M.Si NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji :	Muhammad Taufiqi, M.Si	
Sekertaris Penguji :	Drs. Abdul Basid, M.Si NIP. 19650504 199003 1 003	
Anggota Penguji :	Arista Romadani, M.Sc NIP. 19900905 201903 1 018	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG JURUSAN FISIKA

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Ella Dwi Cahyani
NIM	:	16640062
Jurusan	:	Fisika
Fakultas	:	Sains Dan Teknologi
Judul Penelitian	:	Studi Perusakan Simetri CPT (*Charge Conjugation, Parity, Time Reversal*) pada Osilasi Neutrino

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 April 2021

Yang Membuat Pernyataan

METERAI TEMPEL
45BA3AJX261607398

Ella Dwi Cahyani

NIM. 16640062

MOTTO

Hatiku terasa tenang karena mengetahui bahwa apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku. Dan apa yang ditakdirkan untukku tidak pernah melewatkanku.

Yang terbaik adalah bukan merasa sudah berbuat baik, tetapi yang tidak pernah berhenti berbuat baik tanpa merasa paling baik. Yang melakukan kebaikan bukan karena pujian, tetapi karena ingin pahala kebaikan.

HALAM PERSEMBAHAN

Dengan Segala Puji Syukur kepada Allah SWT, penulis mempersembahkan karya ini kepada keluarga tercinta,

Ayah Senimin, Ibu Sulika, Eneng Henny Anggraini,
dan Adik Cika Visel Hanifah

yang paling berjasa dan berharga dalam kehidupan penulis. Terima kasih atas segala limpahan do'a, restu, kata maaf, dan dukungan sehingga penulis dapat menuntut ilmu demi menggapai cita-cita.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan segala rahmat dan nikmatnya berupa kesehatan, kesempatan, kekuatan, keinginan, serta kesabaran, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi yang telah penulis susun ini berjudul **" Studi Perusakan Simetri CPT (*Charge Conjugation, Parity, Time Reversal*) pada Osilasi Neutrino"**. Sholawat serta salam penulis panjatkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menuntun manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman yang pencerahan dan penuh dengan ilmu pengetahuan yang luar biasa saat ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya bantuan dari pihak-pihak yang terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Khususnya penulis ucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Drs. Abdul Basid, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Muhammad Taufiqi, M.Si.,selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
5. Erika Rani, M.Si., selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.
6. Arista Romadani, M.Sc., selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.
7. Seluruh dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik dan membimbing saya.
8. Keluarga khususnya Ibu, Ayah, Kakak, dan Adik yang selama ini selalu memberikan dukungan, do'a serta semangat agar penulis senantiasa diberikan kemudahan dalam setiap langkahnya.

9. Zuhairini Rizqiyah, S. Si., sebagai tutor yang memberi arahan penulis untuk memulai menyusun skripsi ini.
10. Candrasyah Muhammad, M.Si., High. Grad. Dip. dan Try Adi Sucipto, sebagai tutor yang memberi arahan penulisan skripsi menggunakan aplikasi LateX.
11. Yuris Adi Pradana yang selalu memotivasi dan membantu dalam proses penyelesaian penulisan skripsi.
12. Sahabat dan teman-teman jurusan Fisika angkatan 2016 terutama teman-teman Squad Teori yang telah membantu dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
13. Serta terima kasih semua pihak yang telah membantu penyusunan skripsi ini yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan mereka dengan nikmat yang berlipat ganda baik di dunia maupun di akhirat kelak, aamiin. Penulisan berharap semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi penulis dan semua pihak yang membaca, dalam menambah wawasan ilmiah dan memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan, oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat konstruktif sangat penulis harapkan demi kebaikan bersama.

Malang, 22 April 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Cahyani, Ella Dwi. 2021. **Studi Perusakan Simetri CPT (*Charge Conjugation, Parity, Time Reversal*) pada Osilasi Neutrino**. Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Drs. Abdul Basid, M. Si (II) Arista Romadani, M. Sc.

Kata Kunci: Perusakan Simetri CPT, Osilasi Neutrino, Massa Neutrino.

Neutrino merupakan salah satu partikel elementer yang sangat unik. Pada standar model menyatakan bahwa neutrino tak bermassa dan hanya memiliki kiralitas left-handed saja. Fenomena yang menarik dalam fisika mengenai adanya osilasi neutrino dengan memunculkan suku massa neutrino dan pembangkit kiralitas right-handed. Neutrino mengalami osilasi kebentuk flavor neutrino yang lain. Tak hanya itu neutrino juga mengalami osilasi menjadi anti neutrino atau neutrino steril yang mana neutrino melanggar simetri CPT.

ABSTRACT

Cahyani, Ella Dwi. 2021. **Study CPT Symmetry Violation (*Charge Conjugation, Parity, Time Reversal*) on Neutrino Oscillation**. Thesis. Physics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor: (I) Drs. Abdul Basid, M. Si (II) Arista Romadani, M. Sc.

Keywords: CPT Symmetry Violation, Neutrino Oscillation, Neutrino Mass.

Neutrinos are one of the most unique elementary particles. The standard model state that neutrinos have no mass and only have left-handed chirality. An interesting phenomenon in physics regarding the existence of neutrino oscillations by giving rise to the neutrino mass term and generating right-handed chirality. Neutrinos undergo oscillations to form a neutrino flavor that other. Not only that, neutrinos also experincee oscillation to become anti-neutrinos or sterile neutrinos in which the neutrinos violate the CPT symmetry.

المستخلص

جهياني، إلى دوي. 2021. **دراسة تحطيم مماثلة CPT (ترافق الشحنة، التعادل، والعكس الزمني) عند تذبذب النترينو**. بحث جامعي. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (1) عبد الباسط، الماجستير؛ (2) أرستا رمضاني، الماجستير.

الـ كـلمات الـ رئـ يـ سـ ية **:تحطيم** مماثلة CPT، يتذبذب النترينو ، الكتلة النترينو

النترينو هو الجسيم الأولي ذوي الفريدة. عين النموذج العياري بأن النترينو ما يحتوي الكتلة وله الكيرالية العسروية لا غير. ولكن هنالك أمر خارق العادة في الفيزياء وهو ظهور سبط كتلة النترينو وتوليد الكيرالية اليمينية. يتذبذب نترينو إلى نكهة أخرى. كما يتذبذب نترينو إلى ضد نترينو أو النترينو العميق حيث عاد مماثلة CPT.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Neutrino merupakan partikel sangat penting dalam dunia fisika, yang susah dideteksi dan pernah dianggap tidak memiliki massa pada awal mula ditemukannya. Neutrino merupakan suatu partikel dasar yang mempunyai spin 1/2 dan tergolong partikel dasar fermion. Pada eksperimen yang terbaru (Super-Kamiokande) menunjukkan bahwa massa neutrino ternyata tidak sama dengan nol. Neutrino dapat berinteraksi melalui interaksi lemah dan gravitasi. Interaksi lemah mempengaruhi neutrino menjadi 3 flavor lepton, yaitu: neutrino elektron, neutrino tau, dan neutrino muon. Masing-masing flavor memiliki anti partikel yang disebut anti neutrino.

وَمَا تَكُوْنُ فِيْ شَأْنٍ وَّمَا تَتْلُوْا مِنْهُ مِنْ قُرْاٰنٍ وَّلَا تَعْمَلُوْنَ مِنْ عَمَلٍ اِلَّا كُنَّا عَلَيْكُمْ
شُهُوْدًا اِذْ تُفِيْضُوْنَ فِيْهِ وَمَا يَعْزُبُ عَنْ رَّبِّكَ مِنْ مِّثْقَالِ ذَرَّةٍ فِى الْاَرْضِ وَلَا فِى السَّمَاۤءِ
وَلَآ اَصْغَرَ مِنْ ذٰلِكَ وَلَآ اَكْبَرَ اِلَّا فِيْ كِتٰبٍ مُّبِيْنٍ

Kamu tidak berada dalam suatu keadaan dan tidak membaca suatu ayat dari Al Qur'an dan kamu tidak mengerjakan suatu pekerjaan, melainkan Kami menjadi saksi atasmu di waktu kamu melakukannya. Tidak luput dari pengetahuan Tuhanmu biar pun sebesar zarah (atom) di bumi atau pun di langit. Tidak ada yang lebih kecil dan tidak (pula) yang lebih besar dari itu, melainkan (semua tercatat) dalam kitab yang nyata (Lohmahfuz). (QS Yunus [10] : 61)

Simetri ruang-waktu diskrit dikenal ada tiga macam, yaitu paritas (*Parity*, P), pembalikan waktu (*Time Reversal*, T), dan sekawan muatan (*Charge Conjugation*, C). Tiga simetri diskrit ini adalah topik yang menarik khususnya di dalam fisika partikel modern. Transformasi paritas P merupakan pencerminan koordinat ruang pada titik asal ($\bar{r} \longrightarrow -\bar{r}$). Posisi dan momentum berubah tanda, sedangkan spin tidak berubah. Operator sekawan muatan C mentransformasi partikel menjadi anti partikelnya dan sebaliknya. Semua muatan intrinsik berubah tanda, tetapi gerak dan spin tidak berubah. Pembalikan waktu T beroperasi pada koordinat waktu. Melalui transformasi ini, spin berubah tanda, seperti momentum dan kecepatan. Simetri gabungan, seperti CP dan CPT biasa juga dilakukan.

Selama bertahun-tahun C,P, dan T secara terpisah dianggap kekal dalam semua interaksi. Akan tetapi pada tahun 1956, Lee dan Yang pertama kalinya mengajukan bahwa paritas tidak kekal di dalam interaksi lemah. Tidak lama setelah itu, penyimpangan paritas secara eksperimen teramati pada peluruhan inti beta, dan pada peluruhan pion, muon, kaon menurut (Safa'at,2006).

Peluruhan beta memberikan bukti fisik pertama untuk keberadaan neutrino

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{v}_e, \tag{1.1}$$

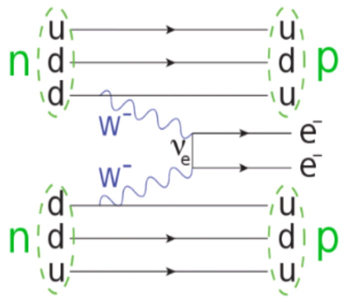
$$energi + p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + v_e. \tag{1.2}$$

Terdapat dua jenis peluruhan beta, yaitu beta plus dan beta minus. Dalam peluruhan beta minus, neutron dikonversikan menjadi proton dan prosesnya menciptakan elektron dan anti neutrino elektron. Sedangkan pada peluruhan beta plus, proton dikonversi menjadi neutron dan prosesnya menciptakan positron dan neutrino elektron. Simetri pembalikan muatan, paritas, dan waktu (CPT) dianggap sebagai simetri mendasar dari hukum fisika. Pelanggaran CPT menyiratkan perusakan kaon simetri Lorentz. Dalam hal ini, pelanggaran Lorentz terhadap neutrino mungkin memberikan peluang terbaik untuk mengungkapkan pelanggaran CPT.

Maltoni (2003) dan Pakvasa (2003) menunjukkan bahwa defisit neutrino elektron yang datang dari matahari, diyakini berosilasi menjadi flavor neutrino lain sebelum mencapai detektor di bumi. Rasio yang diamati dari neutrino elektron, neutrino muon, dan anti neutrino yang dihasilkan oleh sinar kosmik berinteraksi di atmosfer bumi secara konsisten. Terakhir, percobaan berbasis akselerator di Los Alamos LSND, telah mengamati yang tampak merupakan produksi osilasi dari sinar murni anti neutrino. Meski begitu osilasi neutrino dapat menghadirkan kerangka kerja yang menarik untuk menghitung keanehan (anomali) secara eksperimental. Masalahnya dari 3 jenis flavor neutrino hanya 2 perbedaan massa independen yang dapat dipilih, karena hanya 2 keanehan yang diamati dan di jelaskan melalui osilasi. Hasil akhir kolaborasi LSND secara konsisten menunjukkan bukti osilasi $\bar{v}_\mu \longrightarrow \bar{v}_e$ dengan frekuensi besar, menurut Church (2002).

Pengamatan partikel neutrino yang menggunakan fluks neutrino surya dan atmosfer canggih disertai dengan hasil eksperimental yang baru mengenai status parameter osilasi tiga flavor neutrino. Nunokawa (2007), menunjukkan mekanisme dasar untuk menghasilkan massa neutrino, menganalisis struktur yang sesuai dari matriks pencampuran lepton. Untuk memahami flavor dari prinsip pertama dan pelanggaran CP dalam dua percobaan osilasi neutrino akselerator jangka pendek, T2K, dan NOA diperlukan spektrum energi.

Pada tahun 1937, Ettore Majorana menunjukkan bahwa semua hasil teori peluruhan beta tidak berubah, jika neutrino merupakan anti partikelnya sendiri, yang sekarang lebih dikenal dengan partikel mayor. Di tahun 1939, Wendell H. Furry mengusulkan bahwa neutrino adalah partikel Majorana (yaitu, neutrino dan anti neutrino sebenarnya partikel yang sama), maka peluruhan beta ganda dapat dilanjutkan tanpa emisi dari neutrino apapun, melalui proses yang sekarang disebut dengan peluruhan beta ganda *neutrinoless*. Peluruhan beta ganda adalah jenis peluruhan radioaktif dimana dua neutron secara bersamaan diubah menjadi dua proton, atau sebaliknya di dalam inti atom. Terdapat dua jenis peluruhan beta ganda, yakni peluruhan beta ganda biasa dan peluruhan beta ganda *neutrinoless*. Dalam peluruhan beta ganda biasa, yang diamati dalam beberapa isotop, dua elektron, dan dua anti neutrino elektron dikeluarkan dari inti yang meluruh. Dalam peluruhan beta ganda neutrinoless, suatu proses hipotesis yang tidak pernah diamati, hanya elektron yang dipancarkan.



Gambar 1.1 Diagram Feynman Peluruhan Beta Ganda

Diagram Feynman dari peluruhan beta ganda *neutrinoless* diatas, dengan dua jenis neutron meluruh menjadi dua proton. Satu-satunya produk yang dipancarkan dalam proses ini adalah dua elektron, yang dapat terjadi jika neutrino dan anti neutrinonya adalah partikel yang sama (neutrino Majorana), sehingga neutrino yang sama dapat dipancarkan dan diserap dalam nukleus. Dalam peluruhan beta ganda konvensional, dua anti neutrino dimana satu yang timbul dari masing-masing titik W yang dipancarkan dari nukleus di samping dua elektron. Pendeteksi peluruhan beta ganda *neutrinoless* merupakan uji sensitif dari kebenaran neutrino merupakan partikel Majorana.

Neutrino memiliki sifat-sifat atau Majorana menurut Borissow (2003), untuk neutrino yang mengembangkan perusakan simetri CPT, sering dinyatakan bahwa

"Jika peluruhan beta ganda yang dinetralkan tidak diamati, maka neutrino merupakan partikel Majorana yang berarti bahwa neutrino dan anti neutrinonya adalah keadaan yang sama". Dan pernyataan yang lebih khusus bahwa, jika peluruhan beta ganda tanpa neutrino diamati, maka harus ada istilah massa neutrino Majorana yang berarti bahwa keadaan neutrino identik dengan keadaan anti neutrino.

Pei-Hong Gu, dkk (2007) telah mempelajari pelanggaran CPT neutrino yang disebabkan oleh sektor dark energi. Secara khusus hal ini telah dipertimbangkan model dark energi termasuk skalar boson dan neutrino tangan kanan, dan memperkenalkan kopling turunan antara boson dan neutrino. Kopling turunan ini mengarah pada pelanggaran CPT kosmologis selama evolusi medan dark energi. Pelanggaran CPT yang diinduksi dalam neutrino tangan kiri telah dihitung karena pencampurannya dengan neutrino tangan kanan, dan juga kontribusi loop terhadap pelanggaran CPT elektron. Perhitungan yang diperoleh menunjukkan bahwa pelanggaran CPT pada neutrino dan elektron berada dalam batas eksperimen. Selanjutnya, pelanggaran CPT neutrino dapat diuji dalam eksperimen osilasi neutrino di masa depan, seperti kumpulan neutrino. Hasilnya menunjukkan osilasi neutrino dapat memberikan cara non gravitasi untuk menyelidiki sifat dark energi.

Esposito (2009) mengusulkan model fenomenologis yang sangat sederhana yang memprediksi asimetri yang melanggar CPT antara partikel dan keadaan antipartikel dalam osilasi neutrino yang melibatkan neutrino steril. Jika analisis lebih lanjut dikonfirmasi oleh hasil eksperimen baru, maka akan menyiratkan bahwa hubungan dispersi energi-momentum standar untuk neutrino steril ini dimodifikasi yang sesuai dengan parameter pelanggaran CPT / Lorentz λ dari urutan skala energi Grand-Unification. Secara langsung akan mempengaruhi probabilitas survival untuk osilasi neutrino dan anti neutrino dengan kemungkinan terjadinya perusakan yang ekstrim dari transisi anti neutrino.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini antara lain:

1. Bagaimana bentuk rumusan osilasi neutrino?
2. Bagaimana bentuk rumusan perusakan simetri CPT *(Charge Conjugation, Parity, Time Reversal)* pada osilasi neutrino?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini antara lain:

1. Untuk mengetahui bentuk rumusan osilasi neutrino.
2. Untuk mengetahui bentuk rumusan perusakan simetri CPT *(Charge Conjugation, Parity, Time Reversal)* pada osilasi neutrino.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah hanya dapat menghitung pada saat osilasi neutrino vakum.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk rumusan dari perusakan simetri CPT *(Charge Conjugation, Parity, Time Reversal)* pada osilasi neutrino.

BAB II

KONJUGASI MUATAN, PARITAS, DAN PEMBALIKAN WAKTU (CPT)

Neutrino pertama kali dipostulatkan oleh Wolfgang Pauli pada tahun 1930, untuk menjelaskan spektrum energi dari peluruhan beta, yaitu peluruhan sebuah neutron menjadi sebuah proton dan sebuah elektron. Pauli berteori bahwa sebuah partikel yang tak terdeteksi menjadi penyebab perbedaan antara energi dan momentum sudut dari partikel-partikel di awal dan di akhir peluruhan. Pada awalnya neutrino dikenal tidak memiliki massa atau sebutan lain dari partikel ini adalah partikel hantu. Karena sifat hantunya, deteksi eksperimental pertama dari neutrino harus menunggu hingga 25 tahun sejak pertama kali didiskusikan.

Neutrino merupakan suatu partikel dasar. Neutrino tergolong partikel fermion yang memiliki spin $1/2$. Neutrino tercipta hasil dari peluruhan radioaktif tertentu, atau tercipta karena adanya reaksi nuklir seperti yang terjadi pada reaktor nuklir, pada matahari, dan pada sinar kosmik yang membentuk sekelompok atom. Neutrino terdiri dari tiga jenis, yaitu neutrino elektron, neutrino muon, dan neutrino tau. Masing-masing jenis neutrino memiliki anti partikel yang sesuai dengan jenisnya yang disebut dengan anti neutrino.

2.1 Sejarah Neutrino

Sejarah interaksi lemah berawal dari tahun 1896, ketika Becquerel menemukan radioaktif uranium. Tiga tahun kemudian, Rutherford menemukan bahwa ada dua produk yang berbeda, yaitu α dan β, γ ditemukan setelahnya. Pada tahun 1914, Chadwick menunjukkan bahwa spektrum β merupakan kontinu, sedangkan sinar α dan γ unik dalam energi. Hasil yang berbeda ini kemudian dikonfirmasikan pada tahun 1927 oleh Ellis dan Wooster. Meitner kemudian menunjukkan bahwa energi yang hilang tidak dapat dianggap berasal dari sinar neutral netral, yang mengarah pada gagasan bahwa energi yang menghilang dapat dijelaskan oleh keberadaan partikel-partikel baru, atau seperti yang disarankan oleh N.Bohr, mungkin konservasi energi hanya dapat dilakukan dalam statistik (Giunti,2007).

Untuk menyelesaikan permasalahan ini serta masalah dari spin statistik pada peluruhan β, pada Desember 1930 W.Pauli mengumumkan bahwa keberadaan fermion berinteraksi lemah netral yang dipancarkan dalam peluruhan β dapat menyelesaikan masalah. Ia menyebut fermion netral sebagai neutron, dengan massa orde elektron. Pada Juni 1931, W.Pauli mengungkapkan mengenai idenya pada sebuah pertemuan American Physical Society. Tapi ia tidak mencetak ungkapannya karena ia masih ragu dengan idenya (Giunti,2007).

J.Chadwickdi tahun 1932 menemukan bahwa neutron seperti yang dikenal sekarang. Neutron merupakan partikel subatomik yang tidak bermuatan atau netral dan memiliki massa 940 MeV/c2, sedikit lebih berat dari proton. Lalu E.Fermi mengganti nama partikel Pauli tersebut menjadi neutrino. Fermi dan Perrin secara independen menyimpulkan bahwa neutrino tanpa massa pada tahun 1933.

Nama neutrino berasal dari fisikawan Italia-Amerika yang bernama Enrico Fermi pada peluruhan beta dengan partikel neutron yang digagas oleh Pauli. Neutron Pauli sama dengan partikel neutron yang mengisi inti atom dengan massa yang hampir sama dengan massa proton. Enrico Fermi menambahkan neutron Pauli dengan neutrino untuk membedakan antara dua partikel tersebut. Neutrino berasal dari kata neutron karena muatannya netral dan kata ino yang dalam bahasa Italia berarti massa diam kecil. Dengan kehadiran neutrino, maka anomali dalam peluruhan beta dapat terselesaikan (Bilenky,2012).

2.2 Persamaan Dirac

Pada mekanika kuantum non-relativistik, persamaan gerak sebuah partikel di deskripsikan dengan persamaan Schrodinger. Sedangkan pada mekanika kuantum relativistik partikel yang berspin 0 dideskripsikan oleh persamaan Klein-Gordon, partikel berspin $\frac{1}{2}$ oleh persamaan Dirac, dan partikel berspin 1 oleh persaamaan Proca. Dalam bab ini akan menjelaskan mengenai persamaan Dirac, karena spin $\frac{1}{2}$ dapat dijelaskan dengan persamaan Dirac dan untuk menyatakan aturan Feynman dalam elektrodinamika kuantum.

Persamaan Schrodinger dapat diformulasikan dengan energi-momentum klasik (Griffiths,2008):

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V = \mathbf{E}, \tag{2.1}$$

pada mekanika kuantum, energi dan momentum dapat dioperasikan sebagai operator (Griffiths,2008),

$$\mathbf{P} \rightarrow i\hbar\nabla, \quad \mathbf{E} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.2}$$

menghasilkan paket gelombang ψ (Griffiths,2008),

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Persamaan Klein-Gordon dapat diperoleh dengan cara yang sama, pertama dengan relasi energi-momentum relativistik $E^2 - P^2c^2 = m^2c^4$ atau (Griffiths,2008):

$$P^\mu P_\mu - m^2c^2 = 0. \tag{2.4}$$

Akan tetapi subtitusi kuantum pada persamaan (2.2) memerlukan modifikasi relativistik, di notasi 4-vektor (Griffiths,2008):

$$P_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu \tag{2.5}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial X^\mu}, \tag{2.6}$$

dapat dituliskan (sama bentuknya dengan ruang-waktu) (Griffiths,2008):

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.7}$$

lalu subtitusi persamaan (2.5) ke persamaan (2.4) dan membiarkan bereaksi dengan paket gelombang ψ (Griffiths,2008):

$$i\hbar\partial^\mu i\hbar\partial_\mu\psi - m^2c^2\psi = 0$$

$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\psi - m^2c^2\psi = 0$$

atau

$$-\tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = \tfrac{mc}{\hbar}^2\psi. \tag{2.8}$$

Persamaan Klein-Gordon atau persamaan kuantum relativitik pertama ini ternyata menyimpan masalah dalam sudut pandang Schrodinger. Persamaan Schrodinger memenuhi persamaan kontinyuitas (Bailin,1993),

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{2.9}$$

dimana ρ merupakan rapat probabilitas dan **J** merupakan rapat arus probabilitas. Rapat probabilitas ρ adalah (Bailin,1993)

$$\rho = |\psi(x)|^2, \tag{2.10}$$

menyatakan besar kemungkinan mendapatkan partikel di posisi x, karena itu nilainya selalu positif.

Persamaan Klein-Gordon juga memenuhi persamaan kontinyuitas dengan rapat probabilitas (Purwanto,2003),

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\psi\right), \tag{2.11}$$

dan rapat arus probabilitas **J** (Bailin,1993),

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \left(\nabla\psi^*\right)\psi\right), \tag{2.12}$$

jelas bahwa rapat probabilitas ρ dari persamaan Klein-Gordon tidak selalu positip. Dengan demikian kuantitas ini tidak dapat ditafsirkan sebagai nilai kemungkinan mendapatkan suatu partikel di x (Bailin,1993).

Kesulitan lain yang ditimbulkan oleh persamaan Klein-Gordon adalah kehadiran spektrum energi negatif. Persamaan Klein-Gordon mempunyai solusi berikut (Bailin,1993),

$$\psi(r,t) = \psi_0 e^{(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t)}, \tag{2.13}$$

substitusi solusi diatas ke dalam persamaan Klein-Gordon memberikan (Bailin,1993)

$$E = \hbar\omega_k = \pm c\sqrt{\hbar^2\mathbf{k}^2 + m^2c^2}, \tag{2.14}$$

yakni spektrum energi positip dan negatip yang terpisah oleh jurang energi selebar $\delta E = 2mc^2$ (Bailin,1993).

Schrodinger telah menemukan persamaan ini tepat sebelum nonrelativistik yang menyandang namanya. Pada persamaan Klein-Gordon hanya dapat menjelaskan untuk partikel berspin 0. Karena terdapat 2 masalah yang ada pada persamaan Klein-Gordon. Pertama, secara relativistik dapat diterima tapi pada interpretasi probabilitas tidak sesuai karena ada tanda negatif. Kedua, Pada persamaan Klein-Gordon $\partial^2/\partial t^2$ akan menghasilkan tanda negatif dari imajiner, sedangkan pada persamaan Schrodinger menghasilkan tanda positif (Griffiths,2008).

Karena persamaan Klein-Gordon hanya dapat menjelaskan untuk partikel berspin 0, maka Dirac berangkat untuk menemukan persamaan untuk partikel berspin 1/2 yang sesuai dengan fomulasi energi-momentum relativistik. Pada tahun 1934, Pauli dan Weisskopf menunjukan penjelasan statistik itu harus dirumuskan ulang pada Teori Kuantum Relativistik, dan menyempurnakan persamaan Klein-Gordon ke tempat yang tepat, dengan menjaga persamaan Dirac untuk partikel berspin $\frac{1}{2}$ (Griffiths,2008).

Dirac menyelesaikan dengan cara faktor relasi energi momentum persamaan (2.4). Hal ini akan selesai apabila mempunyai P^0, (Jika P adalah 0) (Griffiths,2008):

$$(P^0)^2 - m^2c^2 = (P^0 - mc)(P^0 + mc) = 0, \tag{2.15}$$

disini memperoleh dua persamaan orde pertama (Griffiths,2008):

$$(P^0 - mc) = 0 \quad atau \quad (P^0 + mc) = 0. \tag{2.16}$$

Salah satunya menjamin $P^\mu P_\mu - m^2c^2 = 0$. Tapi ini masalah yang berbeda, ketika komponen parsial termasuk dalam kasus itu (Griffiths,2008),

$$(P^\mu P_\mu - m^2c^2) = (\beta^\kappa P_\kappa + mc)(\gamma^\lambda P_\lambda - mc), \tag{2.17}$$

dimana β^κ dan γ^λ merupakan 8 koefisien yang masih determine. Mengalihkan keluar dari sebelah tangan kanan (Griffiths,2008).

$$\begin{aligned}(\beta^\kappa P_\kappa + mc)(\gamma^\lambda P_\lambda - mc) &= \beta^\kappa\gamma^\lambda P_\kappa P_\lambda - \beta^\kappa P_\kappa mc + \gamma^\lambda P_\lambda mc - m^2c^2 \\ &= \beta^\kappa\gamma^\lambda P_\kappa P_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\lambda)P_\kappa - m^2c^2, \quad (2.18)\end{aligned}$$

lalu memerlukan hubungan linier di P_κ, maka harus memilih $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ untuk menyelesaikan permasalahan, dan memerlukan untuk menemukan koefisien γ^κ (Griffiths,2008)

$$P^\mu P_\mu = \gamma^\kappa\gamma^\lambda P_\kappa P_\lambda, \tag{2.19}$$

dapat dikatakan (Griffiths,2008)

$$(P^0)^2 - (P^1)^2 - (P^2)^2 - (P^3)^2 = (\gamma^0)^2(P^0)^2 + (\gamma^1)^2(P^1)^2 + (\gamma^2)^2(P^2)^2$$

$$
\begin{aligned}
+ & \quad (\gamma^3)^2(P^3)^2 + (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)P_0P_1 \\
+ & \quad (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0)P_0P_2 + (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)P_0P_3 \\
+ & \quad (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)P_1P_2 + (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)P_1P_3 \\
+ & \quad (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)P_2P_3. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Dapat menganggap $\gamma^0 = 1$ dan $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$, tapi dengan ini tidak terlihat mendapatkan metode hubungan cross (Griffiths,2008).

Seperti sebuah persamaan matriks 4×4, lalu hubungan faktor energi-momentum relativistik (Griffiths,2008):

$$(P^\mu P_\mu - m^2c^2) = (\gamma^\kappa P_\kappa + mc)(\gamma^\lambda P_\lambda - mc) = 0. \qquad (2.21)$$

Memperoleh persamaan Dirac (Griffiths,2008),

$$\gamma^\mu P_\mu - mc = 0. \qquad (2.22)$$

Terakhir membuat subtitusi kuantum $P_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ persamaan (2.5) dan membiarkan hasil reaksi membentuk fungsi gelombang ψ (Griffiths,2008):

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0. \qquad (2.23)$$

Simbol ψ merupakan matriks kolom 4-elemen (Griffiths,2008):

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \qquad (2.24)$$

Dapat menyebut bi-spinor atau spinor Dirac meskipun 4-komponen, objek ini bukan 4-vektor (Griffiths,2008).

Lagrangian Dirac untuk medan fermion bebas $\psi(x)$ adalah (Giunti,2007)

$$L(x) = \bar{\psi}(x)\left(i \overleftrightarrow{\partial} - m\right)\psi(x), \tag{2.25}$$

dimana $\psi(x)$ merupakan medan spinor dengan 4-komponen, medan adjoin $\bar{\psi}(x)$ diberikan (Giunti,2007)

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^{\dagger}(x)\gamma^{0}, \tag{2.26}$$

dan

$$\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}_{\mu} - \overleftarrow{\partial}_{\mu}}{2}, \tag{2.27}$$

dimana $\overrightarrow{\partial}_{\mu} \equiv \partial_{\mu}$ merupakan operator turunan yang bekerja disebelah kanan dan $\overleftarrow{\partial}_{\mu}$ merupakan operator turunan yang bekerja disebelah kiri. Misal (Giunti,2007):

$$\bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \equiv \partial_{\mu}\psi.$$

Untuk 4-vektor A^{μ} (Giunti,2007)

$$A \equiv \gamma^{\mu} A_{\mu}, \tag{2.28}$$

dimana γ^{μ} adalah kesatuan dari 4-matrik 4x4, yang biasa disebut dengan matrik γ Dirac dengan nilai $\mu = 0, 1, 2, 3$. γ^{μ} memenuhi hubungan antikomutasi sebagai berikut (Giunti,2007)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv 2g^{\mu\nu}, \tag{2.29}$$

dan keadaan

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \tag{2.30}$$

Matrik γ merupakan konstan, dalam arti lain tidak berubah dalam transformasi Lorentz. Matrik γ memiliki nilai yang sama disemua kerangka inersia. Meskipun bukan jenis 4-vektor, agar mudah untuk didefinisikan matrik dengan indeks yang diturunkan sebagai berikut (Giunti,2007)

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_k = -\gamma^k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.31}$$

Untuk $\mu \neq \nu$ hubungan dalam persamaan (2.29) menyiratkan bahwa empat matrik γ merupakan antikomut. Untuk $\mu = \nu$ hubungan dalam persamaan (2.29) membatasi kuadrat dari matrik γ (Giunti,2007):

$$\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbf{1}, \quad \left(\gamma^k\right)^2 = \mathbf{-1}, \tag{2.32}$$

dimana nilai k=1,2,3. Tambahan dalam persamaan (2.30) bahwa (Giunti,2007)

$$\left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0, \quad \left(\gamma^k\right)^\dagger = -\gamma^k \quad \Leftrightarrow \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma_\mu. \tag{2.33}$$

Jadi, pada persamaan diatas dapat dilihat bahwa γ^0 adalah Hermitian, sedangkan γ^k adalah anti-Hermitian (Giunti,2007).

Menggunakan proses Euler-Lagrange persamaan (A.39), persamaan medan diperoleh (Giunti,2007)

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = 0, \tag{2.34}$$

dimana memperoleh persamaan Dirac (Giunti,2007)

$$(i\partial - m)\,\psi(x) = 0. \tag{2.35}$$

Hubungan komutasi dalam persamaan (2.29)digunakan untuk melengkapi persamaan Dirac dengan persamaan Klein-Gordon (Giunti,2007),

$$\left(\Box + m^2\right)\psi(x) = 0. \tag{2.36}$$

dimana $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$. Persamaan Klein-Gordon sebaiknya harus dipenuhi oleh medan bebas karena persamaannya *equivalen* dengan energi-momentum relativistik dalam persamaan (A.32). Pada dasarnya persamaan Klein-Gordon memiliki gelombang-bidang energi positif $\psi(x) \propto e^{-ip.x}$ dengan $p^2 = m^2$. Solusi gelombang-bidang energi negatif $\psi(x) \propto e^{ip.x}$ diibaratkan sebagai keadaan anti partikel (Giunti,2007).

$$\begin{aligned}
(i\partial - m)\,\psi(x) &= 0 \\
(i\partial + m)\,(i\partial - m)\,\psi(x) &= 0 \\
\left(-\partial\partial - m^2\right) &= 0 \\
\left(\partial\partial + m^2\right) &= 0 \\
\left(\Box + m^2\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Persamaan Klein-Gordon (2.36) diperoleh dari persamaan Dirac (2.35) dengan mengalikan disebelah kiri dengan $(i\partial + m)$ dan menggunakan identitas

$\partial\partial = \partial^\mu \partial_\mu$. Identitas ini adalah kasus-kasus dari identitas umum (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} AA &= \gamma^\mu A_\mu \gamma^\nu A_\nu \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu A_\mu A_\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) A_\mu A_\nu \\ &= g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \\ &= A_\mu A^\mu, \end{aligned} \tag{2.37}$$

dengan mengikuti hubungan antikomutasi dari persamaan (2.29) (Giunti,2007).

Keadaan pada persamaan (2.30) diperlukan untuk menyelesaikan, dari persamaan Dirac (2.35) persamaan Kontinyuitas dengan densitas(kerapatan) mekanika kuantum (Giunti,2007)

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^\dagger(x)\psi(x). \tag{2.38}$$

Ambil konjugat Hermitian dari persamaan (2.35) dengan mempertimbangkan persamaan (2.32) dan kemudian mengalikan dari kanan dengan $\gamma^0\psi$ (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \left(i\partial - m\right)\psi(x) &= 0 \\ \bar{\psi}(x)\gamma^0 \left(i\partial - m\right) &= 0 \\ i\partial\bar{\psi}(x)\gamma^0 - m\bar{\psi}(x)\gamma^0 &= 0 \\ -i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x)\gamma^0 &= 0 \\ -i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^0\psi(x) &= 0 \\ -i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi - m\bar{\psi}\psi &= 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Persamaan Dirac (2.35) dikalikan sebelah kiri dengan $\bar{\psi}$ (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} (i\partial - m)\,\psi &= 0 \\ \bar{\psi}\,(i\partial - m)\,\psi &= 0 \\ i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \bar{\psi}m\psi &= 0 \\ i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi &= 0, \end{aligned}$$

lalu persamaan diatas dikurangi dengan (2.39)memperoleh (Giunti,2007)

$$i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\psi = 0. \tag{2.40}$$

Memaksakan kondisi dalam persamaan (2.30) agar memperoleh persamaan kontinyuitas dengan arus (Giunti,2007)

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x), \tag{2.41}$$

memperoleh

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\psi &= 0 \\ i\partial_{\mu}j^{\mu} + i\partial_{\mu}j^{\mu}\gamma^{0}\gamma^{0} &= 0 \\ i\partial_{\mu}j^{\mu} + i\partial_{\mu}j^{\mu} &= 0 \\ 2i\partial_{\mu}j^{\mu} &= 0 \\ \partial_{\mu}j^{\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Komponen temporal dari arus ini adalah densitas mekanika kuantum dalam persamaan (2.38). Pada subbab selanjutnya akan dijelaskan bahwa $j^{\mu}(x)$ merupakan 4-vektor (Giunti,2007).

2.3 Solusi Persamaan Dirac

Menganggap ψ tidak bergantung pada posisi (independent), maka hasil dari parsial ruang (Griffiths,2008):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \tag{2.43}$$

Hal ini menggambarkan kondisi relativistik yang berada disebuah keadaan dengan momentum nol (p=0) yang biasa disebut dengan partikel diam. Persamaan Dirac (2.23) dapat diturunkan menjadi (Griffiths,2008):

$$\begin{aligned} i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi &= 0 \\ i\hbar\left(\frac{\gamma^0}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial X^i}\right) - mc\psi &= 0 \\ \frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi &= 0, \end{aligned} \tag{2.44}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} - mc\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} &= \frac{-imc^2}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

dimana nilai ψ_A dan ψ_B terdiri atas 2 komponen ψ (Griffiths,2008),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} &= \frac{-imc^2}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ -\partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{-imc^2}{\hbar}\psi_A \\ \frac{-imc^2}{\hbar}\psi_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_A}{\partial t} &= \frac{-imc^2}{\hbar}\psi_A \\ \text{dan}\frac{\partial \psi_B}{\partial t} &= \frac{imc^2}{\hbar}\psi_B. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Kembali pada persamaan (2.45) (Griffiths,2008):

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial \psi_A}{\psi_A} &= \int_0^t \frac{-imc^2}{\hbar}\partial t \\ ln\psi_A|_0^t &= \frac{-imc^2 t}{\hbar}|_0^t \\ ln\frac{\psi_A(t)}{\psi_A(0)} &= \frac{-imc^2 t}{\hbar} \\ \frac{\psi_A(t)}{\psi_A(0)} &= e^{\frac{-imc^2}{\hbar}t} \\ \psi_A(t) &= e^{\frac{-imc^2}{\hbar}t}\psi_A(0) \\ \psi_A(t) &= e^{-iEt/\hbar}\psi_A(0), \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial \psi_B}{\psi_B} &= \int_0^t \frac{imc^2}{\hbar}\partial t \\ ln\psi_B|_0^t &= \frac{imc^2 t}{\hbar}|_0^t \\ ln\frac{\psi_B(t)}{\psi_B(0)} &= \frac{imc^2 t}{\hbar} \\ \frac{\psi_B(t)}{\psi_B(0)} &= e^{\frac{imc^2}{\hbar}t} \\ \psi_B(t) &= e^{\frac{imc^2}{\hbar}}\psi_B(0) \\ \psi_B(t) &= e^{iEt/\hbar}\psi_B(0). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Telah mengenali faktor (Griffiths,2008),

$$e^{-iEt/\hbar}. \tag{2.48}$$

Karakteristik bergantung waktu (dependence) dari keadaan kuantum dengan energi E. Dari sebuah partikel diam dengan energi $E = mc^2$, jadi nilai ψ_A sesuai dengan harapan pada keadaan p=0. ψ_B seakan-akan mewakili keadaan dengan energi negatif $E = -mc^2$. Padahal disini merupakan bebas partikel tidak terikat apapun, maka energi harus bernilai positif yang bernilai negatif merupakan waktu (waktu yang berjalan mundur/lampau) agar dapat di interpretasikan, dan memiliki muatan yang berlawanan yang disebut dengan anti partikel. Lalu, sekarang kita menyelesaikan solusi dengan penyimpanan waktu dependence untuk mewakili anti partikel dengan energi positif. Misal, mendeskripsikan ψ_A sebagai elektron dan ψ_B sebagai positron, yang masing-masing terdiri 2 komponen spinor, tepat untuk sebuah sistem spin $\frac{1}{2}$. Kesimpulan: Persamaan Dirac dengan p=0 memperbolehkan solusi 4-independent (dengan mengabaikan faktor normalisasi) (Griffiths,2008).

$$\psi^{(1)} = e^{\left(-i(mc^2/\hbar\right)t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \psi^{(2)} = e^{\left(-i(mc^2/\hbar\right)t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi^{(3)} = e^{\left(+i(mc^2/\hbar\right)t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \psi^{(4)} = e^{\left(+i(mc^2/\hbar\right)t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Mendeskripsikan masing-masing sebuah elektron dengan spin up dan spin down, dan sebuah positron dengan spin up dan spin down (Griffiths,2008).

Lalu dapat melihat solusi gelombang bidang (Griffiths,2008):

$$\psi(x) = ae^{-ik.x}u(k). \tag{2.50}$$

Berharap menemukan sebuah vektor-4 k^{μ} dan sebuah hubungan kumpulan bispinor u(k) sedemikian hingga $\psi(x)$ memenuhi persamaan Dirac dependence x membatasi eksponent (Griffiths,2008).

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}\psi &= \partial_{\mu}ae^{-ik.x}u(k)\\ &= -ikae^{-ik.x}u(k)\\ &= -ik_{\mu}\psi.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Menetapkan ke persamaan Dirac (2.23),memperoleh (Griffiths,2008):

$$\begin{aligned}i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc\psi &= 0\\ i\hbar\gamma^{\mu}\left(-ik_{\mu}\right)\psi - mc\psi &= 0\\ i\hbar\gamma^{\mu}\left(-ik_{\mu}ae^{-ik.x}u(k)\right) - mc\left(ae^{-ik.x}u(k)\right) &= 0\\ \hbar\gamma^{\mu}k_{\mu}e^{-ik.x}u - mce^{-ik.x}u &= 0,\end{aligned} \tag{2.52}$$

apabila dipindahkan ruas maka eksponensial dapat saling menghilangkan (Griffiths,2008):

$$\begin{aligned}\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu}e^{-ik.x}u - mce^{-ik.x}u &= 0\\ \hbar\gamma^{\mu}k_{\mu}e^{-ik.x}u &= mce^{-ik.x}u\\ \hbar\gamma^{\mu}k_{\mu}u - mcu &= 0\\ \left(\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu} - mc\right)u &= 0.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Melihat persamaan ini merupakan aljabar murni yang tidak ada penurunan. Jika u memenuhi persamaan (2.33) maka ψ pada persamaan (2.50) memenuhi persamaan Dirac (Griffiths,2008):

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu}k_{\mu} &= \gamma^{0}\cdot k_{0}-\gamma\cdot\mathbf{k} \\
&= k^{0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ -\sigma & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}k^{0} & 0\\ 0 & -k^{0}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & k\cdot\sigma\\ -\left(k\cdot\sigma\right) & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}k^{0} & -\mathbf{k}\cdot\sigma\\ \mathbf{k}\cdot\sigma & -k^{0}\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.54}$$

maka dari persamaan (2.53) diperoleh (Griffiths,2008):

$$\begin{aligned}
\left(\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu}-mc\right)u &= \left(\hbar\begin{pmatrix}k^{0} & -\mathbf{k}\cdot\sigma\\ \mathbf{k}\cdot\sigma & -k^{0}\end{pmatrix}-mc\right)\begin{pmatrix}U_{A}\\ U_{B}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\hbar k^{0}-mc & -\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma\\ \hbar\mathbf{k}\cdot\sigma & -\hbar k^{0}-mc\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{A}\\ U_{B}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\left(\hbar k^{0}-mc\right)U_{A} & -\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{B}\\ \hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{A} & -\left(\hbar k^{0}+mc\right)U_{B}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Dimana seperti sebelumnya, A menunjukkan dua komponen atas, dan B menunjukkan dua komponen bawah. Untuk memenuhi persamaan (2.53), mempunyai (Griffiths,2008):

$$\begin{pmatrix}\left(\hbar k^{0}-mc\right)U_{A} & -\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{B}\\ \hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{A} & -\left(\hbar k^{0}+mc\right)U_{B}\end{pmatrix} = 0, \tag{2.56}$$

diuraikan

$$
\begin{aligned}
\left(\hbar k^{0}-mc\right)U_{A}-\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{B} &= 0\\
\left(\hbar k^{0}-mc\right)U_{A} &= \hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{B}\\
U_{A} &= \frac{\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{B}}{\hbar k^{0}-mc}\\
U_{A} &= \frac{1}{k^{0}-mc/\hbar}\left(\mathbf{k}\cdot\sigma\right)U_{B},
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{A}-\left(\hbar k^{0}+mc\right)U_{B} &= 0\\
\left(\hbar k^{0}+mc\right)U_{B} &= \hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{A}\\
U_{B} &= \frac{\hbar\mathbf{k}\cdot\sigma U_{A}}{\hbar k^{0}+mc}\\
U_{B} &= \frac{1}{k^{0}+mc/\hbar}\left(\mathbf{k}\cdot\sigma\right)U_{A}.
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Mensubtitusikan kedua persamaan diatas (Griffiths,2008):

$$
\begin{aligned}
U_{A} &= \frac{1}{k^{0}-mc/\hbar}\left(\mathbf{k}\cdot\sigma\right)U_{B}\\
&= \frac{1}{k^{0}-mc/\hbar}\left(\mathbf{k}\cdot\sigma\right)\frac{1}{k^{0}+mc/\hbar}\left(\mathbf{k}\cdot\sigma\right)U_{A}\\
&= \frac{1}{(k^{0})^{2}-(mc/\hbar)^{2}}(\mathbf{k}\cdot\sigma)^{2}U_{A}.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Tapi untuk nilai (Griffiths,2008),

$$
\mathbf{k}\cdot\sigma = k_{x}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+k_{y}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}+k_{z}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & k_x \\ k_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ik_y \\ ik_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_z & 0 \\ 0 & -k_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_z & (k_x - ik_y) \\ (k_x + ik_y) & -k_z \end{pmatrix}. \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

Jadi nilai dari,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{k}\cdot\sigma)^2 &= \begin{pmatrix} k_z & (k_x - ik_y) \\ (k_x + ik_y) & -k_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_z & (k_x - ik_y) \\ (k_x + ik_y) & -k_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_z)^2 + (k_x - ik_y)(k_x + ik_y) & k_z(k_x - ik_y) - k_z(k_x - ik_y) \\ k_z(k_x + ik_y) - k_z(k_x + ik_y) & (k_x + ik_y)(k_x - ik_y) + (k_z)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_z)^2 + (k_y)^2 + (k_x)^2 & 0 \\ 0 & (k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{k})^2 & 0 \\ 0 & (\mathbf{k})^2 \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{k})^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{k})^2 1, \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

dimana 1 merupakan matrik 2×2 identitas. Maka nilai u_A menjadi (Griffiths,2008),

$$
\begin{aligned}
U_A &= \frac{1}{(k^0)^2 - (mc/\hbar)^2} (\mathbf{k}\cdot\sigma)^2 U_A \\
&= \frac{(\mathbf{k})^2}{(k^0)^2 - (mc/\hbar)^2} U_A, \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

dan nilai k,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{k})^2 &= k^0)^2 - (mc/\hbar)^2 \\
&\text{atau} \\
(\mathbf{k})^2 &= k^\mu k_\mu = (mc/\hbar)^2. \qquad (2.63)
\end{aligned}
$$

Agar $\psi = exp(ik.x)u(k)$ untuk memenuhi persamaan Dirac, maka $\hbar k^\mu$ harus berubah menjadi 4-vektor yang terkait dengan partikel yang '*square*' adalah m^2c^2. Diketahui jumlah energi momentum 4-vektor. Terbukti (Griffiths,2008):

$$k^\mu = \pm p^\mu/\hbar. \qquad (2.64)$$

Tanda positif $(exp(-iEt/\hbar)$ bergantung waktu terkait dengan keadaan partikel, dan tanda negatif $(exp(iEt/\hbar)$ bergantung waktu terkait dengan keadaan anti partikel (Griffiths,2008).

