

**STUDI MESIN BRAYTON KUANTUM BERBASIS SISTEM PARTIKEL  
TUNGGAL PADA SUMUR POTENSIAL TAK HINGGA 1 DIMENSI DAN  
SISTEM OSILATOR HARMONIK**

**SKRIPSI**

**Oleh:**  
**NISAUL AINIYAH**  
**NIM. 16640067**



**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

**STUDI MESIN BRAYTON KUANTUM BERBASIS SISTEM PARTIKEL  
TUNGGAL PADA SUMUR POTENSIAL TAK HINGGA 1 DIMENSI DAN  
SISTEM OSILATOR HARMONIK**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:**

**Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam Memperoleh Gelar Sarjana  
Sains (S.Si)**

**Oleh:**

**NISAUL AINIYAH  
NIM. 16640067**

**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2021**

## HALAMAN PERSETUJUAN

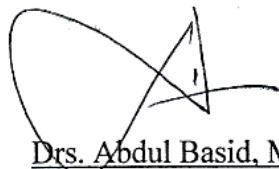
STUDI MESIN BRAYTON KUANTUM BERBASIS SISTEM PARTIKEL  
TUNGGAL PADA SUMUR POTENSIAL TAK HINGGA 1 DIMENSI DAN  
SISTEM OSILATOR HARMONIK

SKRIPSI

Oleh:  
Nisaul Ainiyah  
NIM 16640067

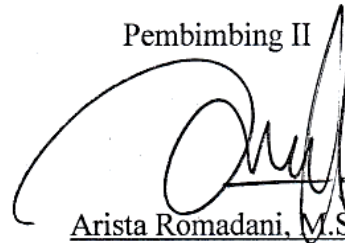
Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji  
Pada tanggal: 28 April 2021

Pembimbing I



Drs. Abdul Basid, M.Si  
NIP. 19650504 199003 1 003

Pembimbing II



Arista Romadani, M.Sc  
NIP. 19900905 201903 1 018

Mengetahui  
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M.Si  
NIP. 19650504 199003 1 003


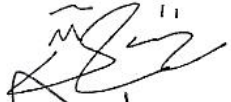


## HALAMAN PENGESAHAN

### STUDI MESIN BRAYTON KUANTUM BERBASIS SISTEM PARTIKEL TUNGGAL PADA SUMUR POTENSIAL TAK HINGGA 1 DIMENSI DAN SISTEM OSILATOR HARMONIK

#### SKRIPSI

Oleh:  
Nisaul Ainiyah  
NIM 16640067

Telah Dipertahankan Di Dewan Penguji dan  
Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Pada Tanggal, 28 April 2021

Penguji Utama :	<u>Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 20081 2 009	
Ketua Penguji :	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u>	
Sekretaris Penguji :	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Anggota Penguji :	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M.Si  
NIP. 19650504 199003 1 003

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nisaul Ainiyah  
NIM : 16640067  
Juruan : Fisika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Penelitian : Studi Mesin Brayton Kuantum Berbasis Sistem Partikel  
Tunggal pada Sumur Potensial tak Hingga 1 Dimensi dan  
Sistem Osilator Harmonik

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam makalah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 April 2021  
Yang Membuat Pernyataan



Nisaul Ainiyah  
NIM. 16640067

## MOTTO

*Libatkanlah Allah SWT di setiap urusanmu.*

***“Allah dulu, Allah lagi, Allah terus...”***

**“Hatiku tenang karena mengetahui bahwa apa yang melewatkanmu  
tidak akan pernah menjadi takdirku, dan apa yang ditakdirkan  
untukmu tidak akan pernah melewatkanmu”**

**(Umar bin Khattab)**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk kedua orang tuaku, Abah Hasbullah dan Umik Aulia Ul Aini. Terima kasih atas kepercayaan dan dukungan penuh panjenengan selama ini untuk Nia. Insya Allah, Nia akan berusaha semaksimal mungkin untuk membahagiakan panjenengan, Umik dan Abah.....

Tak lupa, karya ini juga kupersembahkan untuk mbakku (Mbak Ila), masku (Mas Aan), kembaranku (Adek Nisa), dan semua pihak yang telah berkontribusi dalam terselesaikannya tugas akhir ini, baik secara langsung maupun tidak langsung. Terima kasih atas doa dan dukungannya selama ini.

*Jazaakumullaahu ahsanal jazaa'...*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah serta kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyusun skripsi yang berjudul **“Studi Mesin Brayton Kuantum Berbasis Sistem Partikel Tunggal pada Sumur Potensial tak Hingga 1 Dimensi dan Sistem Osilator Harmonik”**. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW beserta para keluarga, sahabat, dan seluruh pengikutnya hingga hari kiamat kelak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya dukungan dan bantuan dari pihak-pihak yang terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam kegiatan penyusunan skripsi ini.

Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis ucapkan kepada :

1. Drs. Abdul Basid, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus pembimbing I skripsi yang memberikan arahan, masukan, dan dukungan kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.
2. Arista Romadani, M.Sc., selaku dosen fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus pembimbing II skripsi yang memberikan arahan dan masukan kepada penulis selama proses penulisan skripsi.
3. Muhammad Taufiqi, M.Si., selaku dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulis anggap sebagai pembimbing III karena senantiasa membimbing dan mengarahkan penulis selama proses penulisan skripsi dari awal hingga akhir.
4. Erika Rani M.Si., selaku dosen fisika teori Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengajarkan dan mengenalkan tentang ‘dunia fisika teori’ pada penulis.
5. Seluruh dosen fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik dan membimbing penulis dengan sabar.
6. Kedua orang tua yang selalu menyayangi, mendukung, dan mendoakan penulis.

7. Teman – teman angkatan Fisika 2016 terutama Teori Squad 16 yang selalu mendukung penulis selama ini dan semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung memberi motivasi dalam penulisan skripsi.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis menyadari masih banyak kekurangan, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat menambah wawasan dan bermanfaat bagi pembaca. *Aamiin.*

Malang, 09 April 2021

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b> .....	v
<b>MOTTO</b> .....	vi
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian .....	6
1.4 Manfaat Penelitian .....	7
1.5 Batasan Masalah .....	7
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	8
2.1 Dasar-Dasar Termodinamika .....	8
2.1.1 Sistem Termodinamika .....	8
2.1.2 Persamaan Keadaan .....	9
2.1.2.1 Hubungan Variabel Keadaan .....	9
2.1.2.2 Persamaan Gas Ideal .....	10
2.1.3 Kerja .....	13
2.1.4 Kalor .....	15
2.1.5 Fungsi Energi Internal .....	16
2.1.6 Hukum Pertama Termodinamika .....	17
2.1.7 Kapasitas Kalor .....	19
2.1.8 Proses-Proses Termodinamika .....	22
2.1.9 Hukum Kedua Termodinamika.....	27
2.2 Mesin Brayton.....	30
2.3 Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi .....	36
2.4 Osilator Harmonik.....	40
2.5 Analogi Sistem Mesin Panas Klasik ke dalam Sistem Kuantum.....	50
2.6 Integrasi mengenai Mesin Panas Kuantum.....	52
<b>BAB III PERLUASAN TERMODINAMIKA KLASIK KE TERMODINAMIKA KUANTUM</b> .....	58
3.1 Hukum Pertama Termodinamika untuk Sistem Kuantum .....	58
3.2 Gaya (Tekanan) dalam Sistem Kuantum .....	60
3.3 Proses-Proses Termodinamika Kuantum .....	62
3.3.1 Proses Adiabatik Kuantum .....	62
3.3.2 Proses Isobarik Kuantum .....	62
3.3.2.1 Proses Isobarik Kuantum pada Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi .....	63
3.3.2.2 Proses Isobarik Kuantum pada Sistem Osilator Harmonik.....	73

<b>BAB IV EFISIENSI MESIN BRAYTON KUANTUM .....</b>	<b>85</b>
4.1 Sistem Partikel Tuggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi .....	87
4.2 Sistem Osilator Harmonik .....	98
4.3 Perbandingan Efisiensi Mesin Brayton Kuantum dan Klasik.....	108
<b>BAB V PENUTUP .....</b>	<b>116</b>
5.1 Kesimpulan .....	116
5.2 Saran .....	117
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	
<b>LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Sistem Termodinamika.....	9
Gambar 2.2	Proses Isobarik dalam Diagram $P - V$ .....	23
Gambar 2.3	Proses Isohorik dalam Diagram $P - V$ .....	24
Gambar 2.4	Proses Isotermal dalam Diagram $P - V$ .....	24
Gambar 2.5	Proses Adiabatik dalam Diagram $P - V$ .....	27
Gambar 2.6	Diagram Aliran Kalor Mesin Panas.....	28
Gambar 2.7	Siklus Brayton dalam Diagram $P - V$ dan $T - S$ .....	30
Gambar 2.8	Partikel dalam Kotak Satu Dimensi.....	36
Gambar 2.9	Potensial Osilator Harmonik.....	41
Gambar 3.1	Skema Diagram Gaya untuk Sistem Partikel Tunggal pada Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi.....	64
Gambar 3.2	Skema Diagram Gaya untuk Sistem Osilator Harmonik.....	74
Gambar 4.1	Gaya-Perpindahan F-L pada Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Kotak 1 Dimensi.....	85
Gambar 4.2	Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi dalam Fungsi Rasio Gaya $\frac{F_1}{F_0}$ .....	97
Gambar 4.3	Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi dalam Fungsi Rasio Kompresi $\frac{L_A}{L_D}$ .....	97
Gambar 4.4	Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Osilator Harmonik dalam Fungsi Rasio Gaya $\frac{F_1}{F_0}$ .....	107
Gambar 4.5	Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Osilator Harmonik dalam Fungsi Rasio Kompresi $\frac{L_A}{L_D}$ .....	107
Gambar 4.6	Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi, Sistem Osilator Harmonik, dan Klasik dalam Fungsi Rasio Gaya $\frac{F_1}{F_0}$ .....	113
Gambar 4.7	Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi, Sistem Osilator Harmonik, dan Klasik dalam Fungsi Rasio Kompresi $\frac{L_A}{L_D}$ .....	113

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A	Ensembel Kanonik: Distribusi Maxwell-Boltzmann
Lampiran B	Fungsi Energi Bebas Helmholtz
Lampiran C	Script Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum
Lampiran D	Bukti Konsultasi Skripsi

## ABSTRAK

Ainiyah, Nisaul. 2021. **Studi Mesin Brayton Kuantum Berbasis Sistem Partikel Tunggal pada Sumur Potensial tak Hingga 1 Dimensi dan Sistem Osilator Harmonik**. Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Arista Romadani, M.Sc.

---

**Kata Kunci:** Mesin Brayton Kuantum, Sumur Potensial tak Hingga 1 Dimensi, Osilator Harmonik

Studi tentang interaksi termodinamika dan mekanika kuantum saat ini tengah banyak dikaji dan didalami oleh para peneliti, salah satunya tentang mesin panas kuantum. Kajian mesin panas kuantum dilakukan sebagai usaha untuk mendapatkan efisiensi mesin panas yang lebih tinggi. Dalam prosesnya, mesin panas kuantum menerapkan sistem dan objek kuantum sebagai zat kerjanya. Pada penelitian ini, telah dikaji mesin panas kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik sebagai zat kerjanya dengan siklus yang bekerja adalah siklus Brayton. Penelitian ini menggunakan proses adiabatik dan isobarik yang diperluas dalam ranah kuantum. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini berupa efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik. Hasil ini memverifikasi bahwa mesin Brayton kuantum memiliki efisiensi yang lebih tinggi daripada mesin Brayton klasik.

## ABSTRACT

Ainiyah, Nisaul. 2021. **Study of Brayton Quantum Engine Based on Single Particle in Infinite Potential Well System and Harmonic Oscillator System**. Thesis. Physics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Arista Romadani, M.Sc.

---

---

**Keywords:** Brayton Quantum Engine, Infinite Potential Well System, Harmonic Oscillator

The study of the interaction of thermodynamics and quantum mechanics is currently being studied and explored by many researchers, one of which is the quantum heat engine. The study of quantum heat engine was carried out in an attempt to obtain a higher heat engine efficiency. In the process, quantum heat engines apply quantum systems and quantum objects as their working substances. In this research, a quantum heat engine has been studied based on a single particle in a 1-dimensional infinite potential well system and a harmonic oscillator system as its working substance with a cycle that works is the Brayton cycle. This research uses adiabatic and isobaric processes that are extended in the quantum regime. The results obtained in this study are the efficiency of a quantum Brayton engine based on a single particle in a 1-dimensional infinite potential well system and a harmonic oscillator system. These results verify that the quantum Brayton engine has a higher efficiency than the classical Brayton engine.

## المخلص

العينية، نساء. 2021. دراسة آلة برايتون الكمية على أساس نظام الجسيمات المفردة في بئر محتملة لانتهائية أحادية البعد ونظام التذبذب التوافقي. البحث الجامعي. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا في جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفة: (I) عبد الباسط، الماجستير، (II) و أريستا رمضان، الماجستير.

---

الكلمات الرئيسية: آلة برايتون الكمية ، بئر محتملة لانتهائية أحادية البعد ، مذبذب توافقي

تجري حاليًا دراسة واستكشاف تفاعل الديناميكا الحرارية وميكانيكا الكم من قبل العديد من الباحثين ، أحدهم هو محرك الحرارة الكمية. تم إجراء دراسة محرك الحرارة الكمومية في محاولة للحصول على كفاءة أعلى للمحرك الحراري. في هذه العملية ، تطبق آلات التسخين الكمومي الأنظمة والأشياء الكمومية كمواد عمل لها. في هذا البحث ، تمت دراسة محرك حراري كمي على أساس نظام جسيم واحد في بئر احتمالية لانتهائية أحادية البعد ونظام مذبذب توافقي كمادة عمل مع دورة تعمل هي دورة برايتون. يستخدم هذا البحث عمليات ثابتة ومتساوية الضغط تمتد في عالم الكم. النتائج التي تم الحصول عليها في هذه الدراسة هي كفاءة آلة برايتون الكمومية على أساس نظام جسيم واحد في بئر احتمالية لانتهائية أحادية البعد ونظام مذبذب توافقي. تؤكد هذه النتائج أن محرك برايتون الكمومي له كفاءة أعلى من محرك برايتون الكلاسيكي

# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Termodinamika kuantum adalah suatu studi yang menghubungkan dua teori fisika; termodinamika dan mekanika kuantum, yang mana membahas tentang dinamika panas dan kerja pada sistem kuantum (Gemmer, dkk., 2004). Studi ini menjelaskan dinamika panas dan kerja pada ranah limit yang ekstrim dari suatu sistem kecil yang hanya memiliki beberapa derajat kebebasan, yang berarti efek kuantum sangat mempengaruhi proses termodinamika didalamnya. Hal ini tidak bisa dijelaskan dalam termodinamika klasik karena pada termodinamika klasik hanya berlaku untuk sistem-sistem makroskopis. Oleh karena itu, interaksi antara termodinamika dan mekanika kuantum perlu dilakukan.

Hubungan antara termodinamika dan fisika kuantum telah menjadi riset yang menarik sejak tahun 1950an (Scovil dan E. O. Schulz-DuBois, 1959). Ditambah dengan semakin berkembangnya teknologi nano dan proses informasi kuantum dalam beberapa tahun terakhir, membuat studi tentang termodinamika dan fisika kuantum menjadi perhatian lebih untuk dikaji secara mendalam. Banyak hal yang dapat dipelajari pada termodinamika kuantum ini, seperti aplikasi potensial pada teknologi nano dan proses informasi kuantum, pemahaman mengenai *Maxwell's Demon*, dan salah satu hal yang menarik untuk dikaji adalah tentang perluasan mekanika kuantum dari proses dan siklus termodinamika klasik seperti proses isohorik, isothermal, adiabatik, dan isobarik pada mesin panas kuantum.

Mesin panas kuantum adalah suatu perangkat yang mengubah energi panas menjadi kerja dengan menggunakan objek kuantum dan sistem mekanika

kuantum sebagai substansi kerjanya (*working substance*). Sistem mekanika kuantum yang digunakan dapat berupa sistem sumur potensial, osilator harmonik, hingga spin partikel. Mesin panas kuantum menjadi salah satu usaha dari peneliti dalam menciptakan mesin panas dengan efisiensi yang lebih tinggi karena terdapat masalah pada mesin panas klasik, yaitu efisiensinya yang rendah, sehingga diharapkan kajian tentang mesin panas kuantum dapat meningkatkan efisiensi dari mesin panas.

Sehubungan dengan penerapan teori kuantum pada kajian mesin panas kuantum, teori kuantum sendiri diisyaratkan dalam Al-Qur'an Surat Al-Dzaariyaat ayat 1-6. Allah SWT berfirman:

وَالذَّارِيَّاتِ ذُرُوءًا (١) فَالْحَامِلَاتِ وِقْرًا (٢) فَالْجَارِيَّاتِ يُسْرًا (٣) فَالْمُقَسِّمَاتِ أَمْرًا (٤) إِنَّمَا  
تُوعَدُونَ لَصَادِقٍ (٥) وَإِنَّ الدِّينَ لَوَاقِعٌ (٦)

“(1) Demi partikel-partikel yang sangat halus (2) Yang membawa beban berat (3) Yang mengalir dengan mudah (4) Yang membagi-bagi urusan (5) Sesungguhnya yang dijanjikan padamu pasti benar (6) Dan sesungguhnya pembalasan pasti terjadi” (Q.S. Al-Dzaariyaat [51]: 1-6).

Mesin panas kuantum pertama kali diteliti oleh Scovil dan E. O. Schulz-DuBois (1959) dengan menggunakan maser tiga tingkat sebagai zat kerjanya. Penelitian ini menyebutkan bahwa perbedaan konsep yang mendasar antara mesin panas kuantum dengan mesin panas klasik yaitu mesin panas kuantum berkaitan tentang level energi diskrit dari suatu partikel yang nilainya tergantung dari probabilitas tingkat keadaan sistem, sedangkan mesin panas klasik berkaitan dengan energi yang keadaannya kontinu. Dengan konsep level energi diskrit pada mesin panas kuantum tersebut, konsep penelitian ini menjadi acuan oleh para peneliti setelahnya dalam membangun mesin panas kuantum dengan berbagai

sistem mekanika kuantum. Setelah penelitian ini dilakukan, terdapat banyak paper yang membahas tentang mesin panas kuantum.

Bender, dkk. (2000) mengkaji mesin Carnot kuantum menggunakan model analogi termodifikasi dengan sistem partikel mekanika kuantum tunggal yang dibatasi oleh sumur potensial sebagai zat kerjanya. Pemilihan sistem sumur potensial kuantum sebagai zat kerjanya merupakan bentuk usaha dalam menganalogikan sistem mesin panas klasik pada mesin panas kuantum dalam bentuk analogi terdekat. Jika pada mesin panas klasik sistemnya merupakan silinder berpiston yang mana pistonnya bergerak maju mundur, maka pada mesin panas kuantum dianalogikan dengan sumur potensial tak hingga yang mana salah satu dinding potensialnya bergerak. Kajian ini dilakukan dengan mengidentifikasi nilai ekspektasi Hamiltonian atau nilai eigen energi sebagai bentuk ganti temperatur dan bertujuan untuk mencari efisiensi dari mesin Carnot kuantum. Efisiensi yang didapatkan sama dengan efisiensi pada mesin Carnot klasik.

Latifah dan Agus Purwanto (2011) kemudian mengembangkan penelitian dari Bender dengan mengkaji mesin Carnot kuantum menggunakan sistem partikel tunggal dengan multi keadaan (*multi-state*) pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi sebagai zat kerjanya. Penelitian dengan menggunakan zat kerja yang serupa juga dikaji menggunakan siklus yang lain, yaitu siklus Otto (Latifah dan Agus Purwanto, 2014). Kedua penelitian ini menggunakan model analogi termodifikasi. Pada penelitian ini, dilakukan analogi besaran-besaran fisis yang ada pada mesin panas klasik ke dalam bentuk kuantitas mikroskopik pada mesin panas kuantum, seperti: kuantitas volume pada sistem klasik dianalogikan dengan operator densitas untuk sistem kuantum, temperatur sistem yang terkait dengan

energi internal pada sistem klasik dianalogikan dengan nilai eigen energi pada sistem kuantum, dan tekanan piston pada sistem klasik dianalogikan dengan gaya pada dinding potensial yang bergerak untuk sistem kuantum. Selain itu, pada penelitian ini juga dilakukan penerapan hukum pertama termodinamika yang dimodifikasi dalam sistem kuantum. Hasil yang didapatkan dari kedua penelitian ini adalah efisiensi mesin Carnot *multi-state* kuantum dapat ditingkatkan dengan pengurangan volume ekspansi isothermal yang sama dari total volume ekspansi dan efisiensi mesin Otto *multi-state* kuantum bergantung pada rasio awal dan akhir dari lebar sistem pada proses adiabatiknya.

Munoz dan Francisco J. Pena (2012) mengkaji efisiensi mesin Carnot kuantum dengan zat kerja berupa partikel Dirac tunggal yang dibatasi sumur potensial 1 dimensi menggunakan skema atau model yang berbeda dengan penelitian Bender (2000). Skema yang digunakan adalah skema model analogi termodifikasi dan model statistik. Model statistik ini menggunakan kuantitas temperatur dan distribusi Maxwell-Boltzmann untuk mendefinisikan probabilitas pengukuran keadaan sistem dengan menganggap sistem berada dalam kesetimbangan termal. Model ini merupakan analogi kuantum dari siklus Carnot klasik.