Kembali ke persamaan (2.56) dan melihat persamaan (2.58), ini merupakan masalah yang sederhana untuk solusi 4-independent dari persamaan Dirac, dengan $p = \hbar k$ (Griffiths,2008):

$$
\begin{aligned}
U_B &= \frac{1}{k^0 + mc/\hbar}\,(\mathbf{k}\cdot\sigma)\,U_A \\
&= \frac{\hbar}{k^0\hbar + mc}\,(\mathbf{k}\cdot\sigma)\,U_A \\
&= \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{p^0 + mc}U_A \\
(1) Untuk U_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_B &= \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{p^0c + mc^2}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\
(2) Untuk U_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U_B &= \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{p^0c + mc^2}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\
(3) Untuk U_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_A &= \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0 + mc}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{p^0c + mc^2}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\
(4) Untuk U_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U_A &= \frac{\mathbf{p}\cdot\sigma}{p^0+mc}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0+mc}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^0+mc}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{p^0c+mc^2}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

Untuk (1) dan (2), menggunakan tanda plus (+) pada persamaan (2.57), jika U_b menggunakan $p \to 0$, ini adalah solusi partikel. Untuk (3) dan (4),menggunakan tanda minus (-), untuk keadaan anti partikel (Griffiths,2008). Sebuah normalisasi yang sesuai untuk spinor adalah (Griffiths,2008):

$$u^+u = \frac{2E}{c}. \qquad (2.66)$$

Dagger menandakan transpose conjugate (atau Hermitian *conjugate*) (Griffiths,2008)

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Rightarrow u^{+} = \begin{pmatrix} \alpha^{*} & \beta^{*} & \gamma^{*} & \delta^{*} \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Jadi $u^{+}u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2$. Dengan hasil faktor normalisasi dengan solusi 4 fundamental (Griffiths,2008).

$$u^{1} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

diperoleh dari persamaan (2.63) dimana (Griffiths,2008),

$$U_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dan nilai

$$U_B = \frac{c}{E+mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

dimana U_A merupakan 2 komponen atas dan U_B merupakan 2 komponen bawah, maka (Griffiths,2008):

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Jadi solusi 4 fundamental (Griffiths,2008):

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}$$
$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v^{(2)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

Mengambil $u^{(1)}$ sebagai pembuktian normalisasi (Griffiths,2008)

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad u^{(1)+} = N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c(p_z)}{E+mc^2} & \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

maka,

$$\begin{aligned}
U^{+}U &= N^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{c(p_z)}{E+mc^2} & \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{c(p_z)}{E+mc^2}\\\frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2}\end{pmatrix}\\
\frac{2E}{c} &= N^2\left(1+\frac{c^2p_z^2}{E+mc^2}+\frac{c^2(p_x^2+p_y^2}{(E+mc^2)^2}\right)\\
\frac{2E}{c} &= N^2\left(1+\frac{(\mathbf{P})^2c^2}{(E+mc^2)^2}\right)\\
\frac{2E}{c} &= N^2\left(\frac{(E+mc^2)^2+(\mathbf{P})^2c^2}{(E+mc^2)^2}\right)\\
\frac{2E}{c} &= N^2\left(\frac{(E+mc^2)(E+mc^2)+(E+mc^2)(E-mc^2)}{(E+mc^2)(E+mc^2)}\right)\\
\frac{2E}{c} &= N^2\frac{2E}{E+mc^2}\\
N^2 &= \frac{2E(E+mc^2)}{2Ec}\\
N &= \sqrt{(E+mc^2)/c}. \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

Maka persamaan (2.50) dapat di ubah menjadi (Griffiths,2008):

$$\psi = ae^{-ip.x/\hbar}u(untukpartikel) \quad ,\psi = ae^{ip.x/\hbar}u(untukantipartikel). \qquad (2.73)$$

Menggunakan notasi v untuk anti partikel, (dan termasuk untuk tanda minus pada $v^{(2)}$)). Melihat persamaan diatas mengingatkan kembali pada keadaan partikel yang memenuhi persamaan Dirac momentum space pada persamaan (2.53) (Griffiths,2008):

$$(\gamma^{\mu}P_{\mu}-mc)\,u=0, \qquad (2.74)$$

anti partikel (v) memenuhi (Griffiths,2008):

$$(\gamma^{\mu} P_{\mu} + mc)\, v = 0. \tag{2.75}$$

Dapat menganggap $u^{(1)}$ sebuah elektron dengan spin up, $u^{(2)}$ sebuah elektron dengan spin down, $v^{(1)}$ sebuah positron dengan spin up, dan $v^{(2)}$ sebuah positron dengan spin down. Untuk matrik spin partikel Dirac (Griffiths,2008):

$$S = \frac{\hbar}{2}\Sigma, \quad dimana \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

dan sangat mudah untuk memeriksa $u^{(1)}$, misalnya, bukan keadaan eigen (eigenstate) dari Σ_z. Namun, jika mengarahkan sumbu z sehingga mengarah ke arah gerakan (pada kasus $P_x = P_y = 0$) ketika $u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}$ merupakan eigenspinor dari $S_z . u^{(1)}$ dan $v^{(1)}$ merupakan spin up dan untuk $u^{(2)}$ dan $v^{(2)}$ merupakan spin down (Griffiths,2008).

Persamaan Dirac (2.35) dapat diselesaikan dengan menggunakan ekspansi Fourier dari medan Dirac(Giunti,2007)

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip\cdot x} \right], \tag{2.77}$$

dimana h adalah helisitas dan (Giunti,2007)

$$p^0 = E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}, \tag{2.78}$$

untuk memenuhi persamaan Klein-Gordon (2.36). Kuantitas $u^{(h)}(p), v^{(h)}(p)$ adalah spinor dan $a^{(h)}(p), b^{(h)}(p)$ adalah koefisien numerik. Menyimbolkan notasi

(Giunti,2007)

$$a^{(h)\dagger}(p) \equiv a^{(h)*}(p) \qquad dan \qquad b^{(h)\dagger}(p) \equiv b^{(h)*}(p). \tag{2.79}$$

Ukuran ruang-fase dalam ekspansi Fourier dari $\psi(x)$ di persamaan (2.75) invarian dibawah transformasi Lorentz yang terbatas. Dapat ditulis (Giunti,2007),

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} = \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta\left(p^2 - m^2\right)\theta(p^0), \tag{2.80}$$

dimana menggunakan persamaan (A.22) dari fungsi Dirac, yang menyiratkan bahwa (Giunti,2007)

$$\delta\left(p^2 - m^2\right) = \delta\left(p^{02} - E^2\right) = \frac{\delta\left(p^0 - E\right) + \delta\left(p^0 + E\right)}{2E}. \tag{2.81}$$

Perhatikan transformasi Lorentz terbatas tidak mengubah tanda p^0 (Giunti,2007).

Dari persamaan Dirac dalam persamaan (2.35)dapat dilihat bahwa spinor $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ memenuhi persamaan (Giunti,2007)

$$(p - m)u^{(h)}(p) = 0 \tag{2.82}$$

$$(p + m)v^{(h)}(p) = 0. \tag{2.83}$$

Untuk spinor adjoin, dapat menggunakan properti dipersamaan (2.30) diperoleh (Giunti,2007)

$$u^{\overline{(h)}}(p)(p - m) = 0 \tag{2.84}$$

$$v^{\overline{(h)}}(p)(p + m) = 0, \tag{2.85}$$

dari persamaan (2.173)-(2.176)

$$\overline{u^{(h)}}(p)v^{(h')}(p) = 0. \tag{2.86}$$

Mari sekarang menurunkan sifat helisitas dari $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$. Medan $\psi(x)$ dapat ditulis sebagain penjumlahan (Giunti,2007)

$$\psi(x) = \sum_{h=\pm 1} \psi^{(h)}(x), \tag{2.87}$$

dimana

$$\psi^{(h)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p)u^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}\right], \tag{2.88}$$

adalah medan eigen dari operator helisitas di Lampiran C dengan nilai eigen h (Giunti,2007)

$$\hat{h}\, \psi^{(h)}(x) = h\psi^{(h)}(x), \tag{2.89}$$

menerapkan operator helisitas di Lampiran C hingga menemukan $\psi^{(h)}(x)$ ditemukan (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \hat{h}\, \psi^{(h)}(x) &= \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{|\vec{P}|}\psi^{(h)}(x) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p)\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}(p)e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p)\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}(p)e^{ip\cdot x}\right]. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Untuk memenuhi persamaan nilai eigen (2.87),$u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ harus merupakan fungsi eigen dari operator helisitas dalam ruang momentum $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\;/\;|\vec{p}|$ dengan nilai eigen yang berlawanan (Giunti,2007):

$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} u^{(h)}(p) &= h u^{(h)}(p) && (2.91) \\
\frac{\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} v^{(h)}(p) &= -h v^{(h)}(p), && (2.92)
\end{aligned}
$$

persamaan yang sesuai untuk spinor adjoint adalah persamaan (2.30) (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
u^{\bar{(h)}}(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} &= h u^{\bar{(h)}}(p) && (2.93) \\
v^{\bar{(h)}}(p) \frac{\vec{p} \cdot \vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} &= -h v^{\bar{(h)}}(p). && (2.94)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (2.89)-(2.92) berarti $u^{(h)}(p)u^{(h')}(p) \propto \delta_{hh'}$ dan $v^{(h)}(p)v^{(h')}(p) \propto \delta_{hh'}$. Menggunakan cara normalisasi Lorentz invarian (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
u^{\bar{(h)}}(p) u^{(h')}(p) &= 2m\delta_{hh'} && (2.95) \\
v^{\bar{(h)}}(p) v^{(h')}(p) &= -2m\delta_{hh'}. && (2.96)
\end{aligned}
$$

Dari hasil normalisasi dan properti di persamaan (2.80)-(2.83), diperoleh relasi yang berguna. Contoh (Giunti,2007):

$$
\begin{aligned}
u^{(h)}(p)\gamma^{\mu}u^{(h')}(p) &= u^{\bar{(h)}}(p)\frac{\gamma^{\mu}p + p\gamma^{\mu}}{2m}u^{(h')}(p) = \frac{p^{\mu}}{m}u^{\bar{(h)}}(p)u^{(h')}(p) \\
&= \frac{p^{\mu}}{m}2m\delta_{hh'} = 2p^{\mu}\delta_{hh'} \\
u^{\bar{(h)}}(p)\gamma^{\mu}u^{(h')}(p) &= -u^{\bar{(h)}}(p)\gamma^{5}\frac{p}{m}u^{(h')}(p) = -u^{\bar{(h)}}(p)\gamma^{5}u^{(h')}(p) = 0,
\end{aligned}
$$

maka:

$$
u^{\bar{(h)}}(p)\gamma^{\mu}u^{(h')}(p) = v^{\bar{(h)}}(p)\gamma^{\mu}v^{(h')}(p)
$$

$$\begin{aligned}
\bar{u^{(h)}}(p)\frac{\gamma^\mu p + p\gamma^\mu}{2m}u^{(h')}(p) &= \bar{v^{(h)}}(p)\frac{\gamma^\mu p - p\gamma^\mu}{2m}v^{(h')}(p) \\
\bar{u^{(h)}}(p)\frac{p^\mu}{m}u^{(h')}(p) &= -\bar{u^{(h)}}(p)\frac{p^\mu}{m}u^{(h')}(p) \\
\frac{p^\mu}{m}2m\delta_{hh'} &= -\frac{p^\mu}{m}(-2m)\delta_{hh'} \\
2p^\mu\delta_{hh'} &= 2p^\mu\delta_{hh'} \qquad (2.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u^{(h)}}(p)\gamma^5 u^{(h')}(p) &= \bar{v^{(h)}}(p)\gamma^5 v^{(h')}(p) \\
\bar{u^{(h)}}(p)\gamma^5\frac{p}{m}u^{(h')}(p) &= \bar{v^{(h)}}(p)\gamma^5\frac{-p}{m}v^{(h')}(p) \\
-\bar{u^{(h)}}(p)\gamma^5 u^{(h')}(p) &= \bar{v^{(h)}}(p)\gamma^5 v^{(h')}(p) \\
0 &= 0 \qquad (2.98)
\end{aligned}$$

$$u^{(h)\dagger}(p)v^{(h')}(p_p) = v^{(h)\dagger}(p)u^{(h')}(p_p) = 0, \qquad (2.99)$$

dimana $p_p = (p^0, -\overrightarrow{p})$ (Giunti,2007).

Menggunakan relasi dalam persamaan (2.95) dan (2.97), dapat menemukan bahwa koefisien $a^{(h)}(p)$ dan $b^{(h)}(p)$ dalam persamaan (2.75) diberikan (Giunti,2007)

$$a^{(h)}(p) = \int d^3x u^{(h)\dagger}(p)\psi(x)e^{ip\cdot x} \qquad (2.100)$$

$$b^{(h)}(p) = \int d^3x \psi^\dagger(x)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}, \qquad (2.101)$$

dengan normalisasi

$$\int d^3x \mid \psi(x) \mid^2 = 1, \qquad (2.102)$$

menyiratkan bahwa koefisien $a^{(h)}(p)$ dan $b^{(h)}(p)$ dibatasi oleh (Giunti,2007)

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_{h=\pm1}\left[\mid a^{(h)}(p)\mid^2 + \mid b^{(h)}(p)\mid^2\right] = 1, \qquad (2.103)$$

karena 4-spinor $u^{(+)}(p), u^{(-)}(p), v^{(+)}(p), v^{(-)}(p)$ saling ortogonal, keduanya linier bebas dan membentuk basis vektor ruang spinor 4-dimensi. Produk lain (Giunti,2007)

$$u^{(+)}(p)\bar{u}^{(+)}(p), u^{(-)}(p)\bar{u}^{(-)}(p), v^{(+)}(p)\bar{v}^{(+)}(p), v^{(-)}(p)\bar{v}^{(-)}(p), \tag{2.104}$$

membentuk dasar ruang vektor dari matrik 4x4. Secara khusus memenuhi relasi (Giunti,2007),

$$\sum_{h=\pm 1}\left[\frac{u^{(h)}(p)\bar{u}^{(h)}(p)}{2m} - \frac{v^{(h)}(p)\bar{v}^{(h)}(p)}{2m}\right] = \sum_{h=\pm 1}\left[\frac{2m\delta_{hh}}{2m} - \left(-\frac{2m\delta_{hh}}{2m}\right)\right] = 1. \tag{2.105}$$

Komponen dari $\psi(x)$ sebanding dengan $e^{-ip\cdot x}$ dan $e^{ip\cdot x}$ dapat disebut komponen energi positif dan energi negatif karena $(P^0 = i\partial_0)$ (Giunti,2007)

$$P^0 e^{-ip\cdot x} = E e^{-ip\cdot x}, \qquad P^0 e^{ip\cdot x} = -E e^{ip\cdot x}. \tag{2.106}$$

Dapat digunakan untuk mendefinisikan operator proyeksi pada komponen dengan energi positif dan negatif (Giunti,2007)

$$\Lambda_{\pm}(p) \equiv \frac{m \pm p}{2m}, \tag{2.107}$$

dengan

$$\sum_{r=\pm}\Lambda_r(p) = 1, \qquad \Lambda_r(p)\Lambda_s(p) = \Lambda_r(p)\delta_{rs}, \tag{2.108}$$

dan

$$\Lambda_+(p)u^h(p) = u^h(p), \qquad \Lambda_+(p)v^h(p) = 0 \tag{2.109}$$

$$\Lambda_{-}(p)u^{h}(p) = 0, \qquad \Lambda_{-}(p)v^{h}(p) = v^{h}(p). \tag{2.110}$$

Dari persamaan ini dan relasi kelengkapan dalam persamaan (C.61) dapat memperoleh identitas (Giunti,2007).

$$\Lambda_{+}(p) = \sum_{h=\pm 1} \frac{u^{h}(p)\bar{u^{h}}(p)}{2m} \tag{2.111}$$

$$\Lambda_{-}(p) = -\sum_{h=\pm 1} \frac{v^{h}(p)\bar{v^{h}}(p)}{2m}. \tag{2.112}$$

Dari persamaan (C.49) dan (2.92) operator proyeksi pada spinor u dan v dengan helisitas (Giunti,2007),

$$P_{h}^{(u)} = \frac{1}{2}\left(1 + h\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\right) \tag{2.113}$$

$$P_{h}^{(v)} = \frac{1}{2}\left(1 - h\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\right), \tag{2.114}$$

memungkinkan untuk menulis operator proyeksi dalam bentuk kovarian. Dengan menggunakan properti di persamaan (2.80) dan (C.34), memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}u^{(h)}(p) &= \frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\frac{p}{m}u^{(h)}(p) = \frac{\vec{p}\cdot\gamma^{0}\,\vec{\gamma}\,\gamma^{5}}{|\vec{p}|}\frac{p}{m}u^{(h)}(p) \\
&= \frac{\gamma^{0}\,\vec{\gamma}\,\gamma^{5}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\frac{p}{m}u^{(h)}(p) = \frac{\gamma^{0}\,\vec{\gamma}\,\gamma^{5}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\frac{E\gamma^{0} - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{m}u^{(h)}(p) \\
&= \frac{\gamma^{0}\,\vec{\gamma}\,\gamma^{5}\cdot\vec{p}\;E\gamma^{0}}{m\,|\vec{p}|} - \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{m}u^{(h)}(p) \\
&= \frac{E\gamma^{0}\gamma^{0}\,\vec{\gamma}\,\gamma^{5}\cdot\vec{p}}{m\,|\vec{p}|} - \frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{m}u^{(h)}(p) \\
&= -\frac{E\gamma^{5}\,\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{m\,|\vec{p}|} + \frac{\gamma^{5}\,|\vec{p}|\,\gamma^{0}}{m}u^{(h)}(p) \\
&= \gamma^{5}\left(\frac{|\vec{p}|\,\gamma^{0}}{m} - \frac{E\,\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{m\,|\vec{p}|}\right)u^{(h)}(p) = h\gamma^{5}s_{h}u^{(h)}(p),
\end{aligned} \tag{2.115}$$

dimana s_h^μ adalah polarisasi 4-vektor (Giunti,2007)

$$s_h^\mu = h\left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E}{m}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right), \tag{2.116}$$

dengan

$$s_h^2 = -1, \qquad\qquad s_{h\cdot p} = 0, \tag{2.117}$$

dengan cara yang sama dapat diperoleh (Giunti,2007)

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}v^{(h)}(p) = -h\gamma^5 s_h v^{(h)}(p). \tag{2.118}$$

Oleh karena itu, operator proyeksi helisitas dalam persamaan (2.111) dan (2.112) dapat ditulis dalam bentuk kovarian (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} P_h^{(u)} &= \frac{1}{2}\left(1 + h\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\right), & P_h^{(v)} &= \frac{1}{2}\left(1 - h\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5 s_h\right) & &= \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5 s_h\right) \end{aligned}$$
$$P_h = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5 s_h\right) = \frac{1+\gamma^5 s_h}{2} \quad . \tag{2.119}$$

Ortogonalitas dari s_h dan p membuktikan bahwa P_h komut dengan $\Lambda_\pm$ karena (Giunti,2007)

$$[\gamma^5 s_h, p] = \gamma^5\{s_h, p\} - \left\{\gamma^5, p\right\} s_h = 0. \tag{2.120}$$

Oleh karena itu, dapat didefinisikan empat operator proyeksi pada komponen dengan energi dan helisitas sebagai (Giunti,2007)

$$\Lambda_\pm^h(p) \;=\; \Lambda_\pm(p)P_h = P_h\Lambda_\pm = \left(\frac{m\pm p}{2m}\right)\left(\frac{1+\gamma^5 s_h}{2}\right), \tag{2.121}$$

dengan

$$\sum_{r\pm1}\sum_{h\pm1}\Lambda_r^h(p) = 1, \qquad \Lambda_r^h(p)\Lambda_s^{h'}(p) = \Lambda_r^h(p)\delta_{rs}\delta_{hh'}, \tag{2.122}$$

dan

$$\Lambda_+^h(p)u^{(h')}(p) = \delta_{hh'}u^{(h')}(p), \qquad \Lambda_+^h(p)v^{(h')}(p) = 0, \tag{2.123}$$

$$\Lambda_-^h(p)u^{(h')}(p) = 0, \qquad \Lambda_+^h(p)v^{(h')}(p) = \delta_{hh'}v^{(h')}(p). \tag{2.124}$$

Dari persamaan ini dan relasi kelengkapan dalam perdamaan (2.104), dapat diperoleh identitas (Giunti,2007)

$$\Lambda_+^h(p) = \frac{u^{(h)}(p)\bar{u^{(h)}}(p)}{2m} \tag{2.125}$$

$$\Lambda_-^h(p) = -\frac{v^{(h)}(p)\bar{v^{(h)}}(p)}{2m}, \tag{2.126}$$

mendapatkan beberapa hubungan yang berguna antara spinor u dan v dengan berbagai helisitas. Maka (Giunti,2007)

$$(P_p - m)\gamma^0 u^{(-h)}(p_p) = 0 \quad dan \quad \frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\Sigma}}{|\overrightarrow{p}|}\gamma^0 u^{(-h)}(p_p) = h\gamma^0 u^{(-h)}(p_p), \tag{2.127}$$

mempunyai

$$\gamma^0 u^{(-h)}(p_p) = \eta(\overrightarrow{p}, h)u^{(h)}(p), \tag{2.128}$$

dimana $\eta(\overrightarrow{p}, h)$ adalah faktor fase yang bergantung pada $\overrightarrow{p}$ dan h. Mengubah tanda p dan h dapat diperoleh $\gamma^0 u^{(h)}(p) = \eta(\overrightarrow{-p}, -h)u^{(-h)}(p_p)$, maka (Giunti,2007)

$$\eta(\overrightarrow{-p}, -h) = \eta^*(\overrightarrow{p}, h), \tag{2.129}$$

Relasi yang mirip dengan persamaan (2.126) berlaku untuk v. Dalam konjugasi muatan akan lebih mudah untuk memilih fase dari spinor $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ untuk memenuhi hubungan dalam persamaan (2.172). Hal ini diperoleh (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\gamma^0 v^{(-h)}(p_p) &= -h\gamma^0 v^{(-h)}(p_p) \\ \gamma^0 v^{(-h)}(p_p) &= -\eta(-\vec{p},-h)v^{(h)}(p_p) \\ &= -\eta^*(\vec{p},h)v^{(h)}(p). \end{aligned} \tag{2.130}$$

Jika

$$(p-m)\gamma^0 v^{(h)}(p)=0 \qquad dan \qquad \frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\gamma^5 v^{(-h)}(p)=h\gamma^5 v^{(-h)}(p), \tag{2.131}$$

mempunyai

$$\gamma^5 v^{(-h)}(p)=\zeta(h)u^{(h)}(p), \tag{2.132}$$

dimana $\zeta(h)$ adalah faktor fase yang bergantung pada h. Relasi yang serupa untuk $\gamma^5 u^{(-h)}(p)$ dibatasi oleh relasi dalam persamaan (2.171) menjadi (Giunti,2007)

$$\gamma^5 u^{(-h)}(p)=-\zeta^*(h)v^{(h)}(p). \tag{2.133}$$

Persamaan yang lengkap sesuai dengan persamaan (2.130), yaitu (Giunti,2007)

$$\zeta(-h)=-\zeta(h). \tag{2.134}$$

2.3.1 Representasi Dirac

Bentuk eksplisit dari spinor bebas $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ dalam representasi Dirac dari matrik γ adalah (Giunti,2007)

$$u_D^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\ h\sqrt{E-m}X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \end{pmatrix} \tag{2.135}$$

$$v_D^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-m}X^{(-h)}(\overrightarrow{p}) \\ h\sqrt{E+m}X^{(-h)}(\overrightarrow{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.136}$$

dimana $X^{(h)}(\overrightarrow{p})$ adalah spin dari keadaan eigen(*eigenstate*) helisitas 2 komponen ortonormal. Dapat dengan mudah menemukan bahwa $\zeta(h)$ dalam persamaan (2.130) dan (2.131) diberikan (Giunti,2007)

$$\zeta(h) = -h. \tag{2.137}$$

Dalam batas nonrelativistik $|\overrightarrow{p}| \ll m$, spinor dalam persamaan (2.133) dan (2.134) diperkirakan (Giunti,2007)

$$u_D^{(h)}(p) \simeq \sqrt{2m} \begin{pmatrix} X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\ h\frac{|\overrightarrow{p}|}{2m}X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \end{pmatrix} \tag{2.138}$$

$$v_D^{(h)}(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} -\frac{|\overrightarrow{p}|}{2m}X^{(-h)}(\overrightarrow{p}) \\ hX^{(-h)}(\overrightarrow{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.139}$$

disini ada 2 komponen atas $u^{(h)}(p)$ yang disebut komponen besar, jauh lebih besar dari dua komponen yang lebih rendah, yang disebut komponen kecil. Dan sebaliknya berlaku $v^{(h)}(p)$. Representasi Dirac lebih mudah dipahami karena memiliki sifat-sifat tersebut (Giunti,2007).

2.3.2 Representasi Kiralitas

Bentuk eksplisit dari spinor bebas $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ dalam representasi kiral dari matrik γ adalah (Giunti,2007)

$$u_C^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E + h\,|\vec{p}|}X^{(h)}(\vec{p}) \\ \sqrt{E - h\,|\vec{p}|}X^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.140}$$

$$v_C^{(h)}(p) = -h \begin{pmatrix} \sqrt{E - h\,|\vec{p}|}X^{(-h)}(\vec{p}) \\ \sqrt{E + h\,|\vec{p}|}X^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.141}$$

dimana $X^{(h)}(\vec{p})$ adalah spin *eigenstate* helisitas 2 komponen ortonormal. Dapat melihat bahwa $\zeta(h)$ dalam persamaan (2.130) dan (2.131) memiliki bentuk yang sama dalam persamaan (2.135) seperti dalam representasi Dirac (Giunti,2007).

$$\zeta(h) = -h. \tag{2.142}$$

Dalam batas relativistik $m \ll E$, spinor dalam persamaan (2.138) dan (2.139) menjadi (Giunti,2007)

$$u_C^{(+)}(p) \simeq -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} X^{(+)}(\vec{p}) \\ -\frac{m}{2E}X^{(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \qquad u_C^{(-)}(p) \simeq \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\frac{m}{2E}X^{(-)}(\vec{p}) \\ X^{(-)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.143}$$

$$v_C^{(+)}(p) \simeq -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{m}{2E}X^{(-)}(\vec{p}) \\ X^{(-)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \qquad v_C^{(-)}(p) \simeq \sqrt{2E} \begin{pmatrix} X^{(+)}(\vec{p}) \\ \frac{m}{2E}X^{(+)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{2.144}$$

dengan 2 dari 4 komponen ditekan oleh rasio kecil m/E. Untuk alasan ini representasi kiral mudah dalam menyelesaikan partikel ultrarelativistik (Giunti,2007).

2.3.3 Spin *EigenState* Helisitas 2 Komponen

Dalam subbab sebelumnya $X^{(h)}(\vec{p})$ adalah 2 komponen *eigenstate* helisitas yang memenuhi persamaan *eigenvalue* (Giunti,2007)

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}X^{(h)}(\vec{p}) = hX^{(h)}(\vec{p}), \tag{2.145}$$

karena $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ dalam persamaan (2.133),(2.134) dan (2.138), (2.139) memenuhi persamaan *eigenvalue* (2.89) dan (2.90). Persamaan *eigenvalue* (2.143) menjamin bahwa $X^{(h)}(\vec{p})$ dan $X^{(-h)}(\vec{p})$ adalah ortogonal (Giunti,2007)

$$\left(X^{(h)}(\vec{p})\right)^{\dagger} X^{(-h)}(\vec{p}) = 0. \tag{2.146}$$

Dapat dipilih untuk dinormalisasi menjadi 1 (Giunti,2007)

$$\left(X^{(h)}(\vec{p})\right)^{\dagger} X^{(h)}(\vec{p}) = 0. \tag{2.147}$$

Dalam penurunan konjugasi muatan akan lebih mudah memilih fase relatif $X^{(h)}(\vec{p})$ dan $X^{(-h)}(\vec{p})$ untuk memenuhi hubungan dalam persamaan (2.171). Dalam hal ini representasi Dirac dan Kiral memperoleh hubungan (Giunti,2007)

$$i\sigma^{2}\left(X^{(h)}(\vec{p})\right)^{*} = -hX^{(-h)}(\vec{p}), \tag{2.148}$$

karena $X^{(h)}(\vec{p})$ adalah fungsi eigen dari $\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\ /\ |\vec{p}|$ dengan nilai eigen h sesuai dengan $X^{(h)}(\vec{p})$ (Giunti,2007):

$$X^{(-h)}(\vec{-p}) = \eta(\vec{p},h)X^{(h)}(\vec{p}), \tag{2.149}$$

dimana $\eta(\overrightarrow{p}, h)$ adalah faktor fase yang sama seperti dalam persamaan (2.126). Mengubah tanda $\overrightarrow{p}$ dan h dalam persamaan (2.147), didapatkan $X^{(h)}(\overrightarrow{p}) = \eta(\overrightarrow{-p}, -h)X^{(-h)}(\overrightarrow{-p})$ maka (Giunti,2007)

$$\eta(\overrightarrow{-p}, -h) = \eta^{*}(\overrightarrow{p}, h), \tag{2.150}$$

dalam ketetapan dengan persamaan (2.127) (Giunti,2007)

$$\eta(\overrightarrow{p}, -h) = -\eta^{*}(\overrightarrow{p}, h), \tag{2.151}$$

terakhir dapat diungkapkan bahwa spin *eigenstate* helisitas 2 komponen meluas hubungan (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\sigma}}{|\overrightarrow{p}|} X^{(h)}(\overrightarrow{p}) &= hX^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\
&= \left(X^{(h)}(\overrightarrow{p})\right)^{\dagger} \sigma^{k} X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\
&= \left(X^{(h)}(\overrightarrow{p})\right)^{\dagger} \frac{(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\sigma})\sigma^{k} + \sigma^{k}(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\sigma})}{2h\,|\overrightarrow{p}|} X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\
&= \left(X^{(h)}(\overrightarrow{p})\right)^{\dagger} \frac{\overrightarrow{p}\ \sigma^{k} \cdot \overrightarrow{\sigma}\ \sigma^{k} + \sigma^{k}\ \overrightarrow{p} \cdot \sigma^{k}\ \overrightarrow{\sigma}}{2h\,|\overrightarrow{p}|} X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\
&= \left(X^{(h)}(\overrightarrow{p})\right)^{\dagger} \frac{p^{j}}{2h\,|\overrightarrow{p}|} \left\{\sigma^{k}, \sigma^{j}\right\} X^{(h)}(\overrightarrow{p}) \\
&= \frac{p^{j}}{2h\,|\overrightarrow{p}|} \left\{\sigma^{k}, \sigma^{j}\right\} \\
&= \frac{p^{j}}{2h\,|\overrightarrow{p}|} 2\delta^{kj} \\
&= h\frac{p^{k}}{|\overrightarrow{p}|}.
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Dengan menggunakan koordinat sudut θ dan ϕ, dengan $0 \leq \theta < \pi$ dan $0 \leq \phi < 2\pi$, 3 keadaan dapat ditulis sebagai $\overrightarrow{p}{=}|\overrightarrow{p}|\ (sin\theta cos\phi, sin\theta sin\phi, cos\theta)$

dan 2 komponen spin *eigenstate* helisitas diberikan (Giunti,2007)

$$X^{(+)}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} cos\frac{\theta}{2} \\ sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}, \qquad X^{(-)}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} -sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.153}$$

karena trasnformasi $\overrightarrow{p} \longrightarrow -\overrightarrow{p}$ sama dengan transformasi $\theta \longrightarrow \pi - \theta$ dan $phi \longrightarrow \phi \pm \pi$ dengan tanda plus jika $0 \leq \phi < \pi$ dan tanda minus jika $\pi \leq \phi < 2\pi$, mempunyai (Giunti,2007)

$$\eta(\overrightarrow{p}, h) = he^{-ih\phi}, \tag{2.154}$$

lebih baik apabila mengarah $\overrightarrow{p}$ sepanjang sumbu z, $\overrightarrow{p} = (0, 0, |\overrightarrow{p}|)$ yang menyiratkan $\theta = 0$ dan (Giunti,2007)

$$X^{(+)}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv X^{(+)}, \qquad X^{(-)}(\overrightarrow{p}) \;\; = \;\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv X^{(-)}, \tag{2.155}$$

merupakan bentuk yang cocok untuk 2 komponen spinor dalam kerangka partikel, dimana helisitasnya tidak ditentukan (Giunti,2007).

2.3.4 Medan Tanpa Massa

Dari persamaan (2.141) dan (2.142) dijelaskan bahwa dalam kasus fermion tak bermassa keempat spinor $u^{(\pm)}(p)$ dan $v^{(\pm)}(p)$ hanya memiliki 2 kompone akhir. Ekspansi Fourier dari medan ψ_R dan ψ_L diperoleh (Giunti,2007)

$$\psi_{R,L}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(h)}(p) u^{(h)}_{R,L}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}_{R,L}(p) e^{ip\cdot x}]. \tag{2.156}$$

Dari persamaan (2.141) dan (2.142), untuk m=0 mempunyai (Giunti,2007)

$$u_L^{(+)}(p) = u_R^{(-)}(p) = v_L^{(-)}(p) = v_R^{(+)}(p) = 0, \tag{2.157}$$

dan

$$u_R^{(+)}(p) = u^{(+)}(p), \quad u_L^{(-)}(p) = u^{(-)}(p), \quad v_L^{(+)}(p) = v^{(+)}(p), \quad v_R^{(-)}(p) = v^{(-)}(p). \tag{2.158}$$

Oleh karena itu, ekspansi Fourier dari medan kiral tanpa massa ψ_R dan ψ_L disederhanakan menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
\psi_R(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(h)}(p) u_R^{(h)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v_R^{(h)}(p) e^{ip\cdot x}] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(h)}(p) u^{(+)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(-)}(p) e^{ip\cdot x}] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(+)}(p) u^{(+)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(-)\dagger}(p) v^{(-)}(p) e^{ip\cdot x}]
\end{aligned} \tag{2.159}$$

$$\begin{aligned}
\psi_L(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(h)}(p) u_L^{(h)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v_L^{(h)}(p) e^{ip\cdot x}] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(h)}(p) u^{(-)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(+)}(p) e^{ip\cdot x}] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [a^{(-)}(p) u^{(-)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(+)\dagger}(p) v^{(+)}(p) e^{ip\cdot x}].
\end{aligned} \tag{2.160}$$

Dapat dilihat secara eksplisit bahwa medan-medan kiral tanpa massa $\psi_R(x)$ dan $\psi_L(x)$ independen. Selain itu, komponen energi positif $\psi_R(x)$ dan $\psi_L(x)$ masing-masing memiliki helisitas positif dan negatif (Giunti,2007).

2.4 Transformasi C,P, dan T

Teori interaksi lemah didirikan pada tahun 1934 ketika Fermi merumuskan teori peluruhan , yang sekarang dikenal sebagai teori Fermi, dalam analogi Elektrodinamika Kuantum (QED). Untuk menjelaskan sebuah perubahan muatan satu unit pada spin nuklir dalam peluruhan β, pada tahun 1936 G.Gamow dan E.Teller memperluas teori dengan memperkenalkan arus vektor aksial. Disadari pula bahwa kopling lain seperti scalar, pseudoscalar dan kopling tensor juga dapat berpartisipasi dalam interaksi lemah.

Sebelum tahun 1956 sebuah paritas bersifat kekal dalam setiap proses interaksi termasuk dalam interaksi lemah. Paritas akan kekal pada proses interaksi elektromagnetik dan interaksi kuat atau hadron saja. Kekekalan paritas akan terjadi jika invariansi pada invers ruang dari sistem *left-handed* ke sistem *right-handed*.

Pertama kali ditujukkan dalam eksperimen sinar kosmik dan dikonfirmasi oleh eksperimen akselerator. K^+ ditemukan pada peluruhan dua mode yang berbeda dengan paritas yang berlawanan. Hal ini merupakan teka-teki $\theta - \tau$. K^+ yang disebut θ meluruh menjadi dua pion, sedangkan K^+ yang disebut τ meluruh menjadi tiga pion. Teka-teki θ dan τ memiliki massa, spin, dan muatan yang sama, atau disebut dengan partikel yang sama. Hal ini tidak dapat terjadi jika paritas dipertahankan dalam interaksi lemah.

Transformasi simetri terdapat 3 macam, yaitu konjugasi muatan (C), partitas (P), dan pembalikan waktu (T). Pada awalnya transformasi simetri dilakukan tersendiri. Seiring berkembangnya ilmu terdapat pula transformasi gabungan misalnya CP yang merupakan transformasi simetri gabungan antara konjugasi muatan dengan paritas dan CPT yang merupakan transformasi simetri gabungan antara konjugasi muatan, paritas, dan pembalikan waktu. Secara sederhana, konjugasi muatan adalah simetri antara partikel dan anti partikel, dan karenanya simetri CP diusulkan pada tahun 1957 oleh Lev Landau sebagai simetri sejati antara materi dan anti materi. Dengan kata lain, suatu proses di mana semua partikel dipertukarkan dengan anti partikelnya diasumsikan setara dengan gambar cermin dari proses aslinya.

Lagrangian Dirac merupakan invarian terhadap transformasi konjugasi muatan C, ruang invers P(paritas), dan pembalik waktu T(Giunti,2007).

2.4.1 Konjugasi Muatan (C)

Konjugasi muatan dalam dunia fisika merupakan pembalikan dari muatan. Konjugasi muatan partikel menjadi anti partikelnya. Pembalikan muatan positif merupakan negatif dan sebaliknya. Pembalikan muatan ini merupakan hal yang penting agar dapat mengetahui pembalikan dari suatu partikel tersebut.

Konjugasi muatan medan spinor ψ dan $\bar{\psi}$ berubah menjadi (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{C} \psi^C(x) = \xi_C C \bar{\psi}^T(x) = -\xi_C C \gamma^0 \psi^* \tag{2.161}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{C} \bar{\psi^C}(x) = -\xi_C^* \psi^T C^\dagger(x), \tag{2.162}$$

dimana C merupakan matrik konjugasi muatan (Giunti,2007)

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \tag{2.163}$$

$$C^\dagger = C^{-1} \tag{2.164}$$

$$C^T = -C, \tag{2.165}$$

mempunyai

$$C(\gamma^5)^T C^{-1} = \gamma^5 \quad (2.166)$$

$$C(\sigma^{\mu\nu})^T C^{-1} = -\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.167)$$

Dalam representasi Dirac dipersamaan (C.3) dari matrik γ (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} C_D &= i\gamma_D^2\gamma_D^0 = i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}^2 \\ -\vec{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &= i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.168)$$

dan dalam representasi kiral pada persamaan (C.9) (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} C_C &= i\gamma_C^2\gamma_C^0 = i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}^2 \\ -\vec{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= i\begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.169)$$

karena dua transformasi konjugasi muatan (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{C} \xi_C C\bar{\psi}^T \\ &= \xi_C C(\psi^\dagger\gamma^0)^T \\ &= -\xi_C C\psi^\dagger\gamma^0 \\ &= -\xi_C C\gamma^0\psi^{-1} \\ &= -\xi_C C\gamma^0\psi \\ &\xrightarrow{C} \mid \xi_C \mid^2 \psi, \end{aligned} \quad (2.170)$$

harus menghilangkan invarian ψ, koefisien ξ_C merupakan fase, dengan (Giunti,2007)

$$\mid \xi_C \mid^2 = 1, \tag{2.171}$$

mewakili paritas muatan intrinsik pada medan. Konsekuensi dari $\mid \xi_C \mid^2 = 1$ adalah bentuk ψ dalam ψ^C sama dengan bentuk pada persamaan (2.159) dari ψ^C ke ψ (Giunti,2007)

$$\psi(x) = \xi_C C \bar{\psi^C}^T(x). \tag{2.172}$$

Karena invarian, Lagrangian Dirac bebas pada persamaan (2.25) konjugasi muatan tidak terdapat kendala untuk ξ_C, paritas muatan intrinsik dari medan bebas adalah *arbitraty* (Giunti,2007).

Agar lebih mudah memilih fase relatif dari spinor $u^{(h)}(p)$ dan $v^{(h)}(p)$ memiliki (Giunti,2007)

$$u^{(h)}(p) = C \bar{v^{(h)}}^T(p), \tag{2.173}$$

dan

$$v^{(h)}(p) = C \bar{u^{(h)}}^T(p). \tag{2.174}$$

Lalu ekspansi Fourier dari medan konjugasi muatan $\psi^C(x)$ adalah (Giunti,2007)

$$\psi^C(x) = \xi_C \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[b^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip\cdot x} + a^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip\cdot x} \right] \tag{2.175}$$

Transformasi pada medan terkuantisasi (Giunti,2007)

$$U_C \psi(x) U_C^\dagger = \psi^C(x) = \xi_C C \bar{\psi}^T(x), \tag{2.176}$$

dimana U_C merupakan operator unitary konjugasi muatan $U_C^\dagger = U_C^{-1}$, sehingga $U_C = U_C^{-1}$ karena $U_C^2 = 1$. Dari persamaan (2.75) dan (2.173) dapat dilihat (Giunti,2007)

$$U_C a^{(h)\dagger}(p) U_C^\dagger = \xi_C^* b^{(h)\dagger}(p) \tag{2.177}$$

$$U_C b^{(h)\dagger}(p) U_C^\dagger = \xi_C a^{(h)\dagger}(p). \tag{2.178}$$

Oleh karena itu, operasi dari konjugasi muatan mengubah partikel menjadi anti partikel. Untuk operator muatan : Q : mempunyai (Giunti,2007)

$$: Q := q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)\dagger}(p) a^{(h)}(p) - b^{(h)\dagger}(p) b^{(h)}(p) \right]$$

$$U_C : Q : U_C^\dagger = - : Q :, \tag{2.179}$$

mengarah ke muatan berlawanan untuk partikel dan anti partikel (Giunti,2007).

Bilinear kovarian pada persamaan (C.20)-(C.24) berubah sebagai (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
S_{ab} = \bar{\psi}_a \psi_b \xrightarrow{C} (S_{ab})^C &= \xi_C^{a*} \psi_a \xi_C^b \bar{\psi}_b \\
&= \xi_C^{a*} \xi_C^b \bar{\psi}_b \psi_a \\
&= \xi_C^{a*} \xi_C^b S_{ba}, \qquad (2.180) \\
V_{ab}^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b \xrightarrow{C} (V_{ab}^\mu)^C &= -\xi_C^{a*} \psi_a \gamma^\mu \xi_C^b \bar{\psi}_b \\
&= -\xi_C^{a*} \xi_C^b \bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_a
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\xi_C^{a*}\xi_C^b V_{ba}^{\mu}, &(2.181)\\
T_{ab}^{\mu\nu} = \bar{\psi}_a\sigma^{\mu\nu}\psi_b \xrightarrow{C} (T_{ab}^{\mu\nu})^C &= \xi_C^{a*}\psi_a\sigma^{\mu\nu}\xi_C^b\bar{\psi}_b \\
&= -\xi_C^{a*}\xi_C^b\bar{\psi}_b\sigma^{\mu\nu}\psi_a \\
&= -\xi_C^{a*}\xi_C^b T_{ba}^{\mu\nu}, &(2.182)\\
A_{ab}^{\mu} = \bar{\psi}_a\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_b \xrightarrow{C} (A_{ab}^{\mu})^C &= \xi_C^{a*}\psi_a\gamma^{\mu}\gamma^5\xi_C^b\bar{\psi}_b \\
&= \xi_C^{a*}\xi_C^b\bar{\psi}_b\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_a \\
&= \xi_C^{a*}\xi_C^b A_{ba}^{\mu}, &(2.183)\\
P_{ab} = \bar{\psi}_a\gamma^5\psi_b \xrightarrow{C} (P_{ab})^C &= \xi_C^{a*}\psi_a\gamma^5\xi_C^b\bar{\psi}_b \\
&= \xi_C^{a*}\xi_C^b\bar{\psi}_b\gamma^5\psi_a \\
&= \xi_C^{a*}\xi_C^b P_{ba}. &(2.184)
\end{aligned}
$$

Perubahan tanda pada vektor arus konjugasi muatan untuk $a = b$ sesuai dengan realita bahwa partikel dan anti partikel memiliki muatan yang berlawanan, karena untuk arus elektromagnetik pada persamaan (C.43) memilih (Giunti,2007)

$$j^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \xrightarrow{C} (j^{\mu})^C = -q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = -j^{\mu}. \tag{2.185}$$

Namun Lagrangian interaksi elektromagnetik (Giunti,2007)

$$L_I^{(\gamma)} = -ej^{\mu}A_{\mu}, \tag{2.186}$$

merupakan invarian terhadap konjugasi muatan (Giunti,2007)

$$A_{\mu} \xrightarrow{C} -A_{\mu}. \tag{2.187}$$

Karena Lagrangian dari medan elektromagnetik bebas (Giunti,2007)

$$L^{(\gamma)} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{2.188}$$

dengan

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.189}$$

merupakan invarian dalam transformasi dalam persamaan (2.185), invariansi dalam konjugasi muatan dari interaksi Lagrangian elektromagnetik memperbaiki transformasi dalam konjugasi muatan medan elektromagnetik, yang akan diberikan pada persamaan (2.185). Secara khusus, dapat dilihat bahwa paritas muatan medan elektromagnetik adalah $\xi_C^A = 1$ (Giunti,2007).

Contoh interaksi elektromagnetik menunjukkan bahwa invariansi interaksi arus netral, yang akan melibatkan *bilinear* kovarian dengan a=b, tidak menempatkan gangguan pada paritas muatan intrinsik dari medan fermion, karena $\xi_C^{a*}\xi_C^b = 1$ untuk $a = b$ pada tangan kanan (*right-handed*) persamaan (2.178)-(2.182). Paritas muatan intrinsik dari medan fermion dapat dibatasi hanya melalui konjugasi muatan yang menghambat interaksi muatan arus, yang menyebabkan bilinear kovarian dalam persamaan (2.178)-(2.182) dengan $a = b$. Dalam hal ini, paritas muatan medan ψ_a dan ψ_b terkait dengan Lagrangian interaksi simetri konjugasi muatan. Dalam setiap kasus, hanya nilai relatif paritas muatan dari medan fermion yang berbeda ditentukan oleh simetri pada konjugasi muatan. Dalam eksperimen, didefinisikan secara langsung paritas muatan dari beberapa muatan dan memperbaiki paritas muatan dari medan lain melalui simetri dibawah interaksi Lagrangian konjugasi muatan (Giunti,2007).

Sebagai contohnya, Lagrangian interaksi (Giunti,2007)

$$L_I^{(\Phi)} = -g(V_{ab}^{\mu}\Phi_\mu + V_{ba}^{\mu}\Phi_\mu^\dagger), \tag{2.190}$$

dimana telah diperhitungkan $V_{ab}^{\mu\dagger} = V_{ba}^{\mu}$, dengan vektor medan Φ_μ dengan mentransformasikan konjugasi muatan sebagai (Giunti,2007),

$$\Phi_\mu \xrightarrow{C} \xi_C^{Phi}\Phi_\mu^\dagger. \tag{2.191}$$

Transformasi Lagrangian dalam persamaan (2.188) (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_I^{(\Phi)} &= -g(V_{ab}^{\mu}\Phi_\mu + V_{ba}^{\mu}\Phi_\mu^\dagger) \\ &= -g(\xi_C^{a*}\xi_C^{b}V_{ba}^{\mu}\xi_C^{\Phi}\Phi_\mu^\dagger - \xi_C^{a}\xi_C^{b*}V_{ab}^{\mu}\xi_C^{\Phi*}\Phi_\mu) \\ &\xrightarrow{C} -g(\xi_C^{a*}\xi_C^{b}\xi_C^{\Phi}V_{ba}^{\mu}\Phi_\mu^\dagger - \xi_C^{a}\xi_C^{b*}\xi_C^{\Phi*}V_{ab}^{\mu}\Phi_\mu), \end{aligned} \tag{2.192}$$

invariansi konjugasi muatan mencapai (Giunti,2007)

$$\xi_C^{a*}\xi_C^{b}\xi_C^{\Phi} = -1. \tag{2.193}$$

Relasi ini memperbaiki paritas muatan relatif dari ψ_a, ψ_b, dan Φ_μ. Contohnya jika memilih $\xi_C^{\Phi} = -1$ dan $\xi_C^{a} = 1$ dan $\xi_C^{b} = 1$ (Giunti,2007).

Karena vektor dan arus aksial berubah dengan tanda yang berbeda V-A interaksi arus lemah yang diganggu melanggar simetri dalam konjugasi muatan dalam cara yang maksimal. Contohnya, interaksi muatan-arus V-A dengan Lagrangian (Giunti,2007)

$$L_I^{W} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[\left(V_{ab}^{\mu} - A_{ab}^{\mu}\right)W_\mu + \left(V_{ba}^{\mu} - A_{ba}^{\mu}\right)W_\mu^\dagger\right], \tag{2.194}$$

dimana telah diperhitungkan $V_{ab}^{\mu\dagger} = V_{ba}^{\mu}$ dan $A_{ab}^{\mu\dagger} = A_{ba}^{\mu}$ (Giunti,2007).

$$W_\mu \xrightarrow{C} \xi_C^W W_\mu^\dagger, \tag{2.195}$$

mempunyai

$$\begin{aligned} L_I^W &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[(V_{ab}^\mu - A_{ab}^\mu) W_\mu + (V_{ba}^\mu - A_{ba}^\mu) W_\mu^\dagger\right] \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}[\left(-\xi_C^{a*}\xi_C^b V_{ba}^\mu - \xi_C^{a*}\xi_C^b A_{ba}^\mu\right)\xi_C^W W_\mu^\dagger \\ &+ \left(-\xi_C^a \xi_C^{b*} V_{ab}^{\mu*} - \xi_C^a \xi_C^{b*} A_{ab}^{\mu*}\right)\xi_C^{W*} W_\mu] \\ &\xrightarrow{C} -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[-\xi_C^{a*}\xi_C^b\xi_C^W\left(V_{ba}^\mu + A_{ba}^\mu\right) W_\mu^\dagger - \xi_C^a\xi_C^{b*}\xi_C^{W*}\left(V_{ab}^{\mu*} + A_{ab}^{\mu*}\right) W_\mu\right]. \end{aligned} \tag{2.196}$$

Jelas bahwa tidak ada paritas muatan $\xi_C^a, \xi_C^b, \xi_C^W$ yang menyebabkan konjugasi invarian V-A Lagrangian interaksi muatan arus dalam persamaa (2.192). Jika medan ψ_a, ψ_b dan W_μ tidak ikut dalam interaksi lain yang tidak tetap dalam konjugasi muatan, paritas muatannya *arbitrary*, karena tidak diperbaiki dengan cara apapun oleh Lagrangian bebas, yang invarian dalam konjugasi muatan tetapi tidak membuat koneksi apapun antara medan paritas muatan yang berbeda. Dalam hal ini, medan paritas muatan ψ_a, ψ_b dan W_μ tidak memiliki arti fisik dan dapat dipilih secara langsung (misalnya $\xi_C^a = \xi_C^b = \xi_C^W = 1$ (Giunti,2007).

2.4.2 Paritas (P)

Dalam mekanika kuantum, transformasi parias merupakan kebalikan tanda dari koordinat ruang. Fenomena fisik juga menyebutkan inversi paritas mengubah fenomena menjadi bayangan cerminnya. Partikel elementer yang berinteraksi simetris dibawah transformasi paritas merupakan interaksi lemah. Karena interaksi lemah merupakan kiral maka dapat menyediakan sarana untuk menjelaskan kiralitas dalam fisika.

Dalam sebuah transformasi paritas(ruang invers)(Giunti,2007)

$$x^{\mu} = (x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} x_p^{\mu} = (x^0, -\vec{x}) = x_{\mu}, \tag{2.197}$$

dimana x^0 adalah waktu dan $\vec{x}$ adalah ruang. Medan spinor $\psi(x)$ dan $\bar{\psi}(x)$ berubah menjadi (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi^P(x_P) = \xi_P \gamma^0 \psi(x) \tag{2.198}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{P} \bar{\psi}^P(x_P) = \xi_P^* \bar{\psi}(x) \gamma^0. \tag{2.199}$$

Nilai yang mungkin dari paritas intrinsik ξ_P dibatasi oleh fakta dalam dua transformasi paritas yang berurut-urut mengembalikan sistem kekeadaan semula (Giunti,2007):

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi^P(x_P) = \xi_P \gamma^0 \psi(x) \xrightarrow{P} \xi_P^2 \psi(x). \tag{2.200}$$

Tampak bahwa ξ_P^2 menjadi +1, tetapi harus mencatat bahwa tanda medan fermion tidak memiliki makna fisis karena ia berubah melalui rotasi 2π. Karena ξ_P^2 menjadi ± 1, yang artinya (Giunti,2007)

$$\xi_P = \pm 1, \pm i, \tag{2.201}$$

dari persamaan (2.126) dan (2.128) mempunyai (Giunti,2007)

$$\gamma^0 u^{(h)}(p_P) = \eta(\vec{p}, -h) u^{-h}(p) \tag{2.202}$$

$$\gamma^0 v^{(h)}(p_P) = -\eta^*(\vec{p}, -h) v^{-h}(p), \tag{2.203}$$

dimana $p_P = (p^0, -\vec{p})$ dan $\eta = (\vec{p}, -h)$ merupakan faktor fase yang bergantung pada $\vec{p}$ dan h. Dari persamaan (2.75) dan (2.187), ekspansi Fourier dari medan yang ditransformasikan oleh $\psi^P(x) = \xi\gamma^0\psi(x_P)$ diberikan menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \psi^P(x) &= \xi_P \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm1} [\eta(\vec{p}, h) a^{(-h)}(p_P) u^h(p) e^{-ip\cdot x} \\ &- \eta^*(\vec{p}, h) b^{(-h)\dagger}(p_P) v^h(p) e^{ip\cdot x}]. \end{aligned} \tag{2.204}$$

Transformasi dari medan terkuantisasi (Giunti,2007)

$$U_P \psi(x) \psi_P^\dagger = \psi^P(x) = \xi_P \gamma^0 \psi(x_P), \tag{2.205}$$

dimana U_P merupakan kesatuan operator dari transformasi paritas ($U_P^\dagger = U_P^{-1}$). Dari ekspansi Fourier di persamaan (2.75) dari medan Dirac yang terkuantisasi dari persamaan (2.202) transformasi dari operator partikel dan anti partikel dibuat (Giunti,2007)

$$U_P a^{(h)\dagger}(p) U_P^\dagger = \eta^*(\vec{p}, h) \xi_P^* a^{(-h)\dagger}(p_P) \tag{2.206}$$

$$U_P b^{(h)\dagger}(p) U_P^\dagger = -\eta^*(\vec{p}, h) \xi_P b^{(-h)\dagger}(p_P). \tag{2.207}$$

Oleh karena itu, transformasi paritas membalikkan helisitas fermion, karena tiga momentum berubah tanda, tapi putaran yang merupakan vektor aksial, seperti semua momentum sudut, tatap tidak berubah (Giunti,2007).

Bilinear kovarian pada persamaan (C.20)-(C.24) berubah menjadi (Giunti,2007)

$$S_{ab} = \bar{\psi}_a \psi_b \xrightarrow{P} (S_{ab})^P = \xi_P^{a*} \xi_P^b \bar{\psi}_a \psi_b = \xi_P^{a*} \xi_P^b S_{ab}, \tag{2.208}$$

$$V_{ab}^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b \xrightarrow{P} (V_{ab}^\mu)^P = \xi_P^{a*} \xi_P^b \bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b = \xi_P^{a*} \xi_P^b V_\mu^{ab}, \tag{2.209}$$

$$T^{\mu\nu}_{ab} = \bar{\psi}_a \sigma^{\mu\nu}\psi_b \xrightarrow{P} (T^{\mu\nu}_{ab})^P = \xi^{a*}_P \xi^b_P \bar{\psi}_a \sigma_{\mu\nu}\psi_b = \xi^{a*}_P \xi^b_P T^{ab}_{\mu\nu}, \tag{2.210}$$

$$A^{\mu}_{ab} = \bar{\psi}_a \gamma^{\mu}\gamma^5\psi_b \xrightarrow{P} (A^{\mu}_{ab})^P = -\xi^{a*}_P \xi^b_P \bar{\psi}_a \gamma_{\mu}\gamma^5\psi_b = -\xi^{a*}_P \xi^b_P A^{ab}_{\mu}, \tag{2.211}$$

$$P_{ab} = \bar{\psi}_a \gamma^5\psi_b \xrightarrow{P} (P_{ab})^P = -\xi^{a*}_P \xi^b_P \bar{\psi}_a \gamma^5\psi_b = -\xi^{a*}_P \xi^b_P P_{ab}, \tag{2.212}$$

dimana indeks Lorentz yang lebih rendah melihatkan perubahan tanda komponen spasial (Giunti,2007).

Paritas intrinsik tidak memiliki makna fisik. Hanya nilai relatif paritas intrinsik dari partikel berbeda yang mengambil bagian dari interaksi tetap paritas yang memiliki makna fisik. Contoh mempertimbangkan Lagrangian interaksi pada persamaan (2.188) dengan medan vektor Φ_μ dengan merubah transformasi paritas sebagai berikut (Giunti,2007):

$$\Phi_\mu \xrightarrow{P} \xi^{\Phi}_P \Phi^{\mu}, \tag{2.213}$$

transformasi dari Lagrangian interaksi persamaan (2.188) adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_I^{(\Phi)} &= -g\left(V^{\mu}_{ab}\Phi_\mu + V^{\mu}_{ba}\Phi^{\dagger}_{\mu}\right) \\ &\xrightarrow{P} -g\left(\xi^{a*}_P \xi^b_P V^{ab}_{\mu} \xi^{\Phi}_P \Phi_\mu + \xi^a_P \xi^{b*}_P V^{ba}_{\mu} \xi^{\Phi*}_P \Phi_{\mu\dagger}\right) \\ &= -g\left(\xi^{a*}_P \xi^b_P \xi^{\Phi}_P V^{ab}_{\mu} \Phi_\mu + \xi^a_P \xi^{b*}_P \xi^{\Phi*}_P V^{ba}_{\mu} \Phi_{\mu\dagger}\right). \end{aligned} \tag{2.214}$$

Bandingkan dengan persamaan (2.188), invariansi dalam paritas memperoleh (Giunti,2007)

$$\xi^{a*}_P \xi^b_P \xi^{\Phi}_P = 1. \tag{2.215}$$

Relasi ini memperbaiki paritas relatif dari ψ_a, ψ_b dan Ψ_μ akan lebih mudah memilih $\xi^{a*}_P = \xi^b_P = \xi^{\Phi}_P = 1$.Namun, karena $\mid \xi^{\Phi}_P \mid= 1$, jika a=b mempunyai $\xi^{\Phi}_P = 1$

yang merupakan intrinsik paritas medan fermion tidak ditentukan. Ini merupakan kasus Lagrangian interaksi elektromagnetik $L_I^{(\gamma)}$ dalam persamaan (2.284) dengan menyederhanakan medan elektromagnetik itu nyata. Invariansi $L_I^{(\gamma)}$ dalam ruang invers menyiratkan bahwa paritas intrinsik medan elektromagnetik adalah $\xi_P^A = 1$ (Giunti,2007).

$$A_\mu \xrightarrow{P} A_\mu. \tag{2.216}$$

Muatan-Arus interaksi lemah melanggar simetri paritas, karena struktur V-A dan tanda transformasi yang berbeda dalam vektor paritas dan arus aksial. Dengan mempertimbangkan bahwa medan vektor boson W_μ berubah sebagai (Giunti,2007)

$$W_\mu \xrightarrow{P} \xi_P^W W^\mu, \tag{2.217}$$

untuk muatan-arus V-A Lagrangian interaksi pada persamaan (2.192) mempunyai transformasi (Giunti,2007),

$$\begin{aligned} L_I^{(W)} &\xrightarrow{P} -\frac{g}{2\sqrt{2}}[\left(-\xi_P^{a*}\xi_P^b V_\mu^{ab} - \xi_P^{a*}\xi_P^b A_\mu^{ab}\right)\xi_P^W W^\mu \\ &+ \left(-\xi_P^a\xi_P^{b*} V_\mu^{ba} - \xi_P^a\xi_P^{b*} A_\mu^{ba}\right)\xi_P^{W*} W^{\mu\dagger}] \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[-\xi_P^{a*}\xi_P^b\xi_P^W \left(V_\mu^{ab} + A_\mu^{ab}\right) W^\mu - \xi_P^a\xi_P^{b*}\xi_P^{W*}\left(V_\mu^{ba} + A_\mu^{ba}\right) W^{\mu\dagger}\right]. \end{aligned} \tag{2.218}$$

Bandingkan dengan persamaan (2.192), tidak dapat terjadi dari paritas intrinsik $\xi_P^a, \xi_C^P, \xi_P^W$ yang akan membuat V-A muatan arus Lagrangian berinteraksi pada persamaan (2.192) tidak berubah dakam transformasi paritas. Jika medan ϕ_a, ϕ_b dan W_μ tidak ikut dalam interaksi lain yang invarian dalam ruang invers, paritas intrinsik tidak memiliki makna fisik, karena tidak diperbaiki oleh Lagrangian bebas, yang invarian dalam ruang invers angkasa tetapi tidak membuat hubungan antara paritas intrinsik dari medan yang berbeda. Dalam hal ini, paritas intrinsik medan ϕ_a, ϕ_b dan W_μ dapat tentukan secara langsung (misal $\xi_P^a = \xi_P^b = \xi_P^W = 1$) (Giunti,2007).

2.4.3 CP

Transformasi gabungan CP merupakan transformasi paritas yang diikuti oleh konjugasi muatan (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{CP} \psi^{CP}(x_P) = \xi_{CP}\gamma^0 C\bar{\psi}^T(x) = -\xi_{CP}C\psi^*(x), \tag{2.219}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{CP} \psi^{\bar{C}P}(x_P) = -\xi_{CP}^*\psi^T(x)C^\dagger\gamma^0, \tag{2.220}$$

dengan koefisien

$$\xi_{CP} = \xi_C\xi_P, \tag{2.221}$$

mewakili paritas CP intrinsik, karena $\mid \xi_C \mid^2 = 1$ dan $\xi_P = \pm 1$ atau $\pm i$, dimana ξ_C adalah fase (Giunti,2007)

$$\mid \xi_{CP} \mid^2 = 1, \tag{2.222}$$

yang biasanya disebut dengan fase CP. Mari melakukan 2 transformasi CP, meliputi (Giunti,2007)

$$\psi \xrightarrow{CP} -\xi_{CP}C\psi^* \xrightarrow{CP} - \mid \xi_{CP} \mid^2 \psi, \tag{2.223}$$

seperti pada persamaan (2.197), tanda medan fermion tidak memiliki arti fisik karena ia berubah melalui rotasi 2π. Maka sistem dikembalikan ke keadaan semula dengan dua transformasi CP berurut-urut, jika $\mid \xi_{CP} \mid^2 = 1$ (Giunti,2007).

Transformasi medan terkuantisasi $\psi(x)$ diberikan (Giunti,2007)

$$U_C\psi(x)U^\dagger_{CP} = \psi^{CP}(x) = \xi_{CP}\gamma^0 C\psi^*(x_P), \tag{2.224}$$

dengan

$$U_{CP} = U_C U_P. \tag{2.225}$$

Dari persamaan (2.175),(2.176),(2.204), dan (2.205) membuat operator fermion dan anti fermion (Giunti,2007) bertransformasi sebagai

$$\begin{aligned} U_{CP}a^{(h)\dagger}(p)U^\dagger_{CP} &= \eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi^*_C\xi^*_P b^{(-h)\dagger}(p_P) \\ &= \eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi^*_{CP} b^{(-h)\dagger}(p_P) \qquad (2.226) \\ U_{CP}b^{(h)\dagger}(p)U^\dagger_{CP} &= -\eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi_C\xi_P a^{(-h)\dagger}(p_P) \\ &= -\eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi_{CP} a^{(-h)\dagger}(p_P), \qquad (2.227) \end{aligned}$$

dimana $\eta^*(\overrightarrow{p},h)$ adalah faktor fase yang bergantung pada p dan h. Transformasi CP menukar partikel dan anti partikel dan membalikkan 3-momenta dan helisitas (Giunti,2007).

Dalam transformasi CP bilinear kovarian dalam persamaan (C.20)-(C.24) bertransformasi menjadi (Giunti,2007)

$$S_{ab} = \bar{\psi}_a\psi_b \xrightarrow{CP} (S_{ab})^{CP} = \xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}\bar{\psi}_b\psi_a = \xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}S_{ba}, \tag{2.228}$$

$$V^\mu_{ab} = \bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_b \xrightarrow{CP} (S^\mu_{ab})^{CP} = -\xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}\bar{\psi}_b\gamma_\mu\psi_a = -\xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}V^{ba}_\mu, \tag{2.229}$$

$$T^{\mu\nu}_{ab} = \bar{\psi}_a\sigma^{\mu\nu}\psi_b \xrightarrow{CP} (T^{\mu\nu}_{ab})^{CP} = \xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}\bar{\psi}_b\sigma_{\mu\nu}\psi_a = \xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}T^{ba}_{\mu\nu}, \tag{2.230}$$

$$A^\mu_{ab} = \bar{\psi}_a\gamma^\mu\gamma^5\psi_b \xrightarrow{CP} (A^\mu_{ab})^{CP} = -\xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}\bar{\psi}_b\gamma_\mu\gamma^5\psi_a = -\xi^{a*}_{CP}\xi^b_{CP}A^{ba}_\mu, \tag{2.231}$$

$$P_{ab} = \bar{\psi}_a \gamma^5 \psi_b \quad \xrightarrow{CP} \quad (S_{ab})^{CP} = -\xi^{a*}_{CP} \xi^{b}_{CP} \bar{\psi}_b \gamma^5 \psi_a = -\xi^{a*}_{CP} \xi^{b}_{CP} P_{ba}, \tag{2.232}$$

dimana telah menurunkan indeks Lorentz ketika komponen spasial mengubah tanda (Giunti,2007).

Seperti yang dibahas sebelumnya untuk paritas muatan intrinsik , paritas intrinsik, paritas CP intrinsik tidak memiliki makna fisik, karena Lagrangian Dirac bebas tidak tetap untuk nilai apapun dari paritas CP medan fermion. Nilai relatif dari paritas CP intrinsik dari partikel berbeda dalam konsekuansi interaksi CP yang memiliki makna fisik (Giunti,2007).

Contohnya mempertimbangkan muatan-arus V-A Lagrangian interaksi dalam persamaan (2.192), tidak berubah dalam transformasi CP karena arus vektor dalam persamaan (2.227) dan arus aksial dalam persamaan (2.229) mentransformasi dengan tanda sama. Jika vektor medan boson W_μ bertransformasi (Giunti,2007)

$$W_\mu \xrightarrow{CP} \xi^{W}_{CP} W^{\mu\dagger}, \tag{2.233}$$

maka mempunyai

$$\begin{aligned}
L_I^{(W)} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\left(V^\mu_{ab} - A^\mu_{ab} \right) W_\mu + \left(V^\mu_{ba} - A^\mu_{ba} \right) W^\dagger_\mu \right] \\
L_I^{(W)} &\xrightarrow{CP} -\frac{g}{2\sqrt{2}} [\left(-\xi^{a*}_{CP} \xi^{b}_{CP} V^{ba}_\mu + \xi^{a*}_{CP} \xi^{b}_{CP} A^{ba}_\mu \right) \xi^{W}_{CP} W^{\mu\dagger} \\
&+ \left(-\xi^{a}_{CP} \xi^{b*}_{CP} V^{ab}_\mu + \xi^{a}_{CP} \xi^{b*}_{CP} A^{ab}_\mu \right) \xi^{W*}_{CP} W^{\mu}] \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}} [-\xi^{a*}_{CP} \xi^{b}_{CP} \xi^{W}_{CP} \left(V^{ba}_\mu - A^{ba}_\mu \right) W^{\mu\dagger} - \xi^{a}_{CP} \xi^{b*}_{CP} \xi^{W*}_{CP} \left(V^{ab}_\mu - A^{ab}_\mu \right) W^{\mu}].
\end{aligned} \tag{2.234}$$

Bandingkan dengan persamaan (2.92),$L_I^{(W)}$ merupakan invarian dalam sebuah transformasi CP jika (Giunti,2007)

$$\xi_{CP}^{a*}\xi_{CP}^{b}\xi_{CP}^{W} = -1. \tag{2.235}$$

Hal ini relasi paritas CP dari ψ_a, ψ_b dan W_μ (misalnya:$\xi_{CP}^{W} = -1$, dan $\xi_{CP}^{a*} = \xi_{CP}^{b} = 1$.

2.4.4 Pembalikan Waktu (T)

Simetri pembalikan waktu merupakan simetri hukum fisika yang beroperasi dikedua arah waktu. Waktu yang berjalan dibagi menjadi dua yaitu waktu maju (kemasa depan) dengan tanda positif dan waktu mundur (kemasa lampau) dengan tanda negatif. Disini dapat dikatakan bahwa partikel yang bertransformasi pembalikan waktu merupakan partikel yang berjalan di masa lampau.

Transformasi dalam pembalikan waktu (Giunti,2007),

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) \xrightarrow{T} x_T^\mu = (-x^0, \vec{x}) = x_\mu, \tag{2.236}$$

medan spinor $\psi(x)$ dan $\bar{\psi}(x)$ berubah menjadi (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi^T(x_T) = \xi_T\gamma^0\gamma^5 C\bar{\psi}^T(x) = \xi_T\gamma^5 C\psi^*(x) \tag{2.237}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{T} \bar{\psi}^T(x_T) = \xi_T^*\psi^T(x)C^\dagger\gamma^5\gamma^0, \tag{2.238}$$

nilai yang mungkin dari paritas pembalikan waktu intrinsik ξ_T dibatasi fakta bahwa dua transformasi paritas berurut-urut mengembalikan sistem ke keadaan semula (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \xi_T \gamma^5 C \psi^*(x) \xrightarrow{T} - \mid \xi_T \mid^2 \psi(x). \tag{2.239}$$

Karena tanda medan fermion tidak memiliki arti fisik, sistem dikembalikan ke keadaan semula dengan dua pembalikan waktu, jika ξ_T merupakan fase (Giunti,2007)

$$\mid \xi_T \mid^2 = 1. \tag{2.240}$$

Dari persamaan (2.75) dan (2.235), ekspansi Fourier dari transformasi pedan pembalikan waktu (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \psi^T(x) &= \xi_T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [a^{(h)\dagger}(p_P)\gamma^0\gamma^5 v^{(h)}(p_P)e^{-ip\cdot x} \\ &+ b^{(h)}(p_P)\gamma^0\gamma^5 u^{(h)}(p_P)e^{ip\cdot x}], \end{aligned} \tag{2.241}$$

dimana telah menggunakan relasi dalam persamaan (2.171). Lalu dari persamaan (2.126)-(2.132) memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^5 v^{(h)}(p_P) &= \eta(\overrightarrow{p}, h)u^{(h)}(p)(-\zeta(h)) \\ &= -\zeta(h)\eta^*(\overrightarrow{p}, h)u^{(h)}(p) \end{aligned} \tag{2.242}$$

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^5 u^{(h)}(p_P) &= -\eta(\overrightarrow{p}, h)v^{(h)}(p)\zeta^*(h) \\ &= -\zeta^*(h)\eta^*(\overrightarrow{p}, h)v^{(h)}(p), \end{aligned} \tag{2.243}$$

dimana $\zeta(h)$ dan $\eta(\overrightarrow{p}, h)$ merupakan fase, memperoleh (Giunti,2007)

$$\psi^T(x) = \xi_T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [a^{(h)\dagger}(p_P)\gamma^0\gamma^5 v^{(h)}(p_P)e^{-ip\cdot x}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad b^{(h)}(p_P)\gamma^0\gamma^5 u^{(h)}(p_P)e^{ip\cdot x}] \\
&= \quad \xi_T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_{h=\pm 1}[-\zeta(h)\eta(\overrightarrow{p},h)a^{(h)\dagger}(p_P)u^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x} \\
&- \quad \zeta^*(h)\eta^*(\overrightarrow{p},h)b^{(h)}(p_P)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}], \qquad (2.244)
\end{aligned}$$

perhatikan transformasi medan terkuantisasi $\psi(x)$. Jika mengimplementasikan dengan operator *unitary* (Giunti,2007)

$$U_T\psi(x)U_T^\dagger = \psi^T(x), \qquad (2.245)$$

dari persamaan (2.75) dan (2.242)

$$U_T a^{(h)\dagger}(p)U_T^\dagger = -\zeta^*(h)\eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi_T^* a^{(h)}(p_P) \qquad (2.246)$$

$$U_T b^{(h)\dagger}(p)U_T^\dagger = -\zeta^*(h)\eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi_T b^{(h)}(p_P). \qquad (2.247)$$

Transformasi dari operator kreasi menjadi operator anihikasi tidak masuk akal. Misalnya, invarian vakum dalam pembalikan waktu (Giunti,2007)

$$U_T \mid 0 >=\mid 0 >, \qquad (2.248)$$

maka

$$\begin{aligned}
U_T \mid f(p,h) > \quad &= \quad U_T a^{(h)\dagger}(p)U_T^\dagger U_T \mid 0 > \\
&= \quad \xi^*(h)\eta^*(\overrightarrow{p},h)\xi_T^* a^{(h)}(p_P) \mid 0 = 0, \qquad (2.249)
\end{aligned}$$

ini merupakan hasil yang mustahil, karena U_T tidak dapat anihilasi (memusnakan) keadaan satu fermion $\mid f(p,h) >$. Solusinya adalah menerapkan pembalikan waktu dengan operator anti *unitary* sedemikian rupa (Giunti,2007)

$$U_T \psi(x) U_T^\dagger = \psi^{T*}(x). \tag{2.250}$$

Dari persamaan (2.242) mempunyai

$$\begin{aligned} \psi^{T*}(x) &= \xi_T^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [-\zeta(h)\eta^*(\overrightarrow{p}, h) a^{(h)}(p_P) u^{(h)}(p) e^{ip\cdot x} \\ &- \zeta(h)\eta(\overrightarrow{p}, h) b^{(h)\dagger}(p_P) v^{(h)*}(p) e^{-ip\cdot x}], \end{aligned} \tag{2.251}$$

dan dari persamaan (2.75) dan anti linier dari U_T, mempunyai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} U_T \psi(x) U_T^\dagger &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [U_T a^{(h)}(p) U_T^\dagger u^{(h)}(p) e^{ip\cdot x} \\ &+ U_T b^{(h)\dagger}(p) U_T^\dagger v^{(h)*}(p) e^{-ip\cdot x}], \end{aligned} \tag{2.252}$$

bandingkan persamaan (2.249) dan (2.250), memperoleh transformasi dari operator kreasi (Giunti,2007)

$$U_T a^{(h\dagger)}(p) U_T^\dagger = -\zeta(h)\eta(\overrightarrow{p}, h) \xi_T a^{(h)\dagger}(p_P) \tag{2.253}$$

$$U_T b^{(h)\dagger}(p) U_T^\dagger = -\zeta(h)\eta(\overrightarrow{p}, h) \xi_T^* b^{(h)\dagger}(p_P), \tag{2.254}$$

ini merupakan transformasi yang sangat bagus. Pembalikan waktu mengubah partikel atau anti partikel kedalam dirinya sendiri, membalikkan 3-momentum dan menghilangkan keutuhan helisitas, yang diharapkan pada fisika *ground*(dalam pembalikan waktu 3-momenta dan perubahan tanda muatan momentum dan produk skalar dari spin dan 3-momenta tetap invarian) (Giunti,2007).

Dalam sebuah transformasi pembalikan waktu, bilinear kovarian dalam persamaan (C.20)-(C.24) berubah menjadi (Giunti,2007)

$$S_{ab} = \bar{\psi}_a \psi_b \xrightarrow{T} (S_{ab})^T = -\xi_T^{a*} \xi_T^b \bar{\psi}_b \psi_a = -\xi_T^{a*} \xi_T^b S_{ba}, \tag{2.255}$$

$$V_{ab}^{\mu} = \bar{\psi}_a \gamma^{\mu} \psi_b \xrightarrow{T} (V_{ab}^{\mu})^T = -\xi_T^{a*} \xi_T^b \bar{\psi}_b \gamma_{\mu} \psi_a = -\xi_T^{a*} \xi_T^b V_{\mu}^{ba}, \tag{2.256}$$

$$T_{ab}^{\mu\nu} = \bar{\psi}_a \sigma^{\mu\nu} \psi_b \xrightarrow{T} (T_{ab}^{\mu\nu})^T = \xi_T^{a*} \xi_T^b \bar{\psi}_b \sigma_{\mu\nu} \psi_a = \xi_T^{a*} \xi_T^b T_{\mu\nu}^{ba}, \tag{2.257}$$

$$A_{ab}^{\mu} = \bar{\psi}_a \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi_b \xrightarrow{T} (A_{ab}^{\mu})^T = -\xi_T^{a*} \xi_T^b \bar{\psi}_b \gamma_{\mu} \gamma^5 \psi_a = -\xi_T^{a*} \xi_T^b A_{\mu}^{ba}, \tag{2.258}$$

$$P_{ab} = \bar{\psi}_a \gamma^5 \psi_b \xrightarrow{T} (P_{ab})^T = -\xi_T^{a*} \xi_T^b \bar{\psi}_b \gamma^5 \psi_a = \xi_T^{a*} \xi_T^b P_{ba}, \tag{2.259}$$

dimana indeks Lorentz yang lebih rendah menunjukkan perubahan tanda komponen spasial (Giunti,2007).

Paritas pembalikan waktu dari suatu partikel tidak memiliki makna fisis, karena persamaan Dirac bebas merupakan invarian dalam pembalikan waktu, yang berarti bahwa paritas pembalikan waktu adalah fase tidak fisis yang langsung untuk suatu partikel yang tidak berinteraksi, atau partikel yang berinteraksi hanya melalui pembalikan waktu yang melanggar interaksi. Disisi lain, interaksi konservasi pembalikan waktu membatasi nilai-nilai relatif dari paritas pembalikan waktu dari partikel berpartisipasi (Giunti,2007).

Misalnya, Lagrangian interaksi muatan-arus V-A dalam persamaan (2.192), tidak berubah dalam pembalikan waktu, karena vektor arus dalam persamaan (2.254) dan arus aksial dalam persamaan (2.256) mentransformasikan dengan tanda yang sama. Jika vektor medan boson W_{μ} berubah sebagai (Giunti,2007)

$$W_{\mu} \xrightarrow{T} -\xi_T^W W^{\mu\dagger}, \tag{2.260}$$

mempunyai

$$
\begin{aligned}
L_I^{(W)} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}[(V_{ab}^{\mu} - A_{ab}^{\mu})W_{\mu} + (V_{ba}^{\mu} - A_{ba}^{\mu})W_{\mu}^{\dagger}] \\
&\xrightarrow{T} -\frac{g}{2\sqrt{2}}[(-\xi_T^{a*}\xi_T^{b}V_{\mu}^{ba} + \xi_T^{a*}\xi_T^{b}A_{\mu}^{ba})(-\xi_T^{W}W^{\mu\dagger}) \\
&+ (-\xi_T^{a}\xi_T^{b*}V_{\mu}^{ab} + \xi_T^{a}\xi_T^{b*}A_{\mu}^{ab})(-\xi_T^{W*}W^{\mu})] \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}[(\xi_T^{a*}\xi_T^{b}\xi_T^{W}(V_{\mu}^{ba} - A_{\mu}^{ba})W^{\mu\dagger} + \xi_T^{a}\xi_T^{b*}\xi_T^{W*}(V_{\mu}^{ab} - A_{\mu}^{ab})W^{\mu}],
\end{aligned}
\tag{2.261}
$$

bandingkan dengan persamaan (2.192), bahwa $L_I^{(W)}$ invarian dalam pembalikan waktu jika (Giunti,2007)

$$\xi_T^{a*}\xi_T^{b}\xi_T^{W} = 1. \tag{2.262}$$

Relasi ini membatasi paritas pembalikan waktu relatif dari ψ_a, ψ_b, dan W_{μ}. Dapat memilih $\xi_T^a = \xi_T^b = \xi_T^W = 1$ (Giunti,2007).

2.4.5 CPT

Transformasi gabungan CPT merupakan pembalikan waktu yang diikuti dengan CP (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{CPT} \psi^{CPT}(-x) = \xi_{CPT}\gamma^5\psi(x) \tag{2.263}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{CPT} \psi^{\bar{C}PT}(-x) = -\xi_{CPT}^{*}\bar{\psi}(x)\gamma^5, \tag{2.264}$$

dengan fase

$$\xi_{CPT} = \xi_T\xi_{CP}^{*}, \tag{2.265}$$

mewakili paritas CPT intrinsik. Dengan melakukan dua transformasi CPT didapatkan (Giunti,2007)

$$\psi(x) \xrightarrow{CPT} \xi_{CPT}\gamma^5\psi(x) \xrightarrow{CPT} \xi^2_{CPT}\psi(x), \tag{2.266}$$

karena tanda medan fermion tidak memiliki makna fisis, sistem dikembalikan kekeadaan semula dengan dua transformasi CPT berurut-urut jika (Giunti,2007)

$$\xi_{CPT} = \pm 1, \pm i. \tag{2.267}$$

Meskipun paritas pembalikan waktu ξ_T dan paritas CP ξ_{CP} merupakan fase acak, nilainya dihubungkan dengan persamaan (2.265) (Giunti,2007)

$$\xi_T = \pm\xi_{CP}, \pm i\xi_{CP}, \tag{2.268}$$

dari persamaan (2.75) dan (2.261) ekspansi Fourier dari medan CPT berubah atau transformasi medan $\psi^{CPT}(x) = \xi_{CPT}\gamma^5\psi(-x)$ diperoleh (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}\psi^{CPT}(x) &= \xi_{CPT}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_{h=\pm1}[ha^{(-h)}(p)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x} \\ &- hb^{(-h)\dagger}(p)u^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x}],\end{aligned} \tag{2.269}$$

dimana memperoleh

$$\gamma^5 u^{(h)}(p) = -hv^{(-h)}(p), \qquad \gamma^5 v^{(h)}(p) = hu^{(-h)}(p), \tag{2.270}$$

karena U_T anti unitary dan U_C, U_P unitary, operator (Giunti,2007)

$$U_{CPT} = U_C U_P U_T, \tag{2.271}$$

yang mengubah medan terkuantisasi $\psi(x)$ adalah unitary (Giunti,2007)

$$U_{CPT}\psi(x)U_{CPT}^{\dagger} = \psi^{CPT*}(x). \tag{2.272}$$

Dari ekspansi Fourier dari persamaan (2.75) dari medan Dirac yang terkuantisasi dan persamaan (2.268), transformasi CPT dari operator kreasi adalah (Giunti,2007)

$$U_{CPT}a^{(h)\dagger}(p)U_{CPT}^{\dagger} = -h\xi_{CPT}b^{(-h)\dagger}(p) \tag{2.273}$$

$$U_{CPT}b^{(h)\dagger}(p)U_{CPT}^{\dagger} = h\xi_{CPT}b^{(-h)\dagger}(p). \tag{2.274}$$

Relasi ini juga dapat diperoleh dari persamaan (2.224),(2.225),(2.252),(2.253), dan (2.263). Menunjukkan bahwa transformasi CPT mengubah partikel menjadi anti partikel dengan monentum yang sama dan helisitas yang berlawanan. C mengubah partikel menjadi anti partikel dan PT membalikkan x dan t, mempertahankan 3 momen invarian tetapi mengubah tanda momentum sudut (Giunti,2007).

Dalam transformasi CPT, bilinear kovarian dalam persaman (C.20)-(C.24) mentransformasi sebagai (Giunti,2007)

$$S_{ab} = \bar{\psi}_a\psi_b \quad \overset{CPT}{\longrightarrow} \quad (S_{ab})^{CPT} = -\xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}\bar{\psi}_a\psi_b = -\xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}S_{ab}, \tag{2.275}$$

$$V_{ab}^{\mu} = \bar{\psi}_a\gamma^{\mu}\psi_b \quad \overset{CPT}{\longrightarrow} \quad (V_{ab}^{\mu})^{CPT} = \xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}\bar{\psi}_a\gamma_{\mu}\psi_b = \xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}V_{ab}^{\mu}, \tag{2.276}$$

$$T_{ab}^{\mu\nu} = \bar{\psi}_a\sigma^{\mu\nu}\psi_b \quad \overset{CPT}{\longrightarrow} \quad (T_{ab}^{\mu\nu})^{CPT} = -\xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}\bar{\psi}_a\sigma_{\mu\nu}\psi_b = -\xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}T_{ab}^{\mu\nu}, \tag{2.277}$$

$$A_{ab}^{\mu} = \bar{\psi}_a\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi_b \quad \overset{CPT}{\longrightarrow} \quad (A_{ab}^{\mu})^{CPT} = \xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}\bar{\psi}_a\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi_b = \xi_{CPT}^{a*}\xi_{CPT}^{b}A_{ab}^{\mu}, \tag{2.278}$$

$$P_{ab} = \bar{\psi}_a \gamma^5 \psi_b \quad \xrightarrow{CPT} \quad (P_{ab})^{CPT} = -\xi^{a*}_{CPT} \xi^{b}_{CPT} \bar{\psi}_a \gamma^5 \psi_b = -\xi^{a*}_{CPT} \xi^{b}_{CPT} P_{ab}, \tag{2.279}$$

karena semua bilinear kovarian dibiarkan invarian oleh transformasi CPT, terpisah untuk fase yang mungkin tidak relevan (yang sama untuk vektor dan arus aksial), Lagrangian interaksi merupakan invarian dalam CPT terdapat pada teorema CPT yang dapat dikatakan bahwa CPT merupakan simetri dari setiap medan relativistik lokal (Giunti,2007).

Teorema CPT adalah salah satu prinsip SM dan berlaku untuk teori medan kuantum relativistik lokal. Hal ini menyatakan bahwa persamaan gerak merupakan invarian di bawah aplikasi gabungan dari transformasi simetri konjugasi muatan (C), paritas (P), dan pembalikan waktu (T). Dalam kerangka Lorentz, pembalikan paritas berhubungan dengan mengubah koordinat $x = (x, t)$ menjadi $\bar{x} = (x, t)$, sementara pembalikan waktu mengubah x menjadi $\bar{x} = (x, t)$. Konjugasi muatan memiliki efek membalikkan muatan yang dimiliki suatu bidang sehubungan dengan teori simetri (Borissow,2003).

2.5 Integrasi Al-Qur'an

Neutrino tercipta hasil dari peluruhan radioaktif tertentu, atau tercipta karena adanya reaksi nuklir seperti yang terjadi pada reaktor nuklir, pada matahari, dan pada sinar kosmik yang membentur sekelompok atom. Karena, matahari merupakan salah satu penghasil dari neutrino. Neutrino diproduksi saat terjadi reaksi antar atom atau antar partikel Hidrogen. Matahari disebutkan dalam Al-Quran sebanyak 20 kali, salah satunya dalam surat Yunus (10:5):

هُوَ الَّذِيْ جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاۤءً وَّالْقَمَرَ نُوْرًا وَّقَدَّرَهٗ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوْا عَدَدَ السِّنِيْنَ

وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللّٰهُ ذٰلِكَ اِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْاٰيٰتِ لِقَوْمٍ يَّعْلَمُوْنَ

"Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui." (QS Yunus 10:5)

Pada ayat tersebut matahari dibedakan dengan bulan. Matahari diberikan predikat dhiyaaun, sedangkan bulan diberikan predikat nur. Perbedaan ini beralasan karena sifat fisis yang dipancarkan oleh keduanya. Bulan juga hanya memberikan spektrum gelombang elektromagnetik pada jangkauan cahaya tampak, sedangkan matahari memiliki pancaran yang lebih kompleks daripada bulan (Manzu, 2009).

Partikel adalah suatu objek terlokalisasi kecil yang dapat memiliki beberapa sifat fisik atau kimia seperti volume atau massa. Partikel memiliki beberapa jenis dan nama yang berbeda. Pengetahuan Allah swt juga mencakup benda-benda kecil lainnya seperti partikel elementer. Suatu benda yang kecil terdapat pada salah satu Surat Saba (34:3):

وَقَالَ الَّذِيْنَ كَفَرُوْا لَا تَأْتِيْنَا السَّاعَةُ قُلْ بَلٰى وَرَبِّيْ لَتَأْتِيَنَّكُمْ عٰلِمِ الْغَيْبِ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ فِى السَّمٰوٰتِ وَلَا فِى الْاَرْضِ وَلَآ اَصْغَرُ مِنْ ذٰلِكَ وَلَآ اَكْبَرُ اِلَّا فِيْ كِتٰبٍ مُّبِيْنٍ

Dan orang-orang yang kafir berkata: "Hari berbangkit itu tidak akan datang kepada kami". Katakanlah: "Pasti datang, demi Tuhanku Yang mengetahui yang gaib, sesungguhnya kiamat itu pasti akan datang kepadamu. Tidak ada tersembunyi daripada-Nya seberat zarrah pun yang ada di langit dan yang ada di bumi dan tidak ada (pula) yang lebih kecil dari itu dan yang lebih besar, melainkan tersebut dalam Kitab yang nyata (Lohmahfuz)", (QS Saba 34:3)

Mitsqaala berasal dari kata tsaqaalun yang berarti menjadikan ”berat”. Selanjutnya, mitsqaala dzarratun yang artinya seberat dzarrah. Dalam konteks ayat tersebut Allah swt menjelaskan bahwa partkikel kecil (dzarrah) itu memiliki berat atau menunjukkan massa. Dzarrah bisa berati partikel elementer yang mempunyai berat. Berkaitan dengan ayat tersebut, beberapa eksperimen membuktikan bahwa massa partikel elementer bermacam-macam beratnya tersebut dan bergantung dari jenis partikelnya, contohnya, massa elektron adalah $9,1 \times 10^{-31}$ kg dan massa proton adalah $1,672 \times 10^{-27}$ kg (Manzu, 2009).

Makna ”zarrah” sebagaimana juga yang dijelaskan dalam (QS Saba 34:3) secara lazimnya, zarrah adalah ”partikel debu yang kecil”. Dalam kamus Fisika menyatakan bahwa ”kata zarrah adalah istilah untuk materi yang halus, berupa partikel”. Sedangkan dalam fisika nuklir, zarrah digunakan untuk menunjukkan pengertian atom, misalnya struktur zarrah yang diakibatkan oleh gerak spin partikel elektron. Oleh karena itu, zarrah ditafsirkan sebagai nama lain dari partikel elementer.

Terlepas dari pembahasan zarrah, di semesta ini tercipta segala sesuatu berpasang-pasangan. Ada suami-istri, jantan-betina atau bersifat keadaan siang-malam, gelap-terang, hitam-putih, benci-cinta. Begitu pula untuk baik-buruk atau positif-negatif. Akan tetapi apakah pasangan-pasangan tersebut sudah mewakili semuanya, sebagaimana yang disebutkan dalam ayat Al-Quran:

سُبْحٰنَ الَّذِيْ خَلَقَ الْاَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْاَرْضُ وَمِنْ اَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُوْنَ

”Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui.” (QS Yaa Siin 36:36)

Allah menerangkan bahwa Allah menciptakan segala macam kejadian dalam bentuk yang berlainan dan dengan sifat yang bertentangan. Yaitu setiap sesuatu itu merupakan lawan atau pasangan bagi yang lain. Dijadikan-Nya kebahagiaan dan kesengsaraan, petunjuk dan kesesatan, malam dan siang, langit dan bumi, hitam dan putih, lautan dan daratan, gelap dan terang, hidup dan mati, surga dan neraka, dan sebagainya. Semuanya itu dimaksudkan agar manusia ingat dan sadar serta mengambil pelajaran dari semuanya itu, sehingga mengetahui bahwa Allah swt-lah Tuhan yang Maha Esa yang berhak disembah dan tidak ada sekutu bagi-Nya. Dia-lah yang Maha kuasa menciptakan segala sesuatu berpasang-pasang, bermacam-macam jenis dan bentuk, sedangkan selain Allah adalah makhluk-Nya yang tidak berdaya yang semestinya mereka menyadari itu (Bustami, 1991).

Salah satu pasangan yang telah disebutkan ayat diatas mungkin saja adalah pasangan materi dan anti materi jika dilihat dari sudut pandang fisika partikel. Anti materi merupakan lawan dari materi, yang mana mempunyai kesamaan massa dan spin, namun memiliki muatan yang berlawanan tanda dengan keadaan materinya. Jika materi bertemu dengan anti materinya, keduanya akan saling memusnahkan (*pair annihilation*) dan berubah menjadi gelombang radiasi (Purwanto,2008).