Beberapa penelitian mengenai mesin panas kuantum yang telah disebutkan seluruhnya menggunakan sistem sumur potensial tak hingga 1 dimensi sebagai sistem zat kerjanya. Hal ini dikarenakan banyak penelitian yang hanya memodifikasi jenis partikel yang digunakan pada zat kerjanya seperti partikel tunggal, partikel Dirac, dan lain sebagainya, namun tidak mengubah sistem kuantumnya. Rezek dan Ronnie Kosloff (2006) mengkaji mesin panas kuantum

dengan menggunakan sistem kuantum yang lain sebagai zat kerjanya, yaitu mengkaji mesin panas kuantum dengan *ensemble* pada osilator harmonik sebagai zat kerjanya. Sistem kuantum yang digunakan adalah sistem osilator harmonik dan siklus yang digunakan adalah siklus Otto. Pada penelitian ini, potensial osilator harmonik berperan dalam proses siklus Otto kuantum, yaitu pada proses ekspansi dan kompresi zat kerja di siklus Otto yang mana dapat dilakukan secara eksternal dengan mengatur kelengkungan potensial harmoniknya.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka penulis ingin mengkaji mesin panas kuantum menggunakan 2 sistem kuantum yang berbeda, yaitu sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik sebagai zat kerjanya. Penambahan kajian mengenai sistem osilator harmonik sebagai zat kerja pada mesin panas kuantum dilakukan karena masih belum banyak penelitian tentang ini dan kajian ini sebagai upaya menguji dan menambah keamanan teoretik ilmu fisika, terutama dalam kajian mesin panas kuantum. Penelitian ini mengacu pada konsep-konsep mesin panas kuantum yang terdapat pada penelitian sebelumnya, seperti menggunakan penerapan hukum pertama termodinamika yang dimodifikasi dengan aspek kuantum untuk mendeskripsikan setiap proses termodinamika yang berlangsung, menggunakan analogi-analogi yang termodifikasi dalam bentuk kuantitas kuantum untuk diterapkan pada mesin panas kuantum, dan menggunakan metode statistik yang memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann untuk membangun kuantitas termodinamika dalam mesin panas kuantum.

Pengerjaan yang berbeda antara tugas akhir ini dengan beberapa penelitian sebelumnya terletak pada siklus yang bekerja di mesin panas

kuantumnya. Pada tugas akhir ini, mesin panas kuantum dikaji menggunakan siklus Brayton dimana pada siklus Brayton terdiri dari 2 proses isobarik dan 2 proses adiabatik. Penelitian ini ingin mengkaji proses isobarik dan proses adiabatik pada siklus Brayton yang telah diperluas pada ranah kuantum dan ingin mendapatkan nilai efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik. Nilai efisiensi dari mesin Brayton kuantum pada 2 sistem tersebut kemudian dibandingkan dan dianalisis.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Rumusan masalah yang terdapat pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana deskripsi proses isobarik dan adiabatik kuantum pada mesin Brayton kuantum dengan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik?
2. Bagaimana efisiensi dari mesin Brayton kuantum dengan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui deskripsi proses isobarik dan adiabatik pada mesin Brayton kuantum dengan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik
2. Untuk mengetahui nilai efisiensi dari mesin Brayton kuantum dengan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik.

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

Diharapkan dari penelitian ini dapat memberikan dasar mengenai mesin panas kuantum dan dapat menjadi tambahan rujukan bagi peneliti selanjutnya dalam mengeksplorasi mesin panas kuantum lebih lanjut.

#### **1.5 Batasan Masalah**

Agar penelitian ini lebih terfokus dan tidak melebar, maka diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya membahas mesin Brayton kuantum.
2. Sistem dipertimbangkan berada dalam kesetimbangan termal dan sistem memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann. Digunakan pula kuantitas temperatur didalamnya.

## **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

### **2.1 Dasar-Dasar Termodinamika Klasik**

Termodinamika merupakan ilmu fisika yang mempelajari tentang proses perpindahan energi sebagai kalor dan kerja. Termodinamika dibangun dari fakta-fakta yang terdapat dalam eksperimen, sehingga kajian yang terdapat pada termodinamika hanya berfokus pada keadaan makroskopik atau skala besar dari suatu materi atau zat (Sears dan Gerhard L. Salinger, 1982).

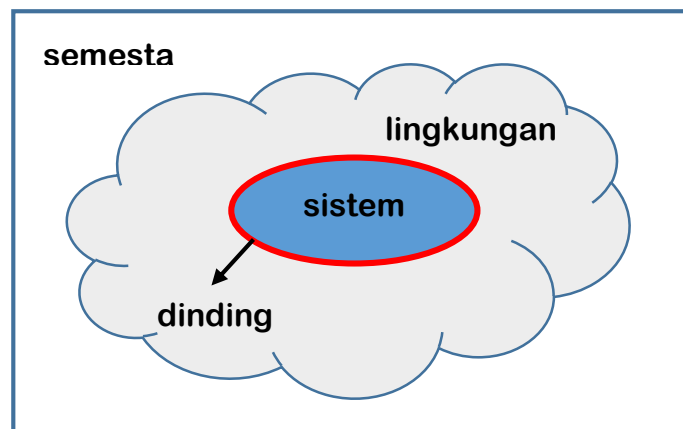
Ilmu Termodinamika mulai berkembang pada abad ke-19 sebagai upaya untuk meningkatkan efisiensi mesin kalor. Pada mulanya termodinamika hanya membahas hubungan antara panas dan kerja mekanik, tetapi kemudian diketahui bahwa terdapat banyak bentuk-bentuk energi yang lain sehingga ruang lingkup termodinamika yang semula hanya terbatas kini menjadi ilmu pengetahuan yang mengkaji semua bentuk-bentuk energi, transformasi energi dari satu bentuk ke bentuk lainnya, bahkan mengkaji hasil-hasil dari perpindahan energi dan transformasinya (Ginting, 1989).

#### **2.1.1 Sistem Termodinamika**

Dalam termodinamika, terdapat istilah “sistem” dan “lingkungan”. Sistem adalah benda atau sekumpulan apa saja yang akan diteliti atau diamati dan menjadi pusat perhatian, sedangkan lingkungan adalah bagian diluar sistem. Sistem Termodinamika adalah Bagian dari keseluruhan sistem dan lingkungannya yang dibatasi oleh permukaan tertutup yang disebut dinding atau batas.

Istilah sistem dalam termodinamika mengacu pada bagian tertentu dari alam semesta di dalam suatu permukaan tertutup yang disebut batas atau

dinding sistem. Batas tersebut dapat berupa zat padat, cair, gas, kumpulan dipol magnet, atau bahkan kumpulan energi radiasi atau foton dalam ruang hampa. Batas tersebut juga tidak harus tetap (*fixed*) dalam bentuk maupun isi, melainkan bisa mengembang atau menyusut (Sears dan Gerhard L. Salinger, 1982).



Gambar 2.1 Skema Sistem Termodinamika

Pada sistem termodinamika terdapat 3 jenis sistem (Giancoli, 2001):

1. Sistem terbuka, yaitu sistem yang didalamnya terdapat pertukaran zat kerja dan energi sistem dengan lingkungan
2. Sistem tertutup, yaitu sistem yang didalamnya terdapat pertukaran energi sistem namun tidak terjadi pertukaran zat kerja sistem dengan lingkungan
3. Sistem terisolasi, yaitu sistem yang didalamnya tidak terdapat pertukaran zat kerja dan energi sistem dengan lingkungan.

## 2.1.2 Persamaan Keadaan

### 2.1.2.1 Hubungan Variabel Keadaan

Dalam termodinamika, terdapat 3 variabel yang biasanya digunakan untuk mendeskripsikan keadaan suatu sistem, yaitu tekanan ( $P$ ), volume ( $V$ ), dan temperatur ( $T$ ). Ketiga variabel ini memiliki hubungan yang saling

berkaitan dimana ketika dua variabel telah diketahui, maka variabel ke tiga pun dapat ditentukan nilai pastinya. Secara matematis dapat ditulis dengan persamaan berikut

$$f(P, T, V) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) disebut dengan persamaan keadaan suatu zat. Umumnya, persamaan ini digunakan untuk menjelaskan keadaan sistem pada sistem tertutup dan sistem terisolasi dimana sistem berada pada kesetimbangan kimia (tidak mengalami perubahan jumlah zat kerjanya).

### 2.1.2.2 Persamaan Gas Ideal

Persamaan gas ideal merupakan persamaan keadaan suatu zat dengan menggunakan gas ideal sebagai zat kerjanya. Dalam sistem termodinamika klasik, zat kerja (*working substance*) yang biasanya digunakan adalah gas ideal. Gas ideal dianggap sebagai gas yang tersusun dari banyak molekul yang saling berjauhan sehingga interaksi antar molekul dapat diabaikan dan tumbukan antar molekulnya lenting sempurna (Purwanto, 2007).

Persamaan gas ideal dikembangkan dari teori kinetik gas atau dari kombinasi dari hukum Boyle dan hukum Gay-Lussac (Ginting, 1989). Hukum Boyle menyatakan bahwa tekanan gas ( $P$ ) yang mengembang pada temperatur ( $T$ ) konstan berbanding terbalik dengan volumenya ( $V$ ). Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$[PV]_{dT=0} = konstan \quad (2.2)$$

sedangkan hukum Gay-Lussac menyatakan bahwa tekanan suatu gas berbanding lurus dengan temperatur bila volume konstan dan volume

berbanding lurus dengan temperatur bila tekanan konstan. Apabila ditulis secara matematis

$$\left[ \frac{P}{T} \right]_{dV=0} = \text{konstan} \quad (2.3.1)$$

$$\left[ \frac{V}{T} \right]_{dP=0} = \text{konstan} \quad (2.3.2)$$

Dengan menggabungkan hukum Boyle dan hukum Gay Lussac, maka akan didapatkan hubungan

$$\left[ \frac{PV}{T} \right] = \text{konstan} \quad (2.4)$$

Bila volume ( $V$ ) digantikan dengan volume persatuan massa dan konstanta pada ruas kanan diganti dengan konstanta gas spesifik ( $R$ ), maka

$$P \frac{V}{m} = RT$$

$$PV = mRT \quad (2.5)$$

Persamaan ini disebut dengan persamaan gas ideal dimana ( $P$ ) adalah tekanan, ( $V$ ) adalah volume, ( $m$ ) adalah massa zat, ( $R$ ) adalah konstanta gas, dan ( $T$ ) adalah temperatur.

Bila kuantitas persamaan gas ideal dinyatakan dalam satuan mol (kilogram.mol atau gram.mol), dimana

$$n = \frac{m}{M}$$

dengan  $n$  adalah jumlah mol,  $m$  adalah massa zat, dan  $M$  adalah massa relatif atom/molekul, maka persamaan gas ideal menjadi

$$PV = nMRT$$

$$PV = nR_0T \quad (2.6)$$

dimana  $R_0$  menunjukkan konstanta gas universal yang tidak bergantung jenis zat dengan nilai  $R_0 = MR = 8,314 \cdot 10^3 \text{ J/Kg.mol K}$ .

Persamaan gas ideal juga dapat dinyatakan dalam bentuk lain, yaitu dalam satuan jumlah molekul dimana

$$n = \frac{N}{N_A}$$

dengan  $N$  adalah jumlah molekul dan  $N_A$  adalah bilangan Avogadro yang nilainya  $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ molekul/kg.mol}$ , maka

$$PV = nR_0T$$

$$PV = \frac{N}{N_A} R_0T$$

$$PV = N \frac{R_0}{N_A} T$$

$$PV = NkT \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) merupakan persamaan gas ideal yang dinyatakan dalam bentuk satuan jumlah molekul. Pada persamaan (2.7) ini dikenalkan konstanta  $k$  yang disebut dengan konstanta Boltzmann yang merupakan perbandingan konstanta gas universal  $R_0$  dengan bilangan Avogadro  $N_A$  yang nilainya  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/molekul.K}$ .

### 2.1.3 Kerja

Bila sistem mengalami pergeseran karena beraksinya gaya, maka dikatakan kerja telah dilakukan. Kerja didefinisikan sebagai hasil kali gaya yang bersangkutan dengan komponen arah pergeseran yang sejajar dengan gaya tersebut. Jika hasil sistem secara keseluruhan menimbulkan gaya pada lingkungannya dan terjadi pergeseran, maka kerja yang dilakukan oleh sistem atau pada sistem disebut dengan kerja eksternal. Sedangkan jika kerja dilakukan oleh bagian sistem tertentu pada bagian sistem yang lain, maka disebut kerja internal. Dan dalam termodinamika, yang berperan bukanlah kerja internal melainkan kerja eksternal, yaitu kerja yang melibatkan interaksi sistem dan lingkungannya (Zemansky dan Richard H. Dittman, 1986).

Terdapat beberapa macam cara kerja yang dilakukan pada atau oleh sistem. Untuk kasus mesin panas, kerja dilakukan dengan meninjau proses kuasistatik. Proses kuasistatik adalah proses yang berjalan sedemikian rupa pada sistem dimana simpangan dari kesetimbangannya sangat kecil sehingga dapat diabaikan.

Bila sistem dianggap seperti sebuah silinder yang dilengkapi dengan piston yang dapat bergerak, maka besar infinitesimal dari kerja atau usaha untuk kerja kuasistatik pada sistem tersebut adalah dengan mengalikan skalar antara gaya eksternal ( $\vec{F}$ ) yang bekerja pada piston tersebut terhadap perubahan posisi piston sejauh ( $d\vec{L}$ ). Secara matematis dapat ditulis

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{L} \quad (2.8)$$

Tanda negatif (−) menunjukkan bahwa gaya eksternal yang bekerja pada piston berlawanan arah dengan pergeseran atau perubahan posisi piston.

Besarnya gaya dapat diubah dalam bentuk tekanan ( $P$ ) pada penampang piston dikali luas ( $A$ ) penampang piston. Persamaan (2.8) dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned}\delta W &= -\vec{F} \cdot d\vec{L} \\ \delta W &= -P\vec{A} \cdot d\vec{L} \\ \delta W &= -P dV\end{aligned}\tag{2.9}$$

dimana  $\delta W$  adalah kerja infinitesimal sistem,  $P$  adalah tekanan, dan  $dV = \vec{A} \cdot d\vec{L}$  adalah volume infinitesimal sistem. Tanda negatif ( $-$ ) didepan  $P dV$  menyatakan bahwa untuk  $dV$  yang bernilai positif (pemuaian) akan menghasilkan kerja yang bernilai negatif, dan untuk  $dV$  yang bernilai negatif (penyusutan) akan menghasilkan kerja yang bernilai positif (Zemansky dan Richard H. Dittman, 1986).

Total kerja dalam proses kuasistatik dari keadaan sistem bervolume awal  $V_i$  hingga mencapai volume  $V_f$  dapat ditentukan dengan mengintegrasikan persamaan (2.9)

$$\begin{aligned}\delta W &= -P dV \\ W &= -\int_{V_i}^{V_f} P dV\end{aligned}\tag{2.10}$$

Pengintegralan ini dapat dilakukan jika mengetahui hubungan antara  $P$  dan  $V$  yang dimiliki sistem selama proses berlangsung. Hubungan tersebut bisa dinyatakan dalam suatu persamaan atau grafik.

#### 2.1.4 Kalor

Kalor ( $Q$ ) adalah perpindahan energi internal. Kalor mengalir dari satu bagian sistem ke bagian yang lain atau dari sistem ke sistem yang lain karena adanya perbedaan temperatur. Kalor belum diketahui sewaktu proses berlangsung dan baru setelah aliran kalor berhenti seseorang dapat mengacu pada kalor, atau dalam kata lain energi internal yang telah dipindahkan dari sistem bertemperatur lebih tinggi ke sistem lain yang bertemperatur lebih rendah (Zemansky dan Richard H. Dittman, 1986).

Kalor ( $Q$ ) bukan merupakan fungsi koordinat termodinamika. Kalor bergantung pada lintasan yang dilalui sistem dari keadaan awal ke keadaan akhir. Jadi, sejumlah kalor infinitesimal adalah diferensial non-eksak dan dilambangkan dengan  $\delta Q$ .

Kalor dan kerja memiliki beberapa kesamaan untuk sistem termodinamika, yaitu (Akbar, 2016):

- Kalor dan kerja adalah gejala transisi. Sistem tidak pernah memiliki pernah memiliki kalor dan kerja, tetapi kalor dan kerja melewati batas sistem ketika sistem mengalami perubahan keadaan
- Baik kalor dan kerja adalah gejala batas (*boundary phenomena*), keduanya dikenali hanya pada batas sistem dan keduanya menyatakan energi yang melewati batas sistem
- Baik kalor maupun kerja, keduanya adalah fungsi lintasan dan merupakan turunan non-eksak.

### 2.1.5 Fungsi Energi Internal

Fungsi energi internal (energi dalam) diberi lambang  $U$ . Energi internal adalah suatu fungsi koordinat termodinamika yang banyaknya sama dengan yang diperlukan untuk merinci atau menetapkan keadaan sistem. Misalnya pada keadaan setimbang sistem hidrostatis tertutup, terdapat tiga koordinat termodinamika yang digunakan untuk mendeskripsikan keadaan sistem tersebut, yaitu  $P$ ,  $V$ , dan  $T$ . Tiga koordinat tersebut dapat ditentukan sepenuhnya oleh koordinat diantaranya saja, karena koordinat ketiga ditentukan oleh persamaan keadaan. Sehingga energi internal dapat dibayangkan sebagai fungsi dari dua koordinat termodinamika (sembarang koordinat dari  $P$ ,  $V$ , dan  $T$ ).

Jika koordinat yang dipakai untuk memeriksa kedua keadaan hanya berbeda secara infinitesimal, maka perubahan energi internalnya adalah  $dU$ , dimana  $dU$  merupakan diferensial eksak. Untuk sistem hidrostatis tertutup dimana  $U$  dipandang sebagai fungsi  $T$  dan  $V$ , maka

$$dU(T, V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (2.11)$$

atau dengan memandang  $U$  sebagai fungsi  $T$  dan  $P$ , maka

$$dU(T, P) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP \quad (2.12)$$

Kedua turunan parsial  $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$  dan  $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$  ini tidak sama karena turunan parsial pertama merupakan fungsi  $T$  dan  $V$  dan turunan parsial yang kedua merupakan fungsi  $T$  dan  $P$ , sehingga kedua bentuk ini berbeda secara

matematis dan memiliki arti fisis yang berbeda (Zemansky dan Richard H. Dittman, 1986).

### 2.1.6 Hukum Pertama Termodinamika

Hukum pertama termodinamika berbunyi (Zemansky dan Richard H. Dittman, 1986):

*“Jika suatu sistem diubah dari keadaan mula ke keadaan akhir hanya secara adiabat, maka kerja yang dilakukan sama besar untuk semua lintasan adiabat yang menghubungkan kedua keadaan ini”*

Hukum pertama termodinamika didapatkan dari dua eksperimen yang berbeda dalam sistem tertutup yang sama. Eksperimen pertama dilakukan dengan mengukur kerja yang diperlukan sepanjang proses adiabatik (tidak ada interaksi kalor antara sistem dengan lingkungan) untuk mengubah keadaan sistem dari keadaan awal hingga keadaan akhir. Hasil eksperimen menunjukkan terdapat suatu fungsi koordinat termodinamika yang mana harga pada keadaan akhir dikurangi dengan harga pada keadaan awal sama dengan kerja adiabatik yang bekerja dari satu keadaan ke keadaan yang lainnya. Fungsi ini dikenal dengan fungsi energi internal ( $U$ ). Bila ditulis dalam bentuk matematis,

$$W_{i \rightarrow f}(\text{adiabatik}) = U_f - U_i \quad (2.13)$$

Pada eksperimen kedua, prosesnya terjadi secara diatermik (dimungkinkan terjadi aliran kalor antara sistem dengan lingkungan). Hasil eksperimen menunjukkan bahwa kerja non-adiabatik tidak sama dengan  $U_f - U_i$  seperti hasil eksperimen pertama. Supaya hasil ini sesuai dengan asas atau

prinsip kekekalan energi, maka disimpulkan bahwa energi telah dipindahkan dengan cara yang lain dari pelaksanaan kerja. Perpindahan energi antara sistem dan lingkungan ini terjadi disebabkan karena adanya perbedaan temperatur antara sistem dan lingkungan yang disebut kalor, sehingga dapat didefinisikan (Zemansky dan Richard H. Dittman, 1986):

*“Bila suatu sistem, yang lingkungannya bertemperatur berbeda dan kerja dilakukan padanya, mengalami suatu proses, maka energi yang dipindahkan dengan cara non-mekanis yang sama dengan perbedaan antara perubahan energi internal dan kerja yang dilakukan, disebut kalor”*

Bila ditulis secara matematis,

$$Q = U_f - U_i - (W)$$

$$U_f - U_i = Q + W$$

$$\Delta U = Q + W \tag{2.14}$$

dimana  $Q$  adalah kalor,  $\Delta U$  adalah perubahan energi internal, dan  $W$  adalah kerja.  $Q$  bernilai positif bila kalor masuk ke dalam sistem, dan  $Q$  bernilai negatif bila kalor keluar sistem;  $W$  bernilai positif jika sistem menerima kerja, dan  $W$  bernilai negatif jika sistem mengeluarkan kerja. Persamaan ini menunjukkan hubungan antara kalor, kerja, dan energi internal sistem dan dikenal sebagai perumusan matematis hukum pertama termodinamika.

Hukum pertama termodinamika dari persamaan (2.14) untuk sistem yang mengalami perubahan infinitesimal dapat ditulis

$$\delta Q = dU - (\delta W)$$

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (2.15)$$

dengan substusi persamaan (2.9) ke dalam persamaan (2.15) maka hukum pertama termodinamika juga dapat ditulis dengan

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dU = \delta Q + (-P dV)$$

$$dU = \delta Q - P dV \quad (2.16)$$

### 2.1.7 Kapasitas Kalor

Dalam kasus dimana tidak ada kerja pada suatu sistem, maka seluruh kalor yang masuk atau keluar sistem akan mengubah energi dalam. Jika kalor masuk, maka energi internal sistem akan bertambah, begitupun sebaliknya. Aliran kalor ke dalam sistem disebut dengan kapasitas kalor ( $C$ ).

Dalam kondisi volume tetap, kalor jenis didefinisikan sebagai

$$C_v = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_v \quad (2.17)$$

Sedangkan dalam kondisi tekanan tetap, kapasitas kalor didefinisikan sebagai

$$C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p \quad (2.18)$$

Bila persamaan (2.17) dihubungkan dengan hukum pertama termodinamika pada persamaan (2.16)

$$dU = \delta Q - P dV$$

$$dU = C_v dT - P dV$$

$$dU = C_v dT \quad (2.19)$$

Untuk kasus tekanan konstan,

$$dU = \delta Q - P dV$$

$$\delta Q = dU + P dV$$

$$C_p dT = C_v dT + P dV$$

dimana  $P dV$  bisa dihubungkan dengan persamaan gas ideal pada persamaan (2.6)

$$PV = nRT$$

$$P \frac{V}{n} = RT$$

$$P \underbrace{\frac{V}{n}}_{\text{Vol per mol}} = RT$$

$$P dV + \underbrace{V dP}_{0, \text{karena } P \text{ konstan}} = R dT$$

$$P dV = R dT$$

maka

$$C_p dT = C_v dT + P dV$$

$$C_p dT = C_v dT + R dT$$

$$C_p = C_v + R$$

Untuk kasus gas ideal, nilai dari selisih  $C_v$  dan  $C_p$  sama dengan konstanta  $R$ .

$$C_p - C_v = R \quad (2.20)$$

Bila dikenalkan konstanta Laplace ( $\gamma$ ) , yaitu perbandingan antara kapasitas kalor pada tekanan konstan dengan kapasitas kalor pada volume konstan,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

maka didapatkan hubungan antara kapasitas kalor pada volume tetap, kapasitas kalor pada tekanan konstan, dan konstanta Laplace sebagai berikut

$$C_P - C_V = R$$

$$\left(\frac{C_P}{C_V} - 1\right) = \frac{R}{C_V}$$

$$(\gamma - 1) = \frac{R}{C_V}$$

$$C_V = \frac{R}{(\gamma - 1)} \quad (2.21)$$

dan

$$C_P - C_V = R$$

$$\left(1 - \frac{C_V}{C_P}\right) = \frac{R}{C_P}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{R}{C_P}$$

$$C_P = \frac{R}{\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$C_P = \frac{R}{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)}$$

$$C_P = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)} \quad (2.22)$$

### 2.1.8 Proses- Proses Termodinamika

Proses di dalam termodinamika merupakan suatu perubahan keadaan sistem dari keadaan satu ke keadaan yang lain. Bila sistem melakukan serangkaian proses dan akhirnya kembali ke keadaan semula, maka dikatakan sistem tersebut telah melakukan suatu siklus.

Proses yang dijabarkan disini merupakan proses pada sistem tertutup. Proses-proses tersebut meliputi hubungan  $P$ - $V$ - $T$ , kerja ( $W$ ), dan kalor ( $Q$ ). Berikut beberapa macam proses dalam termodinamika:

#### 1. Proses Isobarik

Proses Isobarik adalah proses dimana sistem memiliki tekanan konstan selama proses berlangsung ( $P = \text{konstan}$ ).

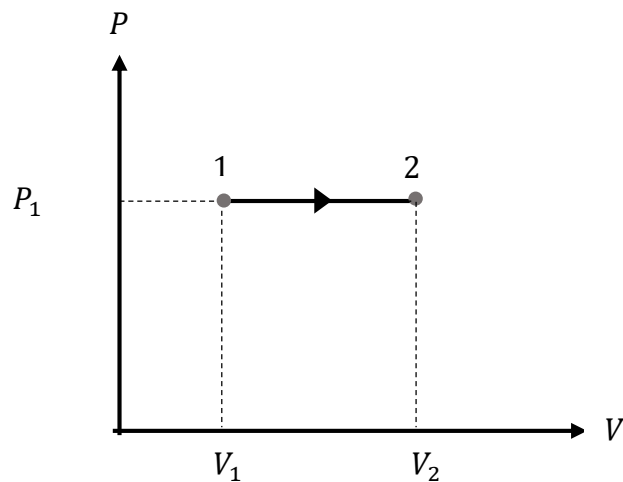
Kerja yang dilakukan sistem dalam proses ini sebesar

$$W = - \left( - \int_{V_i}^{V_f} P dV \right)$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

$$W = P(V_f - V_i) \tag{2.23}$$

Penambahan tanda negatif ( $-$ ) diberikan karena sistem melakukan kerja.



Gambar 2.2. Proses Isobarik dalam Diagram  $P - V$

## 2. Proses Isohorik

Proses isohorik adalah proses dimana sistem memiliki volume konstan selama proses berlangsung ( $V = \text{konstan}$ ). Pada proses ini, sistem tidak melakukan kerja meskipun terdapat aliran kalor pada sistem. Bila ditulis

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

$$W = P \cdot (0)$$

$$W = 0 \tag{2.24}$$

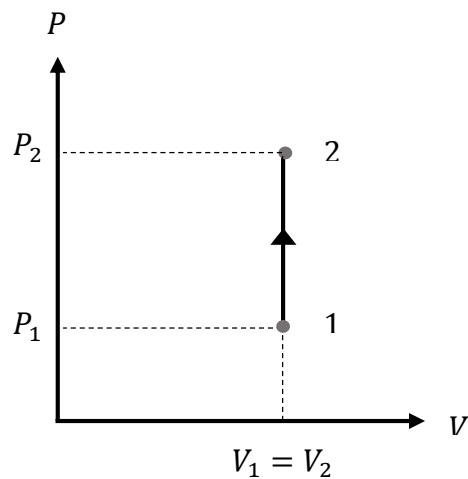
Berdasarkan hukum pertama termodinamika,

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dU = \delta Q + 0$$

$$dU = \delta Q \tag{2.25}$$

Ini menunjukkan bahwa pada proses isohorik, diperoleh perubahan energi dalam sebesar kalor yang masuk atau keluar sistem dengan  $\delta W = 0$ .

Gambar 2.3. Proses Isohorik dalam Diagram  $P - V$ 

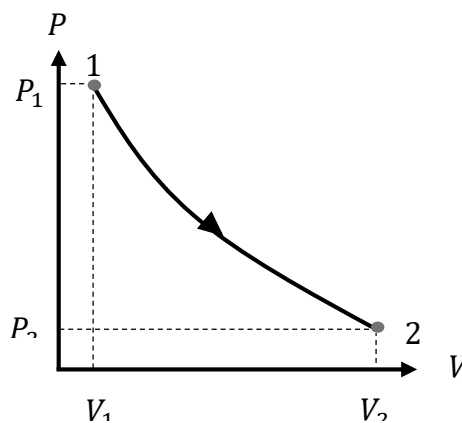
### 3. Proses Isotermal

Proses Isotermal adalah proses dimana sistem memiliki temperatur konstan selama proses berlangsung ( $T = \text{konstan}$ ). Tidak adanya perubahan temperatur pada proses isotermal membuat perubahan energi internalnya sama dengan nol. Berdasarkan hukum pertama termodinamika, didapatkan

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$0 = \delta Q + (-\delta W)$$

$$\delta Q = \delta W \quad (2.26)$$

Gambar 2.4. Proses Isotermal dalam Diagram  $P - V$

#### 4. Proses Adiabatik

Proses adiabatik adalah proses dimana tidak ada kalor yang masuk atau keluar pada sistem selama proses berlangsung ( $\delta Q = 0$ ).

Berdasarkan hukum pertama termodinamika, didapatkan

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dU = 0 + \delta W$$

$$dU = \delta W \quad (2.27)$$

Berdasarkan definisi sebelumnya pada persamaan (2.19) dan (2.9) (Abdullah, 2016)

$$dU = C_v dT$$

$$\delta W = -P dV$$

maka untuk proses adiabatik dipenuhi

$$C_v dT = -P dV \quad (2.28)$$

Dari persamaan gas ideal  $PV = nRT$  dapat ditulis  $T = PV/nR$ .

Dengan melakukan differensial ke dua ruas, diperoleh

$$dT = \frac{PdV + VdP}{nR} \quad (2.29)$$

Substitusi persamaan (2.29) ke dalam persamaan (2.28), diperoleh

$$C_v \left( \frac{PdV + VdP}{nR} \right) = -PdV$$

$$C_v PdV + C_v VdP = -nR PdV$$

$$\begin{aligned}
C_v PdV + nRPdV + C_v VdP &= 0 \\
\frac{(C_v + nR) PdV + C_v VdP}{C_p} &= 0 \\
C_p PdV + C_v VdP &= 0 \\
\frac{C_p}{C_v} PdV + VdP &= 0 \\
\frac{C_p}{C_v} dV + \frac{V}{P} dP &= 0 \\
\frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} &= 0 \\
\underbrace{\frac{C_p}{C_v}}_{\gamma} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} &= 0 \\
\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} &= 0 \tag{2.30}
\end{aligned}$$

dengan  $\gamma = C_p/C_v$ .

Selanjutnya, dengan melakukan integral dua ruas persamaan (2.30), maka didapatkan

$$\begin{aligned}
\int \gamma \frac{dV}{V} + \int \frac{dP}{P} &= C_1 \\
\gamma \ln V + \ln P &= C_1 \\
\ln V^\gamma + \ln P &= C_1 \\
\ln PV^\gamma &= C_1 \\
PV^\gamma &= e^{C_1} \\
PV^\gamma &= C \tag{2.31}
\end{aligned}$$

dimana  $C$  dan  $C_1$  adalah konstanta. Persamaan (2.31) menunjukkan proses adiabatik untuk gas ideal dimana  $PV^\gamma$  bernilai konstan sepanjang proses.

Persamaan (2.31) juga dapat ditulis ulang dengan memasukkan definisi  $P = nRT/V$  untuk gas ideal, dan didapatkan persamaan proses

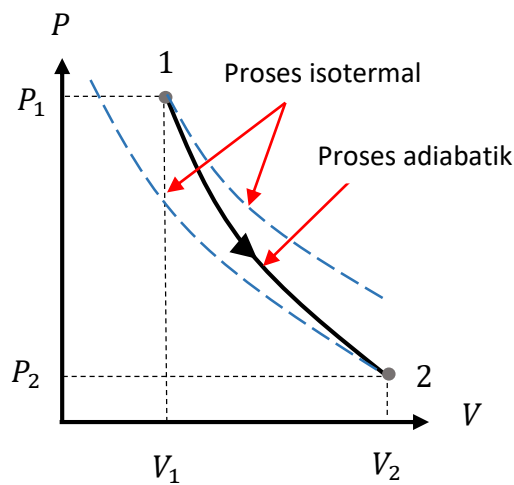
$$PV^\gamma = C$$

$$\left(\frac{nRT}{V}\right)V^\gamma = C$$

$$TV^{-1}V^\gamma = \frac{C}{\underbrace{nR}_{\text{konstan}}}$$

$$TV^{\gamma-1} = C \quad (2.32)$$

dimana  $C$  adalah konstanta.



Gambar 2.5. Proses Adiabatik dalam Diagram  $P - V$

### 2.1.9 Hukum Kedua Termodinamika

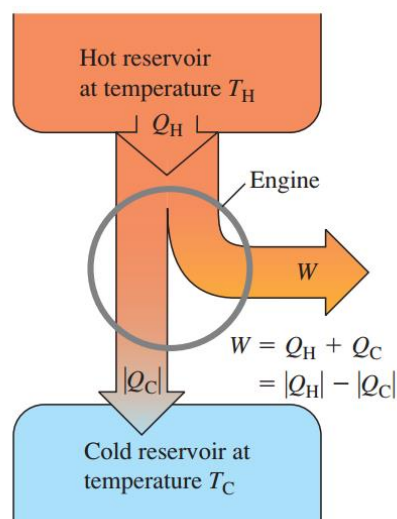
Hukum kedua termodinamika dinyatakan oleh Kevin-Planck sebagai berikut:

*“Tidak mungkin suatu sistem yang bekerja dalam satu siklus untuk mengubah panas dengan hanya satu reservoir dan menghasilkan sejumlah kerja positif yang ekuivalen”*

Kevin-Planck menyatakan bahwa kalor dari reservoir bertemperatur lebih tinggi tidak mungkin sepenuhnya diserap sistem menjadi kerja, melainkan terdapat sebagian dari kalor tersebut yang harus dikeluarkan ke reservoir yang bertemperatur lebih rendah.

Bila pada hukum pertama termodinamika menjelaskan tentang prinsip kekekalan energi, maka hukum kedua termodinamika ini menjelaskan tentang bagaimana cara energi tersebut dipindahkan. Hukum kedua termodinamika menyatakan tentang aliran kalor dimana kalor mengalir dari reservoir bertemperatur tinggi ke reservoir bertemperatur rendah, namun tidak dapat dibalikkan (*irreversible*). Aplikasi dari hukum kedua termodinamika ini terdapat dalam sistem mesin panas.

Pada mesin panas, terdapat kalor yang masuk dari reservoir panas ( $Q_H$ ) ke sistem, kemudian sebagian kalor tersebut dikonversi menjadi kerja mekanis ( $W$ ) dan sebagian kalor lainnya dikeluarkan atau dibuang oleh sistem ke reservoir dingin ( $Q_C$ ). Ketiga kuantitas  $Q_H$ ,  $Q_C$ , dan  $W$  dinyatakan dalam harga mutlak atau bilangan positif. Oleh karena kalor pada reservoir panas tidak dapat diubah sepenuhnya dalam bentuk kerja mekanis, maka efisiensi mesin panas akan kurang dari 100%.



Gambar. 2.6. Diagram Aliran Kalor Mesin Panas (Young dan Roger A. Freedman. 2012)

Efisiensi mesin panas didefinisikan sebagai rasio dari kerja yang diperoleh sistem terhadap kalor yang diserap sistem dari reservoir panas.

Secara matematis ditulis

$$\eta \equiv \frac{W}{Q} < 1 \quad (2.33)$$

Karena kalor pada sistem merupakan jumlah kalor dari reservoir panas  $Q_H$  yang masuk pada sistem yang kemudian keluar ke reservoir dingin  $Q_C$ , dapat ditulis

$$Q = Q_H - Q_C \quad (2.34)$$

$$\delta Q = Q_H - Q_C$$

Dengan menggunakan persamaan hukum pertama termodinamika dengan  $dU = 0$  dimana tidak terjadi perubahan energi internal karena proses membentuk siklus penuh  $U_f = U_i$ , maka

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$0 = \delta Q + (-\delta W)$$

$$\delta W = \delta Q$$

$$W = |Q_H| - |Q_C| \quad (2.35)$$

Sehingga efisiensi mesin panas pada persamaan (2.33) dapat ditulis ulang dengan

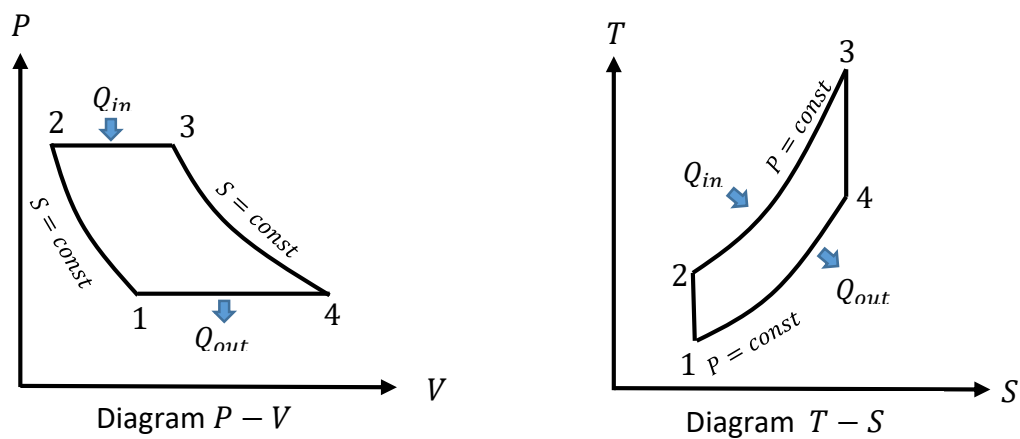
$$\eta = \frac{W}{Q}$$

$$\eta = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} \quad (2.36)$$

## 2.2 Mesin Brayton

Mesin panas Brayton merupakan mesin panas dengan menggunakan siklus Brayton selama proses berlangsung pada suatu sistem. Siklus Brayton pertama kali diusulkan oleh John Barber pada 1791 dan dikembangkan lebih lanjut oleh George Brayton. Siklus Brayton merupakan konsep dasar untuk mesin turbin gas (Singh, 2019).



Gambar 2.7. Siklus Brayton dalam Diagram  $P - V$  dan  $T - S$

Siklus Brayton dalam kasus ini dianggap berlangsung pada sistem tertutup dan zat kerja (*working substance*) yang digunakan adalah gas ideal dengan kapasitas kalor tetap. Lintasan siklusnya digambarkan pada gambar 2.6. Lintasan siklus Brayton dimulai dari titik 1 dan berakhir pada titik 1, yaitu 1-2-3-4-1. Siklus Brayton terdiri dari 2 proses adiabatik dan 2 proses Isobarik (Callen, 1985).

1. Pada tahap 1-2, proses yang terjadi pada sistem adalah proses kompresi adiabatik. Kompresi terjadi dari  $V_1$  menuju  $V_2$  dengan besar kerja yang dilakukan adalah (Abidin, 2017)

$$dU = -\delta W$$

$$\int_1^2 \delta W = - \int_1^2 dU$$

$$W_{1-2} = - \int_1^2 C_v dT$$

$$W_{1-2} = -C_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{1-2} = C_v (T_1 - T_2) \quad (2.37)$$

2. Pada tahap 2-3, proses yang terjadi adalah proses ekspansi isobarik. Ekspansi isobarik terjadi dari  $V_2$  menuju  $V_3$ . Pada proses ini, sistem menyerap panas dari lingkungan dengan  $Q_{2-3} > 0$  sebesar

$$Q_{2-3} = Q_H$$

$$= \int_2^3 \delta Q_H$$

$$= \int_2^3 C_P dT$$

$$Q_{2-3} = C_P (T_3 - T_2) \quad (2.38)$$

dengan  $T_3 > T_2$ . Selanjutnya, perubahan energi dalam yang terjadi pada proses ini sebesar

$$dU_{2-3} = \int_2^3 dU$$

$$= \int_2^3 C_v dT$$

$$dU_{2-3} = C_v (T_3 - T_2) \quad (2.39)$$

dengan menggunakan hukum pertama termodinamika pada persamaan (2.15), dan dilakukan substitusi persamaan (2.38) dan (2.39) pada persamaan (2.15), maka didapatkan besar kerja yang dilakukan sistem sebesar

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$dU = \delta Q + (-\delta W)$$

$$dU = \delta Q - \delta W$$

$$\delta W = \delta Q - dU$$

$$W_{2-3} = Q_{2-3} - dU_{2-3}$$

$$W_{2-3} = C_P (T_3 - T_2) - C_v (T_3 - T_2)$$

$$W_{2-3} = (C_P - C_v)(T_3 - T_2) \quad (2.40)$$

3. Pada tahap 3-4, proses yang terjadi adalah proses ekspansi adiabatik. Pada tahap ini sistem mengalami proses ekspansi adiabatik dari  $V_3$  menuju  $V_4$  dan kerja yang dilakukan sistem adalah

$$\int_3^4 \delta W = - \int_3^4 dU$$

$$W_{3-4} = - \int_3^4 C_v dT$$

$$W_{3-4} = -C_v (T_4 - T_3)$$

$$W_{3-4} = C_v (T_3 - T_4) \quad (2.41)$$

4. Pada tahap 4-1, proses yang terjadi adalah proses kompresi isobarik. Kompresi isobarik terjadi dari  $V_4$  menuju  $V_1$ . Pada tahap ini, sistem mengeluarkan panas ke lingkungan dengan  $Q_{4-1} < 0$  sebesar

$$\begin{aligned}
 Q_{4-1} &= Q_C \\
 &= \int_4^1 \delta Q_C \\
 &= \int_4^1 C_P dT \\
 Q_{4-1} &= C_P (T_1 - T_4)
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

dengan  $T_4 > T_1$ . Selanjutnya, perubahan energi dalam yang terjadi pada proses ini sebesar

$$\begin{aligned}
 dU_{4-1} &= \int_4^1 dU \\
 &= \int_4^1 C_v dT \\
 dU_{4-1} &= C_v (T_1 - T_4)
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Dengan didapatkan besar kerja yang dilakukan sistem sebesar

$$\begin{aligned}
 dU &= \delta Q - \delta W \\
 \delta W &= \delta Q - dU \\
 W_{4-1} &= Q_{4-1} - dU_{4-1} \\
 W_{4-1} &= C_P (T_1 - T_4) - C_v (T_1 - T_4) \\
 W_{4-1} &= (C_P - C_v)(T_1 - T_4)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Kemudian dari keseluruhan proses yang terjadi pada siklus Brayton, kerja total yang dilakukan sistem diperoleh dengan menjumlahkan kerja pada tiap proses atau dengan menggunakan persamaan (2.35), yaitu

$$\begin{aligned}
 W_{total} &= W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-4} + W_{4-1} \\
 &= C_v (T_1 - T_2) + (C_p - C_v)(T_3 - T_2) + C_v (T_3 - T_4) + (C_p \\
 &\quad - C_v)(T_1 - T_4) \\
 &= C_v T_1 - C_v T_2 + C_p T_3 - C_p T_2 - C_v T_3 + C_v T_2 + C_v T_3 - C_v T_4 \\
 &\quad + C_p T_1 - C_p T_4 - C_v T_1 + C_v T_4 \\
 &= C_p T_3 - C_p T_2 + C_p T_1 - C_p T_4 \\
 W_{total} &= C_p [(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)] \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
 W_{total} &= |Q_H| - |Q_C| \\
 &= Q_{2-3} - Q_{4-1} \\
 &= C_p (T_3 - T_2) - C_p (T_1 - T_4) \\
 W_{total} &= C_p [(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)] \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat ditentukan efisiensi siklus Brayton sebesar

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{W_{total}}{Q_H} \\
 &= \frac{C_p [(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)]}{C_p (T_3 - T_2)} \\
 \eta &= 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Jika diketahui bahwa (Abidin, 2017):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (2.48.1)$$

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (2.48.2)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \quad (2.48.3)$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \quad (2.48.4)$$

dimana  $P_1 = P_4$  dan  $r_k = \frac{V_1}{V_2}$  adalah rasio kompresi, maka efisiensi mesin Brayton dapat dinyatakan dengan

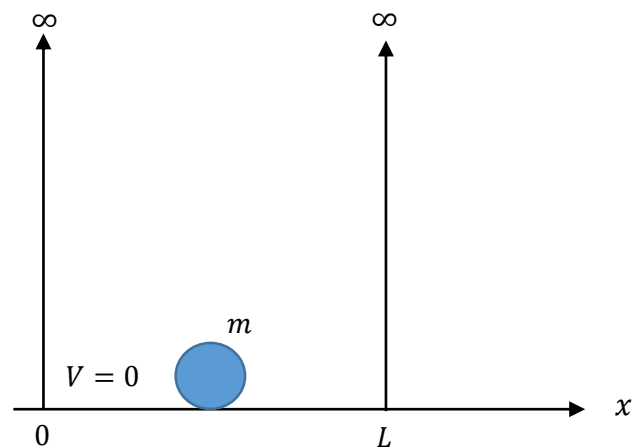
$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \\ \eta &= 1 - \frac{T_1 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)}{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} \\ \eta &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} \\ \eta &= 1 - \frac{1}{(r_k)^{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

atau

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} \\ \eta &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \\ \eta &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

### 2.3 Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi

Sebuah partikel bermassa  $m$  berada didalam sumur atau kotak potensial satu dimensi sepanjang  $L$ . Ilustrasinya seperti gambar dibawah ini (Purwanto, 2005):



Gambar 2.8 Partikel dalam Kotak Satu Dimensi

Potensial  $V \rightarrow \infty$  di  $x = 0$  dan  $x = L$  dibuat untuk menjamin agar partikel tidak dapat menembus dinding dan keluar kotak. Artinya, tidak mungkin partikel berada di luar sumur potensial. Secara matematis hal ini berarti

$$\psi(x) = 0 \quad \text{untuk } x \leq 0 \text{ dan } x \geq L \quad (2.51)$$

Karena didalam kotak  $V(x) = 0$ , maka persamaan Schrodinger sistem ini

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad \text{untuk } x \leq 0 \text{ dan } x \geq L \quad (2.52)$$

atau

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (2.53)$$

Jika dituliskan

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2 \quad (2.54)$$

maka persamaan Schrodinger yang tak bergantung waktu pada persamaan (2.53) menjadi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (2.55)$$

Persamaan (2.55) adalah persamaan differensial orde-2 dengan akar-akar bilangan kompleks yang berlainan, dan solusinya adalah

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.56)$$

Lalu dimasukkan syarat batas saat  $x = 0$ , fungsi  $\psi(0) = 0$ ,

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$\psi(0) = A \sin k(0) + B \cos k(0)$$

$$0 = 0 + B(1) \quad (2.57)$$

disini  $B$  berarti harus  $B = 0$ . Oleh karena itu,  $\psi(x)$  menjadi

$$\psi(x) = A \sin kx \quad (2.58)$$

Dimasukkan lagi syarat batas saat  $x = L$ , fungsi  $\psi(L) = 0$ ,

$$\psi(x) = A \sin kx$$

$$\psi(L) = A \sin k(L)$$

$$0 = A \sin k(L) \quad (2.59)$$

Nilai  $\sin k(L)$  akan sama dengan nol jika memenuhi  $\sin kL = \sin n\pi$ ,

$$kL = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{dengan } n = 1,2,3,4, \dots \quad (2.60)$$

Dari hubungan antara  $E$  pada persamaan (2.54) dan  $k$  pada persamaan (2.60), maka diperoleh ungkapan energi partikel didalam kotak yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{2mE}{\hbar^2} &= k^2 \\ E &= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \\ E &= n^2 E_1\end{aligned}\tag{2.61}$$

dengan

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\tag{2.62}$$

adalah energi terendah.