Setiap benda memiliki pasangannya termasuk partikel dan anti partikel. Partikel-partikel yang bertumbukan dengan kecepatan tertentu akan membentuk sebuah partikel baru. Materi dan anti materi dapat muncul dari gelombang radiasi, yang sering dikenal sebagai (*pair production*). Mengenai hal ini Allah terus mencipta dan mematikan materi secara berulang-ulang, penjelasan Al-Quran yang lain Allah juga berfirman:

قُلْ هَلْ مِنْ شُرَكَائِكُمْ مَّنْ يَّبْدَؤُا الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيْدُه قُلِ اللّٰهُ يَبْدَؤُا الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيْدُهُ

فَاَنّٰى تُؤْفَكُوْنَ

"Katakanlah: "Apakah di antara sekutu-sekutumu ada yang dapat memulai penciptaan makhluk, kemudian mengulanginya (menghidupkannya) kembali?" katakanlah: "Allah-lah yang memulai penciptaan makhluk, kemudian mengulanginya (menghidupkannya) kembali; maka bagaimanakah kamu dipalingkan (kepada menyembah yang selain Allah)?"." (QS Yunus 10:34)

Abu Ja'far berkata: Allah maha tinggi telah berfirman kepada Nabi Muhammad saw, "Katakanlah wahai Muhammad apakah diantara sekutu-sekutumu, yakni dari sembahan dan berhala-berhala ada yang dapat memulai penciptaan makhluk, kemudian mengulanginya (menghidupkannya) kembali? Artinya, siapakah yang memulai penciptaan dari sesuatu yang tidak ada?" Dia (Allah) memulai penciptaan mahkluknya, kemudian mengembalikannya (kepada kematian), lalu mengembalikannya seperti bentuk sebelum ia dimatikan. Sesungguhnya mereka tidak sanggup untuk mengakui hal itu. Dalam hal itu terdapat alasan yang kuat dan dalil yang jelas, bahwa mereka berdusta dan beromong-kosong dalam pengakuan mereka bahwa (sembahan-sembahan) itu adalah Tuhan dan sekutu Allah dalam beribadah. Jadi, kepada waktu itu katakanlah wahai Muhammad, "Allah memulai mencipta". Menjadikannya ada dari ketiadaan dan menciptakannya dari sumber yang tidak ada, kemudian melenyapkannya (mematikan) apabila Dia menghendaki. Kemudian untuk kalimat "mengulanginya (menghidupkannya) kembali" jika Dia menginginkan sebagaimana bentuknya sebelum kematian. Sedangkan 'maka bagaimanakah kamu dipalingkan (kepada menyembah selain Allah)'? Dengan cara bagaimana kalian dipalingkan dari tujuan jalan (kebenaran) dan jalan petunjuk? (Muhammad, 2004).

Neutrino pada awalnya dianggap tidak memiliki massa, tapi setelah beberapa penelitian neutrino dapat berosilasi yang bisanya di namakan dengan osilasi neutrino. Dengan adanya osilasi neutrino maka neutrino dianggap memiliki massa tapi sangat kecil. Adapun ayat yang menjelaskan mengenai osilasi pada Surat Ar-Rahman (55:7-9):

وَالسَّمَاءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ الْمِيْزَانَ (٧) اَلَّا تَطْغَوْا فِى الْمِيْزَانِ(٨)وَاَقِيْمُوا الْوَزْنَ بِالْقِسْطِ
وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيْزَانَ(٩)

"Dan Allah telah meninggikan langit dan Dia meletakkan neraca (keadilan). Supaya kamu jangan melampaui batas tentang neraca itu. Dan tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi neraca itu." (QS Ar-Rahman 55:7-9)

Buya Hamka menafsirkan ayat 7 dari surat Ar-Rahman menerangkan bahwa seluruh benda langit yaitu jutaan bintang-bintang semua diletakkan dalam perimbangan dan perimbangan, manusia dituntut untuk berusaha meneladani penciptaan alam oleh Tuhan. Dengan adanya perimbangan dan perimbangan, Hamka mengatakan bahwa kita manusia mesti menjalankan keteraturan dan meletakkan segala sesuatu pada tempatnya. Kemudian terkait ayat 8, Buya Hamka mengatakan bahwa larangan agar tidak merusak itu sama seperti ilmu arsitektur dan teknik (ilmu membangun) yang mengharuskan adanya teknik, estetika, dan ukuran. Contohnya dengan bangunan-bangunan yang megah dan kokoh seperti Paramida Mesir dan bangunan dunia lain yang memiliki usia ratusan bahkan ribuan tahun. Terkait ayat 9, menegaskan embali dua ayat sebelumnya, yakni agar manusia dapat menumbuhkan kesadaran ketika melihat alam sekelilingnya (Hamka,1965).

Kata *mizan*, menurut M. Quraish Shihab dapat berarti alat menimbang, keadilan, maupun keseimbangan. Quraish mengutip pendapat Ibnu 'Asyur yang lebih memilih arti keadilan. Menurut Quraish, Allah menyandingkan kata *al-samaa* (langit) dan *miizaan* (keadilan) mengisyaratkan betapa pentingnya keadilan dengan menisbatkannya pada seluruh alam raya. yang juga sebagai alam kebenaran dan keutamaan. Artinya bahwa keadilan itu turun dari langit ke bumi atas perintah Allah swt (Shihab,2009).

Seperti penafsiran M. Quraish Shihab di paragraf atas, Tafsir Kementrian Agama RI juga menerangkan bahwa surat Ar-Rahman ayat 7-9 mengisyaratkan bahwa Allah swt menciptakan langit tempat diturunkannya perintah dan larangan-Nya kepada hamba-hamba-Nya melalui perantara malaikat kepada para nabi pilihan. Hal ini agar manusia tidak melampaui batas-batas keadilan. Demi kelancaran menjalankan keseimbangan neraca yang telah ditetapkan bagi semua makhluk-Nya (Hanafi,2015).

BAB III
MASSA NEUTRINO

Massa neutrino pada awal ditemukannya sama dengan nol, atau bisa disebut neutrino tak bermassa. Neutrino dikatakan tak bermassa karena belum ada bukti yang menunjukkan neutrino memiliki massa. Feynman, Gell-Mann, Marshak, dan Sudarshan berhasil membangun teori V-A dengan kehadiran neutrino yang tak bermassa. Transformasi γ^5 juga invariant terhadap medan fermion tak bermassa yang salah satunya ialah neutrino.

Pengukuran massa neutrino secara umum melibatkan eksperimen peluruhan partikel yang meluruh menjadi suatu partikel bermuatan dan neutrino. Neutrino dikatakan tak bermassa karena memiliki satu helisitas saja dan belum pernah ada yang membuktikan pada eksperimen sebelumnya. Untuk menemukan massa neutrino yang sangat kecil dibutuhkan pendekatan eksperimen yang paling sensitif dengan cara membuktikan adanya osilasi neutrino.

Secara umum massa untuk fermion dapat dibagi menjadi 2, massa Dirac yang diperoleh untuk semua fermion dan massa Majorana untuk fermion netral. Standart Model (SM) neutrino merupakan bagian dari left-handed dan telah dinyatakan oleh Weyl sebuah spinor left-handed ν_L. Untuk memperoleh massa Dirac, ν_L merupakan tambahan dari right-handed SU(2) siglet Weyl spinor N_R yang bukan bagian dari SM (Borissow,2003),

3.1 Massa Neutrino Dirac

Dalam SM minimum yang diperluas dengan 3 medan neutrino tangan kanan, Lagrangian SM Higgs-lepton Yukawa dalam persamaan (D.117) diperpanjang dengan menambahkan istilah lepton dengan struktur yang sama dengan istilah kedua disisi kanan persamaan (D.150) yang menghasilkan massa quark *up-tipe*

(Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
L_{H,L} &= -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{L_{\alpha L}}\Phi l'_{\beta R} - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{\nu}_{\alpha\beta}\overline{L_{\alpha L}}\,\widetilde{\Phi}\,\nu'_{\beta R} + H.c. \\
&= -\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\frac{y^{l}_{\alpha}v}{\sqrt{2}}\overline{l_{\alpha L}}l_{\alpha R} - \sum_{k=1}^{3}\frac{y^{\nu}_{\alpha}v}{\sqrt{2}}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR} \\
&\quad -\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\frac{y^{l}_{\alpha}}{\sqrt{2}}\overline{l_{\alpha L}}l_{\alpha R}H - \sum_{k=1}^{3}\frac{y^{\nu}_{\alpha}}{\sqrt{2}}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR}H.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Oleh karena itu massa neutrino diperoleh (Giunti,2007)

$$m_k = \frac{y^{\nu}_{k}v}{\sqrt{2}}. \tag{3.2}$$

Massa neutrino diatas diperoleh dengan mekanisme yang sebanding dengan Higgs VEV v sebagai massa dari lepton dan quark yang bermuatan. Namun, telah diketahui bahwa massa neutrino jauh lebih kecil dari massa lepton dan massa quark bermuatan. Tetapi dalam mekanisme ini tidak ada penjelasan mengenai nilai yang sangat kecil itu dan tidak diketahui pula nilai eigen y^{ν}_{k} dari matrik Yukawa Higgs-neutrino (Giunti,2007).

Dari fakta yang ada mekanisme SM Higgs telah menimbulkan sebuah pertanyaan mengenai nilai kopling Yukawa Higgs untuk semua partikel. Oleh karena itu, asal mula nilai dari massa quark dan lepton adalah misteri dalam kerangka SM. Dan dari sudut pandang lain, nilai massa quark dan lepton akan menjadi acuan bahwasannya harus memahami fisika diluar SM juga atau yang biasa disebut teori baru.

Mixing dari 3 neutrino Dirac yang identik dengan mixing quark SM. Dari persamaan (D.123) dan arus leptonik yang bermuata lemah dalam persamaan (D.74) dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$j^{\rho}_{W,L} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\nu} \overline{\nu_{\alpha L}} \gamma^{\rho} l_{\alpha L}. \tag{3.3}$$

Pada saat menurunkan flavor medan neutrino harus diperhatikan, karena sangat bermanfaat untuk perhitungan eksperimental yang mana efek dari massa neutrino diabaikan dalam batas SM. Disisi lain, jika massa neutrino diperhitungkan maka flavor medan neutrino tidak memiliki massa yang pasti dan tidak independen, maka perlu ditambahkan pasangan untuk massa. Akan lebih aman jika menurunkan dengan medan neutrino masif independent (Giunti,2007).

3.1.1 Bilangan Lepton

Definisi dari flavor medan neutrino tangan kiri dapat digunakan untuk mendefinisikan flavor bilangan lepton. Flavor bilangan lepton dilestarikan dalam interaksi lemah, tetapi secara umumnya dilanggar oleh bagian neutrino dari Lagrangian Higgs-lepton Yukawa yang dapat ditulis sebagai (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
L_{H,L} &= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\left(\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y^l_{\alpha}\overline{l_{\alpha L}} l_{\alpha R} + \sum_{k=1}^{3} y^{\nu}_{k}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR}\right) + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)[\overline{l_{\alpha L}} Y^l l_{\alpha R} + y^{\nu}\overline{\nu_L}\nu_R] + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)[\overline{l_{\alpha L}} Y^l l_{\alpha R} + \overline{\nu_L} U Y^{\nu}\nu_R] + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\left(\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l_{\alpha L}} y^l_{\alpha} l_{\alpha R} + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\sum_{k=1}^{3} \overline{\nu_{\alpha L}} U_{\alpha k} y^{\nu}_{k}\nu_{kR}\right) + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\left(\overline{l_{\alpha L}} y^l_{\alpha} l_{\alpha R} + \overline{\nu_{\alpha L}}\sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} y^{\nu}_{k}\nu_{kR}\right) + H.c.. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Maka, arus yang bermuatan lemah tidak berubah dalam transformasi gauge global $U(1)$ (Giunti,2007)

$$l_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi\alpha} l_{\alpha L}, \quad l_{\alpha R} \longrightarrow e^{i\varphi\alpha} l_{\alpha R}, \quad \nu_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi\alpha} \nu_{\alpha L}, \tag{3.5}$$

dengan fase yang berbeda untuk setiap flavor. Tidak memungkinkan untuk menentukan transformasi dari medan neutrino tangan kanan yang secara simultan invarian pada bagian neutrino dari Lagrangian Higgs-lepton Yukawa dipersamaan (3.18) dan bagian kinetik dari Lagrangian neutrino adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L^{(\nu)}_{kinetik} &= \sum_{k=1}^{3} \overline{\nu_k} i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \nu_k \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\overline{\nu_{kL}} i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \nu_{kL} + \overline{\nu_{kR}} i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \nu_{kR} \right) \\ &= \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{\alpha L}} i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \nu_{\alpha L} + \sum_{k=1}^{3} \overline{\nu_{kR}} i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \nu_{kR}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Cara untuk menghilangkan neutrino dari Lagrangian Higgs-lepton Yukawa dipersamaan (3.18) yang invarian terhadap transformasi gauge global dengan membiarkan adanya kombinasi $\sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} y_k^{\nu} \nu_{kL}$ yang bertransformasi sebagai $e^{i\varphi\alpha} \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} y_k^{\nu} \nu_{kL}$. Tetapi secara umum, transformasi ini tidak menghilangkan bagian kinetik invarian dipersamaan (C.187) dari Lagrangian neutrino, karena $\sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} y_k^{\nu} \nu_{kL}$ bukan kombinasi unitary dari medan neutrino tangan kanan (Giunti,2007).

Faktanya Lagrangian invarian dalam transformasi global $U(1)$ (Giunti,2007)

$$\nu_{kL} \longrightarrow e^{i\varphi} \nu_{kL}, \quad \nu_{kR} \longrightarrow e^{i\varphi} \nu_{kR}, \quad l_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi} l_{\alpha L}, \quad l_{\alpha R} \longrightarrow e^{i\varphi} l_{\alpha R}, \tag{3.7}$$

dengan fase φ sama unuk neutrino kiral independen dan medan lepton bermuatan. Teorema Noether's (Lampiran B) menyiratkan bahwa arus dipertahankan, bagian kinetik dari neutrino dan Lagrangian lepton bermuatan arus dipertahankan ($\partial_\rho j^\rho = 0$) adalah (Giunti,2007)

$$j^\rho = \sum_{k=1}^{3} \overline{\nu_k}\gamma^\rho \nu_k + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l_\alpha}\gamma^\rho l_\alpha, \tag{3.8}$$

dan muatan yang dipertahankan ($\partial_0 L = 0$) adalah (Giunti,2007)

$$L = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x[\sum_{k=1}^{3} \nu_k^\dagger(x)\nu_k(x) + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} l_\alpha^\dagger(x) l_\alpha(x)]. \tag{3.9}$$

Massa medan neutrino Dirac dapat terkuantisasi dengan cara standar untuk medan Dirac. Dapat menggunakan ekspansi Fourier dari persamaan neutrino Dirac dan Lagrangian lepton bermuatan, muatan yang dikonservasi adalah bilangan lepton (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} :L: \;=\; & \sum_{k=1}^{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [a_{\nu_k}^{(h)\dagger}(p) a_{\nu_k}^{(h)}(p) - b_{\nu_k}^{(h)\dagger}(p) b_{\nu_k}^{(h)}(p)] \\ + & \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [a_{l_\alpha}^{(h)\dagger}(p) a_{l_\alpha}^{(h)}(p) - b_{l_\alpha}^{(h)\dagger}(p) b_{l_\alpha}^{(h)}(p)]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1.2 *Mixing*

Matrik mixing dari neutrino Dirac bergantung pada empat elementer fisik yaitu, 3 sudut mixing dan satu fase gangguan CP. Seperti pada kasus quark, 5 dari 6 fase dalam matrik mixing gauge adalah tidak fisik karena dapat dihilangkan dengan membentuk kembali medan neutrino dan medan lepton bermuatan. Hal ini memungkinkan karena terlepas dari CC yang lemah, Lagrangian tidak berubah dalam transformasi fase global (Giunti,2007)

$$\nu_{kL} \longrightarrow e^{i\varphi_k}\nu_{kL}, \qquad \nu_{kR} \longrightarrow e^{i\varphi_k}\nu_{kR}, \tag{3.11}$$

$$l_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi_\alpha}\nu_{\alpha L}, \qquad l_{\alpha R} \longrightarrow e^{i\varphi_\alpha}\nu_{\alpha R}, \tag{3.12}$$

dengan 3 fase φ_k independen untuk medan neutrino masif da 3 fase φ_α independen untuk medan lepton bermuatan masif (Giunti,2007).

Matrik mixing tiga neutrino Dirac memiliki sifat-sifat yang analog dengan matrik mixing quark. Secara khusus perusakan simetri CP dapat dikuantifikasi dengan cara mengubah yang tidak sesuai dalam invarian Jarlskog (Greenberg,1985)(Jarlskog,1985) (Giunti,2007)

$$J = \Im_m[U_{\mu 3}U_{e2}U^*_{\mu 2}U^*_{e3}]. \tag{3.13}$$

Asimetri CP dan T dalam osilasi neutrino bergatung pada J dalam kasus 3 mixing neutrino. Parameterisasi yang sesuai dari matrik mixing neutrino Dirac adalah (Giunti,2007)

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

dimana $c_{ab} \equiv \cos\vartheta_{ab}$ dan $s_{ab} \equiv \sin\vartheta_{ab}$. Tiga sudut mixing $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{23}$ diambil nilai dalam rentang $0 \leq \vartheta_{ab} \leq \pi/2$ dan δ_{13} adalah fase perusakan simetri CP dengan nilai dalam rentang $0 \leq \delta_{13} \leq 2\pi$ (Giunti,2007).

3.2 Massa Neutrino Majorana

Neutrino dan anti neutrino merupakan partikel yang netral, dimana ada kemungkinan keduanya merupakan partikel yang sama. Partikel yang memiliki sifat seperti ini biasanya dikenal dengan partikel Majorana, menurut fisikawan Italia yaitu Ettore Majorana yang pertama kali mengajukan konsep tersebut. Dalam kasus neutrino, digunakan mekanisme jungkat-jungkit untuk menjelaskan mengapa neutrino memiliki massa yang sangat kecil dibandingkan dengan partikel elementer lainnya (Valle,2006). Neutrino Majorana mempunyai sifat yang hanya dapat membedakan antara kiralitas neutrino dan anti neutrino.

Neutrino steril tangan kanan diperkenalkan untuk menjelaskan adanya osilasi neutrino yang mana neutrino memiliki massa Majorana. Jika neutrino benar partikel Majorana, maka pada energi terendah (setelah adanya perusakan simetri), maka medan neutrino secara alami akan berperan sebagai enam medan Majorana, dengan tiga medan diharapkan mempunyai massa yang sangat tinggi atau sebanding dengan skala GUT dan tiga medan lainnya memiliki massa yang sangat rendah atau di bawah 1 eV. Dan jika neutrino merupakan partikel Majorana, maka proses yang melanggar bilangan lepton seperti peluruhan beta ganda *neutrinoless* akan diizinkan, tetapi tidak diizinkan jika neutrino disebut partikel Dirac. Jika neutrino kidal ada, tetapi tidak memiliki massa Majorana, maka neutrino akan berperan sebagai tiga fermion Dirac dan anti partikelnya dengan massa yang datang dari interaksi Higgs, seperti fermion SM lainnya (Majorana,2006).

Penambahan neutrino tangan kanan mempunyai efek skala massa baru, yang tidak terkait dengan skala massa dalam SM. Maka dalam pengamatan massa neutrino tangan kanan akan mengungkapkan fisika di luar SM. Neutrino tangan kanan akan membantu menjelaskan asal mula meteri melalui mekanisme yang dikenal sebagai leptogenesis. Leptogenesis merupakan istilah umum untuk proses fisik hipotesis yang menghasilkan asimetri antara lepton dan anti lepton.

Medan fermion kiral adalah suatu hal yang dibangun dalam SM dan teori gauge modern, karena spinor kiral merupakan representasi terkecil yang tidak tereduksi dari grup Lorentz. Secara khusus, fermion tak bermassa dapat digambarkan oleh medan kiral seperti yang ditunjukkan oleh Landau (Landau,1957), Lee dan Yang (Lee,1957) dan Salam (Salam,1957) dengan teori dua komponen mengenai neutrino tak bermassa. Seperi yang ditunjukkan oleh persamaan Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{3.15}$$

untuk medan fermion setara dengan persamaan (Giunti,2007)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R \tag{3.16}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L, \tag{3.17}$$

untuk medan kiral ψ_L dan ψ_R evolusi ruang-waktu yang digabunkan dengan massa m. Jika fermion tidak memiliki massa maka(Giunti,2007),

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \tag{3.18}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0. \tag{3.19}$$

Oleh karena itu, fermion tak bermassa dapat digambarkan dengan satu medan kiral tunggal yang hanya memiliki dua komponen independen. Persamaan diatas disebut dengan persamaan Weyl dan spinor ψ_L dan ψ_R disebut spin Weyl (Giunti,2007).

Pada tahun 1933, Pauli menolak adanya spin Weyl pada fisika partikel karena mengarah pada perusakan simetri paritas. Inversi ruang akan mengubah ψ_L menjadi ψ_R dan sebaliknya, yang menyiratkan bahwa konservasi paritas memerlukan keadaan yang simultan terhadap dua komponen kiral. Namun, alasan Pauli tersebut ditolak karena ditemukannya perusakan simetri paritas pada tahun 1956-1957. Dan meperbarui deskripsi bahwa partikel tak bermassa dengan medan spin Weyl. Karena tidak ada indikasi mengenai massa neutrino dan kemungkinan bahwa neutrino berinteraksi lemah melalui komponen kiral tangan kiri Landau (Landau,1957), Lee dan Yang (Lee,1957) dan Salam (Salam,1957) mengusulkan untuk menggambarkan neutrino dengan spinor Weyl tangan kiri ν_L. Inilah yang disebut sebagai teori dua komponen neutrino tak bermassa yang dimasukkan dalam SM, dimana neutrino tak bermassa dan dijelaskan oleh spinor Weyl tangan kiri.

Menggunakan konjugasi Hermitian untuk persamaan (3.31), maka memperoleh (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} -i\partial_\mu \overline{\psi_R}\gamma^\mu &= m\overline{\psi_L} \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \mathcal{C}\overline{\psi_R}^T &= m\mathcal{C}\overline{\psi_L}^T, \end{aligned} \tag{3.20}$$

persamaan ini memiliki struktur yang sama dengan persamaan (3.40) dan dapat dianggap sebagai (Giunti,2007)

$$\psi_R = \xi \mathcal{C}\overline{\psi_L}^T, \tag{3.21}$$

dimana ξ adalah faktor fase *arbitary* ($|\ \xi^2\ | = 1$) (Giunti,2007). Dan untuk persamaan (3.30) memperoleh persamaan Majorana untuk medan kiral ψ_L

(Giunti,2007):

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\xi \mathcal{C}\overline{\psi_L}^T \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \xi \psi_L &= m\xi \mathcal{C}\overline{\psi_L}^T \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\mathcal{C}\overline{\psi_L}^T, \end{aligned} \tag{3.22}$$

yang mana ξ dapat tereliminasi dengan (Giunti,2007)

$$\psi_L \longrightarrow \xi^{1/2}\psi_L. \tag{3.23}$$

Medan Majorana ψ dapat ditulis (Giunti,2007)

$$\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + \mathcal{C}\overline{\psi_L}^T = \psi_L + \psi_L^C, \tag{3.24}$$

dimana $\mathcal{C}\overline{\psi_L}^T$ merupakan indentik dari faktor fase untuk medan konjugasi muatan ψ_L^C. Namun, interaksi lemah muatan-arus V-A melanggar adanya simetri konjugasi muatan. Karena neutrino berinteraksi melalui interaksi lemah, paritas muatan medan neutrino tidak memiliki arti fisis (Giunti,2007).

Kondisi Majorana menyiratkan kesetaraan partikel dan anti partikel. Oleh karena itu hanya medan fermion netral yag dapat dijelaskan oleh medan Majorana. hal ini dapat dipertimbangkan dengan persamaa Dirac untuk medan fermion dengan muatan q yang digabungkan dengan medan elektromagnetik A_μ (Giunti,2007):

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 \qquad (partikel), \tag{3.25}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0 \qquad (antipartikel). \tag{3.26}$$

Jika medan fermion netral memiliki $q = 0$ maka persamaan diatas akan bernilai sama dan memungkinkan adanya kesetaraan dalam Majorana (Giunti,2007).

Dalam khasus Majorana, arus elektromagnetik $j^\mu = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ menghilang secara indentik (Giunti,2007):

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = 0. \tag{3.27}$$

Dapat memperoleh hasil $j^\mu = -j^\mu = 0$ dalam transformasi persamaan (2.183) arus elektromagnetik j^μ dalam konjugasi muatan (Giunti,2007).

Dalam fermion elementer hanya neutrino netral yang dapat disebut sebagai partikel Majorana. Pada dasarnya spinor Majorana (Majorana,1937) memiliki dua komponen independen dan teori Majorana lebih sederhana dari pada teori Dirac. Oleh karena itu, sifat Majorana untuk neutrino masif lebih tepat daripada sifat Dirac. Faktanya, neutrino merupakan partikel Majorana dalam banyak teori di luar SM.

Deskripsi Dirac dan Majorana memiliki konsekuensi fenomenologis yang berbeda untuk neutrino bersifat masif. Dalam teori Dirac tak bermassa, komponen kiral tangan kiri dan tangan kanan independen untuk medan neutrino yang mematuhi persamaan Weyl (3.32) dan (3.33)($\psi_L \longrightarrow \psi_L$ dan $\psi_R \longrightarrow \psi_R$). Dalam teori Majorana tak bermassa, persamaan Weyl (3.32) dan (3.33) juga berlaku dengan medan kiral tangan kiri dan tangan kanan yang terkait dengan persamaan (3.36). Namun hanya komponen kiral tangan kiri medan neutrino yang berinteraksi. Jika neutrino tak bermassa karena komponen kiral tangan kiri medan neutrino maka harus mematuhi persamaan Weyl baik dalam teori Dirac maupun teori Majorana. Dan komponen kiral tangan kanan *irrelevant* untuk interaksi neutrino, maka teori Dirac dan Majorana adalah setara secara fisik (Giunti,2007).

Perbedaan teori Dirac dari Majorana pada neutrino hanya dengan mengukur beberapa efek dari massa neutrino, karena jika tidak maka teori tak bermassa tak berlaku dengan cara yang efektif. Selain itu, efek massa tidak berlaku sifat kinematika karena efek kinematika massa Dirac dan Majorana adalah sama. Misalnya, sifat Dirac atau Majorana dari neutrino tidak dapat diungkapkan melalui osilasi neutrino. Cara membuktikan neutrino merupakan partikel Majorana dengan cara mencari *double-β-decay* (Giunti,2007).

3.2.1 Istilah Massa Majorana

Untuk memahami teori neutrino Majorana dengan cara mempertimbangkan jenis neutrino tunggal ν. Massa Majorana diperoleh dari istilah Lagrangian massa dengan medan fermion kiral saja. Karena neutrino tangan kiri menggunakan medan kiral tangan kiri (ν_L) (Giunti,2007).

Istilah massa Dirac untuk medan neutrino Dirac $\nu = \nu_L + \nu_R$ (Giunti,2007):

$$L^D_{massa} = -m\overline{\nu}\nu = -m(\overline{\nu_R}\nu_L + \overline{\nu_L}\nu_R) = -m\overline{\nu_R}\nu_L + H.c.. \tag{3.28}$$

Istilah massa Dirac diatas merupakan skalar Lorentz, semua istilah harus dalam bentuk Lagrangian karena dalam transformasi Lorentz medan kiral $\nu_L(x)$ dan $\nu_R(x)$ berubah menjadi medan Dirac $\nu(x)$ dengan S sesuai dengan persamaan (C.16) (Giunti,2007)

$$\nu_L(x) \longrightarrow \nu'_L(x') = \mathcal{S}\nu_L(x), \qquad \nu_R(x) \longrightarrow \nu'_R(x') = \mathcal{S}\nu_R(x) \tag{3.29}$$

$$\overline{\nu_L}(x) \longrightarrow \overline{\nu'_L}(x') = \overline{\nu_L}(x)\mathcal{S}^{-1}, \quad \overline{\nu_R}(x) \longrightarrow \overline{\nu'_R}(x') = \overline{\nu_R}(x)\mathcal{S}^{-1}. \tag{3.30}$$

Istilah yang digunakan dalam Majorana hanya menggunakan ν_L sebagai tangan kiri, maka harus mengistilahkan juga fungsi tangan kanan dalam transformasi Lorentz yang dapat dituliskan dengan ν_L dan dapat digantikan oleh ν_R. Fungsi dari ν_L adalah sebagai medan konjugasi muatan yang mana (Giunti,2007)

$$\nu_L^C = \mathcal{C}\overline{\nu_L}^T, \tag{3.31}$$

dimana dalam paritas muatan intrinsik yang mana akan sama dengan *unitary*(paritas muatan intrinsik dari neutrino tidak memiliki makna fisis karena muatan-arus V-A interaksi lemah melanggar simetri dalam konjugasi muatan). Karena ν_L^C merupakan tangan kanan maka kopling $\overline{\nu_L^C}\nu_L$ tidak hilang. ν_L^C memiliki sifat yang sesuai dengan ν_R maka persamaan (3.42) mengarah keistilah massa Majorana (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
L^M_{massa} &= -\frac{1}{2}m\overline{\nu_L^C}\nu_L + H.c. \\
L^M &= \frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_L}i\overleftrightarrow{\partial}\nu_L + \overline{\nu_L^C}i\overleftrightarrow{\partial}\nu_L^C - m\left(\overline{\nu_L^C}\nu_L + \overline{\nu_L}\nu_L^C\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_L}i\overleftrightarrow{\partial}\nu_L + (-\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger)i\overleftrightarrow{\partial}^T\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T - m\left((-\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger)\nu_L + \overline{\nu_L}\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_L}i\overleftrightarrow{\partial}\nu_L + \nu_L^T i\overleftrightarrow{\partial}^T\overline{\nu_L}^T - m\left(-\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger\nu_L + \overline{\nu_L}\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Dalam persamaan diatas ada faktor 1/2 untuk menghindari perhitungan ganda karena faktanya ν_L^C dan ν_L tidak independen ($\nu_L^C = \mathcal{C}\overline{\nu_L}^T$). Untuk medan derivasi menggunakan persamaan Euler-Lagrange (Giunti,2007):

$$\partial_\mu\frac{\partial L^M}{\partial(\partial_\mu\overline{\nu_L})} - \frac{\partial L^M}{\partial\overline{\nu_L}} = 0, \tag{3.33}$$

yang mana

$$\frac{\partial L^M}{\partial(\partial_\mu\overline{\nu_L})} = -\frac{1}{2}i\gamma^\mu\nu_L \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial L^M}{\partial \overline{\nu_L}} = \frac{1}{2} i\gamma^\mu \nu_L - m\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T, \tag{3.35}$$

dapat memperoleh persamaan medan Majorana

$$i\partial \nu_L = m\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T. \tag{3.36}$$

Akan lebih mudah untuk mendefinisikan medan Majorana dengan $\nu = \nu_L + \nu_L^C$. Dan dapat dituliskan dalam Lagrangian Majorana dalam bentuk ν (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L^M &= \frac{1}{2}\overline{\nu}(i \overleftrightarrow{\partial} - m)\nu \\ &= \overline{\nu_L} i \overleftrightarrow{\partial} \nu_L - \frac{m}{2}(-\nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + \overline{\nu_L}\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T), \end{aligned} \tag{3.37}$$

yang mana istilah kinetik memiliki bentuk yang sama dengan neutrino tak bermassa di SM dan istilah medan Majorana mewakili efek fisik diluar SM (Giunti,2007).

3.2.2 Massa Majorana Efektif

Istilah massa Majorana dalam persamaan (3.46) hanya melibatkan medan neutrino kiral tangan kiri ν_L yang ada pada SM. Oleh karena itu apakah mungkin neutrino dalam SM memiliki massa Majorana? Negatif, karena medan neutrino kiral tangan kiri ν_L memiliki komponen I_3 dari isospin lemah yang sama dengan 1/2 dan *hypercharge* Y sama dengan -1. Dengan mempertimbangkan satu generasi istilah dimensi terendah menghasilkan massa neutrino Majorana dalam medan SM dan simetri SM melanggar bilangan lepton (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_5 &= \frac{g}{\mathcal{M}}(L_L^T \tau_2 \Phi)\mathcal{C}^\dagger(\Phi^T \tau_2 L_L) + H.c. \\ &= \frac{1}{2}\frac{g}{\mathcal{M}}(L_L^T \mathcal{C}^\dagger \tau_2 \overline{tau} L_L) \cdot (\Phi^T \tau_2 \overline{tau}\Phi) + H.c., \end{aligned} \tag{3.38}$$

dimana g adalah koefisien kopling tanpa dimensi dan $\mathcal{M}$ adalah konstanta dengan dimensi massa. Dalam persamaan diatas L_L adalah doublet lepton SM satu generasi dan Φ adalah doublet Higgs (Giunti,2007).

Sebagai konsekuensi dari *symmetry breaking elektroweak*, L_5 menghasilkan istilah massa Majorana untuk ν_L (Giunti,2007)

$$L^M_{massa} = \frac{1}{2}\frac{gv^2}{\mathcal{M}}\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger\nu_L + H.c., \tag{3.39}$$

sesuai dengan massa Majorana

$$m = \frac{gv^2}{\mathcal{M}}. \tag{3.40}$$

3.3 *Mixing* Tiga Neutrino Majorana

Tiga generasi dari neutrino Majorana masif dari deretan flavor medan neutrino tangan kiri dapat membangun istilah massa Majorana (Giunti,2007)

$$L^M_{massa} = \frac{1}{2}\nu_L'^T\mathcal{C}^\dagger M^L\nu_L' + H.c. = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\nu}\nu_{\alpha L}'^T\mathcal{C}^\dagger M^L_{\alpha\beta}\nu_{\beta L}' + H.c.. \tag{3.41}$$

Secara umum, matrik M^L adalah matrik simetri yang kompleks. Faktanya mempunyai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\nu}\nu_{\alpha L}'^T\mathcal{C}^\dagger M^L_{\alpha\beta}\nu_{\beta L}' &= -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\nu}\nu_{\beta L}'^T M^L_{\alpha\beta}(\mathcal{C}^\dagger)^T\nu_{\alpha L}' \\
&= \left(-\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\nu}\nu_{\beta L}'^T M^L_{\alpha\beta}(\mathcal{C}^\dagger)^T\nu_{\alpha L}'\right)^T \\
&= \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\nu}\nu_{\alpha L}'\mathcal{C}^\dagger M^L_{\alpha\beta}\nu_{\beta L}'^T \\
&= \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\nu}\nu_{\alpha L}'^T\mathcal{C}^\dagger M^L_{\beta\alpha}\nu_{\beta L}',
\end{aligned} \tag{3.42}$$

dimana pada baris kedua diperlukan transpos dan berubah menjadi tanda minus karena anti komutasi medan fermion. Pada baris terakhir terjadi penukaran $\alpha \leftrightarrows \beta$. Dan dari persamaan diatas terbukti bahwa M^L adalah simetri dengan cara membandingkan sisi kanan dan sisi kiri persamaan yang memperoleh $M^L_{\alpha\beta} = M^L_{\beta\alpha}$ (Giunti,2007).

Seperti dalam khasus neutrino Dirac, medan-medan neutrino masif diperoleh dari mendiagonalisasi istilah massa Majorana. Matrik simetri massa M^L dapat didiagonalisasi dengan transformasi (Giunti,2007)

$$(V_L^\nu)^T M^L V_L^\nu = M, \quad dengan \quad M_{kj} = m_k \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3), \tag{3.43}$$

dengan matrik *unitary* V_L^ν dan dengan massa real dan positif m_k. Lalu mendiagonalisasi untuk mengekspresikan flavor medan tangan kiri sebagai kombinasi linier *unitary* komponen medan tangan kiri dengan istilah massa (Giunti,2007):

$$\nu'_L = V_L^\nu n_L \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Lagrangian massa Majorana dapat dituliskan kembali dalam bentuk diagonal (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L^M_{massa} &= \frac{1}{2} \nu_L'^T \mathcal{C}^\dagger M^L \nu'_L + H.c. \\ &= \frac{1}{2} (V_L^\nu)^T n_L^T \mathcal{C}^\dagger M^L V_L^\nu n_L + H.c. \\ &= \frac{1}{2} n_L^T \mathcal{C}^\dagger M n_L + H.c. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} m_k \nu_{kL}^T \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + H.c., \tag{3.45}$$

yang mana istilah Majorana diatas tidak invarian terhadap transformasi gauge global U(1) $\nu_{kL} \longrightarrow e^{i\varphi}\nu_{kL}$ dengan fase φ yang sama untuk semua neutrino masif. Hal ini menyiratkan pelanggaran-pelanggaran terhadap konsekuensi dari jumlah number lepton, yang mengarah pada fenomena menarik seperti peluruhan neutrino tanpa massa double β-decay. Atau Lagrangian massa Majorana dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_{massa}^M &= \frac{i}{2} n_L^T \mathcal{C}^\dagger M n_L + H.c. \\ &= -\frac{1}{2}\overline{n_L^C} M n_L + H.c. \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} m_k \overline{\nu_{kL}^C} \nu_{kL} + H.c.. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Medan Majorana dari neutrino masif (Giunti,2007)

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C, \tag{3.47}$$

yang memenuhi syarat Majorana yang mana $\nu_k^C = \nu_k$ dan memungkinkan untuk dapat ditulis Lagrangian Majorana 3 generasi (Giunti,2007):

$$L^M = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \overline{\nu_k} \left(i \overset{\leftrightarrow}{\partial} - m_k \right) \nu_k = \frac{1}{2}\overline{n} \left(i \overset{\leftrightarrow}{\partial} - M \right) n, \tag{3.48}$$

dengan matrik kolom dari medan neutrino Majorana masif (Giunti,2007)

$$n = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

3.3.1 Interaksi Lemah

Efek dari relasi *mixing* pada muatan arus leptonik lemah seperti dalam SM dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$j^{\rho}_{W,L} = 2\overline{n_L}U^{\dagger}\gamma^{\rho}l_L = 2\overline{\nu_L}\gamma^{\rho}l_L = 2\sum_{\alpha=e,\mu,\nu}\overline{\nu_{\alpha L}}\gamma^{\rho}l_{\alpha L}. \quad (3.50)$$

Ada sebuah perbadaan sehubungan dengan *mixing* neutrino Dirac, yaitu melanggar CP fase fisik dalam matrik *mixing* Majorana adalah tiga bukan satu. Hal ini disebabkan oleh adanya istilah massa Majorana di persamaan (3.59) yang tidak berubah dalam transformasi gauge global U(1) (Giunti,2007).

Matrik *mixing* 3×3 CKM gauge dari quark yang mana lima dari enam tidak fisik karena dapat hilang dengan transformasi fase yang sesuai dengan medan quark yang menghapuskan invarian Lagrangian. Argumen yang serupa berlaku untuk *mixing* tiga neutrino Dirac, karena selain part CC lemah, Lagrangian merupakan invarian dalam transformasi fase global dalam persamaan (3.25) dan (3.26) medan neutrino dan lepton bermuatan. Dalam kasus Majorana istilah massa tidak invarian terhadap transformasi gauge global U(1), maka medan neutrino masif tangan kiri tidak dapat diulang kembali untuk menghilangkan dua fase yang dapat difaktorkan disebelah kanan matrik *mixing*. Oleh karena itu, matrik *unitary mixing* 3×3 dari neutrino Majorana tergantung pada tiga sudut *mixing* dan tiga fase perusakan CP secara fisik. Matrik *mixing* ini dapat ditulis sebagai produk dari matrik *unitary* U^D, dengan tiga sudut *mixing* dan satu fase yang mirip dengan matrik *mixing* pada kasus Dirac, dan diagonal matrik *unitary* D^M dengan dua fase independen (Giunti,2007):

$$U = U^D D^M. \quad (3.51)$$

Fase pada U^D disebut dengan fase Dirac yang sesuai dengan persamaan (3.28) dan dua fase dalam D^M disebut dengan fase Majorana. Matrik *mixing* tiga neutrino Dirac memiliki sifat-sifat yang analog dengan matrik *mixing* quark. Secara khusus, perusakan CP karena fase Dirac dapat dikuantifikasi dengan cara mengubah invarian dengan invarian Jarlskog (Giunti,2007)

$$J = \Im_m[U_{\mu 3}U_{e2}U^*_{\mu 2}U^*_{e3}] = \Im_m[U^D_{\mu 3}U^D_{e2}U^{D*}_{\mu 2}U^{D*}_{e3}], \tag{3.52}$$

dimana kedua kesetaraan tersebut karena pengubahan ulang invariansi J yang menyiratkan bahwa fase-fase Majorana tidak berkontribusi. Semua asimetri CP dan T akibat dari fase Dirac yang bergantung pada J. Diagonal matrik *unitary* D^M dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$D^M = diag(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_2}), \quad dengan \quad \lambda_1 = 0, \tag{3.53}$$

dimana fase λ_2 dan λ_3 adalah dua fase yang merusak CP Majorana (Giunti,2007).

3.4 Istilah Massa Dirac-Majorana Satu Generasi

Kesederhanaan satu generasi dari medan kiral ν_L dan ν_R untuk membangun Lagrangian neutrino. Perlu diketahui bahwa medan kiral ν_L bahwasannya adalah ada, karena hadir dalam SM dan masuk ke Lagrangian interaksi muatan-arus lemah. Akan tetapi belum diketahui untuk medan ν_R itu ada, tetapi diizinkan oleh simetri SM. Jika hanya ν_L saja yang ada, maka Lagrangian neutrino untuk istilah massa Majorana adalah (Giunti,2007)

$$L^L_{massa} = \frac{1}{2}m_L\nu^T_L\mathcal{C}^\dagger\nu_L + H.c., \tag{3.54}$$

dan neutrino merupakan partikel Majorana. Jika ν_R juga ada, maka Lagrangian neutrino akan mengandung istilah massa Dirac (Giunti,2007)

$$L^{D}_{massa} = -m_D \overline{\nu_R} \nu_L + H.c., \tag{3.55}$$

yang menyiratkan bahwa neutrino merupakan partikel Dirac. Namun selain istilah massa Dirac, Lagrangian juga dapat mengandung massa Majorana untuk ν_L dan istilah massa Majorana (Giunti,2007)

$$L^{R}_{massa} = \frac{1}{2} m_R \nu_R^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R + H.c., \tag{3.56}$$

untuk ν_R. Oleh karena itu, secara umum dapat dimungkinkan memiliki istilah massa neutrino Dirac-Majorana (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
L^{D+M}_{massa} &= L^{D}_{massa} + L^{L}_{massa} + L^{R}_{massa} \\
&= -m_D \overline{\nu_R} \nu_L + \frac{1}{2} m_L \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R \nu_R^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R + H.c. \\
&= -m_D (\overline{\nu_R} \nu_L + \overline{\nu_L} \nu_R) + \frac{1}{2} m_L \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R \nu_R^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R + H.c. \\
&= m_D \mathcal{C}^\dagger (\nu_R^T \nu_L + \nu_L^T \nu_R) + \frac{1}{2} m_L \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R \nu_R^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R + H.c. \\
&= \frac{1}{2} m_D \mathcal{C}^\dagger (\nu_R^C)^T \nu_L + \frac{1}{2} m_D \mathcal{C}^\dagger \nu_L^T \nu_R^C \\
&+ \frac{1}{2} m_L \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + \frac{1}{2} m_R (\nu_R^C)^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R^C + H.c. \\
&= \frac{1}{2} \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger (m_L \nu_L + m_D \nu_R^C) + \frac{1}{2} (\nu_R^C)^T \mathcal{C}^\dagger (m_D \nu_L + m_R \nu_R^C) + H.c. \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_L^T & (\nu_R^C)^T \end{pmatrix} \mathcal{C}^\dagger \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} + H.c. \\
&= \frac{1}{2} N_L^T \mathcal{C}^\dagger M N_L + H.c. \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \nu_{kL}^T \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + H.c.
\end{aligned}$$

$$= \quad -\frac{1}{2}\sum_{k=1,2} m_k \overline{\nu_k}\nu_k + H.c., \tag{3.57}$$

yang mana M merupakan matrik simetri massa. Baris ketiga dari persamaan diatas jelas bahwa medan kiral ν_L dan ν_R tidak memiliki massa pasti, karena massa Dirac *off-diagonal*. Untuk menemukan medan neutrino masif perlu mendiagonalisasi matrik massa. Hal ini dapat dilakukan dengan transformasi *unitary* medan kiral (Giunti,2007)

$$N_L = U n_L, \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

merupakan matrik kolom dari medan neutrino kiral tangan kiri. Matrik U *unitary* (Giunti,2007)

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

dengan m_k real ≥ 0.

Dari persamaan Lagrangain massa Dirac-Majorana diatas dapat didefinisikan sebagai medan masif neutrino Majorana(Giunti,2007)

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C = \nu_{kL} + \mathcal{C}\overline{\nu_{kL}}^T. \tag{3.60}$$

Maka telah diperoleh hasil bahwa istilah massa Dirac-Majorana menyiratkan bahwa neutrino masif adalah neutrino Majorana. Karena mengandung struktur istilah massa Majorana untuk dua medan kiral ν_L dan ν_R^C (Giunti,2007). Ingat kembali bahwa m_R dan m_D bernilai real dan positif sedangkan m_L bernilai kompleks, massa m_1 dan m_2 merupakan dua nilai eigen yang positif dari sebuah matrik (Giunti,2007)

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}[m_L] & m_D & -\mathfrak{Im}[m_L] & 0 \\ m_D & m_R & 0 & 0 \\ -\mathfrak{Im}[m_L] & 0 & -\mathfrak{Re}[m_L] & -m_D \\ 0 & 0 & -m_D & -m_R \end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

Jika matrik diatas dideterminankan dengan matrik U maka memperoleh nilai dari *mixing* sudut ϑ dan fase λ (Giunti,2007)

$$\tan 2\vartheta = \frac{2m_D}{m_R - \mathfrak{Re}[m_L]} \tag{3.62}$$

$$\tan 2\lambda = -\frac{2\mathfrak{Im}[m_L]}{\mathfrak{Re}[m_L] + m_R - \sqrt{(\mathfrak{Re}[m_L] - m_R)^2 + 4m_D^2}}, \tag{3.63}$$

dengan $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ dan $0 \leq \lambda < 2\pi$. Jika CP dipertahankan maka matrik massa merupakan real dan $\tan 2\lambda$ akan hilang. Dalam hal ini memiliki empat kemungkinan untuk $^{i\lambda}$ yaitu ± 1 dan $\pm i$ (Giunti,2007).

Dalam kasus satu generasi dengan kedua medan neutrino kiral tangan kiri ν_L dan tangan kanan ν_R yang diagonalisasi dengan istilah massa Dirac-Majorana menyiratkan dua medan neutrino masif Majorana ν_1 dan ν_2. Biasanya mengacu pada ν_L dan ν_R^C sebagai medan tangan kiri dalam basis *flavor* dan mengacu pada ν_1 dan ν_2 sebagai medan dalam basis massa. Kedua medan *flavor* ν_L dan ν_R merupakan aktif dan steril, karena ν_L berinteraksi dalam interaksi lemah dan ν_R merupakan singlet dari simetri gauge pada SM. *Mixing* antara ν_L dan ν_R^C secara umum merupakan osilasi antara neutrino aktif dan steril. Osilasi antara ν_L aktif dan ν_R^C steril bergantung pada perbedaan massa kuadrat berikut (Giunti,2007)

$$\Delta m^2 = [(\mathfrak{Re}[m_L] + m_R)^2 \left[(\mathfrak{Re}[m_L] - m_R)^2 + 4m_D^2\right]$$

$$(\Im\mathfrak{m}[m_L])^4 + 2(\Im\mathfrak{m}[m_L])^2((\Re\mathfrak{e}[m_L])^2 - m_R^2 + 2m_D^2)]^{1/2}. \quad (3.64)$$

3.5 *Mixing* Massa Dirac-Majorana Tiga Generasi

Telah diketahui ada tiga medan neutrino tangan kiri aktif $\nu'_{eL}, \nu'_{\mu L}, \nu'_{\tau L}$, dan ada pula N_s medan neutrino tangan kanan steril ν_{sR} dengan $s = s_1, ..., s_{N_s}$. Notasi medan neutrino tangan kanan steril tidak menggunakan kelipatan prima, karena tidak berinteraksi lemah (disisi lain, medan neutrino tangan kiri aktif harus didefinisikan ulang untuk mendiagonalisasi muatan-arus lemah leptonik). Yang sesuai dengan semua medan tersebut ialah menggunakan istilah massa Dirac-Majorana. Istilah massa Majorana (Giunti,2007)

$$L^L_{massa} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \nu'^T_{\alpha L}\mathcal{C}^\dagger M^L_{\alpha\beta}\nu'_{\beta L} + H.c. \quad (3.65)$$

$$L^R_{massa} = \frac{1}{2}\sum_{s,s'=s_1,...,s_{N_s}} \nu^T_{sR}\mathcal{C}^\dagger M^R_{ss'}\nu_{s'R} + H.c., \quad (3.66)$$

dan istilah massa Dirac (Giunti,2007)

$$L^D_{massa} = -\sum_{s=s_1,...,s_{N_s}}\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{sR}} M^D_{s\alpha}\nu'_{\alpha L} + H.c.. \quad (3.67)$$

Ketiga matrik massa M^L, M^R, dan M^D adalah kompleks. Matrik massa Majorana M^L dan M^R adalah matrik simetri, dimana matrik massa Majorana kiri merupakan matrik persegi 3×3 dan matrik massa Majorana kanan merupakan matrik persegi $N_s \times N_s$. Sedangkan matrik massa Dirac M^D adalah matrik persegi panjang $N_s \times 3$ (Giunti,2007).

Bentuk istilah massa Dirac-Majorana (Giunti,2007):

$$L^{D+M}_{massa} = L^L_{massa} + L^R_{massa} + L^D_{massa}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \nu'^{T}_{\alpha L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{L}_{\alpha\beta}\nu'_{\beta L} + \frac{1}{2}\sum_{s,s'=s_1,\dots,s_{N_s}} \nu^{T}_{sR}\mathcal{C}^{\dagger}M^{R}_{ss'}\nu_{s'R} \\
&- \sum_{s=s_1,\dots,s_{N_s}}\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{sR}}M^{D}_{s\alpha}\nu'_{\alpha L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\nu'^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{L}\nu'_{L} + \frac{1}{2}\nu^{T}_{R}\mathcal{C}^{\dagger}M^{R}\nu_{R} - \overline{\nu_{R}}M^{D}\nu'_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\nu'^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{L}\nu'_{L} + \frac{1}{2}\nu^{T}_{R}\mathcal{C}^{\dagger}M^{R}\nu_{R} + \mathcal{C}^{\dagger}M^{D}(\nu'^{T}_{L}\nu_{R} + \nu^{T}_{R}\nu'_{L}) + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\nu'^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{L}\nu'_{L} + \frac{1}{2}(\nu^{C}_{R})^{T}\mathcal{C}^{\dagger}M^{R}\nu^{C}_{R} \\
&+ \frac{1}{2}\nu'^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{D^{T}}\nu^{C}_{R} + \frac{1}{2}(\nu^{C}_{R})^{T}\mathcal{C}^{\dagger}M^{D}\nu'_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\nu'_{L} & \nu^{C}_{R}\end{pmatrix}^{T}\mathcal{C}^{\dagger}\begin{pmatrix}M^{L} & M^{D^{T}} \\ M^{D} & M^{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu'_{L} \\ \nu^{C}_{R}\end{pmatrix} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{N}'^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{D+M}\mathbf{N}'_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}(V^{\nu}_{L})^{T}\mathbf{n}^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{D+M}V^{\nu}_{L}\mathbf{n}_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{n}^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M\mathbf{n}_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_{k}\nu^{T}_{kL}\mathcal{C}^{\dagger}\nu_{kL} + H.c. \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

dengan matrik massa simetri $N \times N$ (Giunti,2007)

$$
M^{D+M} = \begin{pmatrix} m^{L} & m^{D^{T}} \\ m^{D} & m^{R} \end{pmatrix}. \qquad (3.69)
$$

Istilah massa Dirac-Majorana dapat juga diperoleh dengan medan konjugasi muatan (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
L^{D+M}_{massa} &= \frac{1}{2}\mathbf{N}'^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{D+M}\mathbf{N}'_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}(V^{\nu}_{L})^{T}\mathbf{n}^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M^{D+M}V^{\nu}_{L}\mathbf{n}_{L} + H.c. \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{n}^{T}_{L}\mathcal{C}^{\dagger}M\mathbf{n}_{L} + H.c. \\
&= -\frac{1}{2}\overline{\mathbf{n}^{C}_{L}}M\mathbf{n}_{L} + H.c.
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \overline{\nu_{kL}^{C}} \nu_{kL} + H.c.. \qquad (3.70)$$

Dapat didefinisikan matrik kolom dari medan neutrino Majorana masif(Giunti,2007)

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_N \end{pmatrix} \quad dimana \quad \nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^{C}. \qquad (3.71)$$

Dengan menggunakan medan Majorana, maka dapat dituliskan Lagrangian neutrino bebas sebagai (Giunti,2007)

$$L_{massa}^{D+M} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \nu_k \left(i \overset{\leftrightarrow}{\partial} - m_k \right) \nu_k = \overline{\mathbf{n}} \left(i \overset{\leftrightarrow}{\partial} - M \right) \mathbf{n}. \qquad (3.72)$$

Hasil dari mendiagonalisasi istilah massa Dirac-Majorana memperoleh neutrino masif yang merupakan partikel-partikel Majorana (Giunti,2007).

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Osilasi Neutrino

Osilasi neutrino muncul dari pencampuran antara flavor dan state eigen massa dari neutrino. Yaitu, tiga state neutrino yang berinteraksi dengan lepton bermuatan dalam interaksi lemah masing-masing merupakan superposisi yang berbeda dari tiga keadaan neutrino yang termampat dari massa tertentu. Neutrino dipancarkan dan diserap dalam proses yang lemah dalam *state eigen* flavornya, tetapi bergerak sebagai *state eigen* massa.

Dalam SM, partikel yang bermassa akan mempunyai dua kiralitas, yaitu kiralitas tangan kiri dan tangan kanan. Di alam semesta terdapat partikel elementer yang hanya mempunyai satu kiralitas, yaitu partikel neutrino. Partikel yang bermassa pada umumnya akan dapat berosilasi. Untuk berosilasi dibutuhkan dua kiralitas, karena neutrino hanya memiliki kiralitas tangan kiri saja maka dibutuhkan pembangkit kiralitas tangan kanan. Implikasi adanya osilasi adalah terjadi bauran (*mixing*). Adanya bauran memungkinnya terjadinya transisi keadaan dari perubahan flavor secara timbal balik, misalnya dari neutrino elektron menjadi neutrino muon, neutrino muon menjadi neutrino tau, dan sebaliknya. Proses ini merupakan perubahan keadaan (*state*) suatu generasi neutrino terhadap waktu dan bukan peristiwa anihilasi ataupun kreasi. Maka osilasi neutrino dapat terjadi apabila terdapat bauran massa dan probabilitas transisi dari satu generasi ke generasi lain (Julio,2003).

Osilasi neutrino berawal dari pemikiran B.Pontecorvo di tahun 1957 diusulkan setelah permasalahan gangguan paritas yang ditemukan oleh Wu dan teori komponen tak bermassa oleh Landau, Lee dan Yang. B.Pontecorvo mengungkapkan probabilitas transisi neutrino menjadi anti neutrino dalam vakum dari transisi mounium menjadi anti mounium. Dalam waktu yang sama pula F.Reines dan Cowan menemukan anti neutrino dalam eksperimen proses peluruhan (Bilenky,2006),

$$P + \overline{\nu_e} \longrightarrow n + e^-. \tag{4.1}$$

Davis juga melakukan eksperimen dengan reaktor anti neutrino dalam proses peluruhan (Bilenky,2006),

$$^{37}Cl + \nu_e \longrightarrow^{37} Ar + e^-. \tag{4.2}$$

Massa dan bauran neutrino didiskusikan oleh Naki Nakagawa dan Sakata pada tahun 1962. Naki Nakagawa dan Sakata beransumsi bahwa dalam medan neutrino lemah, transformasi ortogonal akan menghubungkan antara neutrino elektron dan neutrino muon dengan medan neutrino pada massa tertentu ν_1 dan ν_2 (Bilenky,2016),

$$\nu_e = \cos\theta\nu_1 + \sin\theta\nu_2, \qquad \nu_\mu = -\sin\theta\nu_1 + \cos\theta\nu_2. \tag{4.3}$$

Naki Nakagawa dan Sakata memperkirakan waktu transisi dari neutrino muon ke neutrino elektron dapat mempengaruhi hasil eksperimen dari Brookhaven (Bilenky,2016).

4.1.1 Osilasi Neutrino Surya

Neutrino diciptakan oleh berbagai macam peluruhan radioaktif. Terciptanya neutrino mencakup beberapa proses dari:

1. Reaksi nuklir alami seperti yang terjadi di inti bintang.

2. Reaksi nuklir buatan dalam reaktor nuklir, bom nuklir, atau akselerator partikel.

3. Peluruhan beta dari inti atom atau hadron.

4. Proses spin-down dari bintang neutron.

5. Proses supernova.

6. Saat sinar kosmik atau balok partikel yang dengan cepat menabrak atom.

Tetapi mayoritas neutrino terdeteksi di bumi berasal dari reaksi nuklir di dalam matahari. Di permukaan bumi, fluks sekitar $6,5 \times 10^{10} s/m^2$ neutrino matahari (Evans,2017).

Eksperimen *Homestake* Ray Davis merupakan eksperimen yang pertama mendeteksi efek osilasi neutrino pada akhir tahun 1960-an. Dimana ia mengamati defisit dalam fluks neutrino surya sehubungan dengan prediksi Model Solar Standar dengan menggunakan detektor berbasis klor. Hal ini menimbulkan masalah neutrino surya. Banyak detektor Cherenkov radio dan air yang mengkonfirmasi defisit, tetapi osilasi neutrino tidak pasti diidentifikasi sebagai sumber defisit sampai *Sudbury Neutrino Observatory* memberikan bukti yang jelas mengenai perubahan flavor neutrino pada tahun 2001.

Dalam tahun terakhir, ada banyak keberhasilan mengenai masalah neutrino surya dari hasil percobaan SNO pada tahun 2002. Menipisnya neutrino surya akhirnya ditemukan osilasi ν_e menjadi ν_μ dan ν_τ di dalam matahari oleh efek konservasi resonansi Mikheev-Smirnov-Wolfenstein (MSW). Model surya oleh John Bahcall dan lainnya menjadi Model Standart Solar yang sekarang dapat digunakan menyelidiki sifat-sifat matahari. Eksperimen reaktor Longbaseline

KamLAND mengkonfirmasi nilai parameter osilasi yang diperoleh dari analisis global semua data eksperimen neutrino surya.

4.1.2 Osilasi Neutrino Atmosfer

Mengikuti adanya teori-teori yang diajukan pada tahun 1970-an yang menyarankan penyatuan gaya-gaya lemah, kuat, dan elektromagnetik, beberapa percobaan tentang peluruhan proton diikuti pada tahun 1980-an. Detektor besar seperti IMB (detektor Irvine-Michigan-Brookhaven), MACRO (Monopole, Astrofisika dan Observatorium Sinar Kosmik), dan Kamiokande II telah mengamati defisit dalam rasio fluks muon terhadap elektron neutrino flavor atmosferik. Eksperimen Super-Kamiokande memberika pengukuran osilasi neutrino yang sangat tepat dalam kisaran energi ratusan MeV hingga beberapa TeV, dan dengan garis dasar diameter bumi. Bukti dari ekperimen pertama untuk osilasi neutrino atmosfer diumumkan pada tahun 1998.

Hasil percobaan neutrino atmosfer, matahari, KamLAND, dan K2K dijelaskan oleh osilasi neutrino dalam kerangka model yang paling sederhana dari pencampuran tiga neutrino. Dimana tiga neutrino ν_e, ν_μ, dan ν_τ merupakan kombinasi linier *unitary* dari tiga massif neutrino ν_1, ν_2, dan ν_3. Nilai perbedaan massa kuadrat dari neutrino Δm^2_{21}, nilai absolute $\Delta m^2_{31} \approx \Delta m^2_{31}$, nilai dua sudut maxing (pencampuran) θ_{12} dan θ_{23} dan nilai sudut maxing ketiga θ_{13}. Nilai-nilai fase CP dimana satu untuk neutrino Dirac dan tiga untuk neutrino Majorana, skala absolute massa neutrino. Pada nilai θ_{13} hanya memiliki batas atas yang diperoleh dari ketiadaan osilasi neutrino dalam eksperimen reactor long-baseline CHOOZ dan Palo Verde. Skala absolute massa neutrino merupakan nilai mendekati (limit) eV oleh pengukuran kinematis dari spektrum elektron dalam peluruhan β trinium pada eksperimen Mainz dan Troitzk.

4.1.3 Osilasi Neutrino Dua Generasi

Asumsi pertama yang diambil dalam kasus osilasi neutrino dua generasi adalah neutrino elektron dan neutrino muon yang merupakan keadaan mixing dari dua neutrino, yaitu ν_1 dan ν_2, dengan formulasi (Sukamto,2006)

$$\nu_e = U_{e1}\nu_1 + U_{e2}\nu_2, \tag{4.4}$$

$$\nu_\mu = U_{\mu 1}\nu_1 + U_{\mu 2}\nu_2. \tag{4.5}$$

Dalam teori standard osilasi neutrino sebuah neutrino dengan flavor α dan momentum $\vec{p}$ kreasi dalam proses interaksi muatan-arus lemah dari sebuah muatan lepton l_α^- atau sebuah muatan anti lepton l_α^+, merupakan dijelaskan oleh flavor state (Sukamto,2006)

$$\mid \nu_\alpha >= \sum_{k=1}^{2} U_{\alpha k}^* \mid \nu_k > \qquad (\alpha = e, \mu). \tag{4.6}$$

Kehadiran $U_{\alpha k}^*$ dari $\mid \nu_k >$ dalam flavor state $\mid \nu_\alpha >$ merupakan dekomposisi di persamaan diatas dari muatan-arus leptonik $j_{W,L}^\rho$ dalam kontribusi neutrino masif, operator kreasi dari neutrino masif. Perjalanan awal dari solar neutrino berangkat dari matahari. Dimana pada matahari hanya diproduksi neutrino elektron (Sukamto,2006)

$$\mid \nu_e(0) >= \nu_e. \tag{4.7}$$

Dari persamaan (4.6) dapat dituliskan keadaan awal dari neutrino sebagai berikut (Sukamto,2006):

$$\nu_e(0) = \sum_{k=1}^{2} U_{ek}\nu_k. \tag{4.8}$$

Perjalanan dari osilasi neutrino diasumsikan pada keadaan ruang vakum seperti perjalanan sebuah cahaya yang memenuhi persamaan sinusoidal. Dan meninjau bahwa neutrino merupakan bentuk kuanta energi, sehingga memenuhi persamaan Schrodinger, maka diperoleh persamaan keadaan neutrino elektron yang bergantung waktu(Sukamto,2006)

$$\mid \nu_e(t) >= \sum_{k=1}^{2} U_{ek}^{*} e^{-iE_k t} \mid \nu_k > . \tag{4.9}$$

Karena neutrino merupakan pertikel relativistik maka memenuhi persamaan energi relativistik dan berekspansi menjadi (Sukamto,2006)

$$\begin{aligned} E_k &= \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_k^2} \\ &= \vec{p}\sqrt{1 + \frac{m_k^2}{\vec{p}}} \\ &= \vec{p}\left(1 + \frac{m_k^2}{2\,\vec{p}^{\,2}} - \frac{m_k^4}{4\,\vec{p}^{\,4}} + ...\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Mengansumsikan bahwa neutrino bermassa sangat kecil dan menganggap bahwa momentum hampir sama dengan energi, maka diperoleh hubungan (Sukamto,2006)

$$\begin{aligned} E_k &\simeq \vec{p}\left(1 + \frac{m_k^2}{2\,\vec{p}^{\,2}}\right) \\ E_k &\simeq \vec{p} + \frac{m_k^2}{2\,\vec{p}} \\ E_k &\simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \\ E_k - E_j &\simeq \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

dimana $\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2$. Karena massa neutrino sangat kecil dan mendekati nol diasumsikan bahwa neutrino bergerak mendekati laju cahaya $c = 1$ (Purwanto,2005). Persamaan diatas merupakan keadaan maksimum awal neutrino elektron yang telah menempuh sebuah perjalanan, yang akan berubah secara periodik fluksnya. Lalu mendefinisikan kuantitas baru yang disebut dengan amplitudo transisi $A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha}(t)$ untuk mengetahui perjalanan neutrino elektron,

$$\begin{aligned}
A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta}(t) &\equiv < \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) > \\
&= (\sum_k U^*_{\beta k} \mid \nu_k >)^\dagger (\sum_j U^*_{\alpha j} e^{-iE_j t} \mid \nu_j > \\
&= \sum_{k,j} U^*_{\alpha j} U_{\beta k} e^{-iE_j t} < \nu_k \mid \nu_j > \\
&= \sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t} \\
A_{\nu_e \longrightarrow \nu_e}(t) &= \sum_k U^*_{ek} U_{ek} e^{-iE_k t}, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

dengan $< \nu_k \mid \nu_j >= \delta_{kj}$. Di kuantum, nilai kuadrat dari amplitudo transisi didefinisikan sebagai probabilitas survival $P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha}(t)$ (Sukamto,2006):

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha}(t) &\equiv \mid A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta}(t) \mid^2 \\
&= |< \nu_\alpha \mid \nu_\beta(t) >|^2 \\
&= (< \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) >)^\dagger (< \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) >) \\
&= (\sum_j U^*_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-iE_j t})^\dagger (\sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t}) \\
&= \sum_{k,j} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} e^{-i(E_k - E_j)t} \\
P_{\nu_e \longrightarrow \nu_e}(t) &= \sum_{k,j} \mid U_{ek} \mid^2 \mid U_{ej} \mid^2 e^{-i(E_k - E_j)t} \\
&= \sum_k \mid U_{ek} \mid^2 \mid U_{e1} \mid^2 e^{-i(E_k - E_1)t} + \mid U_{ek} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 e^{-i(E_k - E_2)t} \\
&= \mid U_{e1} \mid^2 \mid U_{e1} \mid^2 e^{-i(E_1 - E_1)t} + \mid U_{e1} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 e^{-i(E_1 - E_2)t} \\
&\quad + \mid U_{e2} \mid^2 \mid U_{e1} \mid^2 e^{-i(E_2 - E_1)t} + \mid U_{e2} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 e^{-i(E_2 - E_2)t} \\
&= \mid U_{e1} \mid^4 + \mid U_{e1} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 e^{-i(E_1 - E_2)t} \\
&+ \mid U_{e2} \mid^2 \mid U_{e1} \mid^2 e^{-i(E_2 - E_1)t} + \mid U_{e2} \mid^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mid U_{e1} \mid^4 + \mid U_{e2} \mid^4 + \mid U_{e1} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 \left(e^{-i(E_1-E_2)t} + e^{-i(E_2-E_1)t}\right) \\
&= \mid U_{e1} \mid^4 + \mid U_{e2} \mid^4 + \mid U_{e1} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 \, 2\cos(E_1 - E_2)t \\
&= \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta 2\cos(E_1 - E_2)t \\
&= \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + 2\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \cos\left(\frac{\Delta m_{12}^2}{2E} t\right). \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Persamaan di atas merupakan sesuatu yang menarik dalam kasus osilasi neutrino. Dimana dalam persamaan tersebut terdapat sebuah massa yang artinya apabila massa neutrino bernilai nol, maka probabilitas survival akan bernilai konstan yang artinya tidak akan terjadi osilasi. Sehingga dapat dikatakan bahwa osilasi neutrino memberikan syarat neutrino harus bermassa dan hal ini menentang asumsi awal dalam SM yang mengatakan bahwa neutrino tak bermassa. Persamaan probabilitas survival dapat disederhanakan dengan mengganti notasi $t \longrightarrow L$ (Sukamto,2006)

$$
P_{\nu_e \longrightarrow \nu_e}(L, E) = \cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta + 2\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta \cos\left(\frac{\Delta m_{12}^2}{2E} L\right). \qquad (4.14)
$$

Pada osilasi neutino dua generasi, neutrino elektron berubah menjadi neutrino muon. Didefinisikan probabilitas survival untuk neutrino muon (Sukamto,2006)

$$
\begin{aligned}
P_{\nu_e \longrightarrow \nu_\mu}(t) &\equiv \mid A_{\nu_e \longrightarrow \nu_\mu}(t) \mid^2 \\
&= |< \nu_\mu \mid \nu_e(t) >|^2 \\
&= |< \nu_\mu \mid \nu_e(t) >|^\dagger |< \nu_\mu \mid \nu_e(t) >| \\
&= \mid \sum_k U_{\mu k}^* \mid \nu_k > U_{ek}^* \mid \nu_k > e^{-iE_k t} \mid^\dagger \\
&\quad \mid \sum_j U_{\mu j}^* \mid \nu_j > U_{\mu j}^* \mid \nu_j > e^{-iE_j t} \mid \\
&= \sum_{k,j} U_{ek}^* U_{\mu k} U_{ej} U_{\mu j}^* e^{-iE_k t} e^{iE_j t} \\
&= \sum_k U_{ek}^* U_{\mu k} U_{e1} U_{\mu 1}^* e^{-iE_k t} e^{iE_1 t} + \sum_k U_{ek}^* U_{\mu k} U_{e2} U_{\mu 2}^* e^{-iE_k t} e^{iE_2 t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= U^*_{e1}U_{\mu 1}U_{e1}U^*_{\mu 1}e^{-iE_1t}e^{iE_1t} + U^*_{e1}U_{\mu 1}U_{e2}U^*_{\mu 2}e^{-iE_1t}e^{iE_2t} \\
&\quad + U^*_{e2}U_{\mu 2}U_{e1}U^*_{\mu 1}e^{-iE_2t}e^{iE_1t} + U^*_{e2}U_{\mu 2}U_{e2}U^*_{\mu 2}e^{-iE_2t}e^{iE_2t} \\
&= \mid U_{\mu 1} \mid^2 \mid U_{e1} \mid^2 + 2 \mid U^*_{e1}U_{\mu 1}U_{e2}U^*_{\mu 2} \mid \cos(E_1 - E_2)t \\
&+ \mid U_{\mu 2} \mid^2 \mid U_{e2} \mid^2 \\
&= 2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta - 2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\cos(E_1 - E_2)t \\
&= 2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\left(1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2_{12}}{2E}L\right)\right) \\
&= 4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{12}}{4E}L\right) \\
&= \sin^2 2\vartheta\sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{12}}{4E}L\right).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Hasil dari perhitungan probabilitas survival neutrino elektron dan probabilitas survival neutrino muon, memenuhi hubungan (Sukamto,2006)

$$
P_{\nu_e \longrightarrow \nu_e} + P_{\nu_e \longrightarrow \nu_\mu} = 1. \tag{4.16}
$$

4.1.4 Osilasi Neutrino Tiga Generasi

Neutrino merupakan salah satu keluarga lepton yang memiliki tiga generasi, yaitu neutrino elektron, neutrino muon, dan neutrino tau. Tidak hanya kasus neutrino dua generasi, neutrino tiga generasi juga dapat ditinjau dalam kasus osilasi neutrino. Neutrino tiga generasi merupakan keadaan *mixing* dari tiga neutrino, yaitu ν_1, ν_2, dan ν_3. Dapat dituliskan (Sukamto,2006)

$$
\mid \nu_\alpha >= \sum_{k=1}^{2} U^*_{\alpha k} \mid \nu_k > \qquad (\alpha = e, \mu, \tau). \tag{4.17}
$$

Persamaan Amplitudo transisi dapat ditulis (Sukamto,2006)

$$\begin{aligned} A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta}(t) &\equiv \; < \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) > \\ &= \sum_{k,j} < \nu_k \mid U^*_{\alpha k} U_{\beta j} e^{-iE_j t} \mid \nu_j > \\ &= \sum_{k,j} U^*_{\alpha k} U_{\beta j} e^{-iE_j t}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dapat dihitung pula probabilitas survival neurino sebagai nilai kuadrat dari amplitudo transisi (Sukamto,2006):

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta}(t) &\equiv \; \mid A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta}(t) \mid^2 \\ &= \; |< \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) >|^2 \\ &= \sum_{k,j} \left(U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t} \right) \left(U_{\alpha j} U^*_{\beta j} e^{iE_j t} \right) \\ &= \sum_{k,j} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} e^{-i(E_k - E_j)t} \\ &= \sum_{k=1}^{3} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\beta k} \mid^2 + \sum_{k \neq j} \mathfrak{Re} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \cos(E_k - E_j)t \\ &\quad + \sum_{k \neq j} \mathfrak{Im} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \sin(E_k - E_j)t \\ P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta}(L) &= \sum_{k=1}^{3} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\beta k} \mid^2 + \sum_{k \neq j} \mathfrak{Re} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \cos\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} L \right) \\ &\quad + \sum_{k \neq j} \mathfrak{Im} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \sin\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} L \right). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Probabilitas survival untuk neutrino yang sama dimana $\alpha = \beta$, akan memperoleh (Sukamto,2006)

$$P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha}(L) = \sum_{k=1}^{3} \mid U_{\alpha k} \mid^4 + \sum_{k \neq j} \mathfrak{Re} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \cos\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} L \right)$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{k\neq j} \Im\mathfrak{m} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \sin\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} L\right) \\
= & \sum_{k=1}^{3} \mid U_{\alpha k} \mid^4 + \sum_{k\neq j} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E} L\right)\right) \\
= & \left(\sum_{k=1}^{3} \mid U_{\alpha k} \mid^2\right)^2 - 2\sum_{k\neq j} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E} L\right) \\
= & \ 1 - 2\sum_{k\neq j} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E} L\right).
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Asumsikan heirarki kuat massa yang dimiliki neutrino sebagai berikut (Sukamto,2006)

$$
m_n \gg m_k \simeq m_j, \tag{4.21}
$$

dan membentuk selisih kuadrat

$$
\mid m_n^2 - m_j^2 \mid \gg \mid m_k^2 - m_j^2 \mid . \tag{4.22}
$$

Dari asumsi hierarki massa neutrino, maka probabilitas survival neutrino dapat ditulis sebagai (Sukamto,2006)

$$
\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\alpha}(L) &= 1 - 2\sum_{k\neq j} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kj}}{4E} L\right) \\
&= 1 - 2\sum_{k\neq n} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha n} \mid^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kn}}{4E} L\right) \\
&\quad -2\sum_{j\neq n} \mid U_{\alpha n} \mid^2 \mid U_{\alpha j} \mid^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{jn}}{4E} L\right) \\
&= 1 - 4\sum_{k\neq n} \mid U_{\alpha k} \mid^2 \mid U_{\alpha n} \mid^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kn}}{4E} L\right) \\
&= 1 - 4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{kn}}{4E} L\right)
\end{aligned}
$$

$$= \quad 1 - \sin^2 2\vartheta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2_{kn}}{4E} L \right). \tag{4.23}$$

Hasil diatas menyimpulkan bahwa, osilasi neutrino mensyaratkan massa tidak sama dengan nol dan nondegenerasi massa. Osilasi tiga neutrino dengan asumsi heirarki kuat dapat menjelaskan hasil neutrino matahari dan neutrino atmosferik. Heirarki kuat juga dapat mereduksi osilasi neutrino tiga generasi kedalam bentuk osilasi neutrino dua generasi (Purwanto,2005).

4.2 Perusakan Simetri CPT pada Osilasi Neutrino

Simetri mendasar dari alam merupakan simetri CPT. Terlihat bahwa CPT menyebabkan pelanggaran Lorentz dalam teori medan kuantum. Simetri CPT membutuhkan kesetaraan massa dan kesetaraan laju peluruhan antara materi dan anti materi.

Transformasi gabungan CPT merupakan teori dasar dalam Teori Medan Kuantum dalam waktu ruang datar. Invarian terakhir merupakan Teori Medan Kuantum lokal yang dapat digunakan untuk menggambarkan standar fenomenologis fisika partikel hingga saat ini. Teorema CPT dapat dinyatakan sebagai teori kuantum yang diformulasikan pada ruang waktu datar, simetris dalam transformasi gabungan CPT, dengan syarat teori sesuai, lokalitas, unitary, dan invariansi Lorentz. Namun jika tidak memenuhi syarat, atau mungkin adanya perusakan asumsi yang mendasari teori ini dalam model gravitasi kuantum, yaitu kovariansi Lorentz, *unitary* atau lokalitas interaksi yang menyebabkan efek dari adanya perusakan simetri CPT (Mavromatos,2008).

Perusakan simetri CP diizinkan dalam SM jika fase kompleks muncul dalam matriks PMNS yang menjelaskan *mixing* neutrino atau matriks CKM yang menjelaskan *mixing* quark. Dalam kasus yang paling sederhana menggambarkan matrik PMNS merupakan *unitary*, SM menempatkan tiga neutrino dengan massa Dirac yang berosilasi diantara tiga nilai eigen massa neutrino. Dalam kasus lain yang mana matrik PMNS merupakan parameter tambahan yang dibutuhkan untuk menjelaskan parameter *mixing* neutrino dalam osilasi neutrino dan pembangkit massa. Dimana neutrino bukan lagi massa Dirac tetapi massa Majorana. Parameter penambahan massa dan *mixing* sudut dengan menambahkan matrik PMNS dimana terdapat lebih dari tiga flavor neutrino. Dan para ilmuwan mempelajari osilasi neutrino yang mempertimbangkan kesesuaian data osilasi neutrino secara eksperimental ke matrik PMNS dengan empat neutrino steril dan empat nilai eigen massa (Esmaili,2013).

Eksperimen osilasi neutrino baseline-long, T_2K, dan NOVA, mungkin dapat menemukan bukti bahwa CP yang merusak fase Dirac. Jika neutrino merupakan fermion Majorana, matriks PMNS dapat memiliki dua CP tambahan yang merusak fase Majorana, yang mengarah pada sumber empat CP dalam SM. Bukti eksperimental untuk neutrino Majorana adalah peluruhan beta ganda *neutrinoless*.

Neutrino dan antineutrino bertansformasi dengan CP yang mana akan berubah posisi neutrino menjadi anti neutrino dan membalikkan helisitas, dapat dituliskan secara umum (Giunti,2007)

$$\nu_\alpha \xleftrightarrow{CP} \overline{\nu}_\alpha. \tag{4.24}$$

Maka dari itu transformasi CP untuk osilasi neutrino (Giunti,2007)

$$\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{CP} \overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta. \tag{4.25}$$

Sedangkan untuk transformasi T pada neutrino secara umum (Giunti,2007)

$$\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta \overset{T}{\longleftrightarrow} \nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha, \tag{4.26}$$

dan anti neutrino dapat ditulis (Giunti,2007)

$$\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta \overset{T}{\longleftrightarrow} \overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha. \tag{4.27}$$

Dan terakhir transformasi CPT dapat ditulis (Giunti,2007)

$$\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta \overset{CPT}{\longleftrightarrow} \overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha. \tag{4.28}$$

4.2.1 CPT

Transformasi CPT merupakan simetri terhadap teori medan kuantum lokal. Teori osilasi neutrino dirumuskan dalam kerangka teori medan kuantum lokal, dimana CPT adalah simetri dari probabilitas osilasi. Amplitudo transisi osilasi neutrino dapat dituliskan (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} &= A_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha} \\ &= <\nu_\alpha \mid \nu_\beta(t)> \\ &= (U_{\alpha k} \mid \overline{\nu}_k >)^\dagger \, U_{\beta k} e^{-iE_k t} \mid \nu_\beta > \\ &= \sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dan nilai probabilitas survival neutrino dan anti neutrino (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} &= P_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha} \\ &= \mid A_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha} \mid^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_j U^*_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-iEt}\right)^\dagger \sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t} \\
&= \sum_{k,j} U_{\beta k} U^*_{\alpha k} U^*_{\beta j} U_{\alpha j} e^{-i(E_k - E_j)t} \\
&= \sum_{k,j} U_{\beta k} U^*_{\alpha k} U^*_{\beta j} U_{\alpha j} e^{-i\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E}L},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

yang memiliki implikasi fenomenologis yang sangat penting. Namun dalam deskripsi alam teori medan kuantum lokal merupakan aproksimasi. Dalam khasus ini ada perusakan kecil terhadap simetri CPT. Eksperimen osilasi neutrino dapat diungkapkan dengan perusakan simetri dengan mengukur nilai bukan nol dari asimetri CPT (Giunti,2007)

$$A^{CPT}_{\alpha\beta} = P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} - P_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha}. \tag{4.31}$$

Saat ini masih belum bisa menjelaskan kenapa neutrino yang ada diluar angkasa, misalnya di matahari, sampai di bumi hanya 30 persen sampai 50 persen saja. Dari sini maka beransumsi kejadian 50 persen sisanya, yang pertama bahwa neutrino mengalami osilasi kebentuk flavor lain. Neutrino elektron menjadi neutrino muon atau neutrino tau.

Kedua ada asumsi lain, bahwa neutrino tidak hanya bisa berubah menjadi neutrino flavor lain, tapi juga bisa berubah menjadi neutrino steril atau antineutrino. Untuk membuktikan asumsi kedua, yang mana neutrino melanggar CPT (dengan berosilasi menjadi neutrino yang lain selain 3 flavor), maka peneliti melakukan percobaan secara teoritis dan ekperimen (Engelhardt,2010). Dalam sebuah eksperimen ini dibutuhkan akselerator penghasil neutrino elektron di titik A dan di titik B tempat detektornya dengan jarak A dan B sekitar 500 km lebih. Pada eksperimen ini diketahui di titik A dihasilkan sebanyak 100 neutrino elektron, dan di titik B kedeteksi sebanyak 50 neutrino elektron, 20 neutrino elektron berubah menjadi neutrino flavor lain, dan 30 neutrino elektron sisanya kemana? Peneliti menggunakan persamaan kuadrat perbedaan massa dan diketahui bahwa neutrino mengalami perusakan CPT (Kostelecky,2003). Selain itu hal ini menjadi sebuah gagasan neutrino mengalami perusakan CPT, karena sebelumnya belum ada partikel yang bisa membuktikan perusakan CPT itu ada.

4.2.2 CP

Transformasi CP saling bertukar neutrino dengan helisitas negatif dan anti neutrino dengan helisitas positif. Amplitudo transisi dapat dituliskan (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} &= A_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta} \\ &= < \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) > \\ &= (U_{\beta k} \mid \nu_k >)^\dagger U_{\alpha k} e^{-iE_k t} \mid \nu_k > \\ &= \sum_k U^*_{\beta k} U_{\alpha k} e^{-iE_k t}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

dan probabilitas survival neutrino dan anti neutrino (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} &= P_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta} \\ &= \mid A_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta} \mid^2 \\ &= |< \nu_\beta \mid \nu_\alpha(t) >|^2 \\ &= \left(\sum_j U^*_{\beta j} U_{\alpha j} e^{-iE_j t} \right)^\dagger \sum_k U^*_{\beta k} U_{\alpha k} e^{-iE_k t} \\ &= \sum_{k,j} U_{\beta j} U^*_{\alpha j} U^*_{\beta k} U_{\alpha k} e^{-i(E_k - E_j)t} \\ &= \sum_{k,j} U_{\beta j} U^*_{\alpha j} U^*_{\beta k} U_{\alpha k} e^{-i\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} L}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Kasus *mixing* tiga generasi secara kompleks mengarah pada perusakan simetri CP. Perusakan ini dapat terjadi dalam eksperimen osilasi neutrino dengan mengukur asimetri CP (Giunti,2007)

$$A^{CP}_{\alpha\beta} = P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} - P_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta}. \quad (4.34)$$

Simetri CP menyiratkan bahwa asimetri CP bersifat anti simetris dalam flavor indeks α dan β (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} A^{CP}_{\alpha\beta} &= -A^{CP}_{\beta\alpha} \\ &= 4\sum_{k,j} \Im\mathfrak{m}[U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j}] \sin\left(-i\frac{\Delta m^2_{kj}}{2E} L\right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Agar dapat mengukur perusakan simetri CP dalam osilasi neutrino, maka dalam eksperimen harus peka terhadap perilaku osilasi neutrino dan probabilitas transisi anti neutrino. Jika Δm^2_{kj} bernilai jauh lebih kecil, maka nilai probabilitas transisi juga sangat kecil untuk terukur. Sedangkan jika Δm^2_{kj} bernilai jauh lebih besar, maka diambil nilai rata-rata dari asimetri CP (Giunti,2007).

4.2.3 Pembalikan Waktu (T)

Dalam kasus transformasi T memerlukan dua perhitungan yang berbeda yakni neutrino dan anti neutrino. Amplitudo transisi neutrino memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} A_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} &= A_{\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha} \\ &= < \nu_\alpha \mid \nu_\beta(t) > \\ &= \sum_k (U^*_{\alpha k} \mid \nu_k >)^\dagger \, U^*_{\beta k} \mid \nu_k > e^{-iE_k t} \\ &= \sum_k U_{\alpha k} U^*_{\beta k} e^{-iE_k t}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

dan amplitudo transisi anti neurino memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
A_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta} &= A_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha} \\
&= < \overline{\nu}_\alpha \mid \overline{\nu}_\beta(t) > \\
&= \sum_k (U_{\alpha k} \mid \nu_k >)^\dagger \, U_{\beta k} \mid \nu_k > e^{-iE_k t} \\
&= \sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t}. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Sedangkan probabilitas survival neutrino memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} &= P_{\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha} \\
&= \mid A_{\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha} \mid^2 \\
&= |< \nu_\alpha \mid \nu_\beta(t) >|^2 \\
&= \sum_j \left(U_{\alpha j} U^*_{\beta j} e^{-iE_j t} \right)^\dagger \sum_k U_{\alpha k} U^*_{\beta k} e^{-iE_k t} \\
&= \sum_{k,j} U^*_{\alpha j} U_{\beta j} U_{\alpha k} U^*_{\beta k} e^{-i(E_k - E_j)t}, \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

dan probabilitas survival anti neutrino memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
P_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta} &= P_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha} \\
&= \mid A_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha} \mid^2 \\
&= |< \overline{\nu}_\alpha \mid \overline{\nu}_\beta(t) >|^2 \\
&= \sum_j \left(U^*_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-iE_j t} \right)^\dagger \sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-iE_k t} \\
&= \sum_{k,j} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-i(E_k - E_j)t}. \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Dalam eksperimen osilasi neutrino perlu mengamati perusakan simetri T dengan mengukur asimetri T neutrino dan anti neutrino (Giunti,2007)

$$A_{\alpha\beta}^{T} = P_{\nu_\alpha \longrightarrow \nu_\beta} - P_{\nu_\beta \longrightarrow \nu_\alpha} \tag{4.40}$$

$$\overline{A}_{\alpha\beta}^{T} = P_{\overline{\nu}_\alpha \longrightarrow \overline{\nu}_\beta} - P_{\overline{\nu}_\beta \longrightarrow \overline{\nu}_\alpha}, \tag{4.41}$$

dalam hal ini mengukur asimetri CP sama dengan mengukur asimetri T (Giunti,2007)

$$A_{\alpha\beta}^{T} = -\overline{A}_{\alpha\beta}^{T} = A_{\alpha\beta}^{CP}. \tag{4.42}$$

Perusakan simetri T dalam osilasi neutrino hanya bergantung pada fase Dirac dari matrik *mixing*. Untuk dapat mengukur perusakan simetri T dalam osilasi neutrino, maka dalam eksperimen harus peka terhadap perilaku osilasi neutrino dari flavor probabilitas transisi (Giunti,2007).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Rumusan osilasi neutrino menunjukkan adanya massa, tapi pada awal ditemukkannya massa neutrino sama dengan nol. Secara fisis suatu benda yang bermassa akan dapat berosilasi. Maka rumusan osilasi neutrino mensyaratkan massa tidak sama dengan nol dan nondegenerasi massa, agar nilai probabilitas survival tidak konstan atau dapat mengalami osilasi.

2. Rumusan perusakan simetri CPT menunjukkan adanya selisih kuadrat massa. Hasil dari beberapa data penelitian dikumpulkan tidak semua neutrino sampai di bumi, ada sebagian neutrino sampai di bumi menjadi neutrino dengan flavor sendiri, ada neutrino yang menjadi flavor lain, dan sisanya neutrino mengalami perusakan CPT. Selisih kuadrat massa berperan untuk mencari persamaan umum dari perusakan simetri CPT pada osilasi neutrino.

5.2 Saran

Penelitian lebih lanjut mengenai osilasi neutrino pada materi.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan Terjemahan. 2008. *Departemen Agama RI*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Bailin, D dan Alexander L. 1993. *Introduction to Gauge Field Theory*. Bristol: IOP Publishing.

Bilenky, SM., 2006. *Mister Neutrino*. Russia: Wesbrokk Mall.

Bilenky, SM., 2016. *Neutrino Oscillations: from an historical perspective to the present status*. Russia: Wesbrokk Mall.

Bilenky, SM., 2012. *Neutrino. History of a unique particle*. Russia: Wesbrokk Mall.

Borissow, Liubo. 2003. *Neutrinos as the Massangers of CPT Violation.*New York: Department of Physics Columbia University.

Bustami, A.G. dkk. 1991. *Al-Qur'an Dan Tafsirnya*. Yogyakarta: PT. Dana Bhakti Wakaf.

Church, E.D dkk. 2002. *Statistical Analysis of Different* $\bar{\nu}\mu \rightarrow \bar{\nu}e$ *Searches.* USA: University of California.

Eidelman, S,dkk. 2004. *Phys. Lett*., B592, 1.

Engelhardt, Netta. dkk. 2010. *Apparent CPT Violation in Neutrino Oscillation Experiments*. South: Brandeis University Department of Physics.

Esmaili, Arman. 2013. *Probling Light Sterile Neutrinos in Medium Baseline Reactor Experiments*. Brazil: Instituto de Fisica Gleb Wataghin.

Esposito, S.2009. *CPT-Violating Neutrino Oscillations*. Italy: Dipartimento di Scienze Fisiche, Universit`a di Napoli "Federico II" and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli Complesso Universitario di Monte S. Angelo, Via Cinthia, I-80126 Naples.

Evans, Justin. 2017. *Letter of Intent: Presisi IceCube Next Generation Upgrade (PINGU) Rev 2*. USA.

Giunti, Carlo dan Chung W. Kim. 2007. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. New York: Oxford University Press.

Glashow, S. L, J. Iliopoulos, and L. Maiani. 1970. *Phys. Rev*., D2,1285–1292.

Greenberg, O.W.1985. *Phys. Rev,. D32*, 1841

Griffiths, Dafid. 2008. *Introduction to Elementary Particles, Second Revised Edition*. Portland: Wiley-VCH.

Hamka, Buya. 1965. *Tafsir Al-Azhar*. Jakarta: Gema Insani.

Hanafi, Muchlis M. 2015. *Pengantin Al-Qur'an Tafsir Surah Ar-Rahman*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an Badan Litbang dan Diklat Kementrian Agama Republik Indonesia.

Jarlskog, C. 1985. *Z .Phys. C29*, 491-497.

Julio. 2003. *Neutrino Mixing dalam Skenario Tiga Generasi*. Depok: Universitas Indonesia.

Kobayashi, M and T. Maskawa. 1973. *Prog. Theory. Phys*., 49, 652–657.

Kostelecky, V. Alan and Matthew Mewes. 2003. *Lorentz and CPT Violation in Neutrinos*. USA: Indiana University Physics Department.

Landau, L. Nucl. 1957. *Phys.*, 3, 127.

Lee, T. D. and C. N. Yang. 1957. *Phys. Rev*., 105, 1671

Majorana,E. 1937. *Nuovo Cim*., 14, 171–184.

Majorana, Ettore. 2006. *Teori Simetri Elektron dan Positron*. New York: Springer.

Manzur, Ibnu.2009. *Lisanul Arab*. Saudi Arabia: Bullag Misr al Matb'ah al-Kubra al-'Amiriyah

Maltoni, M dkk. 2003. *Combining First KamLAND Results with Solar Neutrino Data*. Jerman: C.S.I.C.

Maltoni, M dkk. 2003. *Constraining Neutrino Oscillation Parameters with Current Solar and Atmospheric Data*. Jerman: C.S.I.C.

Mavromatos, Nick E. 2008. *CPT Violation: Theory and Phenomenology*. London: King's Collage London.

Muhammad, Bin Shalih al-Utsaimin. 2004. *Tafsir Surat Yasin: menyelami lebih dalam kandungan dan faedah surat Yasin (terjemahan)*. Bogor: Darul Ilmi Publishing.

Novaes, S. F. 2000. *hep-ph/0001283*, 10th Jorge Andre Swieca Summer School: Particle and Fields, Sao Paulo, Brazil, 31 Jan – 12 Feb 1999.

Nunokawa, Hiroshi dkk. 2007. *CP Violation and Neutrino Oscillations*. Brazil: Departamento de Physics Pontificia Universidade.

Pakvasa, S dam J. W. F. Valle.2003. *Neutrino Properties Before and After KamLAND.* USA: Department of Physics and Astronomy University of Hawaii.

Pei-Hong Gu,dkk.2007. *Dark Energy and Neutrino CPT Violation*. China: Theoretical Physics Division and Key laboratory of particle astrophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing.

Purwanto,Agus. 2003. *Teori Medan Elektro Magnetik I*. Institut Teknologi Sepluh November Surabaya.

Purwanto,Agus. 2005. *Analisa dan Teka-teki Tiga Generasi Neutrino Masif*. Institut Teknologi Sepluh November Surabaya.

Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-Ayat Semesta sisi-sisi Al-Qur'an yang terlupakan*. Bandung: Mizan.

Safa'at, Muhammad Ali. 2006. *Simpangan CP pada Peluruhan Kaon Netral*. Surabaya: Phy. ITS.

Salam, A. 1957. *Nuovo Cim*., 5, 299.

Shihab, M. Quraish. 2009. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Ciputat: Penerbit Lentera Hati.