Ini menunjukkan bahwa energi partikel dalam kotak tidak bernilai sembarang atau kontinu, melainkan secara diskrit hanya boleh ada pada nilai tertentu, yaitu kuadrat bilangan bulat ( $n^2$ ) kali energi terendah  $E_1$ . Keadaan dengan energi terendah disebut dengan keadaan dasar (*ground state*) (Purwanto, 2005).

Substitusi bentuk akhir  $k$  kedalam fungsi  $\psi(x)$  dan didapatkan fungsi eigen

$$\psi(x) \equiv \psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x\tag{2.63}$$

dimana  $\psi_n(x)$  harus ternormalisasi.

Konstanta  $A$  ditentukan dengan proses normalisasi, yaitu partikel pasti berada di dalam sumur. Oleh karena itu,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) dx$$

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^L \left( A \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \left( A \sin \frac{n\pi}{L} x \right) dx \\
1 &= \int_0^L A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx \\
1 &= A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx \\
1 &= A^2 \int_0^L \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) dx \\
1 &= A^2 \left( \frac{1}{2} x - \frac{L}{4n\pi} \underbrace{\sin \frac{2n\pi}{L} x}_0 \right) \Bigg|_0^L \\
1 &= A^2 \left( \frac{L}{2} \right) \\
A^2 &= \frac{2}{L} \\
A &= \sqrt{\frac{2}{L}}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Dengan demikian, fungsi gelombang ternormalisasi untuk kasus partikel yang terperangkap dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi berukuran  $L$  adalah

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \tag{2.65}$$

dan keadaan dasarnya adalah

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x \quad (2.66)$$

## 2.4 Osilator Harmonik

Di mekanika klasik, osilator harmonik dianggap sebagai sebuah benda bermassa  $m$  yang salah satu ujungnya diikat diikat dengan sebuah pegas dengan konstanta pegas  $k$ . Gerak benda tersebut diatur oleh hukum Hooke (Griffiths, 1994):

$$F = -kx \quad (2.67)$$

$$-kx = ma$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega x$$

dengan  $\omega = k/m$  adalah frekuensi anguler osilasi. Dan solusinya didapatkan

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.68)$$

Energi potensial sistem adalah

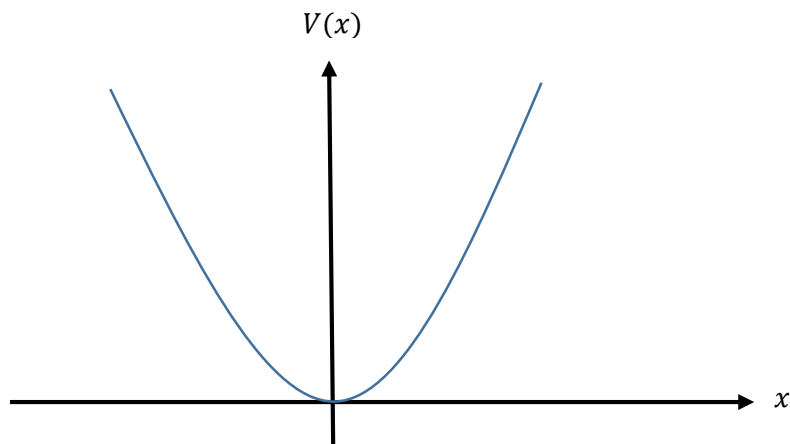
$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (2.69)$$

Dalam mekanika kuantum, fungsi gelombang dari sistem osilator harmonik didapatkan dengan memecahkan persamaan Schrodinger dengan potensial  $V(x)$ :

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Apabila digambar dalam bentuk grafik, bentuk potensial osilator harmonik sebagai berikut:



Gambar 2.9 Potensial Osilator Harmonik

Karena  $V(x)$  tidak bergantung waktu, maka digunakan persamaan Schrodinger tak bergantung waktu untuk osilator harmonik

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.70)$$

Persamaan (2.70) diselesaikan menggunakan metode aljabar.

Persamaan (2.70) dapat ditulis ulang sebagai berikut (Suana, 2012):

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 \psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 + m^2 \omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.71)$$

dengan menggunakan sifat aljabar

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$$

maka ruas kiri pada persamaan (2.71) dapat dinyatakan dengan perkalian dua faktor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 + \frac{(m\omega x)^2}{b^2} \right] \psi(x) &= \frac{1}{2m} \left\{ \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + im\omega x \right] \right\} \psi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + im\omega x \right] \psi(x) \\ &= a_- a_+ \psi(x) \end{aligned}$$

dimana  $a_-$  dan  $a_+$  adalah suatu operator dan didefinisikan sebagai berikut

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \quad (2.72.1)$$

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + im\omega x \right] \quad (2.72.2)$$

Disini  $a_-$  dan  $a_+$  adalah bukan bilangan biasa, melainkan sebuah operator.

Pada umumnya suatu operator bersifat tidak komut ( $ab \neq ba$ ), sehingga perlu diperiksa produk dari  $a_- a_+$  jika bekerja pada suatu fungsi, misalnya  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} a_- a_+ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + im\omega x \right] f(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{df(x)}{dx} + im\omega x f(x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m} \left\{ \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{df(x)}{dx} + im\omega x f(x) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \hbar m \omega \frac{d[xf(x)]}{dx} - \hbar m \omega x \frac{df(x)}{dx} + (m\omega x)^2 f(x) \right\} \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left( \hbar m \omega f(x) + \hbar m \omega x \frac{df(x)}{dx} \right) - \hbar m \omega x \frac{df(x)}{dx} \right. \\
&\quad \left. + (m\omega x)^2 f(x) \right\} \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \hbar m \omega f(x) + (m\omega x)^2 f(x) \right\} \\
&= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \hbar m \omega + (m\omega x)^2 \right\} f(x)
\end{aligned}$$

Dengan mengeliminasi  $f(x)$ , maka didapatkan produk dari  $a_- a_+$

$$\begin{aligned}
a_- a_+ &= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \hbar m \omega + (m\omega x)^2 \right\} \\
a_- a_+ &= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + (m\omega x)^2 \right\} + \frac{\hbar \omega}{2} \\
a_- a_+ - \frac{\hbar \omega}{2} &= \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + (m\omega x)^2 \right\} \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2.73) ke persamaan (2.71), dan didapatkan bentuk persamaan Schrodinger baru

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 + m^2 \omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\left(a_- a_+ - \frac{\hbar\omega}{2}\right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.74)$$

$$a_- a_+ \psi(x) = \left(E + \frac{\hbar\omega}{2}\right) \psi(x) \quad (2.75)$$

Persamaan (2.69) dapat ditulis dengan

$$H_{OH} \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.76)$$

dengan

$$H_{OH} = \left(a_- a_+ - \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

adalah bentuk satu dari operator Hamiltonian untuk osilator harmonik. Persamaan (2.76) merupakan persamaan nilai eigen, dengan  $\psi(x)$  adalah fungsi eigen (solusi dari persamaan Schrodinger) dan  $E$  adalah nilai eigen.

Setelah didapatkan produk  $a_- a_+$ , kemudian dicari pula produk  $a_+ a_-$  dengan cara yang serupa seperti pada langkah-langkah sebelumnya, dan didapatkan

$$a_+ a_- = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + (m\omega x)^2 \right\} - \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.77)$$

$$a_+ a_- + \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} + (m\omega x)^2 \right\} \quad (2.78)$$

dengan mensubstitusi persamaan (2.78) ke persamaan (2.71), maka didapatkan bentuk persamaan Schrodinger baru

$$\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\right)^2 + m^2 \omega^2 x^2 \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

$$\left(a_+a_- + \frac{\hbar\omega}{2}\right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.79)$$

$$a_+a_-\psi(x) = \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) \psi(x) \quad (2.80)$$

Persamaan (2.79) dapat dituliskan dengan

$$H_{OH} \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.81)$$

dengan

$$H_{OH} = \left(a_+a_- + \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

adalah bentuk dua dari operator Hamiltonian untuk osilator harmonik.

Selanjutnya, dilihat sifat dari operator  $a_-$  jika bekerja pada fungsi eigen  $\psi(x)$ . Misalkan suatu fungsi  $\varphi(x) = a_-\psi(x)$ . Jika operator  $H_{OH} = \left(a_-a_+ - \frac{\hbar\omega}{2}\right)$  bekerja pada  $\varphi(x)$ , maka menghasilkan

$$\begin{aligned} H_{OH}\varphi(x) &= H_{OH}a_-\psi(x) \\ &= \left(a_-a_+ - \frac{\hbar\omega}{2}\right) a_-\psi(x) \end{aligned}$$

$$H_{OH}\varphi(x) = a_-a_+a_-\psi(x) - \frac{\hbar\omega}{2} a_-\psi(x)$$

dengan substitusi persamaan (2.80), diperoleh

$$\begin{aligned} H_{OH}\varphi(x) &= a_-a_+a_-\psi(x) - \frac{\hbar\omega}{2} a_-\psi(x) \\ &= a_- \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) \psi(x) - \frac{\hbar\omega}{2} a_-\psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) a_- \psi(x) - \frac{\hbar\omega}{2} a_- \psi(x) \\
&= \left(E - \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\omega}{2}\right) a_- \psi(x) \\
&= (E - \hbar\omega) a_- \psi(x)
\end{aligned}$$

$$H_{OH} \varphi(x) = (E - \hbar\omega) \varphi(x) \quad (2.82)$$

Jika dibandingkan persamaan (2.82) dengan persamaan (2.76), maka persamaan (2.82) juga merupakan persamaan nilai eigen. Namun, pada persamaan (2.82) nilai energi  $E$  berkurang sebesar  $\hbar\omega$  dibandingkan dengan persamaan (2.76). Ini menunjukkan bahwa operator  $a_-$  menurunkan energi sebesar  $\hbar\omega$ . Demikian juga jika operator yang bekerja pada  $\psi(x)$  adalah  $a_- a_-$ , maka operator tersebut akan menurunkan energi sebesar  $2\hbar\omega$ , begitupun seterusnya.

Jika

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= a_- a_- a_- \dots a_- \psi(x) \\
&= a_-^n \psi(x)
\end{aligned}$$

maka

$$H_{OH} \phi(x) = (E - n\hbar\omega) \phi(x) \quad (2.83)$$

Setelah mengetahui sifat  $a_-$  yang bekerja pada fungsi eigen  $\psi(x)$ , selanjutnya akan dilihat sifat operator  $a_+$  bila bekerja pada fungsi eigen  $\psi(x)$ . Misalkan suatu fungsi  $\varphi(x) = a_+ \psi(x)$ . Jika operator  $H_{OH} = \left(a_+ a_- + \frac{\hbar\omega}{2}\right)$  bekerja pada  $\varphi(x)$ , maka menghasilkan

$$\begin{aligned}
 H_{OH}\varphi(x) &= H_{OH}a_+\psi(x) \\
 &= \left(a_+a_- + \frac{\hbar\omega}{2}\right)a_+\psi(x)
 \end{aligned}$$

$$H_{OH}\varphi(x) = a_+a_-a_+\psi(x) + \frac{\hbar\omega}{2}a_+\psi(x)$$

dengan substitusi persamaan (2.75), diperoleh

$$\begin{aligned}
 H_{OH}\varphi(x) &= a_+a_-a_+\psi(x) + \frac{\hbar\omega}{2}a_+\psi(x) \\
 &= a_+\left(E + \frac{\hbar\omega}{2}\right)\psi(x) + \frac{\hbar\omega}{2}a_+\psi(x) \\
 &= \left(E + \frac{\hbar\omega}{2}\right)a_+\psi(x) + \frac{\hbar\omega}{2}a_+\psi(x) \\
 &= \left(E + \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{2}\right)a_+\psi(x) \\
 &= (E + \hbar\omega)a_+\psi(x)
 \end{aligned}$$

$$H_{OH}\varphi(x) = (E + \hbar\omega)\varphi(x) \quad (2.84)$$

Terlihat bahwa  $\varphi(x)$  menaikkan nilai eigen  $E + \hbar\omega$ . Hal ini menunjukkan bahwa operator  $a_+$  bersifat menaikkan energi sebesar  $\hbar\omega$ . Demikian juga jika operator yang bekerja pada  $\psi(x)$  adalah  $a_+a_+$ , maka operator tersebut akan menaikkan energi sebesar  $2\hbar\omega$ , begitupun seterusnya. Sehingga jika

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= a_+a_+a_+ \dots a_+\psi(x) \\
 &= a_+^n\psi(x)
 \end{aligned}$$

maka

$$H_{OH}\phi(x) = (E + n\hbar\omega)\phi(x) \quad (2.85)$$

Disini bentuk  $\psi(x)$  masih belum spesifik. Sebagai upaya untuk memperoleh bentuk spesifik dari  $\psi(x)$ , cara yang coba digunakan adalah dengan mengoperasikan operator  $a_-$  pada keadaan dasar  $\psi_0(x)$ . Pada keadaan dasar energi yang ada adalah energi terendah, sehingga bila diberikan operator penurunan  $a_-$  pada keadaan dasar maka hasilnya nol karena tidak ada lagi keadaan dengan energi yang lebih rendah. Apabila ditulis secara matematis

$$a_-\psi_0(x) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} - im\omega x \right] \psi_0(x) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi_0(x)}{dx} - im\omega x\psi_0(x) \right] = 0$$

$$\left[ \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi_0(x)}{dx} - im\omega x\psi_0(x) \right] = 0$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\psi_0(x)}{dx} = im\omega x\psi_0(x)$$

$$\frac{d\psi_0(x)}{dx} = -\frac{m\omega x\psi_0(x)}{\hbar}$$

$$\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar} x dx$$

$$\int \frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar} \int x dx$$

$$\ln \psi_0(x) = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C$$

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^C$$

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (2.86)$$

Persamaan (2.86) merupakan fungsi gelombang dari osilator harmonik yang belum ternormalisasi.

Setelah didapatkan fungsi gelombang untuk keadaan dasar, maka dapat ditentukan fungsi gelombang pada keadaan tereksitasi ke  $n$ ,  $\psi_n(x)$  dengan mengoperasikan operator penaik  $a_+$ , yaitu

$$\psi_n(x) = (a_+)^n \psi_0(x)$$

$$\psi_n(x) = (a_+)^n \left( Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \right)$$

$$\psi_n(x) = A(a_+)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (2.87)$$

Selanjutnya, dicari energi osilator harmonik pada keadaan dasar dengan cara memecahkan persamaan Schrodinger pada persamaan (2.80) untuk  $\psi(x) = \psi_0(x)$ .

$$\left( a_+ a_- + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \psi(x) = E\psi(x)$$

$$\left( a_+ a_- + \frac{\hbar\omega}{2} \right) \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x)$$

$$a_+ \underbrace{a_- \psi_0(x)}_0 + \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x)$$

$$\frac{\hbar\omega}{2} \psi_0(x) = E_0 \psi_0(x)$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.88)$$

Ternyata energi pada keadaan dasar osilator harmonik tidak nol seperti pada kasus partikel dalam sumur potensial tak hingga. Lalu untuk energi pada keadaan tereksitasi ke  $n$ ,  $E_n$  didapatkan dari penurunan persamaan (2.85)

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega$$

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (2.89)$$

Sehingga bila disimpulkan, telah didapat solusi persamaan Schrodinger tak bergantung waktu dan energi dari osilator harmonik yang masing-masing terdapat pada persamaan (2.87) dan (2.89) (Sauna, 2012).

#### **2.4 Analogi Sistem Termodinamika Klasik ke dalam Sistem Kuantum**

Dalam termodinamika klasik, seluruh kuantitas yang ada merupakan besaran makroskopis dan bisa diukur, seperti tekanan ( $P$ ), volume ( $V$ ), dan temperatur ( $T$ ). Kuantitas-kuantitas tersebut seluruhnya tidak didapati atau ditemukan pada sistem mekanika kuantum. Oleh karena itu, pada kajian mesin panas kuantum dilakukan analogi sistem termodinamika klasik ke dalam sistem mekanika kuantum dalam bentuk analogi terdekat.

Analogi dari besaran atau kuantitas termodinamika klasik ke dalam sistem mekanika kuantum adalah sebagai berikut (Akbar, 2016):

1. Energi internal ( $U$ ) yang berkaitan dengan temperatur pada sistem klasik direpresentasikan dengan nilai harap hamiltonian atau nilai eigen energi pada sistem kuantum.

Temperatur pada sistem klasik berkaitan langsung dengan energi kinetik rata-rata partikel zat kerja. Sedangkan dalam sistem kuantum, representasi dari jumlah energi kinetik rata-rata setiap keadaan dalam sistem adalah nilai harap hamiltoniannya, sehingga didapatkan kesimpulan bahwa nilai harap hamiltonian dalam sistem kuantum merupakan representasi dari energi internal sistem dalam sistem klasik.

2. Kuantitas tekanan ( $P$ ) dan Volume ( $V$ ) pada sistem klasik direpresentasikan dengan kuantitas gaya ( $F$ ) dan lebar sumur ( $L$ ) pada sistem kuantum.

Hal ini dikarenakan pada sistem kuantum ditinjau dalam 1 dimensi.

3. Kalor ( $Q$ ) yang masuk atau keluar sistem pada sistem klasik direpresentasikan dengan perubahan probabilitas dari jumlah tingkatan energi setiap keadaan.

Partikel dalam sistem kuantum memiliki tingkat keadaan energi terkuantisasi yang bergantung pada bilangan kuantum dan nilai eigen energi. Pada sistem atom berlaku bahwa partikel akan mengalami eksitasi jika menerima sejumlah energi yang sama atau lebih tinggi dari energi ambangnya; Dalam termodinamika klasik, kalor merupakan energi. Jika dihubungkan pada sistem kuantum, kalor yang masuk dalam sistem termodinamika kuantum akan menyebabkan probabilitas tingkat keadaan eigen mengalami eksitasi sehingga probabilitas tingkat keadaan sistem yang lebih besar dari keadaan dasar mengalami peningkatan. Begitupun untuk

kalor yang keluar dari sistem (sistem melepas kalor) akan menyebabkan probabilitas tingkat keadaan eigen sistem mengalami relaksasi sehingga probabilitas tingkat keadaan eigen pada keadaan tertinggi akan mengalami penurunan. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa kalor pada sistem klasik dapat direpresentasikan dengan perubahan probabilitas dari jumlah tingkatan energi pada setiap keadaan.

4. Kerja ( $W$ ) yang dilakukan sistem pada sistem termodinamika direpresentasikan oleh perubahan probabilitas dari nilai eigen energi pada sistem kuantum.

Dalam termodinamika klasik, jika sistem melakukan kerja maka membuat energi internal sistem turun. Energi internal sistem direpresentasikan dengan nilai harap hamiltoninan pada sistem kuantum. Nilai harap hamiltonian merupakan jumlah probabilitas nilai eigen energi partikel disetiap keadaan. Sehingga ditarik kesimpulan bahwa kerja yang dilakukan sistem dalam termodinamika klasik direpresentasikan oleh perubahan probabilitas dari nilai eigen energi pada sistem kuantum.

## **2.5 Integrasi mengenai Mesin Panas Kuantum**

Mesin panas kuantum adalah suatu perangkat yang mengubah energi panas menjadi kerja dengan menggunakan objek kuantum dan sistem mekanika kuantum sebagai zat kerjanya. Mesin panas kuantum merupakan salah satu aplikasi dari teori kuantum dalam dunia termodinamika yang menjelaskan dinamika panas dan kerja dalam tinjauan mikroskopis dari suatu partikel yang tidak dapat diamati secara langsung.