Sukamto, Heru. 2006. *Skripsi: Osilasi Neutrino*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.

Valle, J.W.F. 2006. *Neutrino Physics Overview*. Spanyol: Universitat de Val 'encia.

LAMPIRAN A

RUMUSAN FISIKA

1. Bentuk Matrik γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

2. Aljabar Dirac

   Hubungan komutasi

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &\equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \\ &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

dimana nilai

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Dan hubungan kovarian dan kontravarian diberikan

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \tag{A.7}$$

Nilai kuadrat dari matrik γ, Pembuktian persamaan (2.32)

$$\left(\gamma^0\right)^2 = \gamma^0\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \tag{A.8}$$

$$\left(\gamma^k\right)^2 = \gamma^k\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & -\sigma^1 \end{pmatrix} = -\sigma^1 = \mathbf{-1}, \tag{A.9}$$

yang mana nilai $\mu = 0, 1, 2, 3$ dan nilai $k = 1, 2, 3$. Dan nilai *Dagger* dalam matrik γ, Pembuktian persamaan (2.33)

$$\begin{aligned} \left(\gamma^0\right)^\dagger &= \left(\gamma^{0*}\right)^\dagger = \begin{pmatrix} 1^* & 0^* \\ 0^* & -1^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma^0, \\ \left(\gamma^k\right)^\dagger &= \left(\gamma^{k*}\right)^\dagger = \begin{pmatrix} 0^* & \sigma^{1*} \\ -\sigma^{1*} & 0^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^k. \end{aligned} \tag{A.10}$$

3. Matrik γ^5

Jika didefinisikan

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{A.11}$$

maka mendapatkan nilai

$$\begin{aligned}
\gamma^5 &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= i\gamma^0\gamma^1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\gamma^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{A.12}$$

sifat-sifat matrik γ^5

$$\left(\gamma^5\right)^2 = \mathbf{1}, \tag{A.13}$$

$$\left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5, \tag{A.14}$$

$$\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0. \tag{A.15}$$

Pembuktian persamaan (C.5)-(C.7)

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^5\right)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \\
\left\{\gamma^5, \gamma^0\right\} &= \gamma^5\gamma^0 + \gamma^0\gamma^5 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0, \\
\left\{\gamma^5, \gamma^1\right\} &= \gamma^5\gamma^1 + \gamma^1\gamma^5 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Kiralitas

Pembuktian persamaan (C.53)-(C.56)

$$\begin{aligned}
P_R + P_L &= \frac{1+\gamma^5}{2} + \frac{1-\gamma^5}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\gamma^5}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma^5}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1, \qquad \text{(A.16)} \\
(P_R)^2 &= \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} + \frac{2\gamma^5}{4} + \frac{\left(\gamma^5\right)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\gamma^5}{2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{4} + \frac{\gamma^5}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\gamma^5}{2} \\
&= \frac{1+\gamma^5}{2} \\
&= P_R, \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(P_L)^2 &= \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{2\gamma^5}{4} + \frac{\left(\gamma^5\right)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\gamma^5}{2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{4} - \frac{\gamma^5}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\gamma^5}{2} \\
&= \frac{1-\gamma^5}{2} \\
&= P_L, \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_R P_L &= \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\left(\gamma^5\right)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= 0, \\
P_L P_R &= \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\left(\gamma^5\right)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= 0. \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

5. Fungsi δ Dirac

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\delta(x)dx &= f(0), \\
\delta(g(x)) = \sum_{\alpha} \frac{\delta(x-a)}{\mid g'(a) \mid}, \quad g(a) &= 0, \;\; g'(a) \neq 0. \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

6. Grup Lorentz

   Transformasi Lorentz merupakan transformasi koordinat linier yang homogen

$$
x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \qquad \text{(A.21)}
$$

   dengan x^{μ} merupakan koordinat ruang-waktu di masa sekarang, dan x'^{μ} merupakan koordinat ruang-waktu di masa lampau. Λ^{μ}_{ν} merupakan matrik kontan 4×4. Batasan grup Lorentz merupakan grup kontinyu enam-parameter yang dapat ditulis dengan transformasi Lorentz yang sangat kecil/infinite:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{\mu}_{\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon \omega^{\mu}_{\nu} \qquad \text{(A.22)} \\
&= lim_{N\to\infty} \left(\delta^{\mu}_{\rho 1} + \frac{\omega^{\mu}_{\rho 1}}{N} \right) \left(\delta^{\rho 1}_{\rho 2} + \frac{\omega^{\rho 1}_{\rho 2}}{N} \right) \cdots \left(\delta^{\rho N-1}_{\nu} + \frac{\omega^{\rho N-1}_{\nu}}{N} \right) \\
&= lim_{N\to\infty} \left[\left(\mathbf{1} + \frac{\omega}{N} \right)^{N} \right]^{\mu}_{\nu} = [e^{\omega}]^{\mu}_{\nu}. \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

7. Representasi Grup Lorentz

   Hubungan komutasi dari generator $J^{\mu\nu}$

$$
[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(J^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - J^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - J^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + J^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}). \qquad \text{(A.24)}
$$

Operator momentum sudut tiga-vektor

$$J^k = -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}J^{jl} \longrightarrow \overrightarrow{J} = (-J^{23}, -J^{31}, -J^{12}), \tag{A.25}$$

dan operator boost tiga-vektor

$$K^k = K^{0k} \longrightarrow \overrightarrow{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}). \tag{A.26}$$

Spin dari generator Lorentz

$$S(\mathbf{1} + \varepsilon\omega) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}. \tag{A.27}$$

8. Grup Lorentz tak Homogen

   Generator dari ruang-waktu translasi

$$P^\mu = i\partial^\mu. \tag{A.28}$$

Dua operator Casimir

$$P^2 = P_\mu P^\mu. \tag{A.29}$$

yang sesuai dengan *eigenvalue*

$$p^2 = m^2, \tag{A.30}$$

yang merupakan massa kuadrat dari partikel. Operator Casimir yang kedua

$$W^2 = W_\mu W^\mu, \tag{A.31}$$

dimana W_μ adalah empat-vektor Pauli-Lubanski

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^{\sigma}. \qquad \text{(A.32)}$$

Mengevaluasi kembali Lorentz-invariant W^2 dari sebuah partikel dengan massa m

$$W^2 = -m^2 \vec{S}^2, \qquad \text{(A.33)}$$

eigenvalue dari relativistik invarian

$$w^2 = -m^2 s(s+1), \qquad \text{(A.34)}$$

memiliki spin dari sebuah partikel. Operator helisitas dapat didefinisikan

$$\hat{h} = \frac{W^0}{s\ |\vec{P}|} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s\ |\vec{P}|}. \qquad \text{(A.35)}$$

9. Persamaan Medan

   Teorema Gauss

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_r)} \delta_V \psi_r \right) = \int_S dS_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_r)} \delta_V \psi_r = 0. \qquad \text{(A.36)}$$

   Persamaan Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_r)} - \frac{\partial L}{\partial \psi_r} = 0 \qquad (r = 1, ..., n). \qquad \text{(A.37)}$$

No.	Simbol	Nama	No.	Simbol	Nama
1	α	alpha	26	β	beta
2	γ	gamma	27	δ	delta
3	ϵ	epsilon	28	ε	varepsilon
4	ζ	zeta	29	η	eta
5	θ	theta	30	ϑ	vartheta
6	ι	iota	31	κ	kappa
7	λ	lambda	32	μ	mu
8	ν	nu	33	ξ	xi
9	π	pi	34	ϖ	varpi
10	ρ	rho	35	ϱ	varrho
11	σ	sigma	36	ς	varsigma
12	τ	tau	37	υ	upsilon
13	ϕ	phi	38	φ	varphi
14	χ	chi	39	ψ	psi
15	ω	omega	40	Γ	Gamma
16	Δ	Delta	41	Θ	Theta
17	Λ	Lambda	42	Ξ	Xi
18	Π	Pi	43	Σ	Sigma
19	Υ	Upsilon	44	Φ	Phi
20	Ψ	Psi	45	Ω	Omega
21	i	imajiner	46	$\Re$	Re
22	∞	infinite	47	∇	nabla
23	$\Im$	Im	48		
24	∂	partial	49		
25	$\dagger$	dagger	50		

Tabel 1.1: Daftar Simbol

10. Simetri Gauge Global

$$j^\mu = i\sum_r \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_r)}\psi_r - \psi_r^* \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_r^*)} \right), \tag{A.38}$$

nilai arus ($\partial_\mu j^\mu = 0$).

11. Daftar Simbol

LAMPIRAN B

PEMBUKTIAN

1. Bukti persamaan (3.1)

$$
\begin{aligned}
L_{H,L} &= -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{L_{\alpha L}}\Phi l'_{\beta R} - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{\nu}_{\alpha\beta}\overline{L_{\alpha L}}\;\widetilde{\Phi}\;\nu'_{\beta R} + H.c. \\
&= -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{L_{\alpha L}}\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right) l'_{\beta R} \\
&- \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{\nu}_{\alpha\beta}\overline{L_{\alpha L}}\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\nu'_{\beta R} + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)[\overline{l'_L}Y'^{l}l'_R + \overline{\nu'_L}Y'^{\nu}\nu'_R] + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)[V_L^{l\dagger}\overline{l'_L}V_L^{l\dagger}Y'^{l}V_R^{l}l'_R V_R^{l} + V_L^{\nu\dagger}\overline{\nu'_L}V_L^{\nu\dagger}Y'^{\nu}V_R^{\nu}\nu'_R V_R^{\nu}] + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)[\overline{l_L}Y^{l}l_R + \overline{n_L}Y^{\nu}n_R] + H.c. \\
&= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\left(\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y^{l}_{\alpha}\overline{l_{\alpha L}}l_{\alpha R} + \sum_{k=1}^{3} y^{\nu}_{k}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR}\right) + H.c. \\
&= \left(-\frac{v}{\sqrt{2}} - \frac{H}{\sqrt{2}}\right)\left(\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y^{l}_{\alpha}\overline{l_{\alpha L}}l_{\alpha R} + \sum_{k=1}^{3} y^{\nu}_{k}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR}\right) + H.c. \\
&= -\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\frac{y^{l}_{\alpha}v}{\sqrt{2}}\overline{l_{\alpha L}}l_{\alpha R} - \sum_{k=1}^{3}\frac{y^{\nu}_{\alpha}v}{\sqrt{2}}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR} \\
&\quad -\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\frac{y^{l}_{\alpha}}{\sqrt{2}}\overline{l_{\alpha L}}l_{\alpha R}H - \sum_{k=1}^{3}\frac{y^{\nu}_{\alpha}}{\sqrt{2}}\overline{\nu_{kL}}\nu_{kR}H
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

2. Bukti persamaan arus leptonik lemah(3.3)

$$
\begin{aligned}
j^{\rho}_{W,L} &= 2\sum_{\alpha=e,\mu,\nu}\overline{\nu'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}l'_{\alpha L} \\
&= 2\overline{\nu'_L}\gamma^{\rho}l'_L \\
&= 2\overline{n_L}V_L^{\nu\dagger}\gamma^{\rho}V_L^{l}l_L \\
&= 2\overline{n_L}U^{\dagger}\gamma^{\rho}l_L \\
&= 2\overline{\nu_L}\gamma^{\rho}l_L
\end{aligned}
$$

$$= \; 2\sum_{\alpha=e,\mu,\nu}\overline{\nu_{\alpha L}}\gamma^{\rho}l_{\alpha L} \tag{B.2}$$

3. Bukti persamaan arus elektromagnetik(3.27)

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi &= \overline{\psi^{C}}\gamma^{\mu}\psi^{C} \\
&= -\xi_C^{*}\psi^{T}\mathcal{C}^{\dagger}\gamma^{\mu}(-\xi_C\gamma^{0}\mathcal{C}\psi^{*}) \\
&= -\psi^{T}\mathcal{C}^{\dagger}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\mathcal{C}\psi^{*} \\
&= -\psi^{T}\mathcal{C}^{\dagger}\gamma^{\mu}\mathcal{C}\overline{\psi}^{T} \\
&= \overline{\psi}\mathcal{C}\gamma^{\mu T}\mathcal{C}^{\dagger}\psi \\
&= \overline{\psi}\gamma^{\mu T}\psi \\
&= -\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

4. Sifat ν_L^C sebagai ν_R dalam Majorana

$$\begin{aligned}
\nu_L^C(x) = \mathcal{C}(\nu_L^{\dagger}(x)\gamma^0)^T \longrightarrow \mathcal{C}(\nu_L'^{\dagger}(x')\gamma^0)^T &= \mathcal{C}(\overline{\nu_L'}(x'))^T \\
&= \mathcal{C}(\mathcal{S}^{-1}\overline{\nu_L}(x))^T \\
&= \mathcal{C}(\mathcal{S}^{-1})^T\mathcal{C}^{-1}\nu_L^C(x)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\nu_L^C(x) \;\longrightarrow\; \mathcal{C}(\mathcal{S}^{-1})^T\mathcal{C}^{-1}\nu_L^C(x) = \mathcal{S}\nu_L^C(x) \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nu_L^C}(x) = \mathcal{C}(\overline{\nu_L^{\dagger}}(x)\gamma^0)^T &\longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\nu_L'^{\dagger}}(x')\gamma^0)^T \\
&= \mathcal{C}((\mathcal{S}^{-1})^{\dagger}\overline{\nu_L^{\dagger}}(x)\gamma^0)^T \\
&= \mathcal{C}((\mathcal{S}^{-1})^{\dagger})^T(\overline{\nu_L^{\dagger}}(x)\gamma^0)^T \\
&= \mathcal{C}((\mathcal{S}^{-1})^{\dagger})^T(\mathcal{C}^{-1})^{\dagger}\nu_L^{\dagger C}(x)\gamma^0 \\
&= \mathcal{C}\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{C}^{-1})^{\dagger}\overline{\nu_L^C}(x)
\end{aligned}$$

$$= \quad \mathcal{S}^{-1}\overline{\nu_L^C}(x) \tag{B.6}$$

$$\overline{\nu_L^C} = (\mathcal{C}\overline{\nu_L}^T)^\dagger\gamma^0 = \nu_L^T(\gamma^0)^T\mathcal{C}^\dagger\gamma^0 = -\nu_L^T\mathcal{C}^\dagger \tag{B.7}$$

Matrik unitary neutrino dua generasi yang paling sederhana untuk mendukung persamaan (4.13):

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

Matrik unitary neutrino tiga generasi

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\nu 1} & U_{\nu 2} & U_{\nu 3} \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

5. Bukti persamaan (D.29)

$$\begin{aligned}
L_{I,L}^{CC} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{\nu_{eL}}(gA_3 - g'B) & \overline{\nu_{eL}}(g(A_1 - iA_2)) \\ \overline{e_L}(g(A_1 + iA_2)) & \overline{e_L}(-gA_3 - g'B) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + g'\overline{e_R}Be_R \\
&= -\frac{1}{2}[\overline{\nu_{eL}}(gA_3 - g'B)\nu_{eL} + \overline{\nu_{eL}}(g(A_1 - iA_2))e_L \\
&+ \overline{e_L}(g(A_1 + iA_2))\nu_{eL} + \overline{e_L}(-gA_3 - g'B)e_L] + g'\overline{e_R}Be_R \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_{eL}}(g(A_1 - iA_2))e_L + \overline{e_L}(g(A_1 + iA_2))\nu_{eL}\right\} \\
&= -\frac{g}{2}\left\{\overline{\nu_{eL}}(A_1 - iA_2)e_L + \overline{e_L}(A_1 + iA_2)\nu_{eL}\right\}. \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}$$

6. Bukti persamaan (D.30)

$$L_{I,L}^{NC} = -\frac{1}{2}[\overline{\nu_{eL}}(gA_3 - g'B)\nu_{eL} + \overline{\nu_{eL}}(g(A_1 - iA_2))e_L$$

$$
\begin{aligned}
&+\quad \overline{e_L}(g(A_1+iA_2))\nu_{eL}+\overline{e_L}(-gA_3-g'B)e_L]+g'\overline{e_R}Be_R\\
&=\quad -\frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_{eL}}(gA_3-g'B)\nu_{eL}+\overline{e_L}(-gA_3-g'B)e_L\right\}+g'\overline{e_R}Be_R\\
&=\quad -\frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_{eL}}(gA_3-g'B)\nu_{eL}-\overline{e_L}(gA_3+g'B)e_L\right\}+g'\overline{e_R}Be_R\\
&=\quad -\frac{1}{2}\left\{\overline{\nu_{eL}}(gA_3-g'B)\nu_{eL}-\overline{e_L}(gA_3+g'B)e_L-2g'\overline{e_R}Be_R\right\}
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

7. Bukti Persamaan (D.38)

$$
\begin{aligned}
L_{I,L}^{(NC)} &= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(gA_3-g'B)\nu_{eL}-\overline{e_L}(gA_3+g'B)e_L-2g'\overline{e_R}Be_R\}\\
&= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(g(\sin\vartheta_w A+\cos\vartheta_w Z)-g'(-\sin\vartheta_w Z+\cos\vartheta_w A))\nu_{eL}\\
&- \overline{e_L}(g(\sin\vartheta_w A+\cos\vartheta_w Z)+g'(-\sin\vartheta_w Z+\cos\vartheta_w A))e_L\\
&- 2g'\overline{e_R}(-\sin\vartheta_w Z+\cos\vartheta_w A)e_R\}\\
&= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(g\sin\vartheta_w A+g\cos\vartheta_w Z+g'\sin\vartheta_w Z-g'\cos\vartheta_w A)\nu_{eL}\\
&- \overline{e_L}(g\sin\vartheta_w A+g\cos\vartheta_w Z-g'\sin\vartheta_w Z+g'\cos\vartheta_w A))e_L\\
&- 2g'\overline{e_R}(-\sin\vartheta_w Z+\cos\vartheta_w A)e_R\}\\
&= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}((g\cos\vartheta_w+g'\sin\vartheta_w)Z+(g\sin\vartheta_w-g'\cos\vartheta_w)A)\nu_{eL}\\
&- \overline{e_L}((g\cos\vartheta_w-g'\sin\vartheta_w)Z+(g\sin\vartheta_w+g'\cos\vartheta_w)A)e_L\\
&- 2g'\overline{e_R}(-\sin\vartheta_w Z+\cos\vartheta_w A)e_R\}
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

8. Bukti persamaan (D.40)

$$
\begin{aligned}
L_{I,L}^{(NC)} &= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}((g\cos\vartheta_w+g'\sin\vartheta_w)Z+(g\sin\vartheta_w-g'\cos\vartheta_w)A)\nu_{eL}\\
&- \overline{e_L}((g\cos\vartheta_w-g'\sin\vartheta_w)Z+(g\sin\vartheta_w+g'\cos\vartheta_w)A)e_L\\
&- 2g'\overline{e_R}(-\sin\vartheta_w Z+\cos\vartheta_w A)e_R\}\\
&= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}((g\cos\vartheta_w+g\frac{\sin\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\sin\vartheta_w)Z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (g\sin\vartheta_w - g\frac{\sin\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\cos\vartheta_w)A)\nu_{eL} \\
&- \quad \overline{e_L}((g\cos\vartheta_w - g\frac{\sin\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\sin\vartheta_w)Z \\
&+ \quad (g\sin\vartheta_w + g\frac{\sin\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\cos\vartheta_w)A)e_L \\
&- \quad 2g\frac{\sin\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\overline{e_R}(-\sin\vartheta_w Z + \cos\vartheta_w A)e_R\} \\
&= \quad -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}((g\cos\vartheta_w + g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w})Z + (g\sin\vartheta_w - g\sin\vartheta_w)A)\nu_{eL} \\
&- \quad \overline{e_L}((g\cos\vartheta_w - g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w})Z + (g\sin\vartheta_w + g\sin\vartheta_w)A)e_L \\
&+ \quad 2g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\overline{e_R}Ze_R - 2g\sin\vartheta_w\overline{e_R}Ae_R \\
&= \quad -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(g\cos\vartheta_w + g\frac{1-\cos^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w})Z\nu_{eL} \\
&- \quad \overline{e_L}(g\cos\vartheta_w - g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w})Ze_L + 2g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\overline{e_R}Ze_R\} \\
&+ \quad \{\frac{1}{2}2g\sin\vartheta_w\overline{e_L}Ae_R\} + \{\frac{1}{2}2g\sin\vartheta_w\overline{e_R}Ae_R\} \\
&= \quad -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z\nu_{eL} - \overline{e_L}(g\cos\vartheta_w - g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w})Ze_L \\
&+ \quad 2g\frac{\sin^2\vartheta_w}{\cos\vartheta_w}\overline{e_R}Ze_R\} + g\sin\vartheta_w\overline{e}Ae \\
&= \quad -\frac{g}{2\cos\vartheta_w}\{\overline{\nu_{eL}}Z\nu_{eL} - (1-2\sin^2\vartheta_w)\overline{e_L}Ze_L + 2\sin^2\vartheta_w\overline{e_R}Ze_R\} \\
&+ \quad g\sin\vartheta_w\overline{e}Ae. \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

9. Bukti persamaan (D.53)

$$
\begin{aligned}
L_{I,Q}^{(CC)} &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{u_L} & \overline{d_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} gA_3 + \frac{1}{3}g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 + \frac{1}{3}g'B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix} \\
&- \frac{2}{3}g'\overline{u_R}Bu_R + \frac{1}{3}g'\overline{d_R}Bd_R \\
&= -\frac{1}{2}\{\overline{u_L}\left(gA_3 + \frac{1}{3}g'B\right)u_L + \overline{u_L}g\left(A_1 - iA_2\right)d_L \\
&+ \overline{d_L}g\left(A_1 + iA_2\right)u_L + \overline{d_L}\left(-gA_3 + \frac{1}{3}g'B\right)d_L\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{2}{3}g'\overline{u_R}Bu_R + \frac{1}{3}g'\overline{d_R}Bd_R \\
&= -\frac{1}{2}(\overline{u_L}g\,(A_1 - iA_2)\,d_L + \overline{d_L}g\,(A_1 + iA_2)\,u_L) \\
&= -\frac{g}{2}(\overline{u_L}\,(A_1 - iA_2)\,d_L + \overline{d_L}\,(A_1 + iA_2)\,u_L) \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}}(\overline{u_L}Wd_L + \overline{d_L}W^{\dagger}u_L) \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\overline{u_L}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)d_LW_{\mu} + H.c. \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}j^{\mu}_{W,Q}W_{\mu} + H.c. \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}
$$

10. Bukti persamaan (D.65)

$$
\begin{aligned}
L &= i\overline{L_L}DL_L + i\overline{Q_L}DQ_L + \sum_{f=e,u,d} i\overline{f_R}Df_R \\
&- \frac{1}{4}\underline{A}_{\mu\nu}\underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
&+ (D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi) - \mu^2\Phi^{\dagger}\Phi - \lambda(\Phi^{\dagger}\Phi)^2 \\
&- y^e(\overline{L_L}\Phi e_R + \overline{e_R}\Phi^{\dagger}L_L) \\
&- y^d(\overline{Q_L}\Phi d_R + \overline{d_R}\Phi^{\dagger}Q_L) - y^u(\overline{Q_L}\tilde{\Phi}u_R + \overline{u_R}\tilde{\Phi}^{\dagger}Q_L) \\
&= i\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{L'_{\alpha L}}DL'_{\alpha L} + i\sum_{\alpha=1,2,3}\overline{Q'_{\alpha L}}DQ'_{\alpha L} \\
&+ i\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{l'_{\alpha R}}Dl'_{\alpha R} + i\sum_{\alpha=d,s,b}\overline{q'^{D}_{\alpha R}}Dq'^{D}_{\alpha R} + i\sum_{\alpha=u,c,t}\overline{q'^{U}_{\alpha R}}Dq'^{U}_{\alpha R} \\
&- \frac{1}{4}\underline{A}_{\mu\nu}\underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
&+ (D_{\rho}\Phi)^{\dagger}(D^{\rho}\Phi) - \mu^2\Phi^{\dagger}\Phi - \lambda(\Phi^{\dagger}\Phi)^2 \\
&- \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau}\left(Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{L'_{\alpha L}}\Phi l'_{\beta R} + Y'^{l*}_{\alpha\beta}\overline{l'_{\beta R}}\Phi^{\dagger}L'_{\alpha L}\right) \\
&- \sum_{\alpha=1,2,3}\sum_{\beta=d,s,b}\left(Y'^{D}_{\alpha\beta}\overline{Q'_{\alpha L}}\Phi q'^{D}_{\beta R} + Y'^{D*}_{\alpha\beta}\overline{q'^{D}_{\beta R}}\Phi^{\dagger}Q'_{\alpha L}\right) \\
&- \sum_{\alpha=1,2,3}\sum_{\beta=u,c,t}\left(Y'^{U}_{\alpha\beta}\overline{Q'_{\alpha L}}\tilde{\Phi}q'^{U}_{\beta R} + Y'^{U*}_{\alpha\beta}\overline{q'^{U}_{\beta R}}\tilde{\Phi}^{\dagger}Q'_{\alpha L}\right). \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

11. Bukti persamaan (D.70)

$$\begin{aligned}
L_I^{(CC)} &= i\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{L'_{\alpha L}}DL'_{\alpha L} + i\sum_{\alpha=1,2,3}\overline{Q'_{\alpha L}}DQ'_{\alpha L} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{L'_{\alpha L}}\left(g\underline{A}\cdot\underline{\tau} - g'B\right)L'_{\alpha L} \\
&- \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2,3}\overline{Q'_{\alpha L}}\left(g\underline{A}\cdot\underline{\tau} + \frac{1}{3}g'B\right)Q'_{\alpha L} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\begin{pmatrix}\overline{\nu'_{\alpha L}} & \overline{\alpha'_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} gA_3 - g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 - g'B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu'_{\alpha L} \\ \alpha'_L\end{pmatrix} \\
&- \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,2,3}\begin{pmatrix}\overline{Q'_{\alpha L}} & \overline{\alpha'_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} gA_3 + \frac{1}{3}g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 + \frac{1}{3}g'B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q'_{\alpha L} \\ \alpha'_L\end{pmatrix} \\
&= -\frac{g}{2}\left(\overline{\nu'_{\alpha L}}(A_1 - iA_2)\alpha'_L + \overline{\alpha'_L}(A_1 + iA_2)\nu'_{\alpha L}\right) \\
&- \frac{g}{2}\left(\overline{Q'_{\alpha L}}(A_1 - iA_2)\alpha'_L + \overline{\alpha'_L}(A_1 + iA_2)Q'_{\alpha L}\right) \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{\nu'_{\alpha L}}W\alpha'_L + \overline{\alpha'_L}W^\dagger\nu'_{\alpha L}\right) - \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{Q'_{\alpha L}}W\alpha'_L + \overline{\alpha'_L}W^\dagger Q'_{\alpha L}\right) \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\overline{\nu'_{\alpha L}}\gamma^\rho(1-\gamma^5)eW_\rho - \frac{g}{2\sqrt{2}}\overline{Q'_{\alpha L}}\gamma^\rho(1-\gamma^5)dW_\rho + H.c. \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}j_W^\rho W_\rho + H.c. \qquad\qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

12. Bukti persamaan (D.108)

$$\begin{aligned}
D_\mu(x)\Phi(x) &= [\partial_\mu + \frac{i}{2}g\underline{A}_\mu(x)\cdot\underline{\tau} + \frac{i}{2}g'B_\mu(x)]\Phi(x) \\
&= \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}[g\underline{A}_\mu(x)\cdot\underline{\tau} + g'B_\mu(x)]\right)\Phi(x) \\
&= \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} g\underline{A}_{\mu 3} - g'B_\mu & g(A_{\mu 1} - iA_{\mu 2}) \\ g(A_{\mu 1} + iA_{\mu 2}) & -g\underline{A}_{\mu 3} - g'B_\mu\end{pmatrix}\right) \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu[v+H(x)] \\
&+ \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} g\underline{A}_{\mu 3} - g'B_\mu & g(A_{\mu 1} - iA_{\mu 2}) \\ g(A_{\mu 1} + iA_{\mu 2}) & -g\underline{A}_{\mu 3} - g'B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H(x) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu[v+H(x)] + \frac{i}{2\sqrt{2}}(g(A_{\mu 1} - iA_{\mu 2})[v+H(x)] \\
&+ (-g\underline{A}_{\mu 3} - g'B_\mu)[v+H(x)]) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu[v+H(x)] + \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu(x)[v+H(x)] \\
&- \frac{i}{2}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z_\mu(x)[v+H(x)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\frac{g}{\sqrt{2}}W_\mu(x)[v+H(x)] \\ \partial_\mu H(x) - \frac{i}{2}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z_\mu(x)[v+H(x)] \end{pmatrix} \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

13. Bukti persamaan (D.109)

$$
\begin{aligned}
L_{Higgs} &= (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H(x) + \frac{ig}{2}W_\mu(x)[v+H(x)] - \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z_\mu(x)[v+H(x)]\right)^\dagger \\
&\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H(x) + \frac{ig}{2}W_\mu(x)[v+H(x)] - \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z_\mu(x)[v+H(x)]\right) \\
&- \mu^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ [v+H(x)] \end{pmatrix}\right)^\dagger\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ [v+H(x)] \end{pmatrix}\right) \\
&- \lambda\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ [v+H(x)] \end{pmatrix}\right)^\dagger\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ [v+H(x)] \end{pmatrix}\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu H(x) + \frac{ig}{2}W_\mu^\dagger(x)[v+H(x)] - \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z_\mu(x)[v+H(x)]\right)^\dagger \\
&\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\partial^\mu H(x) + \frac{ig}{2}W^\mu(x)[v+H(x)] - \frac{i}{2\sqrt{2}}\frac{g}{\cos\vartheta_w}Z^\mu(x)[v+H(x)]\right) \\
&- \frac{\mu^2}{2}[v+H(x)]^2 - \frac{\lambda}{4}([v+H(x)]^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v+H(x)]^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[\partial H]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- &\quad \frac{\mu^2}{2}[v^2 + 2Hv + H^2] - \frac{\lambda}{4}[v^4 + 4Hv^3 + 6v^2H^2 + 4H^3v + H^4] \\
= &\quad \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v + H(x)]^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[\partial H]^2 \\
+ &\quad \frac{v^2\lambda}{2}[v^2 + 2Hv + H^2] - \frac{\lambda}{4}[v^4 + 4Hv^3 + 6v^2H^2 + 4H^3v + H^4] \\
= &\quad \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v + H(x)]^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[\partial H]^2 \\
+ &\quad \frac{\lambda}{4}[2v^4 + 4Hv^3 + 2H^2v^2] - \frac{\lambda}{4}[v^4 + 4Hv^3 + 6v^2H^2 + 4H^3v + H^4] \\
= &\quad \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v + H(x)]^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[\partial H]^2 \\
- &\quad \frac{\lambda}{4}[H^4 + 4vH^3 + 4v^2H^2] \\
= &\quad \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v + H(x)]^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[\partial H]^2 \\
- &\quad \frac{\lambda}{4}[H^2 + 2vH]^2 \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

14. Ketetapan Matrik Y dari kopling Yukawa untuk setiap partikel (p)

$$
V_L^{p\dagger} Y'^p V_R^p = Y^p, \quad dengan \quad Y_{\alpha\beta}^p = y_\alpha^p \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{(B.19)}
$$

LAMPIRAN C

DASAR DARI NEUTRINO

1. Representasi dari Matrik γ

Spesifik dari empat matrik γ^{μ} yang memenuhi hubungan dalam persamaan (2.29) dan (2.30) disebut representasi dari matrik Dirac. Dalam teorema fundamental mengenai representasi matrik Dirac, Pauli membuktikan bahwa semua representasi adalah unitary, yaitu setiap 2 bagian dari empat matrik γ^{μ} dan γ'^{μ} yang memenuhi dalam persamaan (2.29) dan (2.30) dihubungkan dengan transformasi yang sesuai (Giunti,2007)

$$\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1} \tag{C.1}$$

dimana S adalah matrik unitary $(S^{\dagger} = S^{-1})$. Untuk menghilangkan persamaan Dirac yang invarian dalam representasi muatan, medan spinor harus dirubah sebagai (Giunti,2007)

$$\psi' = S\psi \tag{C.2}$$

Ketika perubaha eksplisit dari matrik γ dibutuhkan dalam representasi apapun. Sebagian besar γ adalah diagonal, karena hubungan antikomutasi pada persamaan (2.29). Dari (2.30) dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari γ^0 adalah ± 1 dan nilai eigen dari γ^k adalah $\pm i$ (Giunti,2007).

Representasi yang sederhana dari matrik γ adalah representasi Dirac (Giunti,2007)

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\psi}_D = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

dimana matrik ditulis sebagai matrik 2x2 dan menempatkan D ditulis di bawah kecil untuk menunjukkan representasi Dirac. Matrik σ^k 2x2 adalah matrik Pauli yang sesuai pada Lampiran A. Matrik Pauli dapat digunakan untuk mendefinisikan matrik kiralitas (Giunti,2007)

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{C.4}$$

yang memiliki sifat

$$\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0 \tag{C.5}$$

$$\left(\gamma^5\right)^2 = \mathbf{1} \tag{C.6}$$

$$\left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5 \tag{C.7}$$

Dalam representasi Dirac, matrik γ^5 diberikan (Giunti,2007)

$$\gamma_D^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.8}$$

Untuk mempelajari partikel relativistik seperti neutrino, akan lebih mudah untuk menggunakan representasi kiralitas dimana matrik kiralitas $\gamma_C^5 = -\gamma_D^0$ merupakan diagonal dan $\vec{\gamma}_C = \vec{\gamma}_D$. Dari persamaan (C.4) maka $\gamma_C^0 = -\gamma_D^5$, dengan demikian matrik Dirac 4x4 dalam representasi kiral dapat ditulis dalam blok 2x2 sebagai berikut (Giunti,2007)

$$\gamma_C^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}_C = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_C^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

atau dapat ditulis lebih singkat (Giunti,2007)

$$\gamma_C^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{C.10}$$

dengan matrik 2x2

$$\sigma^\mu = \left(\mathbf{1}, \vec{\sigma}\right), \quad \bar{\sigma}^\mu = \left(-\mathbf{1}, \vec{\sigma}\right) \tag{C.11}$$

Matrik unitary $S_{D\to C}$ yang setara dalam melakukan transformasi (Giunti,2007)

$$\gamma_C^\mu = S_{D\to C}\gamma_D^\mu S_{D\to C}^{-1} \tag{C.12}$$

Dari Dirac untuk representasi kiral diberikan oleh (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} S_{D\to C} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{1} + \gamma_D^0\gamma_D^5\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{1} + \gamma_C^5 - \gamma_C^0\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \tag{C.13}$$

2. Kovariansi Relativistik

Berikut merupakan transformasi Lorentz di persamaan (A.22), medan Dirac $\psi(x)$ akan berubah menjadi (Giunti,2007):

$$\psi(x) \longrightarrow \psi^{'}(x^{'}) = S(\Lambda)\psi(x) \tag{C.14}$$

dengan matrik 4x4 $S(\bigwedge)$ menjadi

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\mu} \tag{C.15}$$

dengan cara ini, persamaan Dirac tetap invarian dengan transformasi Lorentz, sesuai dengan prinsip dari relativistik kovarian (Giunti,2007).

Bentuk eksplisit dari $S(\mathbf{1}+\varepsilon\omega)$ untuk tranformasi Lorentz yang *infinite* (sangat kecil) dalam persamaan (A.23) adalah (Giunti,2007)

$$S(\mathbf{1}+\varepsilon\omega) = \mathbf{1} - \frac{i}{4}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

Bandingkan hal ini dengan persamaan (A.28), akan memperoleh bagian spin dari generator grup Lorentz dalam representasi spinor Dirac

(Giunti,2007):

$$\begin{aligned} S(\mathbf{1}+\varepsilon\omega) &= \mathbf{1}+\frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \\ &= \mathbf{1}+\frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right) \\ &= \mathbf{1}-\frac{i}{4}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{C.16}$$

dengan nilai

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} \tag{C.17}$$

Generator ini memenuhi hubungan komutasi di persamaan (A.25) dari generator grup Lorentz (Giunti,2007).

Untuk transformasi Lorentz finite hingga $\Lambda = e^{\omega}$ dalam persamaan (A.24), mempunyai (Giunti,2007)

$$S(\Lambda) = S(e^{\omega}) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{C.18}$$

Transformasi medan adjoint memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0 \to \psi'^{\dagger}(x)\gamma^0 &= \psi^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 \end{aligned}$$

Eksplisit di persamaan (C.16) dari $S(\Lambda)$ dan pada persamaan (2.30) mempunyai $\gamma^0 S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$. Karena medan adjoint $\bar{\psi}(x)$ bertransformasi menjadi (Giunti,2007)

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x)\gamma^0$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\
&= \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\
&= \bar{\psi}(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 \\
&= \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda) \qquad \text{(C.19)}
\end{aligned}
$$

Berikut lima Hermitian bilinear kovariant bertransfromasi sebagai skalar, vektor, antisymmetric second-rank tensor, pseudovektor, dan pseudoskalar. Untuk batas transformasi Lorentz (Giunti,2007):

$$
\begin{aligned}
S_{ab}(x) = \bar{\psi}_a(x)\psi_b(x) \to S'_{ab}(x') &= \bar{\psi}'_a(x')\psi'_b(x') \\
&= \psi_a'^\dagger(x)\gamma^0 S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \psi_a^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\psi_b(x) \\
&= S_{ab}(x) \qquad \text{(C.20)} \\
V^\mu_{ab}(x) = \bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu\psi_b(x) \to V'^\mu_{ab}(x') &= \bar{\psi}'_a(x')\gamma^\mu\psi'_b(x') \\
&= \psi_a'^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \psi_a^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \psi_a^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu\psi_b(x) \\
&= \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}_a(x)\gamma^\nu\psi_b(x) \\
&= \Lambda^\mu_\nu V^\nu_{ab}(x) \qquad \text{(C.21)} \\
T^{\mu\nu}_{ab}(x) = \bar{\psi}_a(x)\sigma^{\mu\nu}\psi_b(x) \to T'^{\mu\nu}_{ab}(x') &= \bar{\psi}'_a(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'_b(x')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_a'^{\dagger}(x)\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\psi_b'(x') \\
&= \psi_a^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\sigma^{\mu\nu}S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \psi_a^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^0S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\sigma^{\mu\nu}S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\gamma^0S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\sigma^{\mu\nu}S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)S^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}\bar{\psi}_a(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi_b(x) \\
&= \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}T^{\alpha\beta}_{ab}(x) \qquad \text{(C.22)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{\mu}_{ab}(x) = \bar{\psi}_a(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_b(x) \to A'^{\mu}_{ab}(x') &= \bar{\psi}_a'(x')\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_b'(x') \\
&= \psi_a'^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_b'(x') \\
&= \psi_a^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \psi_a^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^0S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\gamma^0S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}\gamma^5\psi_b(x) \\
&= \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}_a(x)\gamma^{\nu}\gamma^5\psi_b(x) \\
&= \Lambda^{\mu}_{\nu}A^{\nu}_{ab}(x) \qquad \text{(C.23)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{ab}(x) = \bar{\psi}_a(x)\gamma^5\psi_b(x) \to P'_{ab}(x') &= \bar{\psi}_a'(x')\gamma^5\psi_b'(x') \\
&= \psi_a'^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^5\psi_b'(x') \\
&= \psi_a^{\dagger}(x)S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \psi_a^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^0S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\gamma^0S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^5S(\Lambda)\psi_b(x) \\
&= \bar{\psi}_a(x)\gamma^5\psi_b(x) \\
&= P_{ab}(x) \qquad \text{(C.24)}
\end{aligned}
$$

dimana telah dipertimbangkan probabilitas yang berada pada medan a dan b. Transformasi dari bilinear kovariant dalam persamaan (C.20)-(C.24) dibawah inversi ruang dan waktu. Interaksi antara medan yang berada (a$\neq$ b)atau interaksi pada dirinya sendiri (a=b) harus dinyatakan dalam Lagrangian melalui bilinear kovarian dalam persamaan diatas, dapat ditulis dengan istilah Lagrangian Skalar. Bilinear dalam persamaan diatas dapat disebut juga dengan Arus (Giunti,2007).

3. *Boosts*

Bagian spin dari operator Boosts K^k di persamaan (A.27) adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} K^k = J^{0k} \rightarrow & \vec{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}) \\ K^k_{spin} = -\frac{1}{2}\sigma^{0k} = & -\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^k = -\frac{i}{2}\sigma^k \end{aligned} \tag{C.25}$$

dimana mempunyai notasi Dirac (Giunti,2007)

$$\alpha^k \equiv \gamma^0\gamma^k \tag{C.26}$$

dengan

$$\left\{\alpha^k, \alpha^j\right\} = 2\delta^{kj} \tag{C.27}$$

gambaran eksplisit dari matrik α^k dalam representasi Dirac dan representasi Kiral dari matrik γ adalah (Giunti,2007)

$$\alpha^k_D = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^k_C = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix} \tag{C.28}$$

Matrik $S^k_{boost}(\varphi)$ untuk boost dengan kecepatan $v = tan\varphi$ disepanjang arah sumbu x^k dapat ditulis sebagai berikut (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} S^k_{boost}(\varphi) &= e^{-i\varphi K^k_{spin}} \\ &= e^{-i\varphi\left(-\frac{i}{2}\alpha^k\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\varphi\alpha^k} \\ &= cosh\frac{\varphi}{2} - \alpha^k sinh\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{C.29}$$

dimana φ merupakan kecepatan yang diberikan (Giunti,2007)

$$cosh\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma+1}{2}, \quad sinh\frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma-1}{2}, \quad \gamma = \left(1-v^2\right)^{-1/2} \tag{C.30}$$

karena $\vec{\alpha}$ merupakan Hermitian, maka $S^k_{boost}(\varphi)$ juga Hermitian (Giunti,2007)

$$\left[S^k_{boost}(\varphi)\right]^\dagger = S^k_{boost}(\varphi) \tag{C.31}$$

tapi tidak unitary. Hal ini konsisten dengan fakta bahwa sebuah boost $\psi^\dagger\psi$ bukan skalar, tapi berubah sebagai 4-komponen dari 4-vektor $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Giunti,2007).

4. Rotasi

Bagian spin dari operator momentum sudut J^k dipersamaan (A.25) adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} J^k &= -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}J^{jl} \rightarrow \vec{J} = \left(-J^{23}, -J^{31}, -J^{12}\right) \\ s^k &= -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}J^{jl} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\left(-\frac{1}{2}\sigma_{j,l}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\sigma_{j,l} \\
&= \frac{1}{2}\Sigma_k
\end{aligned} \tag{C.32}
$$

dengan nilai (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
\Sigma^k &\equiv \frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\sigma^{jl} = \frac{i}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\gamma^j\gamma^l \qquad (\sigma^{jl} = i\gamma^j\gamma^l) \\
\vec{\Sigma} &= \left(i\gamma^2\gamma^3, i\gamma^3\gamma^1, i\gamma^1\gamma^2\right)
\end{aligned} \tag{C.33}
$$

memungkinkan juga untuk Σ^k ditulis (Giunti,2007)

$$
\Sigma^k = \gamma^0\gamma^k\gamma^5 \tag{C.34}
$$

Matrik memenuhi hubungan komutasi dan antikomutasi (Giunti,2007)

$$
\left[\Sigma^k, \Sigma^j\right] = 2i\sum_{l}\epsilon^{kjl}\Sigma^l, \qquad \left\{\Sigma^k, \Sigma^j\right\} = 2\delta^{kj} \tag{C.35}
$$

matrik Σ^k memiliki tanggapan yang sama dalam representasi Dirac dan kiral dari matrik γ (Giunti,2007):

$$
\vec{\Sigma}_D = \vec{\Sigma}_C = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{C.36}
$$

dimana jelas bahwa matrik $\vec{\Sigma}$ mempresentasikan generalisasi 4x4 dari matrik pauli 2x2 (Giunti,2007).

Matrik $S^k_{rot}(\theta)$ untuk rotasi melalui sudut θ disekitar sumbu x^k dapat ditulis (Giunti,2007):

$$S^k_{rot}(\theta) \;=\; e^{i\theta S^k} = e^{i\theta \cdot \frac{1}{2}\Sigma^k} = e^{\frac{i}{2}\theta\Sigma^k} = \cos\frac{\theta}{2} + i\Sigma^k sin\frac{\theta}{2} \quad \text{(C.37)}$$

karena Σ^k merupakan Hermitian, karena memiliki imajiner maka (Giunti,2007):

$$\left[S^k_{rot}(\theta)\right]^{\dagger} = \left[S^k_{rot}(\theta)\right]^{-1} \qquad \text{(C.38)}$$

yang menyiratkan bahwa $\psi^{\dagger}\psi$ merupakan skalar dibawah rotasi (Giunti,2007).

Rotasi 2π mengubah tanda ψ, karena $S^k_{rot}(2\pi) = 1$. Karena itu, tanda ψ tidak memiliki arti fisik. Semua kuantisasi fisik bergantung pada Bilinear Kovariant dalam persamaan (C.20)-(C.24), yang tidak invariant dengan perubahan muatan tanda global semua medan fermion, tetapi juga transformasi global semua medan fermion. Invarian ini sesuai dengan teorema Noether's dengan konversi jumlah number fermion, yang konsisten dengan konservasi momentum sudut. Hilangnya fermion tanpa tercipta atau musnah (kreasi atau anihilasi) fermion yang lain yang akan menyiratkan perubahan muatan $\frac{1}{2}$ dari total momentum sudut (Giunti,2007).

5. Invarian

Operator Casimir pertama adalah $P^2 = P^{\mu}P_{\mu}$, dimana $P^{\mu} = i\partial^{\mu}$ adalah operator momentum persamaan (A.29). Oleh karena itu, $P^2 =$

$-\Box$ dan dari persamaan Klein-Gordon(2.36), memenuhi medan Dirac (Giunti,2007).

Operator Casimir kedua adalah $W^2 = W^\mu W_\mu$, dengan Pauli-Lubanski empat vektor W_μ diberikan persamaan (A.33), yang membentuk spin dari partikel, menurut persamaan (A.35). Dari persamaan (A.32) dan (C.32), kita memiliki ruas sisa (Giunti,2007):

$$
\begin{aligned}
W^0 = 0, \qquad\qquad \vec{W} &= m\,\vec{s} \\
&= \frac{1}{2} m\,\vec{\Sigma}
\end{aligned}
\tag{C.39}
$$

dimana melihat persamaan (C.32) $s^k = \frac{1}{2}\Sigma^k$ dan $\vec{s} = \frac{1}{2}\,\vec{\Sigma}$. Karena itu (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
W^2 &= -\left(m\,\vec{s}\right)^2 \\
&= -\left(m\frac{1}{2}\,\vec{\Sigma}\right)^2 \\
&= -m^2\frac{1}{4}\,\vec{\Sigma}^2 \\
&= -m^2 s(s+1) \\
&= -m^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \\
&= -m^2\frac{1}{2}\frac{3}{2} \\
&= -\frac{3}{4}m^2
\end{aligned}
\tag{C.40}
$$

yang menunjukkan bahwa medan Dirac menggambarkan partikel dengan spin $s = \frac{1}{2}$ (Giunti,2007).

6. Helisitas

Dari persamaan (C.32), operator helisitas dari persamaan (A.35) diberikan (Giunti,2007):

$$\hat{h} = \frac{W^0}{s\,|\vec{P}|} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s\,|\vec{P}|}$$

dimana

$$\begin{aligned} S^k &= \frac{1}{2}\Sigma^k \\ \vec{S} &= \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \\ \vec{S} &= s\,\vec{\Sigma} \\ \frac{\vec{S}}{s} &= \vec{\Sigma} \end{aligned}$$

maka

$$\hat{h} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s\,|\vec{P}|} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|} \tag{C.41}$$

dimana $\hat{h}$ merupakan operator helisitas, $\vec{S}$ merupakan operator spin, s merupakan spin dari suatu partikel, dan $\vec{P}$ merupakan eigen value (nilai eigen). Karena kuadrat dari operator helisitas dalam persamaan (C.41) adalah satu, nilai eigen dari helisitas untuk fermion Dirac adalah h=$\pm$1. Massa m dan spin s (mungkin sama dengan bilangan kuantum lainnya) partikel yang berbeda. Keadaan dari sebuah partikel didefinisikan oleh 3 komponen dari momentum $\vec{P}$ dan helisitas (Giunti,2007).

7. Transformasi Gauge

Teori gauge merupakan gambaran sekuruh interaksi partikel elementer yang meliputi interaksi lemah, interaksi kuat, dan interaksi elektromagnetik. Interaksi antar partikel direpresentasikan oleh suatu medan yang biasa disebut dengan medan gauge. Medan elektromagnetik atau foton merupakan suatu medan gauge yang merepresentasikan interaksi antarpartikel yang bermuatan listrik di dalam elektrodinamika. Gluon merupakan medan gauge yang merepresentasikan interaksi antar quark. Dan boson merupakan medan gauge yang representasikan interaksi lemah .

Teori gauge salah satunya dapat digunakan dalam penjabaran teori medan kuantum dan sangat terikat oleh prinsip simetri. Teori yang dibangun berdasarkan prinsip simetri menunjukkan bahwa teori tersebut harus invarian terhadap transformasi global atau transformasi lokal gauge dari simetri yang dibagun. Jika teori tersebut invarian, maka nilai dari besaran fisis yang dihasilkan tidak tergantung pada kerangka acuan inersia dimana besaran tersebut diukur. Transformasi gauge terdiri dari dua jenis yaitu, transformasi global gauge didefinisikan sebagai transformasi yang mana parameter transformasinya berupa bilangan real dan berlaku sama untuk setiap titik sebuah sistem dalam ruang-waktu. Dan transformasi lokal gauge adalah transformasi yang mana transformasi yang digunakan berupa suatu fungsi terhadap ruang dan waktu.

Lagrangian Dirac dipersamaan (2.25) merupakan invarian untuk transformasi gauge global U(1) dari tipe(Giunti,2007)

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\theta}\psi(x) \tag{C.42}$$

dimana θ adalah parameter arbitrary. Dalam hal ini, teorema Noether menyiratkan bahwa arus elektromagnetik (Giunti,2007)

$$j^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{C.43}$$

mengembangkan

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0 \tag{C.44}$$

Operator muatan yang terkait adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x j^0(x) \\ &= \int d^3x q\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \\ &= q\int d^3x\psi^{\dagger}(x)\gamma^0\gamma^0\psi(x) \\ &= q\int d^3x\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \end{aligned} \tag{C.45}$$

dimana q adalah muatan listrik dari partikel (Giunti,2007).

8. Kiralitas

Matrik γ^5 juga disebut matrik kiralitas. Karena matrik kiralitas adalah Hermitian persamaan (C.7), maka dapat di diagonalkan dengan transformasi unitary $U\gamma^5U^{\dagger} = \gamma^5_{diag}$, dengan $U^{\dagger} = U^{-1}$. Karena $(\gamma^5)^2 = 1$ (persamaan (2.24)), nilai eigen γ^5 adalah ± 1. Bahkan, dalam representasi kiral dipersamaan (C.9), γ^5 adalah diagonal atau disingkat diag (1,1,-1,-1) (Giunti,2007).

Diberi tanda medan ψ_R dan ψ_L yang merupakan fungsi eigen dari γ^5 dengan nilai eigen +1 dan -1, masing-masing (Giunti,2007):

$$\gamma^5\psi_R = +\psi_R \tag{C.46}$$

$$\gamma^5\psi_L = -\psi_L \tag{C.47}$$

medan kiral ψ_R dan ψ_L masing-masing disebut tangan kanan(*right-handed*) dan tangan kiri (*left-handed*) (Giunti,2007).

Untuk membagi medan spinor generik ψ menjadi komponen tangan kanan dan tangan kiri (Giunti,2007):

$$\psi = \psi_R + \psi_L \tag{C.48}$$

dengan

$$\psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi \tag{C.49}$$

$$\psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi \tag{C.50}$$

akan lebih mudah untuk mendefinisikan matrik proyeksi kiralitas (Giunti,2007)

$$P_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} \tag{C.51}$$

$$P_R \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} \tag{C.52}$$

memenuhi

$$P_R + P_L = 1, \tag{C.53}$$

$$(P_R)^2 = P_L, \tag{C.54}$$

$$(P_L)^2 = P_R, \tag{C.55}$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0, \tag{C.56}$$

dengan mempertimbangkan Lagrangian Dirac di persamaan (2.25). Menggunakan dekomposisi dalam persamaan (C.48) dari medan spinor ψ, mempunyai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi}\left(i \overleftrightarrow{\partial} - m\right)\psi \\ &= \left(\bar{\psi_R} + \bar{\psi_L}\right)\left(i \overleftrightarrow{\partial} - m\right)\left(\psi_R + \psi_L\right) \end{aligned} \tag{C.57}$$

dengan

$$\psi_R = P_R \psi, \qquad \psi_L = P_L \psi \tag{C.58}$$

dan

$$P_R^\dagger = P_R, \tag{C.59}$$

$$P_L^\dagger = P_L, \tag{C.60}$$

$$P_R \gamma^0 = \gamma^0 P_L, \tag{C.61}$$

$$P_L \gamma^0 = \gamma^0 P_R \tag{C.62}$$

maka mempunyai

$$\bar{\psi_R} = \left(\bar{P_R\psi}\right)(P_R\psi)^\dagger \gamma^0 = P_R^\dagger \psi^\dagger \gamma^0 \psi^\dagger P_R \gamma^0 \psi^\dagger \gamma^0 P_L = \bar{\psi} P_L \tag{C.63}$$

$$\bar{\psi_L} = \left(\bar{P_L\psi}\right) = (P_L\psi)^\dagger \gamma^0 = P_L^\dagger \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\psi} P_R \tag{C.64}$$

Oleh karena itu, empat produk pada Lagrangian persamaan (C.57) dapat menghilang secara identik (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L &= i\bar{\psi} P_L \overset{\leftrightarrow}{\partial} P_L \psi = i\bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial} P_R P_L \psi = 0 && \text{(C.65)}\\
\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R &= i\bar{\psi} P_R \overset{\leftrightarrow}{\partial} P_R \psi = i\bar{\psi} \overset{\leftrightarrow}{\partial} P_L P_R \psi = 0 && \text{(C.66)}\\
m\bar{\psi_R}\psi_R &= m\bar{\psi} P_L P_R \psi = 0 && \text{(C.67)}\\
m\bar{\psi_L}\psi_L &= m\bar{\psi} P_R P_L \psi = 0 && \text{(C.68)}
\end{aligned}$$

Lagrangian Dirac dalam medan kiral ψ_R dan ψ_L menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
L &= \left(\bar{\psi_R} + \bar{\psi_L}\right)\left(i \overset{\leftrightarrow}{\partial} - m\right)(\psi_R + \psi_L)\\
&= \left(i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} - \bar{\psi_R} m + i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} - \bar{\psi_L} m\right)(\psi_R + \psi_L)\\
&= i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R - \bar{\psi_R} m \psi_R + i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R - \bar{\psi_L} m \psi_R\\
&+ i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L - \bar{\psi_R} m \psi_L + i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L - \bar{\psi_L} m \psi_L\\
&= i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R - \bar{\psi_L} m \psi_R - \bar{\psi_R} m \psi_L + i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L\\
&= i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R + i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L - m\left(\bar{\psi_L}\psi_R + \bar{\psi_R}\psi_L\right) && \text{(C.69)}
\end{aligned}$$

dapat dilihat bahwa medan kiral ψ_R dan ψ_L memiliki istilah kinetik independen tapi digabungkan dengan istilah massa. Dari Lagrangian di persamaan (C.69) dapat menemukan persamaan medan (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R &= m\bar{\psi_R}\psi_L\\
i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R &= m\psi_L && \text{(C.70)}\\
i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L &= m\bar{\psi_L}\psi_R\\
i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L &= m\psi_R && \text{(C.71)}
\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa evolusi ruang-waktu dari medan kiral ψ_R dan ψ_L dihubungkan oleh massa m (Giunti,2007).

Medan kiral ψ_R dan ψ_L disebut juga Weyl spinor. Weyl spinor hanya memiliki 2 komponen independen, karena dapat dipahami dekoposisi dalam persamaan (C.45) dari spinor 4-komponen membagi 4-komponen independen dengan merata menjadi 2 kelompok, 1 untuk setiap komponen kiral. Dapat dilihat eksplisit menggunakan representasi dari matrik Dirac. Satu yang tepat adalah representasi kiral dalam persamaan (C.9) dimana (1 representasi dilihat ψ_L 2 komponen independen $P_R\psi_R = 0$) (Giunti,2007):

$$P_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{C.72}$$

dapat ditulis 4-komponen spinor ψ (Giunti,2007),

$$\psi = \begin{pmatrix} X_R \\ X_L \end{pmatrix} \tag{C.73}$$

dimana X_R dan X_L spinor 2-komponen, memiliki (Giunti,2007)

$$\psi_R = \begin{pmatrix} X_R \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ X_L \end{pmatrix} \tag{C.74}$$

menunjukkan secata eksplisit bahwa ψ_R dan ψ_L hanya memiliki 2 komponen independen (Giunti,2007).

Dari persamaan (C.10) dan (C.69), Lagrangian Dirac untuk medan 2 komponen X_R dan X_L adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L &= i\bar{\psi_R} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_R + i\bar{\psi_L} \overset{\leftrightarrow}{\partial} \psi_L - m\left(\bar{\psi_L}\psi_R + \bar{\psi_R}\psi_L\right) \\ &= iX_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu X_R - iX_L^\dagger \bar{\sigma^\mu} \partial_\mu X_L + m\left(X_R^\dagger X_L + X_L^\dagger X_R\right) \end{aligned} \tag{C.75}$$

dan persamaan medan

$$\begin{aligned} iX_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu X_R &= -mX_R^\dagger X_L \\ i\sigma^\mu \partial_\mu X_R &= -mX_L \end{aligned} \tag{C.76}$$

$$\begin{aligned} iX_L^\dagger \bar{\sigma^\mu} \partial_\mu X_L &= mX_L^\dagger X_R \\ i\bar{\sigma^\mu} \partial_\mu X_L &= mX_R \end{aligned} \tag{C.77}$$

karena

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k} = \nabla^k \tag{C.78}$$

persamaan ini dapat ditulis dalam persamaan eksplisit (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} i\sigma^\mu \partial_\mu X_R &= -mX_L \\ i\left(\sigma^0 \partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial}\right) X_R &= -mX_L \\ i\left(\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right) X_R &= -mX_L \end{aligned} \tag{C.79}$$

$$\begin{aligned} -i\bar{\sigma^\mu} \partial_\mu X_L &= -mX_R \\ -i\left(\sigma^0 \partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\partial}\right) X_L &= -mX_R \\ i\left(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right) X_L &= -mX_R \end{aligned} \tag{C.80}$$

Dua komponen medan X_R dan X_L dari sudut pandang relativistik karena bentuk representasi kiral eksplisit untuk matrik $\sigma^{\mu\nu}$ adalah (Giunti,2007)

$$\sigma_C^{0k} = i \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}, \qquad \sigma_C^{kj} = \sum_l \epsilon^{kjl} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} \quad \text{(C.81)}$$

Dari persamaan (C.14) dan (C.18) berikut bahwa medan spinor X_R dan X_L bertransformasi secara independen transformasi Lorentz. Hal yang sangat penting karena mengimplikasikan bahwa 2 komponen spinor adalah representasi nontrivial sederhana dari grup Lorentz dan menganggapnya sebagai jumlah mendasar untuk kontruksi Lagrangian, yang merupakan skalar Lorentz (Giunti,2007).

Dari tanggapan dalam persamaan (C.81) dapat dilihat bahwa medan spinor X_R dan X_L bertransformasi dengan cara rotasi. Untuk rotasi melalui sudut θ disekitar sudut x^k mempunyai (Giunti,2007)

$$X_{R,L} \to \left(cos\frac{\theta}{2} + i\sigma^k sin\frac{\theta}{2} \right) X_{R,L} \quad \text{(C.82)}$$

disisi lain, medan spinor X_R dan X_L bertansformasi dengan cara yang berbeda Lorentz boost. Untuk boost dengan kecepatan $v = tanh\varphi$ disepanjang arah sumbu x^k mempunyai (Giunti,2007)

$$X_R \to \left(cosh\frac{\varphi}{2} - \sigma^k sinh\frac{\varphi}{2} \right) X_R \quad \text{(C.83)}$$

$$X_L \to \left(cosh\frac{\varphi}{2} + \sigma^k sinh\frac{\varphi}{2} \right) X_L \quad \text{(C.84)}$$

Oleh karena itu, medan spinor X_R dan X_L memiliki 2 representasi berbeda dari grup Lorentz, biasa disebut dengan dotted dan undotted (Giunti,2007).

9. Kiralitas Medan Tanpa Massa

Dari persamaan (C.70) dan (C.71) dapat dilihat bahwa evolusi ruang-waktu dari medan kiral ψ_R dan ψ_L decouple untuk m=0. Memperoleh persamaan Weyl (Giunti,2007):

$$i\partial\psi_R = m\psi_L = 0 \tag{C.85}$$

$$i\partial\psi_L = m\psi_R = 0 \tag{C.86}$$

Karena persamaan medan dari medan kiral ψ_R dan ψ_L dipisahkan, medan kiral independen dan kemungkinan salah satu dari 2 medan kiral cocok untuk deskripsi fermion tanpa massa (Giunti,2007).

Mari mempertimbangkan solusi $\psi(x,p)$ dari persamaan Dirac tanpa massa (Giunti,2007):

$$i\partial\psi(x,p) = 0 \tag{C.87}$$

yang juga merupakan fungsi eigen dari operator 4-momentum $P^\mu = i\partial_\mu$ (Giunti,2007)

$$P^\mu\psi(x,p) = p^\mu\psi(x,p) \tag{C.88}$$

dan energi

$$p^0 = E = |\vec{p}| \tag{C.89}$$

Dalam kasus ini, persamaan Dirac tanpa massa pada persamaan (C.87) dapat ditulis (Giunti,2007)

$$\left(\gamma^0 \, |\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}\right) \psi(x,p) = 0 \tag{C.90}$$

dikalikan persamaan di atas dari kiri dengan $\gamma^5\gamma^0$ dan menggunakan persamaan (C.34), diperoleh (Giunti,2007)

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^0 \, |\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}\right) \psi(x,p) &= 0 \\
\gamma^5\gamma^0 \left(\gamma^0 \, |\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}\right) \psi(x,p) &= 0 \\
\left(\gamma^5\gamma^0\gamma^0 \, |\vec{p}| - \gamma^5\gamma^0 \, \vec{\gamma} \cdot \vec{p}\right) \psi(x,p) &= 0 \\
\left(\gamma^5 \, |\vec{p}| - \gamma^0 \, \vec{\gamma} \, \gamma^5 \cdot \vec{p}\right) \psi(x,p) &= 0 \\
\left(\gamma^5 \, |\vec{p}| - \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}\right) \psi(x,p) &= 0 \\
\gamma^5 \, |\vec{p}| \, \psi(x,p) - \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} \, \psi(x,p) &= 0 \\
\vec{\Sigma} \cdot \vec{p} \, \psi(x,p) &= \gamma^5 \, |\vec{p}| \, \psi(x,p) \\
\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi(x,p) &= \gamma^5 \psi(x,p) \qquad \text{(C.91)}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat operator pada tangan kiri tidak lain adalah operator helisitas di persamaan (C.41) dengan $P^\mu \to p^\mu$. Persamaan (C.91) menunjukkan bahwa kiralitas bertepatan dengan helisitas untuk fungsi eigen dari 4-momentum yang merupakan solusi dari persamaan Dirac tak bermassa. Secara khusus, fungsi eigen dari matrik kiralitas adalah fungsi eigen dari operator helisitas dengan nilai eigen yang sama (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_R(x,p) &= \gamma^5\psi_R(x,p) \\
\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_R(x,p) &= \psi_R(x,p) \qquad \text{(C.92)} \\
\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_L(x,p) &= \gamma^5\psi_L(x,p) \\
\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_L(x,p) &= -\psi_L(x,p) \qquad \text{(C.93)}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, medan kiralitas tangan kanan tanpa massa $\psi_R(x,p)$ dengan 4-momentum memiliki helisitas positif dan medan kiralitas tangan kiri tanpa massa $\psi_L(x,p)$ dengan 4-momentum memiliki helisitas negatif (Giunti,2007).

LAMPIRAN D

STANDART MODEL

1. Lagrangian Elektroweak

Dalam simetri grup $SU(2)_L$ disebut isospin lemah. Subskrips L menunjukkan bahwa adanya unsur-unsur grup yang bereaksi dengan cara nontrivial hanya pada komponen kiral tangan kiri dari medan fermion (komponen kiral tangan kanan adalah singlet dalam transformasi isospin lemah). Grup ini memiliki 3 generator dengan notasi (Giunti,2007)

$$I_a \qquad\qquad (a = 1, 2, 3) \tag{D.1}$$

dengan memenuhi relasi komutasi momentum sudut (Giunti,2007)

$$[I_a, I_b] = i\varepsilon_{abc} I_c \tag{D.2}$$

dimana ε_{abc} adalah total tensor antisimetri dengan 3 indeks memiliki $\varepsilon_{123} = 1$. Karakter nonabelian dari kelompok isospin lemah mewujudkan skala generator yang tetap. Misalnya, dalam representasi 2 dimensi generatornya adalah $I_a = \tau_a/2$, dimana τ_1, τ_2, τ_3 adalah 3 matrik Pauli. Matrik Pauli $\tau_a = \sigma_a$ yang tertulis dalam persamaan (C.9). Untuk generator dari grup $SU(2)_L$ menggunakan notasi $\tau_a/2$ untuk membedakan dengan operator spin $\sigma_a/2$. Sebuah skala generator tipe $I_a \longrightarrow c_a I_a$ dengan konstanta *arbitrary* yang mana c_a akan merusak hubungan komutasi pada persamaan (D.2). Hal ini berarti bahwa aksi generator pada setiap representasi adalah unik (Giunti,2007).

Simetri grup $U(1)_Y$ disebut *hypercharge*. Yang mana dihasilkan oleh operator *hypercharge* Y yang terhubung ke I_3 da operator muatan Q oleh relasi Gell-Mann-Nashijima (Giunti,2007)

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{D.3}$$

Realasi ini diperlukan untuk memperbaiki operator *hypercharge* Y pada medan fermion yang tidak dibatasi oleh teori karena $U(1)_Y$ adalah abelian. Selain itu, hubungan Gell-Mann-Nashijima menyiratkan penyatuan interaksi lemah dan elektromagnetik (Giunti,2007).

Untuk memperoleh invarian gauge lokal diperkenalkan 3 medan vektor gauge boson $A_a^\mu(a = 1, 2, 3)$ yang terkait dengan 3 generator $I_a(a = 1, 2, 3)$ dari grup $SU(2)_L$ dan satu vektor medan gauge boson B^μ yang terikat dengan generator Y dari grup $U(1)_Y$. Kovarian derivatif D_μ dalam teori gauge yang menggantikan turunan normal ∂_μ di Lagrangian adalah (Giunti,2007)

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \tag{D.4}$$

dimana diperkenalkan notasi vektor (Giunti,2007)

$$\underline{A}^\mu \equiv (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu), \qquad \underline{I} \equiv (I_1, I_2, I_3) \tag{D.5}$$

dengan produk skalar (Giunti,2007)

$$\underline{A}^\mu \cdot \underline{I} \equiv \sum_{a=1}^{3} A_a^\mu I_a \tag{D.6}$$

Kovarian derivatif dalam persamaan (D.4) ada 2 konstanta kopling independent yaitu, g yang terkait dengan grup $SU(2)_L$ dan g' yang terkait dengan grup $U(1)_Y$ (Giunti,2007).

Dalam teori *elektroweak* $SU(2)_L \times U(1)_Y$ merupakan representasi untuk medan fermion. Khususnya teori V-A mengenai interaksi lemah dan teori 2 komponen neutrino. Untuk membuktikan fenomenologi yang benar mari mengambil asumsi representasi untuk medan fermion. Komponen kiral tangan kiri dari medan fermion yang dikelompokkan ke dalam doublet isospin lemah. Dengan mempertimbangkan generasi pertama dari lepton dan quark (Giunti,2007):

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \qquad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tag{D.7}$$

Dalam persamaan (D.7) dari representasi isospin lemah dari medan fermion, generasi dari grup $SU(2)_L$ diterapkan menjadi $I_a = \tau_a/2$ (Giunti,2007),

$$\underline{I} L_L = \frac{\underline{\tau}}{2} L_L, \qquad \underline{I} Q_L = \frac{\underline{\tau}}{2} Q_L \tag{D.8}$$

dimana $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Aksi dari operator hypercharge Y ditetapkan oleh relasi Gell-Mann-Nashijima di persamaan (D.3) (Giunti,2007):

$$Y L_L = -L_L, \qquad Y Q_L = \frac{1}{3} Q_L \tag{D.9}$$

Oleh karena itu, tangan kanan lepton dan doublet quark masing-masing memiliki hypercharge Y=-1 dan Y=1/3.

Parameter elemen g dari transformasi grup lokal $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dengan satuset 3+1 parameter $(\underline{\theta}(x), \eta(x))$, dengan $\underline{\theta}(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x))$ yang bergantung pada ruang-waktu x (Giunti,2007):

$$g(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \epsilon SU(2)_L \times U(1)_Y \tag{D.10}$$

dengan representasi *unitary* $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$ pada ruang vektor dari sebuah medan (Giunti,2007)

$$U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{i\underline{\theta}(x)\cdot \underline{I} + i\eta(x)\frac{Y}{2}} = U(\underline{\theta}(x))U(\eta(x)) \tag{D.11}$$

dengan

$$U(\underline{\theta}(x)) = e^{i\underline{\theta}(x)\cdot \underline{I}}, \qquad U(\eta(x)) = e^{i\eta(x)\frac{Y}{2}} \tag{D.12}$$

Transformasi dari doublet fermion tangan kiri $g(\theta(x), \eta(x))$ diberikan (Giunti,2007)

$$L_L \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))} L'_L = U(\underline{\theta}(x), \eta(x))L_L = U^l_L(\underline{\theta}(x), \eta(x))L_L \tag{D.13}$$

$$Q_L \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))} Q'_L = U(\underline{\theta}(x), \eta(x))Q_L = U^q_L(\underline{\theta}(x), \eta(x))Q_L \tag{D.14}$$

dimana

$$U^l_L(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{\frac{i}{2}\underline{\theta}(x)\cdot\underline{\tau} - \frac{i}{2}\eta(x)}, \quad U^q_L(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{\frac{i}{2}\underline{\theta}(x)\cdot\underline{\tau} + \frac{i}{6}\eta(x)} \tag{D.15}$$

Dalam Standart Model diansumsikan bahwa medan neutrino hanya memiliki komponen tangan kiri saja. Asumsi ini mengikuti teori dari dua komponen Landau, Lee dan Yang, dan Salam yang menyiratkan bahwa neutrino tak bermassa. Komponen tangan kanan dari fermion lainnya (Giunti,2007):

$$e_R, \qquad u_R, \qquad d_R \tag{D.16}$$

diasumsikan sebagai singlet oleh transformasi grup isospin lemah (Giunti,2007):

$$\underline{I} f_R = 0 \qquad (f = e, u, d) \tag{D.17}$$

Dari relasi Gell-Mann-Nashijima dalam persamaan (D.3), $e_R, u_R,$ dan d_R masing-masing memiliki $Y = -2, 4/3, -2/3$ (Giunti,2007):

$$Ye_R = -2e_R, \qquad Yu_R = \frac{4}{3}u_R, \qquad Yd_R = -\frac{2}{3}d_R \tag{D.18}$$

Lalu, transformasi dari komponen tangan kanan medan fermion mengikuti transformasi dalam persamaan (D.10) diberikan oleh (Giunti,2007):

$$f_R \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} f'_R = U(\underline{\theta}(x), \eta(x))f_R = U_R^f(\eta(x))f_R \qquad (f = e, u, d) \tag{D.19}$$

dimana

$$U_R^e(\eta(x)) = e^{-i\eta(x)}, \qquad U_R^u(\eta(x)) = e^{i\frac{2}{3}\eta(x)}, \qquad U_R^d(\eta(x)) = e^{-\frac{1}{3}i\eta(x)} \tag{D.20}$$

Lagrangian elektroweak Standart Model adalah Lagrangian invarian paling umum yang dapat dinormalisasiulang dalam grup simetri lokal $SU(2)_L \times U(1)_Y$ yang ditulis dalam medan fermion, medan gauge boson, dan doublet Higgs $\Phi(x)$, untuk generasi pertama lepton dan quark memiliki (Giunti,2007):

$$\begin{aligned} L &= i\overline{L_L}DL_L + i\overline{Q_L}DQ_L + \sum_{f=e,u,d} i\overline{f_R}Df_R \\ &- \frac{1}{4}\underline{A}_{\mu\nu}\underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ &+ (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \\ &- y^e(\overline{L_L}\Phi e_R + \overline{e_R}\Phi^\dagger L_L) \\ &- y^d(\overline{Q_L}\Phi d_R + \overline{d_R}\Phi^\dagger Q_L) - y^u(\overline{Q_L}\tilde{\Phi}u_R + \overline{u_R}\tilde{\Phi}^\dagger Q_L) \end{aligned} \tag{D.21}$$

Baris kedua dari persamaan diatas menunjukkan istilah kinetik dan *self-coupling* dari gauge boson. Baris ketiga adalah Lagrangian dari medan Higgs dengan pemutusan simetri secara spontan. Baris keempat dan kelima menggambarkan kopling dari Higgs-fermion Yukawa yang menghasilkan massa lepton (Giunti,2007).

Perhatikan dibaris pertama dalam persamaan (D.21), karena dibawah transformasi dalam persamaan (D.10) medan lepton dan quark berubah sesuai dengan persamaan (D.13),(D.14), dan (D.19) untuk memenuhi invarian gauge, turunan kovarian harus berubah sebagai (Giunti,2007)

$$D_\mu \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} D'_\mu = U(\underline{\theta}(x),\eta(x))D_\mu U^{-1}(\underline{\theta}(x),\eta(x)) \tag{D.22}$$

Hal ini berarti medan gauge boson berubah sebagai (Giunti,2007)

$$\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} \underline{A}'_\mu \cdot \underline{I} = U(\underline{\theta}(x))[\underline{A}_\mu \cdot \underline{I} - \frac{i}{g}\partial_\mu]U^{-1}(\underline{\theta}(x)) \tag{D.23}$$

$$B_\mu \frac{Y}{2} \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} B'_\mu \frac{Y}{2} = U(\eta(x))[B_\mu \frac{Y}{2} - \frac{i}{g}\partial_\mu]U^{-1}(\eta(x)) \tag{D.24}$$

Transformasi dari medan B_μ dapat disederhanakan menjadi (Giunti,2007)

$$B_\mu \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu \eta(x) \qquad \text{(D.25)}$$

yang mana hampir sama dengan transformasi lokal $U(1)_Q$ dari medan elektromagnetik pada QED.

Komponen tangan kiri dan tangan kanan medan fermion bertransformasi dengan cara yang berbeda dibawah transformasi grup gauge (lihat persamaan (D.13),(D.14), dan (D.19)), istilah massa sebanding dengan (Giunti,2007)

$$\overline{f_f} = \overline{f_L} f_R + \overline{f_R} f_L \qquad (f = e, u, d) \qquad \text{(D.26)}$$

pada Lagrangian dilarang oleh simetri gauge. Generasi massa fermion di Standart Model dipenuhi dengan simetri spontan yang menembus mekanisme Higgs (Giunti,2007).

2. Interaksi Elektroweak

Pada subbab ini akan mencari interaksi antara fermion dan gauge boson secara fisik. Dengan memperluas turunan kovarian pada baris pertama dipersamaan (D.21) dan menghilangkan istilah kinetik, mka mendapatkan Lagrangian interaksi yang menggambarkan kopling fermion dan gauge boson (Giunti,2007):

$$L_I = \; - \; \frac{1}{2}\overline{L_L}\left(g\underline{A}\cdot\underline{\tau} - g'B\right)L_L - \frac{1}{2}\overline{Q_L}\left(g\underline{A}\cdot\underline{\tau} - \frac{1}{2}g'B\right)Q_L$$

$$+ \quad g'\overline{e_R}Be_R - \frac{2}{3}g'\overline{u_R}Bu_R + \frac{1}{3}g'\overline{d_R}Bd_R. \tag{D.27}$$

Mari memperhtikan lepton,untuk menurunkan istilah interaksi eksplisit untuk fermion (Giunti,2007):

$$L_{I,L} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{\nu_{eL}} & \overline{e_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}gA_3 - g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 - g'B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_{eL} \\ e_L\end{pmatrix} + g'\overline{e_R}Be_R \tag{D.28}$$

Lalu memisahkan Lagrangian interaksi menjadi Lagrangian yang bermuatan-arus (CC) dengan menghilangkan medan B (Giunti,2007)

$$L_{I,L}^{CC} = -\frac{g}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(A_1 - iA_2)e_L + \overline{e_L}(A_1 + iA_2)\nu_{eL}\} \tag{D.29}$$

diberikan istilah *off-diagonal* pada persamaan (3.28) dan Lagrangian arus netral (NC) (Giunti,2007)

$$L_{I,L}^{NC} = -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(gA_3 - g'B)\nu_{eL} - \overline{e_L}(gA_3 + g'B)e_L - 2g'\overline{e_R}Be_R\} \tag{D.30}$$

diberikan istilah diagonal dalam persamaan (D.28). Sekarang mari memperhatikan Lagrangian muatan-arus dipersamaan (D.29), dengan mendefinisikan medan W^μ yang mana W^+ boson berarti menganihilasi(memusnakan) dan W^- boson berarti kreasi(menciptakan) sebagai (Giunti,2007)

$$W^\mu \equiv \frac{A_1^\mu - iA_2^\mu}{\sqrt{2}} \tag{D.31}$$

mempunyai

$$L_{I,L}^{CC} \quad = \quad -\frac{g}{2}\{\overline{\nu_{eL}}(A_1 - iA_2)e_L + \overline{e_L}(A_1 + iA_2)\nu_{eL}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{g}{\sqrt{2}q}\left\{\overline{\nu_{eL}}We_L + \overline{e_L}W^{\dagger}\nu_{eL}\right\} \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\overline{\nu_e}\gamma^{\mu}\left(1-\gamma^5\right)eW_{\mu} + H.c. \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}j^{\mu}_{W,L}W_{\mu} + H.c. \qquad \text{(D.32)}
\end{aligned}
$$

dimana $j^{\mu}_{W,L}$ adalah muatan arus leptonik (Giunti,2007)

$$j^{\mu}_{W,L} = \overline{\nu_e}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)e = 2\overline{\nu_{eL}}\gamma^{\mu}e_L. \qquad \text{(D.33)}$$

Selanjutnya mempertimbangkan Lagrangian arus-netral dalam persamaan (D.30). Dalam teori tersebut harus mencakup interaksi elektromagnetik yang telah dijelaskan pada Lagrangian kuantum elektrodinamik (QED) (Giunti,2007)

$$L^{(\gamma)}_{I,L} = -ej^{\mu}_{\mu,L}A_{\mu} \qquad \text{(D.34)}$$

dimana e adalah muatan listrik dasar, A_{μ} adalah medan elektromagnetik, dan $j^{\mu}_{\mu,L}$ adalah arus elektromagnetik leptonik (Giunti,2007)

$$j^{\mu}_{\mu,L} = \overline{e}\gamma^{\mu}e. \qquad \text{(D.35)}$$

Tanda minus disebabkan oleh muatan negatif elektron. Lagrangian QED dapat memperoleh Lagrangian arus-netral pada persamaan (D.30) yang mengekspresikan medan elektromagnetik A_{μ} sebagai kombinasi linier dari A^{μ}_3 dan B^{μ}. Dan dapat juga ditulis sebagai kombinasi linier dan kombinasi ortogonal yang mana mendefinisikan medan vektor boson Z^{μ} yang telah berotasi pada medan A^{μ}_3, B^{μ} melalui sudut ϑ_w (Giunti,2007):

$$A^{\mu} \; = \; \sin\vartheta_w A^{\mu}_3 + \cos\vartheta_w B^{\mu} \qquad \text{(D.36)}$$

$$Z^{\mu} \;=\; \cos\vartheta_w A_3^{\mu} - \sin\vartheta_w B^{\mu} \tag{D.37}$$

Sudut ϑ_w disebut dengan sudut *weak mixing* (pencampuran lemah) atau sudut Weinberg, yang mana telah dibahas pertama kali oleh Glashow pada tahun 1961. Sudut pencampuan lemah digunakan untuk memperoleh Lagrangian QED pada kopling antara medan elektromagnetik dan medan fermion. Gambaran dalam persamaan (D.36) dan (D.37) dalam Lagrangian arus-netral dalam persamaan (D.30), memperoleh (Giunti,2007):

$$\begin{aligned} L_{I,L}^{(NC)} &= -\frac{1}{2}\{\overline{\nu_{eL}}((g\cos\vartheta_w + g'\sin\vartheta_w)Z + (g\sin\vartheta_w - g'\cos\vartheta_w)A)\nu_{eL} \\ &- \overline{e_L}((g\cos\vartheta_w - g'\sin\vartheta_w)Z + (g\sin\vartheta_w + g'\cos\vartheta_w)A)e_L \\ &- 2g'\overline{e_R}(-\sin\vartheta_w Z + \cos\vartheta_w A)e_R\} \end{aligned} \tag{D.38}$$

dimana

$$\begin{aligned} B &= -\sin\vartheta_w Z + \cos\vartheta_w A \\ A &= \sin\vartheta_w A + \cos\vartheta_w Z \end{aligned}$$

Karena neutrino merupakan partikel netral tidak memiliki kopling pada medan elektromagnetik maka perlu adanya penyetingan koefisien dari istilah yang sesuai dengan persamaan (D.38) untuk nol. Akan memperoleh (Giunti,2007)

$$g\sin\vartheta_w = g'\cos\vartheta_w, \qquad \Longrightarrow \qquad \tan\vartheta_w = \frac{g'}{g} \tag{D.39}$$

yang dapat menghubungkan konstanta kopling g dan g' dari SM dengan sudut pencampuran lemah ϑ_w (Giunti,2007).

Lalu memasukkan persamaan (D.39) ke persamaan (D.38), (Giunti,2007):

$$\begin{aligned} L_{I,L}^{(NC)} &= -\frac{g}{2\cos\vartheta_w}\{\overline{\nu_{eL}}Z\nu_{eL} - (1-2\sin^2\vartheta_w)\overline{e_L}Ze_L + 2\sin^2\vartheta_w\overline{e_R}Ze_R\} \\ &+ g\sin\vartheta_w\overline{e}Ae. \end{aligned} \tag{D.40}$$

Karena suku terakhir mengandung kopling medan elektron dengan medan elektromagnetik, maka harus bertepatan dengan Lagrangian interaksi QED dalam persamaan (D.34). Dengan demikian diperoleh (Giunti,2007)

$$g\sin\vartheta_w = e. \tag{D.41}$$

Dengan menggunakan relasi dalam persamaan (D.39), juga memiliki (Giunti,2007)

$$g\sin\vartheta_w = g'\cos\vartheta_w = e \tag{D.42}$$

Kedua hubungan diatas sangatlah penting, karena memberikan hubungan antara konstanta kopling g dan g' dan muatan listrik dasar e. Dua relasi dalam persamaan (D.41) dan (D.42) dapat dikombinasikan menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} g\sin\vartheta_w + g'\cos\vartheta_w &= e \\ g^2\sin^2\vartheta_w + g'^2\cos^2\vartheta_w &= e^2 \\ g^2(1-\cos^2\vartheta_w) + g'^2\cos^2\vartheta_w &= e^2 \\ g^2 + g'^2 &= e^2 \end{aligned} \tag{D.43}$$

Lagrangian arus-netral dapat ditulis

$$L_{I,L}^{(NC)} = L_{I,L}^{(Z)} + L_{I,L}^{(\gamma)} \tag{D.44}$$

dimana $L_{I,L}^{(NC)}$ adalah Lagrangian QED dalam persamaan (D.34) dan $L_{I,L}^{(Z)}$ adalah Lagrangian arus-netral lemah, dapat ditulis (Giunti,2007)

$$L_{I,L}^{(Z)} = -\frac{g}{2\cos\vartheta_{\mu}} j_{Z,L}^{\mu} Z_{\mu} \tag{D.45}$$

dengan arus-netral lemah leptonik (Giunti,2007)

$$j_{Z,L}^{\mu} = 2g_L^{\nu}\overline{\nu_{eL}}\gamma^{\mu}\nu_{eL} + 2g_L^{l}\overline{e_L}\gamma^{\mu}e_L + 2g_R^{l}\overline{e_R}\gamma^{\mu}e_R \tag{D.46}$$

diperkenalkan koefisien g_L^{ν}, g_L^{l}, dan g_R^{l}(*superscript* l menunjukkan lepton bermuatan). Secara umum nilai koefisien g_L^f dan g_R^f untuk medan fermion f diberikan oleh (Giunti,2007)

$$g_L^f = I_3^f - q_f \sin^2\vartheta_w \tag{D.47}$$

$$g_R^f = -q_f \sin^2\vartheta_w \tag{D.48}$$

Karena *mixing* medan gauge A_3^{μ} dan B^{μ} dipersamaan (D.36) dan (D.38), dapat dilihat bahwa interaksi arus-netral lemah dari medan fermion yang bermuatan tidak hanya melibatkan komponen tangan kiri, tapi juga komponen tangan kanan. Yang sebanding dengan muatan listrik dan $\sin^2\vartheta_w$ (Giunti,2007).

Arus-netral lemah leptonik dalam persamaan (D.46) dapat ditulis (Giunti,2007)

$$j^{\mu}_{Z,L} = \overline{\nu_e}\gamma^{\mu}(g^{\nu}_V - g^{\nu}_A\gamma^5)\nu_e + \overline{e}\gamma^{\mu}(g^{\nu}_V - g^{\nu}_A\gamma^5)e \tag{D.49}$$

yang mana telah diperkenalkan vektor dan kopling aksial $g^{\nu,L}_V$ dan $g^{\nu,L}_A$ untuk neutrino dan lepton bermuatan. Secara umum nilai g^f_V dan g^f_A untuk medan fermion f diberikan oleh (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} g^f_V = g^f_L + g^f_R &= I^f_3 - q_f \sin^2\vartheta_w + (-q_f \sin^2\vartheta_w) \\ &= I^f_3 - 2q_f \sin^2\vartheta_w \qquad \text{(D.50)} \\ g^f_A = g^f_L - g^f_R &= I^f_3 - q_f \sin^2\vartheta_w - (-q_f \sin^2\vartheta_w) \\ &= I^f_3 \qquad \text{(D.51)} \end{aligned}$$

Kembali pada bagian Lagrangian interaksi quark dipersamaan (D.27), memiliki (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_{I,Q} &= -\frac{1}{2}\overline{Q_L}\left(g\underline{A}\cdot\underline{\tau} + \frac{1}{3}gB\right)Q_L - \frac{2}{3}g'\overline{u_R}Bu_R + \frac{1}{3}g'\overline{d_R}Bd_R \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{u_L} & \overline{d_L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} gA_3 + \frac{1}{3}g'B & g(A_1 - iA_2) \\ g(A_1 + iA_2) & -gA_3 + \frac{1}{3}g'B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ &- \frac{2}{3}g'\overline{u_R}Bu_R + \frac{1}{3}g'\overline{d_R}Bd_R \qquad \text{(D.52)} \end{aligned}$$

dengan cara yang sama seperti lepton maka menemukan Lagrangian muatan-arus (Giunti,2007)

$$L^{(CC)}_{I,Q} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}j^{\mu}_{W,Q}W_{\mu} + H.c. \tag{D.53}$$

dimana $j^{\mu}_{W,Q}$ adalah muatan-arus quark (Giunti,2007)

$$j^{\mu}_{W,Q} = \overline{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^{5})d = 2\overline{u_L}\gamma^{\mu}d_L \tag{D.54}$$

Lagrangian interaksi quark arus-netral dapat dipisahkan menjadi 2 bagian, yaitu interaksi lemah dan elektromagnetik (Giunti,2007)

$$L^{(NC)}_{I,Q} = L^{(Z)}_{I,Q}L^{(\gamma)}_{I,Q} \tag{D.55}$$

dengan

$$L^{(\gamma)}_{I,Q} = -ej^{\mu}_{\gamma,Q}A_{\mu} \tag{D.56}$$

$$L^{(Z)}_{I,Q} = -\frac{g}{2\cos\vartheta_w}j^{\mu}_{Z,Q}Z_{\mu} \tag{D.57}$$

arus quar elektromagnetik $j^{\mu}_{\gamma,Q}$ dapat ditulis (Giunti,2007)

$$j^{\mu}_{\gamma,Q} = \frac{2}{3}\overline{u}\gamma^{\mu}u - \frac{1}{3}\overline{d}\gamma^{\mu}d \tag{D.58}$$

dan arus netral lemah quark $j^{\mu}_{Z,Q}$ dapat ditulis (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{Z,Q} &= 2g^{U}_{L}\overline{u_L}\gamma^{\mu}u_L + 2g^{U}_{R}\overline{u_R}\gamma^{\mu}u_R + 2g^{D}_{L}\overline{d_L}\gamma^{\mu}d_L + 2g^{D}_{R}\overline{d_R}\gamma^{\mu}d_R \\ &= \overline{u}\gamma^{\mu}(g^{U}_{V} - g^{U}_{A}\gamma^{5})u + \overline{d}\gamma^{\mu}(g^{D}_{V} - g^{D}_{A}\gamma^{5})d \end{aligned} \tag{D.59}$$

3. Tiga Generasi

Pada subbabb ini akan menggeneralisasi ekspresi dari Lagrangian interaksi yang bermuatan-arus lemah dan arus-netral pada persamaan (D.32), (D.45), (D.53), dan (D.57) untuk kasus tiga generasi lepton dan quark yang terjadi di alam semesta ini. Mendefinisikan tiga generasi tangan kiri doublet isospin lemah (Giunti,2007)

$$L'_{eL} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'_L \end{pmatrix}, \qquad L'_{\mu L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{\mu L} \\ \mu'_L \end{pmatrix}, \qquad L'_{\tau L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{\tau L} \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \quad \text{(D.60)}$$

$$Q'_{1L} \equiv \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \qquad Q'_{2L} \equiv \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \qquad Q'_{3L} \equiv \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad \text{(D.61)}$$

dan singlet (menggunakan notasi $l'_{\alpha R}$ dalam formula yang sama akan diperlukan penjumlahan pada indeks flavor $\alpha = e, \mu, \tau$. Ketika medan diperlukan secara eksplisit dapat ditulis sebagai e'_R, μ'_R, τ'_R) (Giunti,2007)

$$l'_{eR} \equiv e'_R, \qquad l'_{\mu R} \equiv \mu'_R, \qquad l'_{\tau R} \equiv \tau'_R, \qquad \text{(D.62)}$$

$$q'^{U}_{uR} \equiv u'_R, \qquad q'^{U}_{cR} \equiv c'_R, \qquad q'^{U}_{tR} \equiv t'_R, \qquad \text{(D.63)}$$

$$q'^{D}_{dR} \equiv d'_R, \qquad q'^{D}_{sR} \equiv s'_R, \qquad q'^{D}_{bR} \equiv b'_R. \qquad \text{(D.64)}$$

Bilangan prima pada medan fermion sangat diperlukan, karena medan dalam persamaan (D.60)-(D.74) secara umum tidak memiliki massa tetapi merupakan kombinasi linier dari medan dengan massa tertentu (Giunti,2007).

Lagrangian SM elektroweak versi tiga-generasi dipersamaan (D.21) adalah (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L &= i \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{L'_{\alpha L}} D L'_{\alpha L} + i \sum_{\alpha=1,2,3} \overline{Q'_{\alpha L}} D Q'_{\alpha L} \\ &+ i \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l'_{\alpha R}} D l'_{\alpha R} + i \sum_{\alpha=d,s,b} \overline{q'^{D}_{\alpha R}} D q'^{D}_{\alpha R} + i \sum_{\alpha=u,c,t} \overline{q'^{U}_{\alpha R}} D q'^{U}_{\alpha R} \\ &- \frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (D_\rho \Phi)^\dagger (D^\rho \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
&- \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left(Y'^{l}_{\alpha\beta} \overline{L'_{\alpha L}} \Phi l'_{\beta R} + Y'^{l*}_{\alpha\beta} \overline{l'_{\beta R}} \Phi^\dagger L'_{\alpha L} \right) \\
&- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} \left(Y'^{D}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \Phi q'^{D}_{\beta R} + Y'^{D*}_{\alpha\beta} \overline{q'^{D}_{\beta R}} \Phi^\dagger Q'_{\alpha L} \right) \\
&- \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} \left(Y'^{U}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \tilde{\Phi} q'^{U}_{\beta R} + Y'^{U*}_{\alpha\beta} \overline{q'^{U}_{\beta R}} \tilde{\Phi}^\dagger Q'_{\alpha L} \right). \qquad \text{(D.65)}
\end{aligned}
$$

Tiga baris terakhir berisi kopling Yukawa Higgs-fermion yang menghasilkan massa fermion dan pencampura quark (Giunti,2007).