Sehubungan dengan penerapan teori kuantum pada kajian mesin panas kuantum, teori kuantum sendiri diisyaratkan dalam Al-Qur'an Surat Al-Dzaariyaat ayat 1-6. Allah SWT berfirman:

وَالذَّارِيَّاتِ ذُرُورًا (١) فَالْحَامِلَاتِ وِقْرًا (٢) فَالْجَارِيَّاتِ يُسْرًا (٣) فَالْمُقْسِمَاتِ أَمْرًا (٤) إِنَّمَا تُوعَدُونَ لَصَادِقٍ (٥) وَإِنَّ الدِّينَ لَوَاقِعٌ (٦)

“(1) Demi partikel-partikel yang sangat halus (2) Yang membawa beban berat (3) Yang mengalir dengan mudah (4) Yang membagi-bagi urusan (5) Sesungguhnya yang dijanjikan padamu pasti benar (6) Dan sesungguhnya pembalasan pasti terjadi” (Q.S. Al-Dzaariyaat [51]: 1-6).

Secara tekstual, kata *dzaariyaat* berasal dari *dzarrah* yang bermakna “partikel-partikel lembut”. Namun dalam pendefinisian tersebut, terdapat beberapa pertanyaan tentang jenis partikel apa yang lembut namun mampu membawa beban berat dan mengalir dengan mudah. Menurut Mulyono dan Ahmad Abtokhi (2006), jawaban untuk memahami ayat tersebut yakni dihubungkan pada teori kuantum.

Pada awal abad XIX, Einstein menemukan bahwa elektromagnetik yang sebelumnya dipandang sebagai gelombang (energi), dapat dipandang sebagai satuan-satuan kecil bulat, atau disebut dengan partikel (*dzarrah*) (Mulyono dan Ahmad Abtokhi, 2006). Dalam kasus efek fotolistrik, Einstein mengemukakan penjelasan berupa kebergantungan fotoelektron pada frekuensi radiasi. Menurutnya, radiasi yang sampai pada permukaan menjadi sebungkus (*bundle*) energi yang terlokalisasi  $E = hv$  dan merambat dalam kecepatan cahaya. Sebungkus atau paket cahaya ini kemudian disebut sebagai foton (Purwanto, 2005).

Penjelasan yang dikemukakan Einstein kemudian membuka wawasan baru bagi ilmu fisika yang memunculkan teori kuantum. Teori kuantum memandang

setiap gelombang energi sebagai paket-paket kecil berbilangan bulat. Contohnya, diperoleh cahaya sebesar satu paket, dua paket, dan kelipatan bilangan bulat lainnya (Mulyono dan Ahmad Abtokhi, 2006).

Pembahasan mengenai kuantum (paket) energi secara tersirat dijelaskan dalam Al-Qur'an Surat An-Nuur ayat 35. Allah SWT berfirman:

اللَّهُ نُورُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ مِثْلُ نُورِهِ كَمِشْكُوتٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ الزُّجَاجَةُ  
كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبْرَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ  
لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ نُورٌ عَلَى نُورٍ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ وَاللَّهُ بِكُلِّ  
شَيْءٍ عَلِيمٌ

*“Allah, cahaya langit dan bumi. Perumpamaan cahaya Allah adalah seperti lubang yang tak tembus, yang didalamnya ada pelita besar. Pelita itu ada di dalam kaca (dan) kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur dan tidak pula di sebelah barat(nya), yang minyaknya hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. Cahaya di atas cahaya. Allah membimbing kepada cahaya-Nya siapa yang Dia kehendaki, dan Allah membuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia, dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu” (Q.S. An-Nuur [24]: 35).*

Terdapat kalimat “*nuurun ‘alaa nuurin*” pada ayat tersebut yang artinya “cahaya di atas cahaya”. Para mufassir memiliki beberapa pandangan mengenai makna dari “cahaya di atas cahaya”.

Dalam Tafsir Ibnu Katsir (2004), Al-Aufi meriwayatkan dari Abdullah bin Abbas, maksud “cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis)” adalah cahaya iman seorang hamba dan cahaya amalannya. Sementara Ubay bin Ka’ab berkata, maksud “cahaya di atas cahaya” merupakan wujud dari lima cahaya seorang mukmin, yaitu: perkataannya adalah cahaya, amalannya adalah cahaya, tempat masuknya adalah cahaya, tempat keluarnya adalah cahaya, dan tempat kembalinya adalah cahaya pada hari kiamat, yakni surga.

As-Saddi mengatakan, maksud “cahaya diatas cahaya” adalah cahaya api dan cahaya minyak. Cahaya api dan cahaya minyak apabila bersatu akan bersinar, namun keduanya tidak akan bersinar jika tidak berpasangan satu sama lain. Demikian pula dengan cahaya iman dan cahaya Al-Qur’an yang mana tidak akan bercahaya kecuali jika bersatu (Ibnu Katsir, 2004).

Menurut Imam Al-Qurthubi dalam Tafsir Al-Qurthubi (2008), kata *nuur* tidak selamanya berarti cahaya, bisa juga merupakan majas untuk memaknai sesuatu yang sulit diungkapkan. Sedangkan maksud dari “cahaya diatas cahaya” adalah pada lubang yang tak tembus (*al-misykatu*) terkumpul cahaya pelita dan cahaya minyak, sehingga menjadi cahaya diatas cahaya. Cahaya-cahaya tersebut tertahan pada lubang yang yang tidak tembus, sehingga menjadi cahaya diatas cahaya yang belum pernah ada.

Agus Purwanto (2008) memberikan tafsiran mengenai “cahaya diatas cahaya” secara saintifik, yakni “cahaya diatas cahaya (berlapis-lapis)” bermakna spektrum cahaya. Jika cahaya dibiarkan melewati prisma segitiga, maka cahaya yang keluar dari prisma berupa sebaran pita warna-warni yang teratur. Fenomena inilah yang dianggap mampu menggambarkan cahaya yang bertumpuk-tumpuk.

Alternatif lain dalam memahani “cahaya diatas cahaya” dapat dilihat pada teori kuantum, yakni pada kasus efek Compton. Pada tahun 1922, Arthur Compton melakukan eksperimen penembakan sinar-X terhadap suatu bahan. Dalam eksperimen tersebut dideteksi cahaya atau sinar-X dan elektron terhambur. Menurut Compton, proses hamburan tersebut merupakan tumbukan elastis antara foton (cahaya) dan elektron dimana ini mengindikasikan bahwa gelombang

berperilaku seperti partikel. Perilaku ini menyatakan bahwa gelombang “memaketkan diri” dalam bentuk kuantum energi  $E = hv$  (Purwanto, 2005).

Dalam skala yang amat kecil, kuantum atau paket-paket kuantum tampak seolah-olah seperti partikel yang sangat halus. Perlu dipahami bahwa partikel-partikel yang sangat halus ini dijadikan Allah SWT sebagai sarana pengatur kelangsungan alam semesta. Keteraturan pergerakan alam semesta dalam lintasannya, mulai dari skala yang sedemikian besar hingga skala terkecil, terjadi atas sarana partikel-partikel halus ini, sehingga partikel halus ini bisa diartikan “mampu membawa beban berat”. Selain itu, partikel-partikel kuantum halus ini juga dapat diartikan “mengalir dengan mudah” karena sifat partikel kuantum yang mampu bergerak dalam kecepatan cahaya (Mulyono dan Ahmad Abtokhi. 2006).

Selain itu, representasi dari mesin panas kuantum juga tidak luput dari penerapan hukum termodinamika di dalamnya. Dalam kajian mesin panas kuantum ini, dilakukan penerapan hukum pertama termodinamika yang diperluas dalam ranah kuantum. Berkenaan tentang hukum pertama termodinamika, dalam Al-Qur’an Surat Al-Buruuj ayat 13 disebutkan

إِنَّهُ هُوَ يُبْدِي وَيُعِيدُ

“*sesungguhnya Dialah Yang menciptakan (makhluk) dari permulaan dan menghidupkannya kembali*” (Q.S. Al-Buruuj [85]: 13).

Dari segi bahasa, makna *yubdi’u* diambil dari kata *bada’a* yang mana bentuk masdarnya (*continuous tense*) berupa *bad’an* dan *mabda’an*. *Mabda’an* bermakna “mendahulukan sesuatu dari lainnya karena merupakan bagian yang harus didahulukan”. Sedangkan *yu’iudu* berasal dari kata ‘*aada - ya’uudu – ‘audan* yang artinya “kembali ke sesuatu setelah selesai”.

Menurut Ahmad Baiquni (2014) dalam Tafsir ilmiah Salman, ayat ini mengisyaratkan tentang hukum pertama termodinamika dimana inti ayat ini memungkinkan pemaparan tentang siklus. Jika berbicara tentang siklus, hukum fisika yang mempelajarinya adalah hukum termodinamika. Hukum pertama termodinamika berbunyi bahwa “energi tidak dapat diciptakan dan dimusnahkan tetapi bisa dikonversi dari satu bentuk ke bentuk yang lain”. Hukum pertama termodinamika pada prinsipnya merupakan hukum kekekalan energi yang menyatakan bahwa jumlah energi selalu tetap.

### BAB III PERLUASAN TERMODINAMIKA KLASIK KE TERMODINAMIKA KUANTUM

#### 3.1 Hukum Pertama Termodinamika untuk Sistem Kuantum

Kajian mesin panas kuantum dilakukan dengan mengimplementasikan hukum pertama termodinamika dalam ranah kuantum. Hukum pertama termodinamika didefinisikan seperti pada persamaan (2.15)

$$dU = \delta Q + \delta W$$

dimana  $dU$ ,  $\delta Q$ , dan  $\delta W$  masing-masing adalah energi internal, kalor, dan kerja sistem yang mengalami perubahan secara infinitesimal.

Dalam sistem mekanika kuantum, energi internal sistem direpresentasikan oleh nilai harap hamiltonian, dimana nilai harap hamiltonian adalah jumlah probabilitas nilai eigen energi partikel disetiap keadaan. Bila ditulis secara matematis

$$E = \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) E_n \quad (3.1)$$

Nilai harap Hamiltonian merupakan energi rata-rata dari pengukuran seluruh anggota ensemble. Nilai harap Hamiltonian juga bisa disebut dengan energi sistem. Persamaan dari nilai harap hamiltonian pada persamaan (3.1) secara infinitesimal dengan menerapkan persamaan diferensial eksak dinyatakan dengan

$$E = \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) E_n$$
$$dE = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n dP_n + P_n dE_n) \quad (3.2)$$

dimana  $E_n$  adalah nilai eigen energi ke-  $n$  dan  $P_n$  adalah probabilitas okupasi pada *eigen-state* ke- $n$ .

Bila dihubungkan dengan hukum pertama termodinamika pada persamaan (2.15), maka

$$dU = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n dP_n + P_n dE_n)$$

$$dU = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} E_n dP_n}_{\delta Q} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P_n dE_n}_{\delta W} \quad (3.3)$$

$$\delta Q = \sum_{n=1}^{\infty} E_n dP_n \quad (3.4)$$

$$\delta W = \sum_{n=1}^{\infty} P_n dE_n \quad (3.5)$$

dengan  $\delta Q$  dan  $\delta W$  masing-masing adalah kalor dan kerja yang dilakukan sistem selama proses termodinamika berlangsung.

Persamaan (3.3) adalah ungkapan hukum pertama termodinamika dalam sistem kuantum. Dua suku yang terdapat pada persamaan (3.3) menunjukkan bahwa terdapat dua cara yang berbeda secara fundamental untuk mengubah energi sistem. Suku pertama merepresentasikan perubahan okupasi rata-rata atau probabilitas ( $dP_n$ ) dan suku kedua merepresentasikan perubahan level energi ( $dE_n$ ). Masing-masing dari suku tersebut mengidentifikasi bahwa bentuk  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n dP_n$  berhubungan dengan kalor sistem dan bentuk  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n dE_n$  berhubungan dengan kerja yang dilakukan sistem (Latifah dan Agus Purwanto, 2013).

### 3.2 Gaya (Tekanan) dalam Sistem Kuantum

Definisi gaya umum untuk sistem kuantum bisa didapatkan dari definisi gaya umum pada sistem klasik

$$\delta W = -F dL$$

$$F = -\frac{\delta W}{dL} \quad (3.6)$$

dengan  $\delta W$  adalah kerja dan  $L$  adalah koordinat yang sesuai dengan  $F$ . Kemudian digunakan ekspresi kerja  $\delta W$  dalam sistem kuantum yang terdapat pada persamaan (3.5) dan disubstitusikan pada persamaan (3.6) yang apabila ditulis

$$F = -\frac{\delta W}{dL}$$

$$F = -\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL} \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) merupakan definisi gaya untuk sistem kuantum sembarang (untuk kasus satu dimensi, gaya sama dengan tekanan) dan diasumsikan koordinat umum  $L$  berubah secara infinitesimal, sehingga nilai eigen energi  $E_n$  berubah dalam fungsi  $L$ .

Selain itu, ungkapan gaya (3.7) pada sistem kuantum bisa juga diperoleh dengan cara mekanika statistik (Pathria dan Paul D. Beale, 1972). Cara ini digunakan saat sistem berada pada kesetimbangan termal dengan penangas panas (*heat bath*) dalam suhu terbalik  $= \frac{1}{kT}$ , dimana sistem memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann  $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$  dengan  $P_n$  adalah probabilitas okupasi,  $k$  adalah konstanta Boltzmann, dan  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  adalah fungsi partisi. Ungkapan gaya dengan cara mekanika statistik didapatkan dengan

$$\begin{aligned}
F &= -\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)_T \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial L}[-kT \ln Z]\right)_T \\
&= kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial L}\right)_T \\
&= kT \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial L}\right)_T \\
&= kT \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial}{\partial L} \sum_n e^{-\beta E_n(L)}\right) \\
&= kT \frac{1}{Z} \sum_n (-\beta) e^{-\beta E_n(L)} \cdot \frac{\partial E_n(L)}{\partial L} \\
&= -\frac{kT}{kT} \underbrace{\left(\frac{\sum_n e^{-\beta E_n(L)}}{Z}\right)}_{P_n} \cdot \frac{\partial E_n(L)}{\partial L} \\
F &= -\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

dimana  $f = -kT \ln Z$  adalah energi bebas pada sistem kuantum.

Persamaan (3.8) menunjukkan bentuk yang sama dengan ungkapan gaya pada persamaan (3.7). Namun yang membedakan adalah bentuk persamaan (3.7) lebih umum dari pada persamaan (3.8) dimana persamaan (3.7) dapat digunakan dalam sembarang keadaan, tidak peduli apakah sistem berada dalam kesetimbangan termal atau tidak, sedangkan persamaan (3.8) mensyaratkan bahwa sistem harus berada dalam kesetimbangan termal dan memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann.

### 3.3 Proses-Proses Termodinamika Kuantum

#### 3.3.1 Proses Adiabatik Kuantum

Proses adiabatik kuantum merupakan analogi kuantum dari proses adiabatik klasik. Dalam proses adiabatik klasik, tidak ada perpindahan kalor yang terjadi pada sistem, sehingga proses adiabatik mengarah pada penggunaan energi internal untuk bisa melakukan atau menghasilkan kerja ( $dU = \delta W$ ). Jika dihubungkan dengan hukum pertama termodinamika pada sistem kuantum

$$dU = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} E_n dP_n}_{\delta Q} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P_n dE_n}_{\delta W}$$

dimana perubahan kalor direpresentasikan dengan perubahan probabilitas okupasi  $dP_n$ , maka dikatakan bahwa dalam proses adiabatik kuantum tidak terjadi perubahan probabilitas okupasinya ( $dP_n = 0$ ), sehingga hukum pertama termodinamika dalam sistem kuantum menjadi

$$\begin{aligned} dU &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \underbrace{dP_n}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n dE_n \\ dU &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n dE_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ini menandakan bahwa dalam proses adiabatik kuantum, teorema adiabatik diperoleh dengan memodifikasi tingkat energi tanpa mengubah probabilitas okupasinya.

#### 3.3.2 Proses Isobarik Kuantum

Proses isobarik kuantum merupakan perluasan dari proses isobarik klasik. Proses isobarik klasik adalah proses termodinamika kuasistatik dimana tekanan

sistem dijaga untuk tetap konstan. Pada proses isobarik klasik, tekanan sistem dapat dijaga konstan dengan mengatur temperaturnya secara hati-hati, seperti contoh ketika ingin suatu sistem klasik dijaga tekanannya untuk konstan, maka perlu diatur temperatur penangas panasnya (termostat) secara hati-hati ketika mengubah volume sistem.

Dalam contoh lainnya, yaitu pada kasus gas ideal klasik dimana persamaan keadaan gas didapatkan dari fakta empiris berupa  $PV = NkT$ . Untuk menjaga tekanan  $P$  konstan, maka temperatur sistem  $T$  harus proporsional dengan volume gas ( $T \propto V$ ). Berdasarkan contoh tersebut, dapat dilihat bahwa pengaturan temperatur dalam proses isobarik dapat dilakukan dengan mengetahui persamaan keadaan sistemnya. Sedangkan dalam sistem mekanika kuantum persamaan keadaannya belum diketahui, sehingga berikut ini akan dideskripsikan proses isobarik kuantum dengan menjabarkan pula kuantitas termodinamikanya seperti gaya ( $F$ ), entropi ( $S$ ), dan energi internal ( $U$ ) untuk mendapatkan persamaan keadaan sistem kuantum yang digunakan dalam membangun analisis pada proses isobarik kuantum. Deskripsi proses isobarik kuantum akan dikaji dalam dua sistem, yaitu sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik dengan menggunakan pendekatan statistik yang memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann.

### **3.3.2.1 Proses Isobarik Kuantum pada Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi**

Gaya untuk sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi diperoleh dari persamaan (3.7)

$$F = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL}$$

Untuk kasus partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi, koordinat umum  $L$  merupakan lebar dari potensial sumur dan energi eigen  $E_n$  bergantung pada koordinat  $L$  nya. Ungkapan energi eigen  $E_n$  untuk kasus partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi terdapat pada persamaan (2.56)

$$E = n^2 E_1$$

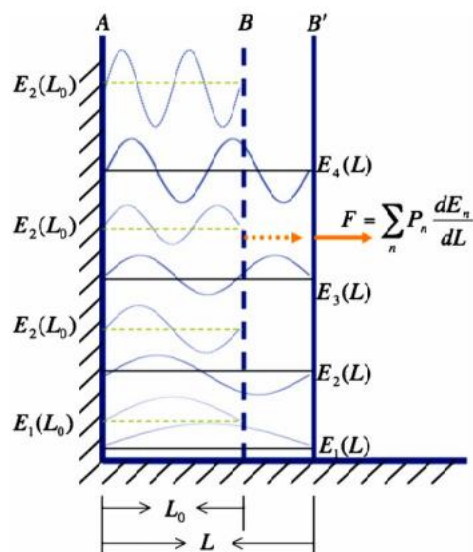
$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

dimana

$$\hbar = \frac{\text{konstanta Planck}}{2\pi}$$

$n$  = bilangan kuantum

$m$  = massa partikel.



Gambar 3.1 Skema Diagram Gaya untuk Sistem Partikel Tunggal pada Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi (Quan, 2009)

Kemudian diperoleh turunan  $E_n(L)$  terhadap  $L$

$$\begin{aligned}
 E_n(L) &= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \\
 \frac{d}{dL} E_n(L) &= \frac{d}{dL} \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL^2} \\
 &= -2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2m} L^{-3} \\
 &= -2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL^2} \frac{1}{L} \\
 \frac{d}{dL} E_n(L) &= -2 \frac{E_n(L)}{L} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Dipertimbangkan sistem berada dalam kesetimbangan termal dengan penangas panas pada suhu terbalik  $= \frac{1}{kT}$ . oleh karena itu, gaya yang bekerja pada salah satu dinding potensial dapat dihitung dengan mensubstitusikan  $\frac{d}{dL} E_n(L)$  dan distribusi Maxwell-Boltzmann  $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$  ke dalam persamaan (3.7).

$$\begin{aligned}
 F &= - \sum_n P_n \frac{dE_n}{dL} \\
 &= - \sum_n \left( \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \right) \left( -2 \frac{E_n(L)}{L} \right) \\
 &= - \sum_n \left( \frac{e^{-\beta(L) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}}{\sum_n e^{-\beta \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}} \right) \left( -2 \frac{E_n(L)}{L} \right) \tag{3.11.1}
 \end{aligned}$$

Bentuk sigma pada fungsi partisi  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$  diubah dalam bentuk integral

$$\sum_n e^{-\beta E_n} = \int_0^{\infty} e^{-\beta E_n} dn$$

dan penyelesaiannya menggunakan integral fungsi gamma. Dimisalkan

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}} dn = \int_0^{\infty} e^{-an^2} dn$$

dimana

$$a = \frac{\beta \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (3.11.2)$$

Dilakukan permisalan pula

$$an^2 = y \quad ; \quad dy = 2an \, dn$$

$$n^2 = \frac{y}{a}$$

$$n = \sqrt{\frac{y}{a}} \quad ; \quad dy = 2a \sqrt{\frac{y}{a}} \, dn$$

$$dn = \frac{dy}{2a \sqrt{\frac{y}{a}}}$$

Syarat batas yang semula terhadap  $n$  kemudian diubah menjadi syarat batas terhadap  $y$ .

dari  $n \rightarrow 0$  menjadi  $y \rightarrow 0$

dan dari  $n \rightarrow \infty$  menjadi  $y \rightarrow \infty$

sehingga persamaan  $\int_0^{\infty} e^{-an^2} dn$  menjadi

$$\int_0^{\infty} e^{-an^2} dn = \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{dy}{2a \sqrt{\frac{y}{a}}}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} dy &= \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy \\
&= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\sqrt{a}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{\infty} \underbrace{y^{(\frac{1}{2}-1)} e^{-y} dy}_{\text{fungsi Gamma dg } \Gamma(y)=\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi}
\end{aligned} \tag{3.11.3}$$

Substitusi persamaan (3.11.2) ke dalam persamaan (3.11.3)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-\beta \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}} dn &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\beta(L)\pi \hbar^2}}
\end{aligned} \tag{3.11.4}$$

Kembali pada persamaan (3.11.1)

$$F = - \sum_n \left( \frac{e^{-\beta(L) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}}{\sum_n e^{-\beta \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}} \right) \left( -2 \frac{E_n(L)}{L} \right)$$

$$\begin{aligned}
F &= - \sum_n \left( \frac{e^{-\beta(L) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\beta(L) \pi \hbar^2}}} \right) \left( - \frac{2 n^2 \pi^2 \hbar^2}{L 2mL^2} \right) \\
&= \frac{4}{L} \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 \beta(L)}{2mL^2}} \left[ \sum_n e^{-\beta(L) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}} \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \right] \\
&= \frac{4}{L} \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 \beta(L)}{2mL^2}} \left[ - \frac{\partial}{\partial \beta} \underbrace{\sum_n e^{-\beta(L) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}}_{\text{diubah dalam bentuk integral}} \right] \\
&= \frac{4}{L} \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 \beta(L)}{2mL^2}} \left[ - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\beta(L) \pi \hbar^2}} \right) \right] \\
&= - \frac{4}{L} \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 \beta(L)}{2mL^2}} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2}} \frac{\partial}{\partial \beta(L)} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta(L)}} \right) \right] \\
&= - \frac{2}{L} \sqrt{\beta(L)} \left( \frac{\partial}{\partial \beta(L)} \beta(L)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
&= - \frac{2}{L} \sqrt{\beta(L)} \left( - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(L)} \frac{1}{\sqrt{\beta(L)}} \right) \\
F &= \frac{1}{L\beta(L)} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.12) merupakan ungkapan gaya (tekanan) pada sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi. Persamaan (3.12) juga dapat dianggap sebagai persamaan keadaan untuk sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi, yaitu

$$F = \frac{1}{L\beta(L)}$$

$$FL = kT \quad (3.13)$$

dimana  $\beta = \frac{1}{kT}$ .

Persamaan (3.12) menunjukkan bahwa pada proses isobarik kuantum sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi, untuk menjaga agar  $F$  tetap konstan, maka perlu ditinjau temperatur sistem agar proporsional dengan lebar dinding potensial  $\beta(L) = \frac{1}{(FL)}$  saat sistem di dalam kotak mendorong salah satu dinding untuk melakukan kerja. Disini perlu diketahui bahwa fungsi temperatur  $\beta(L)$  terhadap lebar dinding potensial (volume) pada proses isobarik kuantum bergantung dengan sistem (*system dependent*). Konsekuensinya, fungsi temperatur  $\beta(L)$  terhadap lebar dinding potensial (volume) pada proses isobarik kuantum akan berbeda untuk setiap sistem kuantum yang berbeda.

Selanjutnya, dijabarkan mengenai entropi pada sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi. Ungkapan entropi ditulis secara matematis sebagai berikut

$$S = k \frac{\partial}{\partial T} [T \ln Z]$$

$$S = k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \ln \underbrace{\sum_n e^{-\beta \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}}_{\substack{\text{diubah dalam bentuk integral}}} \right]$$

$$S = k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \ln \underbrace{\left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\beta(L) \pi \hbar^2}} \right)}_v \right]$$

dengan menggunakan turunan differensial eksak,

$$S = k[u'v + v'u] \quad (3.14.1)$$

Lalu dimisalkan

$$u = T \quad (3.14.2)$$

$$u' = 1 \quad (3.14.3)$$

$$v = \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\beta(L)\pi\hbar^2}} \right)$$

$$v = \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2 kT}{\pi\hbar^2}} \right) \quad (3.14.4)$$

$$v' = \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2 kT}{\pi\hbar^2}} \right)} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2mL^2 kT}{\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2mL^2 k}{\pi\hbar^2} \right) \right]$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{2mL^2 kT}} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2mL^2 kT}{\pi\hbar^2}}} \frac{mL^2 k}{\pi\hbar^2} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{2mL^2 kT}} \sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{2mL^2 kT}} \frac{mL^2 k}{\pi\hbar^2}$$

$$= \frac{\pi\hbar^2}{2mL^2 kT} \frac{mL^2 k}{\pi\hbar^2}$$

$$v' = \frac{1}{2T} \quad (3.14.5)$$

Substitusi persamaan (3.14.2), (3.14.3), (3.14.4), dan (3.14.5) kedalam persamaan (3.14.1) dan didapatkan ungkapan entropi untuk sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi adalah

$$\begin{aligned}
 S &= k \left[ 1. \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2 kT}{\pi \hbar^2}} \right) + \frac{1}{2T} \cdot T \right] \\
 S &= k \left[ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2 kT}{\pi \hbar^2}} \right) \right] \\
 S &= k \left[ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2 \beta(L)}} \right) \right] \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Jika ungkapan entropi pada persamaan (3.15) dibandingkan dengan ungkapan entropi pada gas ideal klasik, maka didapatkan bahwa entropi gas ideal klasik mereproduksi entropi pada sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi jika jumlah molekul pada gas ideal klasik  $N = 1$ , dimana ungkapan entropi pada gas ideal klasik yaitu

$$S = N \left[ k \ln Z + \frac{U}{T} \right]$$

Energi internal untuk sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi juga dapat diperoleh secara analitik. Pertama, digunakan definisi energi internal seperti persamaan (3.1)

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_n P_n(E_n) E_n \\
 &= \sum_n \left( \frac{1}{Z} e^{-\beta(L) E_n(L)} \right) E_n(L)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_n \left( \frac{e^{-\beta(L)E_n(L)}}{\sum_n e^{-\beta(L)E_n(L)}} \right) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

Kemudian substitusi persamaan (3.11.4), dan didapatkan

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2 \beta(L)}}} \left[ \sum_n e^{-\beta(L)E_n(L)} \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2 \beta(L)}}} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_n e^{-\beta(L) \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}} \right] \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2 \beta(L)}}} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2 \beta(L)}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2 \beta(L)}}} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sqrt{\frac{1}{\beta(L)}} \right) \right] \\ &= -2 \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 \beta(L)}{2mL^2}} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi \hbar^2}} \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta(L)} \frac{1}{\sqrt{\beta(L)}} \right) \right] \\ U &= \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(L)} \\ U &= \frac{1}{2} kT \end{aligned} \tag{3.16}$$

Persamaan (3.16) merupakan ungkapan energi internal dalam sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi. Ungkapan ini memverifikasi teorema ekipartisi dimana temperatur suatu sistem direlasikan dengan energi rata-ratanya. Disini menunjukkan bahwa energi internal untuk

sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi hanya bergantung pada temperatur saja dan energi internalnya memiliki bentuk yang sama seperti energi internal untuk gas ideal klasik dengan jumlah molekul  $N = 1$  dimana energi internal gas ideal klasik berbentuk

$$U = \frac{NkT}{2}$$

Selain entropi dan energi internal pada sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi yang memiliki bentuk yang sama dengan entropi dan energi internal pada gas ideal klasik, bentuk persamaan keadaan untuk sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi (persamaan (3.13)) pun memiliki bentuk yang sama dengan persamaan keadaan untuk gas ideal klasik jika jumlah molekul  $N = 1$ . Persamaan keadaan gas ideal klasik diungkapkan sebagai berikut

$$PV = NkT$$

Dari seluruh kuantitas termodinamika yang telah dijabarkan diatas, maka dapat dilihat bahwa antara sistem klasik dan sistem kuantum memiliki bentuk yang sama. Dengan itu dapat dinyatakan bahwa sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi merupakan padanan dari gas ideal pada sistem klasik.

### 3.3.2.2 Proses Isobarik Kuantum pada Sistem Osilator Harmonik

Untuk kasus partikel tunggal dalam potensial osilator harmonik atau bisa disebut sistem osilator harmonik, energi eigennya dinyatakan dengan

$$E_n = \sum_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (3.17)$$

dengan  $\omega = \frac{s\pi c}{L}$ , dimana:

$E_n$  = Energi eigen

$n$  = bilangan kuantum

$$\hbar = \frac{\text{konstanta Planck}}{2\pi}$$

$\omega$  = frekuensi osilator harmonik

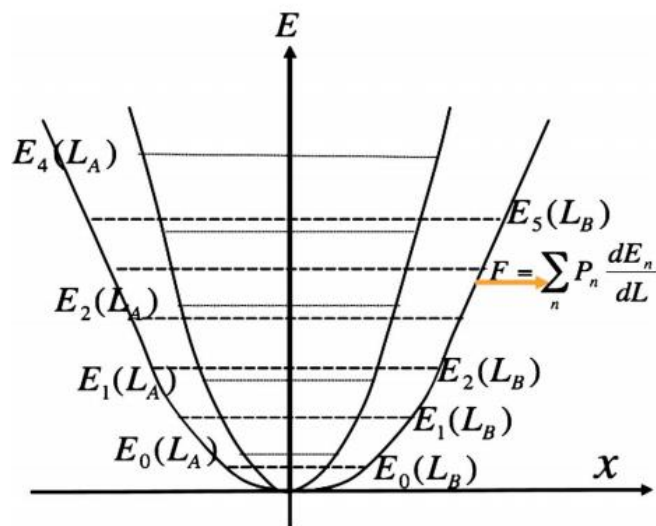
$s$  = integer

$c$  = kecepatan cahaya

$L$  = lebar potensial osilator harmonik.

Disini menunjukkan bahwa lebar potensial osilator harmonik  $L$  berbanding terbalik dengan frekuensinya  $L \propto \frac{1}{\omega}$ .

Selanjutnya, untuk gaya pada sistem osilator harmonik diilustrasikan oleh gambar 3.2



Gambar 3.2 Skema Diagram Gaya untuk Sistem Osilator Harmonik  
Potensial osilator harmonik diasumsikan dapat bergerak dari bentuk yang curam ke bentuk yang landai karena adanya gaya yang diberikan padanya.

Gaya pada sistem osilator harmonik diperoleh dari persamaan (3.7) dengan gaya osilator harmonik  $F$  sebagai fungsi temperatur  $\beta$  dan lebar potensial  $L$

$$\begin{aligned}
F &= - \sum_n P_n \frac{dE_n(L)}{dL} \\
&= - \sum_n \left( \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \right) \frac{d}{dL} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar s \pi c}{L} \right] \\
&= - \sum_n \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( - \frac{\hbar s \pi c}{L} \cdot \frac{1}{L} \right) \right] \\
&= \sum_n \frac{e^{-\beta(L)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}}{\sum_n e^{-\beta(L)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
&= \sum_n \frac{e^{-\beta(L)n\hbar\omega} e^{-\frac{\beta(L)\hbar\omega}{2}}}{\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} e^{-\frac{\beta(L)n\hbar\omega}{2}}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta(L)n\hbar\omega}{2}} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}}{e^{-\frac{\beta(L)n\hbar\omega}{2}} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
F &= \frac{\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}}{\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \tag{3.18.1}
\end{aligned}$$

suku  $\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}$  yang berada di ruas bawah diubah dalam bentuk deret dengan memisalkan

$$x = \beta \hbar \omega$$

$$z = e^{-\beta \hbar \omega}$$

$$z = e^{-x}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} &= \sum_n e^{-nx} \\
&= \sum_n z^n \\
&= z^0 + z^1 + z^2 + \dots \\
&= 1 + z^1 + z^2 + \dots \\
&= \frac{1}{1-z}
\end{aligned} \tag{3.18.2}$$

Substitusi persamaan (3.18.2) ke persamaan (3.18.1)

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}}{\frac{1}{1-z}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
&= \frac{(1-e^{-\beta\hbar\omega})}{1} \left[ \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \cdot n\hbar\omega \right) + \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right] \frac{1}{L} \\
&= \frac{(1-e^{-\beta\hbar\omega})}{1} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial\beta} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \right) + \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right] \frac{1}{L} \\
&= \frac{(1-e^{-\beta\hbar\omega})}{1} \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \right) \right) + \left( \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right] \frac{1}{L} \\
&= \frac{(1-e^{-\beta\hbar\omega})}{1} \left[ \left( \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})^2} \right) + \frac{1}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
F &= \left[ \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right] \frac{1}{L}
\end{aligned}$$

dengan melakukan manipulasi matematis, maka didapatkan definisi gaya untuk sistem osilator harmonik

$$\begin{aligned}
 F &= \left[ \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})} \frac{[e^{\beta\hbar\omega}]}{[e^{\beta\hbar\omega}]} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
 &= \left[ \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right] \frac{1}{L} \\
 &= \left[ \frac{\frac{\hbar S\pi c}{L}}{e^{\frac{\beta(L)\hbar s\pi c}{L}} - 1} + \frac{1}{2} \frac{\hbar S\pi c}{L} \right] \frac{1}{L} \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

dimana  $\omega = \frac{s\pi c}{L}$ . Persamaan (3.19) menunjukkan ungkapan gaya pada sistem osilator harmonik  $F$  sebagai fungsi temperatur  $\beta$  dan lebar potensial  $L$ .

Persamaan (3.19) juga menyatakan persamaan keadaan sistem osilator harmonik, yaitu

$$FL = \left[ \frac{\frac{\hbar S\pi c}{L}}{e^{\frac{\beta(L)\hbar s\pi c}{L}} - 1} + \frac{1}{2} \frac{\hbar S\pi c}{L} \right] \tag{3.20}$$

Kembali pada persamaan (3.19), persamaan (3.19) mengindikasikan bahwa gaya berupa fungsi yang bergantung pada temperatur  $\beta$  dan lebar potensial  $L$ .

Untuk memperoleh gaya  $F$  konstan, maka harus ditinjau definisi temperatur  $\beta$  secara cermat (*subtle way*) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 F &= \left[ \frac{\frac{\hbar S\pi c}{L}}{e^{\frac{\beta\hbar s\pi c}{L}} - 1} + \frac{1}{2} \frac{\hbar S\pi c}{L} \right] \frac{1}{L} \\
 FL &= \frac{\frac{\hbar S\pi c}{L}}{e^{\frac{\beta\hbar s\pi c}{L}} - 1} + \frac{1}{2} \frac{\hbar S\pi c}{L}
 \end{aligned}$$

$$FL - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} = \frac{\frac{\hbar s \pi c}{L}}{e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} - 1}$$

$$\left( FL - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} \right) \left( e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} - 1 \right) = \frac{\hbar s \pi c}{L}$$

$$FL e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} - FL - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} + \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} = \frac{\hbar s \pi c}{L}$$

$$FL e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} = \frac{\hbar s \pi c}{L} - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} + FL$$

$$e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} \left( FL - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} \right) = \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} + FL$$

$$e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} = \frac{\left( \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} + FL \right)}{\left( FL - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} \right)}$$

dengan menggunakan manipulasi matematis, didapatkan definisi  $\beta(L)$

$$e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} = \frac{\left( \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} + FL \right) [2L]}{\left( FL - \frac{1}{2} \frac{\hbar s \pi c}{L} \right) [2L]}$$

$$e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} = \frac{(2FL^2 + \hbar s \pi c)}{(2FL^2 - \hbar s \pi c)}$$

$$\ln e^{\frac{\beta \hbar s \pi c}{L}} = \ln \frac{(2FL^2 + \hbar s \pi c)}{(2FL^2 - \hbar s \pi c)}$$

$$\frac{\beta \hbar s \pi c}{L} = \ln \frac{(2FL^2 + \hbar s \pi c)}{(2FL^2 - \hbar s \pi c)}$$

$$\beta(L) = \frac{L}{\hbar s \pi c} \ln \frac{(2FL^2 + \hbar s \pi c)}{(2FL^2 - \hbar s \pi c)} \quad (3.21)$$

Disini dapat dilihat bahwa saat gaya  $F$  dibuat konstan, maka fungsi temperatur  $\beta(L)$  dalam sistem osilator harmonik di persamaan (3.21) memiliki bentuk yang lebih kompleks daripada  $\beta(L) \propto \frac{1}{L}$  dalam sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi.

Kemudian, untuk entropi  $S$  pada sistem osilator harmonik kuantum diungkapkan dengan

$$\begin{aligned}
 S &= k \frac{\partial}{\partial T} [T \ln Z] \\
 &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \ln \sum_n e^{-\beta(L)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega} \right] \\
 &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \ln \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} e^{-\frac{\beta(L)\hbar\omega}{2}} \right) \right] \\
 &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \ln \left( \sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \right) \right] \\
 &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \left( \ln \sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} + \ln e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \right) \right] \\
 S &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \ln e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} + T \ln \sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} \right]
 \end{aligned}$$

Kemudian substitusi persamaan (3.18.2)

$$\begin{aligned}
 S &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \left( -\frac{\hbar\omega}{2kT} \right) + T \ln \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} \right) \right] \\
 &= k \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( -\frac{\hbar\omega}{2k} \right) + T \left( \underbrace{\ln 1}_0 - \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) \right) \right] \\
 &= k \underbrace{\frac{\partial}{\partial T} \left( -\frac{\hbar\omega}{2k} \right)}_0 - k \frac{\partial}{\partial T} \left( T \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$= -k \frac{\partial}{\partial T} \left( \underbrace{T \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)}_{u \quad v} \right)$$

dengan menggunakan turunan differensial eksak,

$$S = -k[u'v + v'u] \quad (3.22.1)$$

dan dimisalkan

$$u = T \quad (3.22.2)$$

$$u' = 1 \quad (3.22.3)$$

$$v = \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) \quad (3.22.4)$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{\left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)} \left[ - \left( -\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) \right] \\ &= \frac{\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)} \end{aligned} \quad (3.22.5)$$

Dilakukan substitusi persamaan (3.22.2), (3.22.3), (3.22.4), dan (3.22.5) ke dalam persamaan (3.22.1)

$$\begin{aligned} S &= -k \left[ 1 \cdot \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) + \frac{\frac{\hbar\omega}{kT^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)} \cdot T \right] \\ &= -k \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) - k \frac{\left( \frac{\hbar\omega}{kT} \right) e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)} \end{aligned}$$

Dilakukan manipulasi matematis

$$S = -k \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) - \frac{\frac{\hbar\omega}{T} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)} \cdot \frac{\left[ e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \right]}{\left[ e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \right]}$$

dan dikalikan  $(-1)$  pada ruas kanan, sehingga didapat

$$S = k \ln \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right) + \frac{\hbar\omega}{T} \left( e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1} \quad (3.23.1)$$

Apabila dimisalkan

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (3.23.2)$$

maka

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle n \rangle} &= e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \\ \frac{1}{\langle n \rangle} + 1 &= e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \\ \frac{1 + \langle n \rangle}{\langle n \rangle} &= e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \\ \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} &= \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}} \\ e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} &= \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \end{aligned} \quad (3.23.3)$$

Kemudian substitusi persamaan (3.23.2) dan (3.23.3) ke persamaan (3.23.4)

$$\begin{aligned} S &= k \ln \left( 1 - \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right) + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle \\ &= k \ln \left( \frac{1 + \langle n \rangle - \langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right) + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \ln \left( \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \right) + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle \\
&= k \ln(1 + \langle n \rangle)^{-1} + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle \\
&= -k \ln(1 + \langle n \rangle) + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle \\
S &= k \ln(1 + \langle n \rangle) + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle \tag{3.24}
\end{aligned}$$

dimana  $\langle n \rangle$  adalah jumlah rata-rata partikel.

Selanjutnya, energi internal untuk sistem osilator harmonik juga dapat diperoleh secara analitik dengan menggunakan definisi awal pada persamaan (3.1)

$$\begin{aligned}
U &= \sum_n P_n(E_n) E_n \\
&= \sum_n \left( \frac{1}{Z} e^{-\beta(L)E_n(L)} \right) \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right) \\
&= \sum_n \frac{e^{-\beta(L)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}}{\sum_n e^{-\beta(L)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right) \\
&= \sum_n \frac{e^{-\beta(L)n\hbar\omega} e^{-\frac{\beta(L)\hbar\omega}{2}}}{\sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} e^{-\frac{\beta(L)n\hbar\omega}{2}}} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right) \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta(L)n\hbar\omega}{2}} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}}{e^{-\frac{\beta(L)n\hbar\omega}{2}} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega}} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.18.2) ke dalam persamaan (3.25)

$$U = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \right)$$

$$\begin{aligned}
U &= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \left( \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \cdot n\hbar\omega \right) + \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right) \\
&= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \left( \left( -\frac{\partial}{\partial\beta} \left( \sum_n e^{-\beta(L)n\hbar\omega} \right) \right) + \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right) \\
&= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \left( \left( -\frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \right) \right) + \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right) \\
&= (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \left( \left( \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})^2} \right) + \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \cdot \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \right) \\
U &= \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})} + \frac{1}{2} \hbar\omega
\end{aligned}$$

dengan manipulasi matematis, didapatkan

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega}}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})} \frac{[e^{\beta\hbar\omega}]}{[e^{\beta\hbar\omega}]} + \frac{1}{2} \hbar\omega \\
&= \frac{\hbar\omega}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} + \frac{1}{2} \hbar\omega \\
&= \left( \langle n \rangle + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \tag{3.26}
\end{aligned}$$

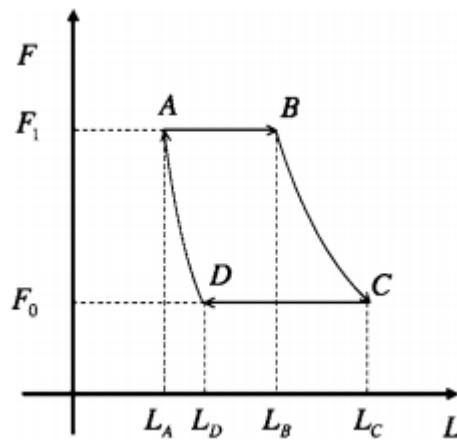
dimana  $\langle n \rangle = \frac{1}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)}$  adalah jumlah rata-rata partikel.

Dari persamaan (3.24) dan (3.26) dapat dengan mudah diketahui bahwa entropi dan energi internal untuk kasus sistem osilator harmonik memiliki bentuk yang berbeda dengan entropi (persamaan (3.15)) dan energi internal (persamaan (3.16)) pada sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak

hingga 1 dimensi. Energi internal pada sistem osilator harmonik yang diungkapkan di persamaan (3.26) bergantung pada fungsi temperatur  $\beta$  dan lebar potensial osilator harmonik  $L$ , sedangkan energi internal pada sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi yang diungkapkan di persamaan (3.16) bergantung pada fungsi temperatur  $\beta$  saja. Selain itu, bentuk persamaan keadaan sistem osilator harmonik pada persamaan (3.20) dengan persamaan keadaan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi pada persamaan (3.13) juga berbeda, sehingga dari observasi ini disimpulkan bahwa sistem osilator harmonik memiliki sifat/properti termodinamika yang sangat berbeda dengan gas ideal klasik dan ditemukan hasil baru diluar gas ideal klasik yang selama ini dikaji.

## BAB IV EFISIENSI MESIN BRAYTON KUANTUM

Mesin Brayton kuantum adalah mesin panas yang menggunakan siklus Brayton kuantum selama proses berlangsung dalam suatu sistem kuantum. Siklus Brayton kuantum merupakan generalisasi dari siklus Brayton klasik menjadi kasus kuantum yang terdiri dari 2 proses adiabatik kuantum dan 2 proses isobarik kuantum. Siklus ini bersifat reversibel dan lintasan siklus dapat dilihat pada gambar 4.1.