Lagrangian interaksi elektroweak yang diperoleh dari dua baris pertama pada persamaan (D.65) adalah (Giunti,2007)

$$
L_I^{(\gamma)} = -e j_\gamma^\rho A_\rho \qquad \text{(D.66)}
$$

dengan arus elektromagnetik

$$
j_\gamma^\rho = j_{\gamma,L}^\rho + j_{\gamma,Q}^\rho \qquad \text{(D.67)}
$$

dimana $j_{\gamma,L}^\rho$ dan $j_{\gamma,Q}^\rho$ adalah arus elektromagnetik leptonik dan quark yang diberikan oleh (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
j_{\gamma,L}^\rho &= -\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l'_\alpha} \gamma^\rho l'_\alpha \qquad \text{(D.68)} \\
j_{\gamma,Q}^\rho &= \frac{2}{3} \sum_{\alpha=u,c,t} \overline{q'^{U}_\alpha} \gamma^\rho q'^{U}_\alpha - \frac{1}{3\overline{q'^{D}_\alpha} \gamma^\rho q'^{D}_\alpha}. \qquad \text{(D.69)}
\end{aligned}
$$

Lagrangian interaksi muatan-arus lemah yang diperoleh pada baris pertama dipersamaan (D.65) adalah (Giunti,2007)

$$L_I^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_W^\rho W_\rho + H.c. \tag{D.70}$$

dimana muatan-arus fermion j_W^ρ adalah total dari muatan-arus leptonik dan quark (Giunti,2007)

$$j_W^\rho = j_{W,L}^\rho + j_{W,Q}^\rho \tag{D.71}$$

yang memperoleh

$$j_{W,L}^\rho = 2\left(\overline{\nu'_{eL}}\gamma^\rho e'_L + \overline{\nu'_{\mu L}}\gamma^\rho \mu'_L + \overline{\nu'_{\tau L}}\gamma^\rho \tau'_L\right) \tag{D.72}$$

$$j_{W,Q}^\rho = 2\left(\overline{u'_L}\gamma^\rho d'_L + \overline{c'_L}\gamma^\rho s'_L + \overline{t'_L}\gamma^\rho b'_L\right). \tag{D.73}$$

Muatan-arus leptonik dapat ditulis secara ringkas (Giunti,2007)

$$j_{W,L}^\rho = 2\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu'_{\alpha L}}\gamma^\rho l'_{\alpha L} \tag{D.74}$$

dengan

$$l'_{eL} \equiv e'_L, \qquad l'_{\mu L} \equiv \mu'_L, \qquad l'_{\tau L} \equiv \tau'_L. \tag{D.75}$$

Untuk mendefinisikan operator isospin lemah dan penurunan $I_\pm$ (Giunti,2007)

$$I_\pm = I_1 \pm i I_2 \tag{D.76}$$

yang memiliki hubungan komutasi dipersamaan (D.2) (Giunti,2007)

$$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm \quad \longrightarrow \quad I_3 I_\pm = I_\pm(I_3 \pm 1). \tag{D.77}$$

Jika $\mid \ i, i_3 \ >$ adalah eigenstate dari I dan I_3 dengan eigenvalue i dan i_3,dan untuk $I_\pm \ \mid \ i, i_3 \ >$ adalah eigenstate dari I dan I_3 dengan eigenvalue i dan $\mid \ i, i_3 \ >$ adalah eigenstate dari I dan I_3 dengan eigenvalue i dan $i_3 \pm 1$ (Giunti,2007):

$$I_3 \mid i, i_3 >= i_3 \mid i, i_3 > \quad \longrightarrow \quad I_3 I_\pm \mid i, i_3 >= (i_3 \pm 1) I_\pm \mid i, i_3 > \tag{D.78}$$

Hal ini dapat dijelaskan dalam bentuk matrik eksplisit dari operator $I_\pm$ dalam representasi doublet (Giunti,2007):

$$I_+ \xrightarrow{doublet} \frac{\tau_+}{2} = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_- \xrightarrow{doublet} \frac{\tau_-}{2} = \frac{\tau_1 - i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.79}$$

Dapat dilihat bahwa I_+ meningkatkan komponen yang lebih rendah dari doublet dan meningkatkan eigenvalue dari I_3 dengan satu unit, dan I_- menurunkan komponen atas dan mengurangi eigenvalue dariI_3 dengan satu unit (Giunti,2007).

Muatan-arus lemah fermion dapat ditulis dalam bentuk yang singkat menggunakan operator menaikkan dan menurunkan $I_\pm$ (Giunti,2007):

$$j^\rho_{W,L} \ = \ 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu'_{\alpha L}} \gamma^\rho I_+ L'_{\alpha L} \tag{D.80}$$

$$j^\rho_{W,Q} \ = \ 2 \sum_{\alpha=1,2,3} \overline{Q'_{\alpha L}} \gamma^\rho I_+ Q'_{\alpha L} \tag{D.81}$$

dan arus konjugasi-Hermitian memperoleh

$$j^{\mu\dagger}_{W,L} = 2\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{\nu'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}I_{-}L'_{\alpha L} \qquad \text{(D.82)}$$

$$j^{\mu\dagger}_{W,Q} = 2\sum_{\alpha=1,2,3}\overline{Q'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}I_{-}Q'_{\alpha L}. \qquad \text{(D.83)}$$

Lagrangian interaksi lemah arus-netral diperoleh dari 2 baris pertama dari persamana (D.65) adalah (Giunti,2007)

$$L_I^{(Z)} = -\frac{g}{2cos\vartheta_w}j^{\rho}_Z Z_{\rho} \qquad \text{(D.84)}$$

dengan arus-netral

$$j^{\rho}_Z = j^{\rho}_{Z,L} + j^{\rho}_{Z,Q} \qquad \text{(D.85)}$$

dimana $j^{\rho}_{Z,L}$ dan $j^{\rho}_{Z,Q}$ adalah arus-netral leptonik dan quark diberikan (Giunti,2007)

$$j^{\rho}_{Z,L} = 2g^{\nu}_L\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{\nu'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}\nu'_{\alpha L} + 2\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\left(g^l_L\overline{l'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}l'_{\alpha L} + g^l_R\overline{l'_{\alpha R}}\gamma^{\rho}l'_{\alpha R}\right) \qquad \text{(D.86)}$$

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{Z,Q} &= 2\sum_{\alpha=u,c,t}\left(g^U_L\overline{q'^U_{\alpha L}}\gamma^{\rho}q'^U_{\alpha L} + g^U_R\overline{q'^U_{\alpha R}}\gamma^{\rho}q'^U_{\alpha R}\right) \\ &+ 2\sum_{\alpha=d,s,b}\left(g^D_L\overline{q'^D_{\alpha L}}\gamma^{\rho}q'^D_{\alpha L} + g^D_R\overline{q'^D_{\alpha R}}\gamma^{\rho}q'^D_{\alpha R}\right), \end{aligned} \qquad \text{(D.87)}$$

dengan

$$q'^U_{uL} \equiv u'_L, \qquad q'^U_{cL} \equiv c'_L, \qquad q'^U_{tL} \equiv t'_L, \qquad \text{(D.88)}$$

$$q'^D_{dL} \equiv d'_L, \qquad q'^D_{sL} \equiv s'_L, \qquad q'^D_{bL} \equiv b'_L. \qquad \text{(D.89)}$$

4. Mekanisme Higgs

Di SM massa gauge boson W dan z serta fermion dihasilkan melalui mekanisme Higgs yang mana diimplementasikan oleh doublet Higgs (Giunti,2007)

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi^{+}(x) \\ \Phi^{0}(x) \end{pmatrix}, \tag{D.90}$$

dimana $\Phi^{+}(x)$ adalah medan skalar kompleks yang bermuatan dan $\Phi^{0}(x)$ adalah medan skalar kompleks yang netral. Transformasi doublet Higgs dibawah elemen $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$ dari grup gauge (lihat persamaan (D.10)) diberikan oleh (Giunti,2007)

$$\Phi \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} \Phi' = U(\underline{\theta}(x), \eta(x))\Phi = e^{\frac{i}{2}\underline{\theta}(x)\cdot\underline{\tau}+\frac{i}{2}\eta(x)}\Phi. \tag{D.91}$$

Dengan menggunakan transformasi diatas dan transformasi dalam persamaan (D.22) dari turunan kovarian, maka dapat memverifikasi bahwa bagian Lagrangian SM Higgs (Giunti,2007),

$$L_{Higgs} = (D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi) - \mu^{2}\Phi^{\dagger}\Phi - \lambda\left(\Phi^{\dagger}\Phi\right)^{2} \tag{D.92}$$

adalah invarian dibawah transformasi gauge $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$. Dalam persamaan (D.92) koefisien λ dari quark *self-coupling* dari medan Higgs harus bernilai positif $\lambda > 0$, agar memiliki potensial (Giunti,2007)

$$V(\Phi) = \mu^{2}\Phi^{\dagger}\Phi + \lambda\left(\Phi^{\dagger}\Phi\right)^{2}. \tag{D.93}$$

Koefisien kuadrat dari massa seperti μ^2 adalah diasumsikan bernilai negatif $\mu^2 < 0$ dalam pemutusan simetri spontan (Giunti,2007)

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_Q \tag{D.94}$$

dimana $U(1)_Q$ adalah kelompok simetri gauge interaksi elektromagnetik, yang terkait dengan konservasi muatan listrik yang mana telah diketahui tidak terputus (Giunti,2007).

Mendefinisikan (Giunti,2007):

$$v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{D.95}$$

dengan mengabaikan istilah konstanta yang tidak relevan (*irrelevant*) $v^4/4$, potensial Higgs dipersamaan (D.93) dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$V(\Phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \tag{D.96}$$

Dari persamaan diatas jelas bahwa potensial minimum bernilai jika (Giunti,2007)

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2} \tag{D.97}$$

Dalam teori medan kuantum, potensial minimum dengan kondisi vakum yang merupakan keadaan energi terendah dan eksitansi yang dikuantisasi dari masing-masing medan. Keadaan vakum sesuai dengan keadaan partikel. Fermion dan medan vektor boson yang mengalami putaran bkan nol harus memiliki nilai nol dalam ruang vakum, untuk melestarikan invariansi alam yang nyata dalam rotasi spasial. Dan juga, muatan medan skalar yang memiliki nilai nol dalam ruang hampa yang netral secara listrik. Disisi lain, medan skalar netral yang tidak memiliki muatan listrik dapat memiliki nilai bukan nol dalam keadaan vakum, yang dapat disebut dengan nilai ekspetasi vakum atau VEV. Dari persamaan (D.97) dapat dilihat bahwa medan Higgs memiliki VEV bukan nol. Agar memiliki listrik netral secara vakum, VEV $< \Phi >$ medan Higgs harus sesuai dengan Φ^0 (Giunti,2007):

$$< \Phi >= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{D.98}$$

Simetri $SU(2)_L \times U(1)_Y$ adalah spontan dipatahkan oleh VEV $< \Phi >$ (Giunti,2007):

$$\begin{aligned} I_1 < \Phi > &= \frac{\tau_1}{2} < \Phi >= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 && \text{(D.99)} \\ I_2 < \Phi > &= \frac{\tau_2}{2} < \Phi >= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 && \text{(D.100)} \\ I_3 < \Phi > &= \frac{\tau_3}{2} < \Phi >= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 && \text{(D.101)} \\ Y < \Phi > &= < \Phi > \neq 0 && \text{(D.102)} \end{aligned}$$

Tapi

$$Q < \Phi > = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) < \Phi >$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\tau_3}{2} < \Phi > + \frac{< \Phi >}{2} \\
&= \frac{\tau_3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(D.103)}
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, ruang hampa tidak berubah oleh transformasi gauge yang termasuk dalam kelompok $U(1)_Q$ dari (Giunti,2007)

$$
e^{i\theta Q} < \Phi > = < \Phi > \, . \qquad \text{(D.104)}
$$

Invarian ini menjamin keberadaan gauge boson tanpa massa yang terkait dengan grup simetri $U(1)_Q$ yang didefinisikan sebagai foton (Giunti,2007).

Pemecahan simetri spontan (*spontaneous symmetry breaking*) sangat penting. Simetri hanya diputuskan oleh ruang hampa dan akibat keadaan fisik diperoleh karena adanya rangsangan medan didalam ruang hampa tidak melestarikan Lagrangian simetri. Lebih tepat disebut bahwa simetri menjadi tersembunyi (Giunti,2007).

Untuk menurunkan sifat fisik partikel yang dihasilkan dari pemecahan simetri spontan $SU(2)_L \times U(1)_Y$ menjadi $U(1)_Q$ akan lebih mudah ditulis doublet Higgs sebagai berikut (Giunti,2007)

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} exp\left(\frac{i}{2v}\underline{\xi}(x) \cdot \underline{\tau}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \qquad \text{(D.105)}
$$

dimana $\underline{\xi}(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x))$ dan $H(x)$ adalah empat medan skalar real (keberadaan v dala argumen eksponensial diperluka untuk alasan dimensi, karena medan skalar memiliki dimensi energi). Medan $H(x)$ menggambarkan fisik dari Higgs boson, yang diperoleh dengan eksitansi dari medan Higgs netral dalam keadaan vakum. Disisi lain, $\xi(x)$ tidak fisis, karena dapat diputar oleh transformasi gauge dalam persamaan (D.91) dengan (Giunti,2007)

$$\underline{\theta}(x) = -\frac{1}{v}\underline{\xi}(x), \qquad \eta(x) = 0 \tag{D.106}$$

Transformasi ini mendefinisikan apa yang dimaksud dengan *unitary* gauge, dimana keadaan teori secara fisik muncul secara eksplisit. Dalam *unitary* gauge doublet Higgs berbunyi (Giunti,2007)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \tag{D.107}$$

dan

$$D_\mu(x)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu(x)[v + H(x)] \\ \partial_\mu H(x) - \frac{i}{2}\frac{g}{\cos\vartheta_w} Z_\mu(x)[v + H(x)] \end{pmatrix} \tag{D.108}$$

Dalam *unitary* gauge, Lagrangian Higgs dipersamaan (D.92) diberikan (Giunti,2007)

$$L_{Higgs} = \frac{\lambda}{4}[H^2 + 2vH]^2 \tag{D.109}$$

dengan memperluas kembali, maka memperoleh (Giunti,2007)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v+H(x)]^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[\partial H]^2 \\
&- \frac{\lambda}{4}[H^2+2vH]^2 \\
&= \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu[v^2+2vH+H^2] + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu[v^2+2vH+H^2] \\
&- \frac{\lambda}{4}[H^4+4vH^3+4v^2H^2] \\
&= \frac{1}{2}[\partial H]^2 + \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{2g^2vH}{4}W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2H^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2v^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu \\
&+ \frac{2g^2vH}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu + \frac{g^2H^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu - \frac{\lambda H^4}{4} - \frac{4\lambda vH^3}{4} - \frac{4\lambda v^2H^2}{4} \\
&= \frac{1}{2}[\partial H]^2 - \lambda v^2H^2 - \lambda vH^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 + \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2v^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu \\
&+ \frac{g^2v}{2}W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{g^2v}{4\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu H \\
&+ \frac{g^2}{4}W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{8\cos^2\vartheta_w}Z_\mu Z^\mu H^2 \qquad \text{(D.110)}
\end{aligned}
$$

Istilah pertama pada sisi kanan adalah istilah kinetik untuk Higgs boson. Istilah kedua adalah massa untuk Higgs boson, dimana massa Higgs boson diberikan oleh (Giunti,2007)

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} \qquad \text{(D.111)}$$

Karena μ^2 adalah parameter negatif yang secara khusus diperkenalkan dalam SM, nilainya tidak ada hubungan dengan jumlah lain yang sudah diukur. Oleh karena itu, SM tidak memberikan prediksi untuk nilai massa Higgs yang harus ditentukan secara eksperimental (Giunti,2007).

Istilah ketiga dan keempat persamaan (D.110) memperoleh *self-coupling* trilinier dan quadrilinier dari medan Higgs. Istilah kelima dan keenam persamaan (D.110) adalah massa untuk gauge boson W dan Z. Melihat kembali massa gauge boson W dan Z di SM diberikan oleh (Giunti,2007)

$$m_W = \frac{gv}{2}, \qquad m_Z = \frac{gv}{2\cos\vartheta_w} \tag{D.112}$$

dimana parameter ρ yang telah banyak digunakan sebelumnya, didefinisikan oleh (Giunti,2007)

$$\rho = \frac{mw^2}{m_Z^2 \cos^2\vartheta_w} \tag{D.113}$$

memiliki nilai

$$\rho = \frac{mw^2}{m_Z^2 \cos^2\vartheta_w} = \frac{g^2v^2/4}{g^2v^2\cos^2\vartheta_w/4\cos^2\vartheta_w} = \frac{g^2v^2}{4\cos^2\vartheta_w}\frac{4\cos^2\vartheta_w}{g^2v^2} \tag{D.114}$$

dalam SM (persamaan (D.114)) hanya valit di 3 level. Koreksi radiasi menyebabkan penyimpangan dari $\rho = 1$ yang tergantung pada skema renormalisasi, kecuali dalam skema *on-shell* dimana $\rho = 1$ diansumsikan sebagai definisi dari $\sin 2\vartheta_w$ yang ternormalisasi (Eidelman,2004). Hasil uji eksperimental persamaan (D.114) adalah menjamin dari nilai Higgs isospin lemah. Alasannya karena pada prinsip sektor Higgs dari SM dapat diperluas termasuk multiplet Higgs lainnya, disisi lain standart ganda dalam persamaan (D.96) yang semuanya memiliki nilai ekspetasi hampa yang berkontribusi pada generasi massa W dan Z gauge boson melalui mekanisme Higgs. Untuk jumlah acak dari multiplet Higgs Φ_k yang termasuk doublet standart, ρ diberikan oleh (Novaes,2000)

$$\rho = \frac{\Sigma_k[I^k(I^k+1) - (I_3^k)]v_k^2}{2\Sigma_k(I_3^k)v_k^2} \tag{D.115}$$

disini I_k adalah isospin lemah dari multiplet Higgs Φ_k dan I_3^k adalah komponen ketiga isospin lemah dari komponenΦ_k' yang memiliki nilai ekspetasi vakum v_k. Persamaan (D.122) menyiratkan bahwa $\rho = 1$ untuk sejumlah doublet Higgs. Nilai eksperimental ρ adalah (Eidelman,2004)

$$\rho = 0.9998^{+0.0008}_{-0.0005} \tag{D.116}$$

dalam kesesuaian kesempurnaan dengan $\rho = 1$. Oleh karena itu data eksperimental dibiarkan untuk memungkinkan adanya doublet Higgs, selain standar yang menghasilkan massa gauge boson W dan Z melalui mekanisme Higgs.

5. Massa Fermion dan Mixing

Di SM massa fermion muncul sebagai akibat dari mekanisme Higgs melalui munculnya kopling Yuawa medan fermion dengan doublet Higgs. Massa lepton diturunkan terlebih dahulu, seperti yang ditunjkkan dalam persamaan (D.26). Istilah massa fermion harus melibatkan kopling dari medan tangan kiri dan tangan kanan. Jadi jelas bahwa dalam SM neutrino tidak memiliki massa, karena medannya tidak memiliki komponen tangan kanan. Dengan mempertimbangkan lepton bermuatan, produk $\overline{L'_{\alpha L}} l'_{\beta R}$ dengan $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ adalah doublet isospin dengan *hypercharge* $Y = -1$. Karena doublet Higgs memiliki *hypercharge* $Y = \pm 1$, Lagrangian Higgs-lepton Yukawa (Giunti,2007)

$$L = -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta} \overline{L'_{\alpha L}} \Phi l'_{\beta R} + H.c. \tag{D.117}$$

merupakan invariandibawah transformasi dari tipe dipersamaan (D.10) yang memiliki grup gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dan muncul digaris kelima Lagrangian SM elektroweak dipersamaan (D.65). Matrik Y'^{l} dari kopling Yukawa secara umum merupakan matrik 3×3 yang kompleks. Dalam *unitary* gauge, doublet Higgs memiliki ekspresi yang diberikan dalam persamaan (D.106) dan Lagrangian Higgs-lepton Yukawa dipersamaan (D.117) menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_{H,L} &= -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{L'_{\alpha L}}\Phi l'_{\beta R} + H.c. \\ &= -\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{L'_{\alpha L}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} l'_{\beta R} + H.c. \\ &= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y'^{l}_{\alpha\beta}\overline{l'_{\alpha L}}l'_{\beta R} + H.c. \end{aligned} \tag{D.118}$$

Istilah yang tepat untuk VEV untuk v dari doublet Higgs adalah istilah massa untuk fermion bermuatan, sedangkan istilah dari medan Higgs boson H memberikan kopling trilinier antara lepton bermuatan dan Higgs boson. Namun, karena matrik Y'^{l} secara umum nondiagonal, medan e', μ', τ' tidak memiliki massa pasti perlu adanya mendiagonalisasi matrik Y'^{l}. Untuk menyelesaikan masalah ini maka mendefinisikan aturan dari medan lepton bermuatan (Giunti,2007)

$$l'_L \equiv \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \qquad l'_R \equiv \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix} \tag{D.119}$$

dengan menggunakan notasi diatas makan Lagrangian Higgs-lepton Yukawa dapat ditulis dalam bentuk matrik (Giunti,2007)

$$L_{H,L} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\overline{l'_L}Y'^l l'_R + H.c. \tag{D.120}$$

Matrik Y'^l dapat didiagonalisasi melalui transformasi *biunitary* (lihat bagian (3.1)) (Giunti,2007)

$$V_L^{l\dagger}Y'^l V_R^l = Y^l, \quad dengan \quad Y^l_{\alpha\beta} = y^l_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau) \tag{D.121}$$

Dimana V_L^l dan V_R^l adalah dua matrik unitary 3×3 yang sesuai $(V_L^{l\dagger} = (V_L^l)^{-1}$ dan $(V_R^{l\dagger} = (V_R^l)^{-1})$ (Giunti,2007).

Diagonalisasi dalam persamaan (D.121) mengarah ke (Giunti,2007)

$$L_{H,L} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\overline{l_L}Y'^l l_R + H.c. \tag{D.122}$$

dimana

$$l_L = V_L^{l\dagger} l'_L \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \qquad l_R = V_R^{l\dagger} l'_R \equiv \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \tag{D.123}$$

yang merupakan susunan yang berisi komponen tangan kiri dan tangan kanan medan lepton bermuatan dengan massa tertentu. Terakhir Lagrangian Higgs-lepton Yukawa dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} L_{H,L} &= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\overline{l_L}Y'^l l_R + H.c. \\ &= -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)\overline{l_L}y'^l_\alpha l_R + H.c. \end{aligned}$$

$$= \; - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y'^{l}_{\alpha} v}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha}} l_{\alpha} - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y'^{l}_{\alpha}}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha}} l_{\alpha} H \qquad \text{(D.124)}$$

dimana

$$l_L \equiv l_{\alpha L} + l_{\alpha R} \qquad (\alpha = e, \mu, \tau) \qquad \text{(D.125)}$$

yang merupakan medan lepton bermuatan dengan massa tertentu (Giunti,2007)

$$l_e = e, \qquad l_{\mu} = \mu, \qquad l_{\tau} = \tau. \qquad \text{(D.126)}$$

Istilah pertama disisi kanan persamaan (D.132) adalah istilah massa untuk lepton bermuatan, yang mana massanya diberikan (Giunti,2007):

$$m_{\alpha} = \frac{y'^{l}_{\alpha} v}{\sqrt{2}} \qquad \text{(D.127)}$$

dengan $y^l_e, y^l_{\mu}, y^l_{\tau}$ adalah parameter yang tidak diketahui di SM , maka massa dari lepton bermuatan tidak dapat diperhitungkan dan harus diperoleh dari hasil eksperimental (Giunti,2007).

Hal yang menarik mengikuti istilah kedua disisi kanan pada persamaan (D.126) dan persamaan (D.127) adalah kopling trilinier antara lepton bermuatan dan Higgs boson sebanding dengan massa lepton bermuatan. Istilah tersebut dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y'^{l}_{\alpha}}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha}} l_{\alpha} H \\ & - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{m_{\alpha}}{v} \overline{l_{\alpha}} l_{\alpha} H \qquad \text{(D.128)} \end{aligned}$$

Disisi lain neutrino, tidak memiliki massa dan tidak berpasangan dengan Higgs boson (Giunti,2007).

Melihat apa yang terjadi pada leptonik bermuatan arus lemah dan netral sebagai hasil dari transformasi dipersamaan (D.123). Mendefinisikan aturan (Giunti,2007)

$$v'_L \equiv \begin{pmatrix} v'_{eL} \\ v'_{\mu L} \\ v'_{\tau L} \end{pmatrix} \tag{D.129}$$

leptonik bermuatan arus lemah dalam persamaan (D.80) dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$j^{\rho}_{W,L} = 2\overline{v'_L}\gamma^{\rho} l'_L = 2\overline{v'_L}\gamma^{\rho} V^l_L l_L \tag{D.130}$$

Karena dapat mengubah transformasi medan neutrino tak bermassa sebagai (Giunti,2007)

$$v_L = V^{l\dagger}_L v'_L \equiv \begin{pmatrix} v_{eL} \\ v_{\mu L} \\ v_{\tau L} \end{pmatrix} \tag{D.131}$$

arus lemah bermuatan leptonik dapat ditulis (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{W,L} &= 2\overline{v'_L}\gamma^{\rho} V^l_L l_L \\ &= 2\overline{v_L} V^{l\dagger}_L \gamma^{\rho} V^l_L l_L \\ &= 2\overline{v_L}\gamma^{\rho} l_L \end{aligned}$$

$$= \; 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{v_{\alpha L}} \gamma^{\rho} l_{\alpha L} \tag{D.132}$$

dalam medan neutrino tak bermassa ν_e, ν_μ, ν_τ, dan medan lepton bermuatan dengan massa tertentu dalam persamaan (D.126). Medan neutrino ν_e, ν_μ, ν_τ disebut medan flavor neutrino, karena masing-masing pasangan hanya dengan medan lepton yang sesuai dalam arus lemah bermuatan dalam persamaan (D.132). Medan flavor neutrino telah didefinisikan dalam persamaan (D.131)yang sesuai dengan sifatnya. Dalam SM medan flavor neutrino juga merupakan massa *eigenstate*, karena setiap kombinasi linier dari medan tak bermassa adalah medan tanpa massa. Sedangkan dalam teori-teori diluar SM dimana neutrino masif, medan flavor neutrino secara umum bkan massa *eigenstate*, teteapi sebuah fenomena yang disebut dengan pencampuran neutrino (mixing neutrino) (Giunti,2007).

Dengan leptonik bermuatan arus lemah dalam persamaan (D.132), bagian lepton dari interaksi lemah Lagrangian muatan-arus dalam persamaan (D.70) menjelaskan kopling trilinier dari lepton dengan gauge boson W yang arus leptonik $j^{\rho}_{W,L}$ menghubungkan setiap muatan lepton dengan flavor neutrino yang sesuai. Oleh karena itu, nomor flavor lepton elektron L_e, muon L_μ, dan tau L_τ. Konsekuensi trivial adalah jumlah number lepton (Giunti,2007)

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau \tag{D.133}$$

dilestarikan. *Nonconservation* dari bilangan lepton L_e, L_μ, L_τ, L memainkan peran penting dalam fisika neutrino diluar SM (Giunti,2007).

Konservasi setiap bilangan flavor lepton L_α terkait, melalui teorema Noether, dengan Lagrangian invariansi dibawah global $U(1)$ transformasi gauge (Giunti,2007).

$$\nu_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi\alpha}\nu_{\alpha L}, \qquad l_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi\alpha}l_{\alpha L}, \qquad l_{\alpha R} \longrightarrow e^{i\varphi\alpha}l_{\alpha R} \tag{D.134}$$

Dari persamaan (A.38) arus konservasi terkait $(\partial_\rho j^\rho_\alpha = 0)$ adalah (Giunti,2007)

$$j^\rho_\alpha = \overline{\nu_{\alpha L}}\gamma^\rho\nu_{\alpha L} + \overline{l_\alpha}\gamma^\rho l_\alpha \tag{D.135}$$

dan muatan konservasi $(\partial_0 L_\alpha = 0)$ adalah (Giunti,2007)

$$L_\alpha = \int d^3x j^0_\alpha(x) \tag{D.136}$$

Dengan menggunakan ekspansi Fourier dipersamaan (2.46) untuk medan lepton Dirac bermuatan *masive* $l_\alpha(x)$ dan ekspansi Fourier dipersamaan (2.131) untuk medan neutrino kiral tangan kiri tak bermassa $\nu_{\alpha L}(x)$, memperoleh (lihat persamaan (2.154)) operator nomor flavor lepton (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} :L_\alpha: \;\; &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}[a^{(-)\dagger}_{\nu_\alpha}(p)a^{(-)}_{\nu_\alpha}(p) - b^{(+)\dagger}_{\nu_\alpha}(p)b^{(+)}_{\nu_\alpha}(p)] \\ &+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}\sum_{h=\pm1}[a^{(h)\dagger}_{l_\alpha}(p)a^{(h)}_{l_\alpha}(p) - b^{(h)\dagger}_{l_\alpha}(p)b^{(h)}_{l_\alpha}(p)] \end{aligned} \tag{D.137}$$

Kontribusi neutrino terhadap operator nomor flavor lepton $:L_\alpha:$ sesuai dengan realitanya bahwa medan neutrino kiral tanpa massa $\nu_{\alpha L}$ hanya menggambarkan neutrino dengan helisitas negatif dan anti neutrino dengan helisitas positif (Giunti,2007).

Lalu mempertimbangkan arus lemah netral medan lepton dipersamaan (D.86) dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{Z,L} &= 2g^{\nu}_{L}\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}\overline{\nu'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}\nu'_{\alpha L}+2\sum_{\alpha=e,\mu,\tau}(g^{l}_{L}\overline{l'_{\alpha L}}\gamma^{\rho}l'_{\alpha L}+g^{l}_{R}\overline{l'_{\alpha R}}\gamma^{\rho}l'_{\alpha R}) \\ &= 2g^{\nu}_{L}\overline{\nu'_{L}}\gamma^{\rho}\nu'_{L}+2g^{l}_{L}\overline{l'_{L}}\gamma^{\rho}l'_{L}+2g^{l}_{R}\overline{l'_{R}}\gamma^{\rho}l'_{R} \\ &= 2g^{\nu}_{L}\overline{\nu_{L}}V^{l\dagger}_{L}\gamma^{\rho}\nu_{L}V^{l}_{L}+2g^{l}_{L}\overline{l_{L}}V^{l\dagger}_{L}\gamma^{\rho}l_{L}V^{l}_{L}+2g^{l}_{R}\overline{l_{R}}V^{l\dagger}_{R}\gamma^{\rho}l_{R}V^{l}_{R} \\ &= 2g^{\nu}_{L}\overline{\nu_{L}}\gamma^{\rho}\nu_{L}+2g^{l}_{L}\overline{l_{L}}\gamma^{\rho}l_{L}+2g^{l}_{R}\overline{l_{R}}\gamma^{\rho}l_{R} \qquad \text{(D.138)} \end{aligned}$$

karena matrik V_L dan V_R merupakan *unitary*. Oleh karena itu, ekspresi arus lemah netral dalam hal medan lepton yang tidak diolah dengan massa pasti adalah sama dengan dalam medan lepton prima. Fenomena ini disebut dengan mekanisme GIM (Glashow,1970). Mekanisme GIM bekerja juga dalam kasus arus elektromagnetik lepton dipersamaan (D.86)yang dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$j^{\rho}_{\gamma,L}=-\sum_{\alpha=e,\mu,\nu}\overline{l_{\alpha}}\gamma^{\rho}l_{\alpha} \qquad \text{(D.139)}$$

dalam hal medan lepton yang bermuatan dipersamaan D.125 dengan massa tertentu (Giunti,2007).

Mari memperhatikan istilah Lagrangian quark, yang mana ada lepton yang memiliki prosuk massa dari medan tangan kanan dan kiri. Dari doublet tangan kiri dipersamaan (D.61) dan singlet tangan kanan dipersamaan (D.60) dan (D.64), dimungkinkan untuk membentuk dua jenis produk (Giunti,2007):

$$\overline{Q'_{\alpha L}}q'^{D}_{\beta R} \qquad (\alpha=1,2,3)(\beta=d,s,b) \qquad \text{(D.140)}$$

$$\overline{Q'_{\alpha L}} q'^{U}_{\beta R} \qquad (\alpha = 1,2,3)(\beta = u,c,t) \tag{D.141}$$

Produk dalam persamaan (D.141) memiliki *hypercharge* $Y = -1$ dan dapat digabungkan ke doublet Higgs dengan *hypercharge* $Y = +1$ untuk memperoleh Lagrangain Yukawa dengan istilah incariansi dibawah transformasi $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dalam persamaan (D.10) (Giunti,2007)

$$-\sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} Y'^{D}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \Phi q'^{D}_{\beta R} \tag{D.142}$$

dimana Y'^{D} adalah matrik 3×3 yang kompleks dari kopling Yukawa. Istilah Lagrangian Yukawa ini muncul dibaris keenam dari Lagrangian elektroweak SM dipersamaan (D.65). Hal ini analogi dengan Lagrangian Yukawa Higgs-lepton dipersamaan (D.117) dan memunculkan massa quark seperti d, s, b. Dalam gauge *unitary* dimana doublet Higgs memiliki ekpresi dalam persamaan (D.106), istilah dalam persamaan (D.142) menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} - & \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} Y'^{D}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \Phi q'^{D}_{\beta R} \\ = & -\sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=d,s,b} Y'^{D}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} \right) q'^{D}_{\beta R} \\ = & -\frac{v+H}{\sqrt{2}} sum_{\alpha,\beta=d,s,b} Y'^{D}_{\alpha\beta} \overline{q'_{\alpha L}} q'^{D}_{\beta R} \end{aligned} \tag{D.143}$$

dengan $Y'^{D}_{d\beta} \equiv Y'^{D}_{1\beta}, Y'^{D}_{s\beta} \equiv Y'^{D}_{2\beta}, Y'^{D}_{b\beta} \equiv Y'^{D}_{3\beta}$ istilah yang sangat tepat dengan v memiliki struktur istilah massa untuk quark d, s, b (Giunti,2007).

Produk dalam persamaan (D.141) memiliki *hyperharge* $Y = +1$ dan untuk membentuk $SU(2)_L \times U(1)_Y$ membutuhkan doublet Higgs dengan *hypercharge* $Y = -1$. Doublet Higgs dapat diperoleh dari doublet Higgs dipersamaan (D.90) dengan transformasi (Giunti,2007)

$$\widetilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* \tag{D.144}$$

dibawah transformasi gauge dalam persamaan (D.10) dengan mempertimbangkan transformasi dalam persamaan (D.91) dari Φ, memiliki (Giunti,2007):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi} \overset{g(\underline{\theta}(x),\eta(x))}{\longrightarrow} i\tau_2 \Phi^{*\prime} &= i\tau_2 U^*(\underline{\theta}(x), \eta(x))\Phi^* \\
&= i\tau_2 (e^{\frac{i}{2}\underline{\theta}(x)\cdot\underline{\tau} + \frac{i}{2}\eta(x)}\Phi^*)^*\Phi^* \\
&= i\tau_2 e^{-i\underline{\theta}(x)\cdot\frac{\underline{\tau}^*}{2} - i\frac{\eta(x)}{2}}\Phi^* \\
&= \left(\tau_2 e^{-i\underline{\theta}(x)\cdot\frac{\underline{\tau}^*}{2} - i\frac{\eta(x)}{2}}\tau_2\right) i\tau_2\Phi^* \\
&= e^{\frac{i}{2}\underline{\theta}(x)\cdot\underline{\tau} - \frac{i}{2}\eta(x)}\ \widetilde{\Phi}
\end{aligned} \tag{D.145}$$

dimana digunakan ketetapan $\tau_2 \tau^* \tau_2 = -\underline{\tau}$. Karena $\widetilde{\Phi}$ bertransformasi sebagai doublet isospin yang lemah dengan *hypercharge* $Y = -1$. Hal ini memungkinkan untuk menuliskan istilah Yukawa invarian gauge yang berbeda (Giunti,2007)

$$-\sum_{\alpha=1,2,3}\sum_{\beta=u,t,c} Y'^{U}_{\alpha\beta}\overline{Q'_{\alpha L}}\ \widetilde{\Phi}\ q'^{U}_{\beta R} \tag{D.146}$$

yang muncul dibaris terakhir pada Lagrangian elektroweak SM dipersamaan (D.65). Istilah ini memunculkan massa quark seperti *up-like*

u, c, t. Dalam *unitary* gauge (Giunti,2007)

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{D.147}$$

dan istilah dalam persamaan (D.146) menjadi (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,t,c} Y'^{U}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \, \tilde{\Phi} \, q'^{U}_{\beta R} \\ = & - \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,t,c} Y'^{U}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} q'^{U}_{\beta R} \\ = & - \left(\frac{v + H}{\sqrt{2}} \right) \sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,t,c} Y'^{U}_{\alpha\beta} \overline{q'_{\alpha L}} q'^{U}_{\beta R} \end{aligned} \tag{D.148}$$

dengan $Y'^{U}_{u\beta} \equiv Y'^{U}_{1\beta}, Y'^{U}_{c\beta} \equiv Y'^{U}_{2\beta}, Y'^{U}_{t\beta} \equiv Y'^{U}_{3\beta}$. Istilah yang tepat dengan v sebagai istilah massa untuk quark seperti u, c, t.

Dengan menyatukan istilah Yukawa-invarian dalam persamaan (D.142) dan (D.146) dan konjugasi Hermitiannya, maka memperoleh Lagrangian Yukawa quark (Giunti,2007)

$$L_{H,Q} = - \sum_{\alpha=1,2,3} [\sum_{\beta=d,s,b} Y'^{D}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \Phi q'^{D}_{\beta R} + \sum_{\beta=u,t,c} Y'^{U}_{\alpha\beta} \overline{Q'_{\alpha L}} \, \tilde{\Phi} \, q'^{U}_{\beta R}] + H.c. \tag{D.149}$$

Dalam *unitary* gauge, menjadi (Giunti,2007)

$$L_{H,Q} = - \left(\frac{v + H}{\sqrt{2}} \right) [\sum_{\alpha\beta=d,s,b} Y'^{D}_{\alpha,\beta} \overline{q'^{D}_{\alpha L}} q'^{D}_{\beta R} + \sum_{\alpha,\beta=u,t,c} Y'^{U}_{\alpha\beta} \overline{q'^{U}_{\alpha L}} q'^{U}_{\beta R}] + H.c. \tag{D.150}$$

Istilah yang tepat untuk v adalah istilah massa untuk quark. Namun, karena matrik kompleks Y'^{D} dan Y'^{U} dari kopling Yukawa pada umumnya nondiagonal, medan quark prima tidak memiliki massa pasti. Untuk menemukan medan perlu mendiagonalan matrik Y'^D dan Y'^U. Dengan mengikuti prosedur yang sama dengan lepton, mendefinisikan aturan (Giunti,2007)

$$q_L'^U \equiv \begin{pmatrix} u_L' \\ c_L' \\ t_L' \end{pmatrix}, \quad q_R'^U \equiv \begin{pmatrix} u_R' \\ c_R' \\ t_R' \end{pmatrix}, \quad q_L'^D \equiv \begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{pmatrix}, \quad q_R'^D \equiv \begin{pmatrix} d_R' \\ s_R' \\ b_R' \end{pmatrix} \tag{D.151}$$

memungkinkan untuk ditulis Lagrangian Yukawa Higgs-quark dalam bentuk matrik (Giunti,2007)

$$L_{H,Q} = -\left(\frac{v+H}{\sqrt{2}}\right)[\overline{q_L'^D}Y'^D q_R'^D + \overline{q_L'^U}Y'^U q_R'^U] + H.c. \tag{D.152}$$

Matrik Y'^D dan Y'^U dapat didiagonalisasi melalui transformasi *biunitary* (Giunti,2007)

$$V_L^{D\dagger}Y'^D V_R^D = Y^D, \quad Y_{\alpha\beta}^D = y_\alpha^D \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = d, s, b) \tag{D.153}$$

$$V_L^{U\dagger}Y'^U V_R^U = Y^U, \quad Y_{\alpha\beta}^U = y_\alpha^U \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = u, c, t) \tag{D.154}$$

dimana V_L^D, V_R^D, V_L^U, dan V_R^U empat matrik *unitary* 3×3. Didefinisikan

$$q_L^U = V_L^{U\dagger} q_L^U \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, \quad q_R^U = V_R^{U\dagger} q_R^U \equiv \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}, \tag{D.155}$$

$$q_L^D = V_L^{D\dagger} q_L^D \equiv \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad q_R^D = V_R^{D\dagger} q_R^D \equiv \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} \tag{D.156}$$

memperoleh

$$\begin{aligned} L_{H,Q} &= -\sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_{\alpha}^{D} v}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^{D}} q_{\alpha}^{D} - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_{\alpha}^{U} v}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^{U}} q_{\alpha}^{U} \\ &\quad - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_{\alpha}^{D}}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^{D}} q_{\alpha}^{D} H - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_{\alpha}^{U}}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^{U}} q_{\alpha}^{U} H \end{aligned} \tag{D.157}$$

dimana

$$y_{\alpha}^{D} \equiv y_{\alpha L}^{D} + y_{\alpha R}^{D}, \qquad y_{\alpha}^{U} \equiv y_{\alpha L}^{U} + y_{\alpha R}^{U} \tag{D.158}$$

adalah medan quark dengan massa tertentu. Dua istilah pertama pada persamaan (D.158) adalah istilah massa untuk quark, yang massanya diberikan oleh (Giunti,2007)

$$m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha}^{D} v}{\sqrt{2}}, \qquad (\alpha = d, s, b), \tag{D.159}$$

$$m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha}^{U} v}{\sqrt{2}}, \qquad (\alpha = u, c, t) \tag{D.160}$$

Seperti dalam kasus lepton, karena jumlah $y_d^D, y_s^D, y_b^D, y_u^U, y_c^U, y_t^U$ adalah parameter yang tidak diketahui dari SM, massa quark tidak dapat diprediksi dan harus diperoleh dari pengukuran eksperimental (Giunti,2007).

Mari membahas efek dari pencampuran quark, yang disebabkan oleh ketidakcocokan antara medan quark yang tidak sama dengan massa pasti dan medan quark prima yang mncul dalam muatan arus lemah dalam persamaan (D.73). Dengan menggunakan definisii dalam persamaan (D.152), muatan arus lemah quark dipersamaan (D.73) dapat ditulis dalam bentuk matrik (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{W,Q} &= 2(\overline{u'_L}\gamma^{\rho}d'_L + \overline{c'_L}\gamma^{\rho}s'_L + \overline{t'_L}\gamma^{\rho}b'_L) \\ &= 2(\overline{q'^U_L}\gamma^{\rho}q'^D_L) \end{aligned} \tag{D.161}$$

Sekarang mengekspresikan medan quark prima dalam hal *unprimed* menggunakan persamaan (D.156) dan (D.157) (Giunti,2007):

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{W,Q} &= 2(\overline{q'^U_L}\gamma^{\rho}q'^D_L) \\ &= 2V^{U\dagger}_L\overline{q^U_L}\gamma^{\rho}V^D_R q^D_L \\ &= 2\overline{q^U_L}\gamma^{\rho}V^{U\dagger}_L V^D_R q^D_L \end{aligned} \tag{D.162}$$

Oleh karena itu, muatan arus lemah quark tidak bergantung pada matrik V^U_L dan V^D_L tetapi hanya pada produknya (Giunti,2007)

$$V = V^{U\dagger}_L V^D_L \tag{D.163}$$

matrik V adalah matrik mixing quark, yang juga disebut dengan matrik Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)(Kobayashi,1973), yang mewujudkan dari efek fisik dari mixing quark. Matrik mixing quark menentukan interaksi quark yang bermuatan arus lemah melalui arus (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{W,Q} &= 2\overline{q^U_L}\gamma^{\rho}V^{U\dagger}_L V^D_R q^D_L \\ &= 2\overline{q^U_L}\gamma^{\rho}V q^D_L \end{aligned} \tag{D.164}$$

Ekspresi dalam persamaan (D.165) sangat penting karena harus menggunakan perhitungan dalam proses enteraksi lemah yang melibatkan quark, dimana kondisi awal dan akhir menggambarkan partikel dengan massa pasti. Oleh karenaitu, jumlah yang terukur tergantung pada unsur-unsur matrik mixing quark V. Dengan quark bermuatan arus lemah dipersamaan (D.165), bagian quark dari interaksi muatan arus lemah. Sebelumnya telah mengindikasikan dalam simpul kontribusi matrik-matrik mixing yang merubah flavor-muatan dari interaksi ini. Nomor flavor tidak didefinisikan untuk quark. Namun quark bermuatan arus dalam persamaan (D.73) menyimpan nomor baryon, yaitu 1/3 untuk setiap quark dan -1/3 untuk antiquark (Giunti,2007).

Efek pencampuran quark pada arus netral lemah dipersamaan (D.87). Dengan menggunakan relasi dalam persamaan (D.155) dan (D.156), quark arus netral dinyatakan dalam medan quark dengan massa pasti, diberikan oleh (Giunti,2007)

$$\begin{aligned} j^{\rho}_{Z,Q} &= 2g^{U}_{L}\overline{q^{U}_{L}}\gamma^{\rho}q^{U}_{L} + g^{U}_{R}\overline{q^{U}_{R}}\gamma^{\rho}q^{U}_{R} \\ &\quad +2g^{D}_{L}\overline{q^{D}_{L}}\gamma^{\rho}q^{D}_{L} + g^{D}_{R}\overline{q^{D}_{R}}\gamma^{\rho}q^{D}_{R} \end{aligned} \tag{D.165}$$

Karena matrik $V^{U}_{L}, V^{U}_{R}, V^{D}_{L}, V^{D}_{R}$ adalah *unitary*. Oleh karena itu, arus netral memiliki bentuk yang sama jika dinyatakan dalam medan quark masif atau medan prima, yang muncul dalam arus bermuatan lemah. Hal ini adalah mekanisme GIM yang bekerja: arus netral lemah tidak berubah-ubah dalam mixing medan quark. Mekanisme GIM beroperasi juga dalam arus elektroagnetik quark yang dapat ditulis sebagai (Giunti,2007)

$$j^{\rho}_{\gamma,Q} = \frac{2}{3}\sum_{\alpha=u,c,t}\overline{q^{U}_{\alpha}}\gamma^{\rho}q^{U}_{\alpha} - \frac{1}{3}\sum_{\alpha=d,s,b}\overline{q^{D}_{\alpha}}\gamma^{\rho}q^{D}_{\alpha} \tag{D.166}$$

dalam medan quark massa pasti dipersamaan (D.158). Oleh karena itu di SM tidak ada arus netral yang mengubah flavor.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana NO.50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **ELLA DWI CAHYANI**
NIM : **16640062**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/Fisika**
Judul Skripsi : **Studi Perusakan Simetri CPT (*Charge Conjugation, Parity, Time Reversal*) pada Osilasi Neutrino**
Pembimbing I : **Drs. Abdul Basid, M.Si**
Pembimbing II : **Arista Romadani, M.Sc**

No.	Hari/Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	Senin/24 Februari 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
2	Senin/02 Maret 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
3	Senin/30 Maret 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
4	Kamis/02 April 2020	Konsultasi Bab III dan ACC	
5	Senin/10 Agustus 2020	Konsultasi Data Hasil Bab IV	
6	Kamis/5 November 2020	Konsultasi Bab IV	
7	Kamis/12 November 2020	Konsultasi Bab IV dan ACC	
8	Kamis/19 November 2020	Konsultasi Integrasi	
9	Senin/ 29 Maret 2021	Konsultasi Integrasi	
10	Rabu/7 April 2021	Konsultasi semua Bab, Abstrak, dan ACC	
11	Selasa/25 Mei 2021	Konsultasi Integrasi dan ACC	
12	Kamis/27 Mei 2021	Konsultasi penulisan semua Bab dan ACC	

Malang, 27 Mei 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
19650504 199003 1 003