Gambar 4.1 Diagram Gaya-Perpindahan  $F - L$  pada Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Kotak 1 Dimensi (Quan, 2009)

Lintasan siklus Brayton kuantum dimulai dari titik A dan berakhir di titik A. Berdasarkan gambar 4.1 dapat dilihat bahwa terdapat 4 tahap dalam lintasan siklus Brayton kuantum. Lintasan siklus Brayton kuantum akan dijabarkan sebagai berikut:

1. Tahap 1, yaitu titik  $A \rightarrow B$ . Proses yang terjadi adalah proses ekspansi isobarik kuantum dimana gaya  $F_1$  dijaga konstan dengan ekspansi terjadi secara infinitesimal dari lebar potensial  $L_A$  ke  $L_B$ . Pada tahap ini, sistem menyerap kalor dari penangas panas yang bergantung waktu (*time-dependent heat bath*) dan beberapa kerja dilakukan pada sistem. Untuk

memastikan bahwa kalor terserap dari lingkungan, maka  $L_B$  harus lebih besar dari  $L_A$  ( $L_B > L_A$ ).

2. Tahap 2, yaitu titik  $B \rightarrow C$ . Proses yang terjadi adalah proses ekspansi adiabatik kuantum dimana ekspansi terjadi secara infinitesimal dari lebar potensial  $L_B$  ke  $L_C$ . Dalam proses ini tidak terjadi perpindahan kalor dalam sistem sehingga kerja yang dilakukan pada sistem hanya dihasilkan dari perubahan energi internal. Pada tahap ini, entropi sistem juga tidak berubah.
3. Tahap 3, yaitu titik  $C \rightarrow D$ . Proses yang terjadi adalah proses kompresi isobarik kuantum dimana gaya  $F_0$  dijaga konstan dengan lebar potensial berkurang secara infinitesimal dari  $L_C$  ke  $L_D$ . Proses ini merupakan kebalikan dari proses ekspansi isobarik kuantum yang mana di tahap ini sistem melepaskan kalor.
4. Tahap 4, yaitu titik  $D \rightarrow A$ . Proses yang terjadi adalah proses kompresi adiabatik kuantum dimana terjadi pengurangan lebar potensial secara infinitesimal dari  $L_D$  ke  $L_A$ . Sama dengan proses ekspansi adiabatik kuantum bahwa dalam proses ini juga tidak terjadi perpindahan kalor dalam sistem dan entropi sistem juga tidak berubah.

Dalam menjalankan siklus Brayton kuantum seperti yang digambarkan diatas, terdapat ketentuan yang harus dipenuhi untuk menjaga kereversibelan siklus, yaitu pada proses adiabatik kuantum sistem terisolasi secara termal, tidak ada eksitasi antar keadaan (*interstate*) energi dan jarak level energi (*energy-level spacing*) dari zat kerja berubah dalam rasio yang sama. Ketentuan ini diterapkan mengingat definisi proses adiabatik kuantum menggunakan analogi atau padanan

dari proses adiabatik klasik yang berjalan secara quasistatik, sehingga jika ketentuan ini tidak dipenuhi, maka keireversibelan siklus akan muncul.

Berikut ini akan dijabarkan lebih rinci terkait tahapan proses termodinamika yang berjalan dalam siklus Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik hingga didapatkan efisiensi mesin Brayton berdasarkan masing-masing sistem tersebut.

#### 4.1 Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi

Siklus Brayton kuantum pada sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dimulai dari proses ekspansi isobarik kuantum  $A \rightarrow B$  dimana gaya  $F_1$  dijaga konstan dengan lebar potensial meluas dari  $L_A$  ke  $L_B$ . Pada proses ini, diperoleh kalor yang diserap oleh sistem dari penangas panas yang bergantung waktu (*time-dependent heat bath*) menggunakan definisi kalor pada persamaan (3.4)

$$\begin{aligned}\delta Q_{A-B} &= \sum_n E_n dP_n \\ &= \int_{L_A}^{L_B} \sum_n E_n(L) dP_n(L) \frac{dL}{dL} \\ &= \int_{L_A}^{L_B} \left[ \sum_n \underbrace{E_n(L)}_u \underbrace{\frac{dP_n(L)}{dL}}_{dv} \right] dL\end{aligned}$$

dengan menggunakan integral parsial  $\int u dv$ , maka didapatkan

$$\delta Q_{A-B} = \sum_n \left[ E_n(L) P_n(L) \Big|_{L_A}^{L_B} - \int_{L_A}^{L_B} P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} dL \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n [E_n(L)P_n(L)] \Big|_{L_A}^{L_B} - \int_{L_A}^{L_B} \left[ \sum_n P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} \right] dL \\
&= \sum_n [E_n(L_B)P_n(L_B) - E_n(L_A)P_n(L_A)] - \int_{L_A}^{L_B} [-F(L)] dL \\
&= \sum_n [E_n(L_B)P_n(L_B) - E_n(L_A)P_n(L_A)] + \int_{L_A}^{L_B} F(L) dL \\
&= \sum_n [E_n(L_B)P_n(L_B) - E_n(L_A)P_n(L_A)] + FL \Big|_{L_A}^{L_B} \\
\delta Q_{A-B} &= \sum_n [E_n(L_B)P_n(L_B) - E_n(L_A)P_n(L_A)] + F(L_B - L_A) \tag{4.1}
\end{aligned}$$

selanjutnya, digunakan hubungan persamaan keadaan sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi (persamaan (3.12)) dan ungkapan energi internal (persamaan (3.16)) dimana masing-masing dinyatakan  $F = \frac{1}{L\beta(L)}$  dan  $U = \frac{1}{2\beta(L)}$ , sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2\beta(L)} \\
\sum_n P_n(L)E_n(L) &= \frac{1}{2\beta(L)} \\
\sum_n P_n(L)E_n(L) &= \frac{1}{2}FL \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.2) kemudian disubstitusikan ke persamaan (4.1)

$$\begin{aligned}
\delta Q_{A-B} &= \frac{1}{2}F_1L_B - \frac{1}{2}F_1L_A + F_1(L_B - L_A) \\
&= \frac{1}{2}F_1(L_B - L_A) + F_1(L_B - L_A) \\
&= \frac{3}{2}F_1(L_B - L_A)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) merupakan ungkapan kalor yang diserap sistem ( $Q_H$ ).

Kemudian, dengan dengan cara yang sama dicari pula kalor yang dilepaskan sistem pada *time-dependent entropy sink* pada proses kompresi isobarik  $C \rightarrow D$  dimana gaya  $F_0$  dijaga konstan dengan lebar potensial menyusut dari  $L_C$  ke  $L_D$ . Ungkapan kalor yang dilepaskan sistem diperoleh menggunakan definisi kalor pada persamaan (3.4)

$$\delta Q_{C-D} = - \sum_n E_n dP_n$$

Tanda minus (−) menunjukkan bahwa sistem melepaskan kalor.

$$\begin{aligned}
\delta Q_{C-D} &= - \sum_n E_n dP_n \\
&= \int_{L_C}^{L_D} - \left[ \sum_n E_n(L) dP_n(L) \right] \frac{dL}{dL} \\
&= \int_{L_C}^{L_D} - \left[ \sum_n \underbrace{E_n(L)}_u \underbrace{\frac{dP_n(L)}{dL}}_{dv} \right] dL \\
&= - \sum_n \left[ E_n(L)P_n(L) \Big|_{L_C}^{L_D} - \int_{L_C}^{L_D} P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} dL \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_n [E_n(L)P_n(L)] \Big|_{L_C}^{L_D} - \int_{L_C}^{L_D} \left[ - \sum_n P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} \right] dL \\
&= - \sum_n [E_n(L_D)P_n(L_D) - E_n(L_C)P_n(L_C)] - \int_{L_C}^{L_D} F(L) dL \\
&= \sum_n E_n(L_C)P_n(L_C) - \sum_n E_n(L_D)P_n(L_D) - FL \Big|_{L_C}^{L_D} \\
\delta Q_{C-D} &= \sum_n E_n(L_C)P_n(L_C) - \sum_n E_n(L_D)P_n(L_D) - F(L_D - L_C) \quad (4.4)
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusi persamaan (4.2) ke persamaan (4.4), didapatkan

$$\begin{aligned}
\delta Q_{C-D} &= \frac{1}{2} F_0 L_C - \frac{1}{2} F_0 L_D - F_0 (L_D - L_C) \\
&= \frac{1}{2} F_0 L_C - \frac{1}{2} F_0 L_D + F_0 (L_C - L_D) \\
&= \frac{1}{2} F_0 (L_C - L_D) + F_0 (L_C - L_D) \\
&= \frac{3}{2} F_0 (L_C - L_D) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.3) merupakan ungkapan kalor yang dilepaskan sistem ( $Q_C$ ).

Setelah didapatkan ungkapan formulasi untuk kalor yang diterima ( $Q_H$ ) dan kalor yang dilepaskan ( $Q_C$ ) sistem, maka efisiensi dari siklus Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dapat ditentukan.

Efisiensi mesin Brayton kuantum dinyatakan dengan (persamaan (2.31))

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

dimana  $Q_C = \delta Q_{C-D}$  dan  $Q_H = \delta Q_{A-B}$ . Kemudian substitusi persamaan (4.3) dan (4.5), didapatkan formulasi efisiensi mesin Brayton kuantum pada sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{\frac{3}{2}F_0(L_C - L_D)}{\frac{3}{2}F_1(L_B - L_A)} \\ &= 1 - \frac{F_0(L_C - L_D)}{F_1(L_B - L_A)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Berikut ini dikaji mengenai proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$ . Seperti yang dijelaskan sebelumnya, proses adiabatik hanya mengarah pada penggunaan perubahan energi internal untuk menghasilkan atau melakukan kerja karena selama prosesnya tidak terjadi perpindahan kalor. Sehubungan dengan itu, maka dicari ungkapan energi internal pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$ .

Ungkapan energi internal diperoleh dari hubungan dengan persamaan keadaan yang terdapat pada persamaan (4.2), dan didapatkan

$$U(L_B) = \frac{1}{2}F_1L_B \quad (4.7)$$

dan

$$U(L_C) = \frac{1}{2}F_0L_C \quad (4.8)$$

dimana persamaan (4.7) dan (4.8) masing-masing adalah ungkapan energi internal pada lebar potensial  $L_B$  dan  $L_C$ .

Hubungan energi internal pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$

$$\frac{U(L_B)}{U(L_C)} = \frac{\frac{F_1 L_B}{2}}{\frac{F_0 L_C}{2}}$$

$$\frac{U(L_B)}{U(L_C)} = \frac{F_1 L_B}{F_0 L_C} \quad (4.9)$$

Dengan formulais gaya  $F$  yang telah diperluas dalam ranah kuantum (persamaan (3.7)) dan turunan  $E_n(L)$  terhadap  $L$  pada sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi (persamaan (3.10)) yakni  $F = -\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL}$ , dengan  $\frac{dE_n}{dL} = -2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL^2} \frac{1}{L}$  yang disubstitusikan ke persamaan (4.9), maka diperoleh

$$\frac{U(L_B)}{U(L_C)} = \frac{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_B}\right) L_B}{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_C}\right) L_C}$$

$$= \frac{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \left(-2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL_B^2} \frac{1}{L_B}\right)\right) L_B}{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \left(-2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL_C^2} \frac{1}{L_C}\right)\right) L_C}$$

$$= \frac{\frac{1}{L_B^2}}{\frac{1}{L_C^2}}$$

$$\frac{U(L_B)}{U(L_C)} = \left(\frac{L_C}{L_B}\right)^2 \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) merupakan hubungan energi internal pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$ .

Selain hubungan energi internal yang diperoleh pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$  (Persamaan (4.10)), diperoleh pula

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_0} &= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_B}}{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_C}} \\
&= \frac{\frac{dE_n}{dL_B}}{\frac{dE_n}{dL_C}} \\
&= \frac{-2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL_B^3}}{-2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL_C^3}} \\
&= \frac{\frac{1}{L_B^3}}{\frac{1}{L_C^3}} \\
\frac{F_1}{F_0} &= \left(\frac{L_C}{L_B}\right)^3 \tag{4.11}
\end{aligned}$$

dimana persamaan (4.11) merupakan rasio gaya  $F_1$  dan  $F_0$  untuk proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$ .

Dengan analisis yang sama, akan didapatkan pula persamaan untuk proses proses adiabatik kuantum  $D \rightarrow A$ , yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_0} &= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_A}}{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_D}} \\
&= \frac{\frac{dE_n}{dL_A}}{\frac{dE_n}{dL_D}} \\
&= \frac{-2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL_A^3}}{-2 \frac{(n\pi\hbar)^2}{2mL_D^3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{L_A^3}{L_D^3}} \\
\frac{F_1}{F_0} &= \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^3 \tag{4.12}
\end{aligned}$$

dimana persamaan (4.12) merupakan rasio gaya  $F_1$  dan  $F_0$  untuk proses adiabatik kuantum  $D \rightarrow A$ .

Seluruh proses dalam siklus Brayton kuantum telah dijalankan. Berdasarkan seluruh hasil yang didapatkan, yakni persamaan (4.6), (4.11), dan (4.12), maka dapat diperoleh efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi.

Kembali pada formulasi efisiensi mesin Brayton di persamaan (4.6),

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 - \frac{F_0(L_C - L_D)}{F_1(L_B - L_A)} \\
&= 1 - \frac{F_0}{F_1} \frac{L_C \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)}{L_B \left(1 - \frac{L_A}{L_B}\right)} \tag{4.13.1}
\end{aligned}$$

Lalu dicari hubungan rasio gaya  $F_1$  dan  $F_0$  di proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$  (persamaan (4.11)) dan proses adiabatik kuantum  $D \rightarrow A$  (persamaan (4.12)).

Didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_0} &= \frac{F_1}{F_0} \\
\left(\frac{L_C}{L_B}\right)^3 &= \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^3 \\
\frac{L_A}{L_B} &= \frac{L_D}{L_C} \tag{4.13.2}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (4.13.2) ke (4.13.1)

$$\begin{aligned}
 \eta &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \frac{L_C \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)}{L_B \left(1 - \frac{L_A}{L_B}\right)} \\
 &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \frac{L_C \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)}{L_B \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)} \\
 &= 1 - \frac{F_0 L_C}{F_1 L_B}
 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (4.11) dimana  $\frac{L_C}{L_B} = \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^{1/3}$ , dan diperoleh efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi

$$\begin{aligned}
 \eta &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^{1/3} \\
 &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{-1/3} \\
 &= 1 - \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{2/3} \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

dimana  $\frac{F_0}{F_1} = \frac{1}{F_1/F_0}$  dengan  $\frac{F_1}{F_0}$  adalah rasio gaya.

Efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi juga dapat dinyatakan dalam fungsi lebar potensial sistem, yakni dengan melakukan substitusi persamaan (4.12) pada (4.14) dimana

$$\frac{F_1}{F_0} = \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^3$$

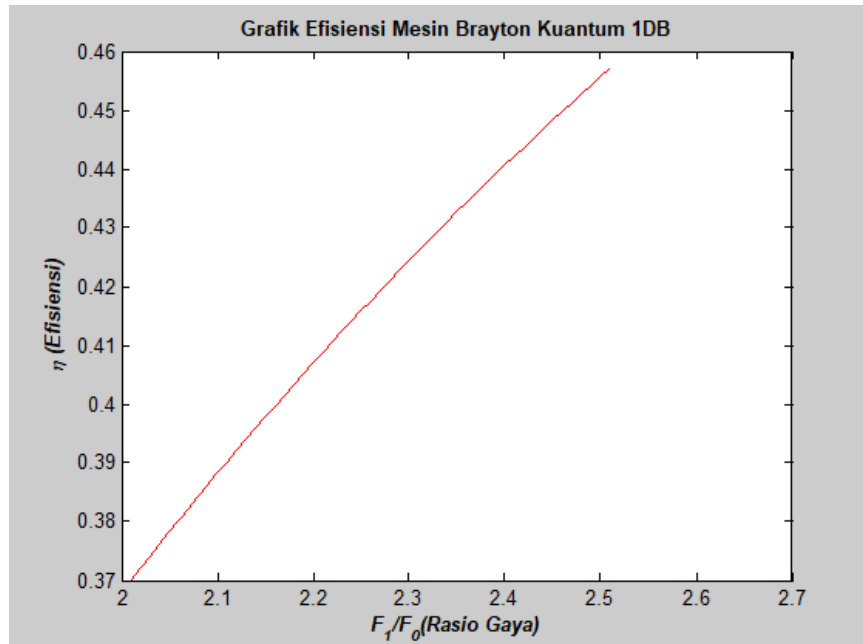
$$\frac{F_0}{F_1} = \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^{-3}$$

dan didapatkan

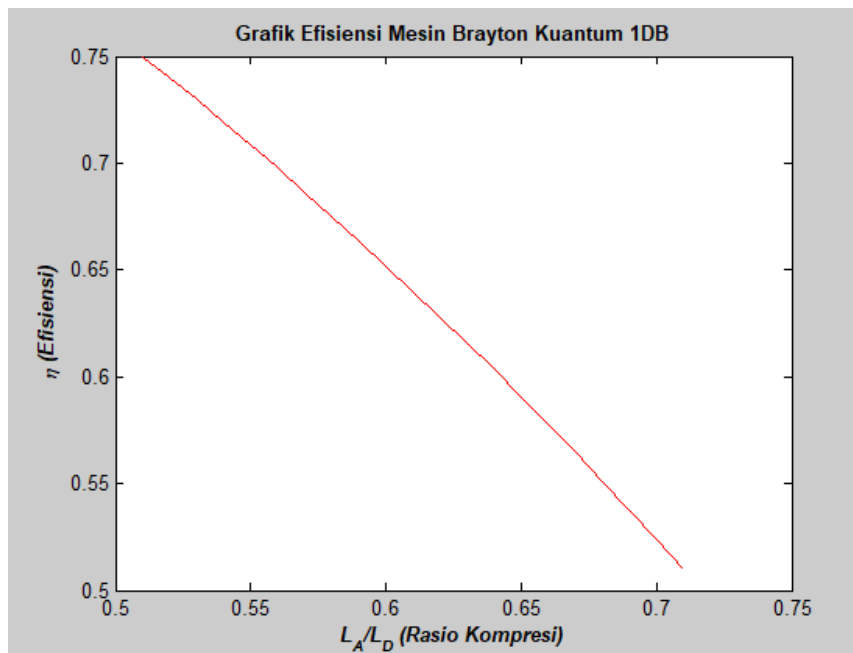
$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{2/3} \\ &= 1 - \left(\left[\frac{L_D}{L_A}\right]^{-3}\right)^{2/3} \\ \eta &= 1 - \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^{-2}\end{aligned}\tag{4.15}$$

dimana  $\frac{L_D}{L_A} = \frac{1}{L_A/L_D}$  dengan  $\frac{L_A}{L_D}$  adalah rasio kompresi lebar potensial pada proses kompresi adiabatik.

Persamaan (4.14) dan (4.15) merupakan persamaan efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dimana masing-masing dinyatakan sebagai fungsi rasio gaya  $F_0$  dan  $F_1$  dan fungsi rasio kompresi lebar potensial  $L_D$  dan  $L_A$ . Apabila masing-masing persamaan di plot, maka didapatkan grafik yang tertera pada gambar 4.2 dan 4.3



Gambar 4.2 Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Potensial Tak Hingga 1 Dimensi dalam Fungsi Rasio Gaya  $\frac{F_1}{F_0}$



Gambar 4.3 Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Potensial Tak Hingga 1 Dimensi dalam Fungsi Rasio Kompresi  $\frac{L_A}{L_D}$

Berdasarkan visualisasi grafik 2 dimensi yang ditunjukkan pada gambar 4.2 dan 4.3, dapat diketahui bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan

sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi bergantung pada fungsi rasio gaya dan fungsi rasio kompresi lebar potensial. Dalam fungsi rasio gaya, ditunjukkan bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum akan meningkat jika rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$  ditingkatkan. Sedangkan dalam fungsi rasio kompresi lebar potensial, jika rasio  $\frac{L_A}{L_D}$  ditingkatkan, maka efisiensi mesin Brayton kuantum akan menurun.

#### 4.2 Sistem Osilator Harmonik

Disini akan dipertimbangkan siklus Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik. Sama dengan analisis sebelumnya, pertama akan dihitung kalor yang diserap sistem selama proses ekspansi isobarik kuantum  $A \rightarrow B$ . Dalam proses ini, gaya  $F_1$  dijaga konstan dengan lebar potensial meluas dari  $L_A$  ke  $L_B$

$$\begin{aligned}\delta Q_{A-B} &= \sum_n E_n dP_n \\ &= \int_{L_A}^{L_B} \sum_n E_n(L) dP_n(L) \frac{dL}{dL} \\ &= \int_{L_A}^{L_B} \left[ \sum_n \underbrace{E_n(L)}_u \underbrace{\frac{dP_n(L)}{dL}}_{dv} \right] dL\end{aligned}$$

dengan menggunakan integral parsial  $\int u dv$ , maka

$$\begin{aligned}\delta Q_{A-B} &= \sum_n \left[ E_n(L) P_n(L) \right]_{L_A}^{L_B} - \int_{L_A}^{L_B} P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} dL \\ &= \sum_n [E_n(L) P_n(L)] \Big|_{L_A}^{L_B} - \int_{L_A}^{L_B} \left[ \sum_n P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} \right] dL\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n [E_n(L_B)P_n(L_B) - E_n(L_A)P_n(L_A)] - \int_{L_A}^{L_B} [-F(L)] dL \\
&= \sum_n E_n(L_B)P_n(L_B) - \sum_n E_n(L_A)P_n(L_A) + \int_{L_A}^{L_B} F(L) dL
\end{aligned}$$

$$\delta Q_{A-B} = [U(L_B) - U(L_A)] + F_1(L_B - L_A) \quad (4.16)$$

Selanjutnya, digunakan hubungan persamaan keadaan sistem osilator harmonik (persamaan (3.20)) dan energi internal (persamaan (3.26)) dimana masing-masing dinyatakan dengan

$$FL = \left[ \frac{\frac{\hbar s\pi c}{L}}{e^{\frac{\beta(L)\hbar s\pi c}{L}} - 1} + \frac{1}{2} \frac{\hbar s\pi c}{L} \right]$$

dan

$$U = \frac{\hbar\omega}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)} + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

dimana  $\omega = \frac{s\pi c}{L}$ , sehingga didapatkan hubungan

$$U(L) = FL \quad (4.17)$$

Persamaan (4.17) kemudian disubstitusikan ke persamaan (4.16), dan didapatkan formulasi kalor yang diserap sistem ( $Q_H$ )

$$\begin{aligned}
\delta Q_{A-B} &= [U(L_B) - U(L_A)] + F_1(L_B - L_A) \\
&= F_1 L_B - F_1 L_A + F_1(L_B - L_A) \\
&= 2F_1(L_B - L_A)
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Selanjutnya ditentukan formulasi kalor yang dilepaskan sistem pada proses isobarik kuantum  $C \rightarrow D$  pada *time-dependent entropy sink* dimana pada proses ini, gaya  $F_0$  dijaga konstan dengan lebar potensial menyusut dari  $L_C$  ke  $L_D$ .

$$\delta Q_{C-D} = - \sum_n E_n dP_n$$

Tanda minus (-) menunjukkan bahwa sistem melepaskan kalor. Kemudian

$$\begin{aligned} \delta Q_{C-D} &= - \sum_n E_n dP_n \\ &= \int_{L_C}^{L_D} - \left[ \sum_n E_n(L) dP_n(L) \right] \frac{dL}{dL} \\ &= \int_{L_C}^{L_D} - \left[ \sum_n \frac{E_n(L)}{u} \frac{dP_n(L)}{dv} \right] dL \\ &= - \sum_n \left[ E_n(L) P_n(L) \Big|_{L_C}^{L_D} - \int_{L_C}^{L_D} P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} dL \right] \\ &= - \sum_n [E_n(L) P_n(L)] \Big|_{L_C}^{L_D} - \int_{L_C}^{L_D} \left[ - \sum_n P_n(L) \frac{dE_n(L)}{dL} \right] dL \\ &= - \sum_n [E_n(L_D) P_n(L_D) - E_n(L_C) P_n(L_C)] - \int_{L_C}^{L_D} F(L) dL \\ &= \sum_n E_n(L_C) P_n(L_C) - \sum_n E_n(L_D) P_n(L_D) - FL \Big|_{L_C}^{L_D} \end{aligned}$$

$$\delta Q_{C-D} = [U(L_C) - U(L_D)] + F_0(L_C - L_D) \quad (4.19)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.17) ke persamaan (4.19), didapatkan formulasi kalor yang dilepaskan sistem ( $Q_C$ )

$$\begin{aligned}\delta Q_{C-D} &= F_0 L_C - F_0 L_D + F_0(L_C - L_D) \\ &= 2F_0(L_C - L_D)\end{aligned}\quad (4.20)$$

Efisiensi siklus Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik dapat dinyatakan sebagai (persamaan (2.31))

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|}$$

dengan  $Q_C = \delta Q_{C-D}$  dan  $Q_H = \delta Q_{A-B}$ . Kemudian dengan substitusi persamaan (4.18) dan (4.20) didapatkan formulasi efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik.

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{2F_0(L_C - L_D)}{2F_1(L_B - L_A)} \\ &= 1 - \frac{F_0(L_C - L_D)}{F_1(L_B - L_A)}\end{aligned}\quad (4.21)$$

Sama dengan cara sebelumnya, setelah ini dikaji mengenai proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$  dan  $D \rightarrow A$ . Pertama, dari proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$  akan didapatkan ungkapan energi internal dari hubungan dengan persamaan keadaan yang terdapat pada persamaan (4.17), yaitu

$$U(L_B) = F_1 L_B \quad (4.22)$$

dan

$$U(L_C) = F_0 L_C \quad (4.23)$$

dimana persamaan (4.22) dan (4.23) masing-masing adalah ungkapan energi internal pada lebar potensial  $L_B$  dan  $L_C$ .

Hubungan energi internal pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$

$$\frac{U(L_B)}{U(L_C)} = \frac{F_1 L_B}{F_0 L_C} \quad (4.24)$$

dengan formulasi gaya  $F$  yang telah diperluas dalam ranah kuantum (persamaan (3.7)) dan energi eigen osilator harmonik  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L}$  yang disubstitusikan ke persamaan (4.23), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{U(L_B)}{U(L_C)} &= \frac{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_B}\right) L_B}{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_C}\right) L_C} \\ \frac{U(L_B)}{U(L_C)} &= \frac{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{d}{dL_B} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_B}\right)\right) L_B}{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{d}{dL_C} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_C}\right)\right) L_C} \\ &= \frac{\left[\frac{d}{dL_B} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_B}\right)\right] L_B}{\left[\frac{d}{dL_C} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_C}\right)\right] L_C} \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_B^2} \cdot L_B}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_C^2} \cdot L_C} \\ &= \frac{1}{L_B} \\ &= \frac{1}{L_C} \\ \frac{U(L_B)}{U(L_C)} &= \frac{L_C}{L_B} \quad (4.25) \end{aligned}$$

Persamaan (4.24) merupakan hubungan energi internal pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$ .

Selain hubungan energi internal yang diperoleh pada proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$  (Persamaan (4.25)), diperoleh pula

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_0} &= \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_B}}{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_C}} \\ &= \frac{\frac{dE_n}{dL_B}}{\frac{dE_n}{dL_C}} \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar S \pi c}{L_B^2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar S \pi c}{L_C^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{L_B^2}}{\frac{1}{L_C^2}} \\ \frac{F_1}{F_0} &= \left(\frac{L_C}{L_B}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.26}$$

dimana persamaan (4.26) merupakan rasio gaya  $F_1$  dan  $F_0$  untuk proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$ .

Dengan analisis yang sama, akan didapatkan pula persamaan untuk proses proses adiabatik kuantum  $D \rightarrow A$ , yaitu:

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_A}}{-\sum_{n=1}^{\infty} P_n \frac{dE_n}{dL_D}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dE_n}{dL_A} \\
&= \frac{\frac{dE_n}{dL_A}}{\frac{dE_n}{dL_D}} \\
&= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_A^2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar s \pi c}{L_D^2}} \\
&= \frac{\frac{1}{L_A^2}}{\frac{1}{L_D^2}} \\
\frac{F_1}{F_0} &= \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^2 \tag{4.27}
\end{aligned}$$

dimana persamaan (4.27) merupakan rasio gaya  $F_1$  dan  $F_0$  untuk proses adiabatik kuantum  $D \rightarrow A$ .

Seluruh proses dalam siklus Brayton kuantum telah dijalankan. Berdasarkan seluruh hasil yang didapatkan, yakni persamaan (4.21), (4.26), dan (4.27), maka dapat diperoleh efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik.

Kembali pada formulasi efisiensi mesin Brayton kuantum di persamaan (4.21)

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 - \frac{F_0(L_C - L_D)}{F_1(L_B - L_A)} \\
&= 1 - \frac{F_0}{F_1} \frac{L_C \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)}{L_B \left(1 - \frac{L_A}{L_B}\right)} \tag{4.28.1}
\end{aligned}$$

Lalu dicari hubungan rasio gaya  $F_1$  dan  $F_0$  di proses adiabatik kuantum  $B \rightarrow C$  (persamaan (4.26)) dan proses adiabatik kuantum  $D \rightarrow A$  (persamaan (4.27)), didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{F_1}{F_0} &= \frac{F_1}{F_0} \\ \left(\frac{L_C}{L_B}\right)^2 &= \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^2 \\ \frac{L_A}{L_B} &= \frac{L_D}{L_C}\end{aligned}\tag{4.28.2}$$

Substitusi persamaan (4.28.2) ke (4.28.1)

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \frac{L_C \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)}{L_B \left(1 - \frac{L_A}{L_B}\right)} \\ &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \frac{L_C \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)}{L_B \left(1 - \frac{L_D}{L_C}\right)} \\ &= 1 - \frac{F_0 L_C}{F_1 L_B}\end{aligned}$$

kemudian substitusi persamaan (4.26) dimana  $\frac{L_C}{L_B} = \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^{1/2}$ , dan diperoleh efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^{1/2} \\ &= 1 - \frac{F_0}{F_1} \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{-1/2} \\ \eta &= 1 - \sqrt{\frac{F_0}{F_1}}\end{aligned}\tag{4.28}$$

dimana  $\frac{F_0}{F_1} = \frac{1}{F_1/F_0}$  dengan  $\frac{F_1}{F_0}$  adalah rasio gaya.

Efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik juga dapat dinyatakan dalam fungsi lebar potensial sistem, yakni dengan melakukan substitusi persamaan (4.27) pada (4.28) dimana

$$\frac{F_1}{F_0} = \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^2$$

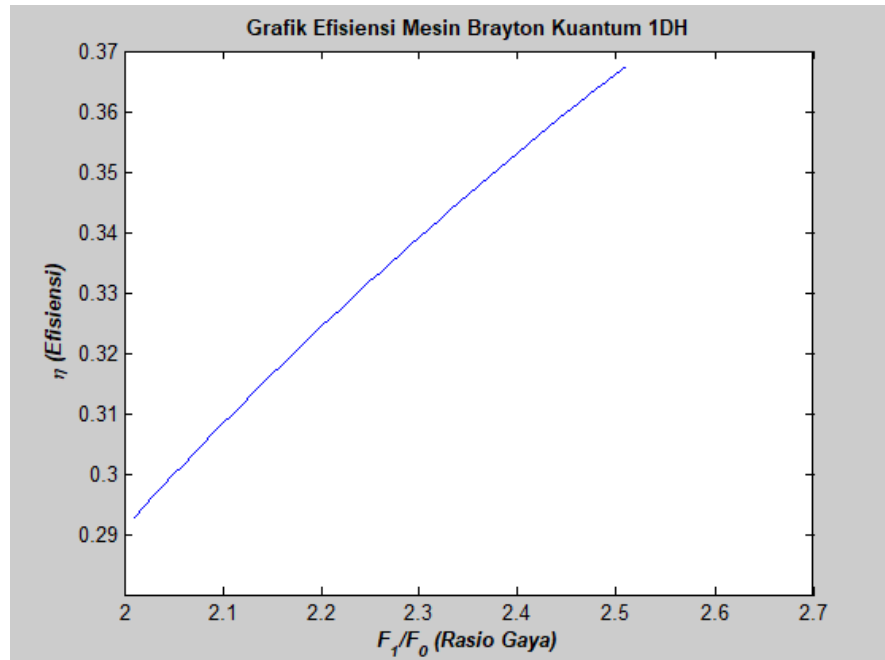
$$\frac{F_0}{F_1} = \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^{-2}$$

akan didapatkan

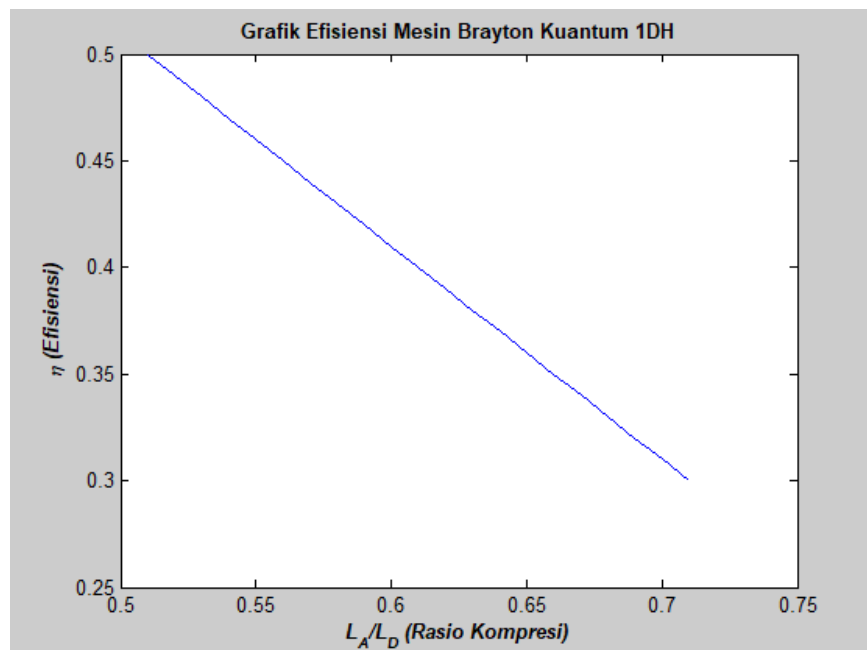
$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{1/2} \\ &= 1 - \left(\left[\frac{L_D}{L_A}\right]^{-2}\right)^{1/2} \\ \eta &= 1 - \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^{-1}\end{aligned}\tag{4.29}$$

dimana  $\frac{L_D}{L_A} = \frac{1}{L_A/L_D}$  dengan  $\frac{L_A}{L_D}$  adalah rasio kompresi lebar potensial pada proses kompresi adiabatik.

Persamaan (4.28) dan (4.29) merupakan persamaan efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik dimana masing-masing dinyatakan sebagai fungsi rasio gaya  $F_0$  dan  $F_1$  dan fungsi rasio lebar potensial  $L_D$  dan  $L_A$ . Apabila masing-masing persamaan di plot, maka didapatkan grafik yang tertera pada gambar 4.4 dan 4.5



Gambar 4.4 Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Osilator Harmonik dalam Fungsi Rasio Gaya  $\frac{F_1}{F_0}$



Gambar 4.5 Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Osilator Harmonik dalam Fungsi Rasio Kompresi  $\frac{L_A}{L_D}$

Sama dengan analisis pada mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi, berdasarkan

visualisasi grafik pada gambar 4.4 dan 4.5, dapat diketahui bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik bergantung pada fungsi rasio gaya dan rasio kompresi lebar potensial. Dalam fungsi rasio gaya, ditunjukkan bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum akan meningkat jika rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$  ditingkatkan. Sedangkan dalam fungsi rasio kompresi lebar potensial, jika rasio  $\frac{L_A}{L_D}$  ditingkatkan, maka efisiensi mesin Brayton kuantum akan menurun.

### 4.3 Perbandingan Efisiensi Mesin Brayton Kuantum dan Klasik

Efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik telah didapatkan dan dinyatakan masing-masing dalam persamaan (4.14), (4.15), (4.28), dan (4.29). Hasil tersebut kemudian akan dibandingkan dengan kasus mesin Brayton klasik.

Sebelumnya, efisiensi mesin Brayton klasik dinyatakan pada persamaan (2.44) dan (2.45) yang apabila dituliskan masing-masing

$$\eta = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma}$$

dan

$$\eta = 1 - \frac{1}{\left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

dimana  $\frac{V_1}{V_2}$  adalah rasio kompresi,  $\frac{P_4}{P_2}$  adalah rasio tekanan, dan  $\gamma$  adalah eksponen adiabatik klasik. Jika zat kerja mesin Brayton klasik berupa gas ideal monoatomik dimana eksponen adiabatik  $\gamma = \frac{5}{3}$ , maka efisiensi mesin Brayton klasik adalah

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-5/3} \\ &= 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-2/3}\end{aligned}\quad (4.30)$$

atau

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{1-\frac{1}{5/3}} \\ &= 1 - \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{2/5}\end{aligned}\quad (4.31)$$

dimana persamaan (4.30) menyatakan efisiensi mesin Brayton klasik dalam fungsi rasio kompresi  $\frac{V_1}{V_2}$  dan persamaan (4.31) menyatakan efisiensi mesin Brayton klasik dalam fungsi rasio tekanan (gaya)  $\frac{P_4}{P_2}$ .

Pada kasus mesin Brayton kuantum, nilai eksponen adiabatik dapat diketahui dari proses adiabatik kuantum ( $S = \text{konstan}$ ). Untuk zat kerja berupa sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi, ungkapan entropi  $S$  dinyatakan pada persamaan (3.15), yaitu:

$$S = k \left[ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mL^2}{\pi\hbar^2\beta(L)}} \right) \right]$$

karena  $S$  konstan selama proses adiabatik kuantum, maka didapatkan ungkapan

$$S = k \left[ \frac{1}{2} + \ln \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2mkTL^2}{\pi\hbar^2}} \right) \right]$$

$$TL^2 = \text{konstan} \quad (4.32)$$

Persamaan (4.32) merupakan persamaan untuk proses adiabatik kuantum sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi.

Untuk zat kerja berupa sistem osilator harmonik, ungkapan entropi  $S$  dinyatakan pada persamaan (3.15), yaitu:

$$S = k \ln(1 + \langle n \rangle) + \frac{\hbar\omega}{T} \langle n \rangle$$

dimana  $\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$  dan  $\omega = \frac{s\pi c}{L}$ . karena karena  $S$  konstan selama proses

adiabatik kuantum, maka didapatkan

$$S = k \ln(1 + \langle n \rangle) + \frac{\hbar s \pi c}{TL} \langle n \rangle$$

$$TL = \text{konstan} \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) merupakan persamaan untuk proses adiabatik kuantum sistem osilator harmonik.

Persamaan (4.32) dan (4.33) memiliki bentuk yang sama dengan ungkapan proses adiabatik klasik pada persamaan (2.32)

$$TL^{\gamma-1} = \text{konstan} \quad (4.34)$$

Jika dibandingkan dengan bentuk persamaan (4.34), maka suku eksponen yang terdapat pada persamaan (4.32) dan (4.33) masing-masing diperoleh

$$\gamma - 1 = 2$$

$$\gamma = 3 \tag{4.35}$$

dan

$$\gamma - 1 = 1$$

$$\gamma = 2 \tag{4.36}$$

Persamaan (4.35) dan (4.36) masing-masing dinyatakan sebagai eksponen adiabatik sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan eksponen adiabatik sistem osilator harmonik.

Masing-masing persamaan (4.35) dan (4.36) kemudian disubstitusikan ke persamaan efisiensi mesin Brayton klasik (persamaan (2.44) dan (2.45)).

Didapatkan

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-3} \\ &= 1 - \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{1-\frac{1}{3}} \\ \eta &= 1 - \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{2/3} \end{aligned} \tag{4.38}$$

dan

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-2}$$

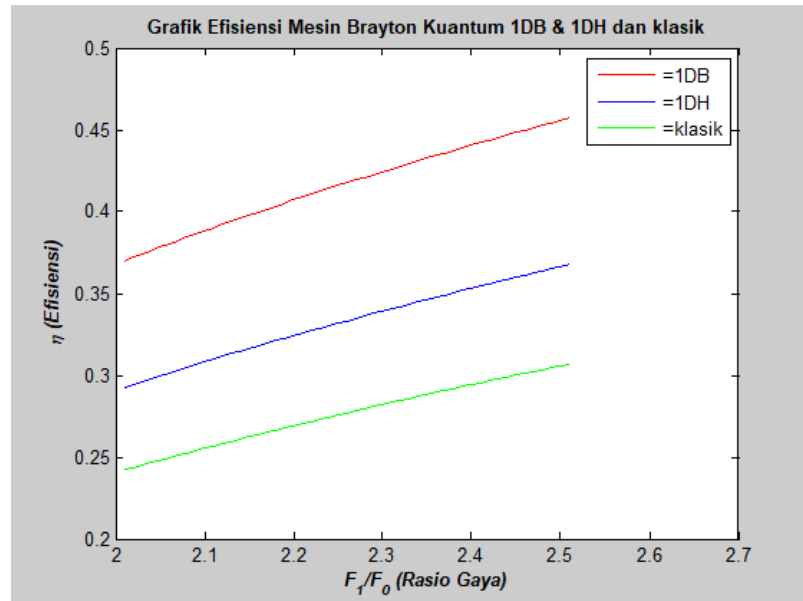
$$\eta = 1 - \left(\frac{L_D}{L_A}\right)^{-1} \quad (4.39)$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_4}{P_2}\right)^{1-\frac{1}{2}}$$

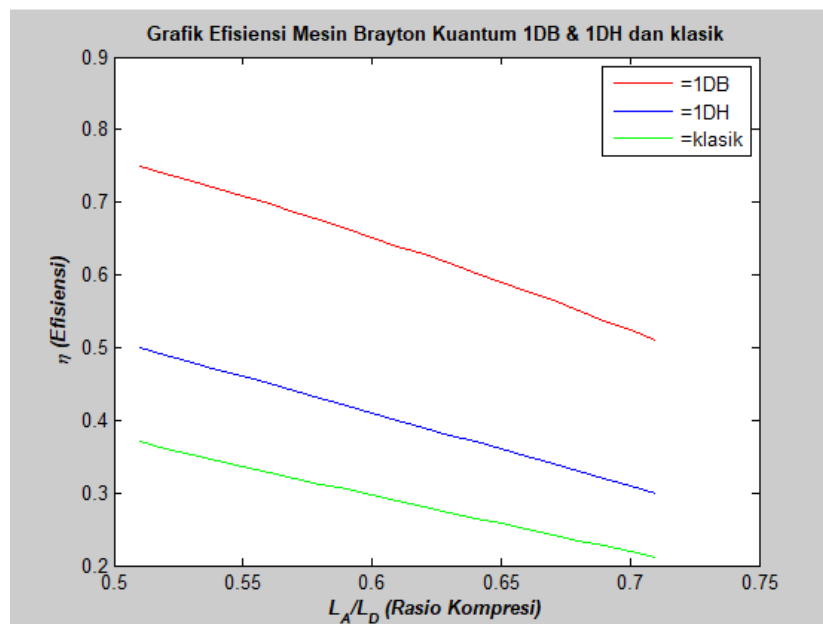
$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{F_0}{F_1}} \quad (4.40)$$

Definisi volume dan tekanan pada sistem klasik sama dengan definisi lebar potensial dan gaya untuk sistem kuantum, sehingga  $V_1 = L_D$ ,  $V_2 = L_A$ ,  $P_4 = F_0$ , dan  $P_2 = F_1$ . Ungkapan persamaan (4.37) dan (4.38) serta (4.39) dan (4.40) masing-masing menyatakan hasil yang sama dengan ungkapan efisiensi mesin Brayton kuantum sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi (persamaan (4.14) dan (4.15)) dan efisiensi mesin Brayton kuantum sistem osilator harmonik (persamaan (4.28) dan (4.29)).

Apabila dibandingkan dan diplot antara mesin Brayton kuantum sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi, sistem osilator harmonik, dan mesin Brayton klasik, didapatkan hasil gambar 4.6 dan 4.7 sebagai berikut



Gambar 4.6. Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi, Sistem Osilator Harmonik, dan Klasik dalam Fungsi Rasio Gaya  $\frac{F_1}{F_0}$



Gambar 4.7. Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum berdasarkan Sistem Partikel Tunggal dalam Sumur Potensial Tak Hingga 1 Dimensi, Sistem Osilator Harmonik, dan Klasik dalam Fungsi Rasio Kompresi  $\frac{L_A}{L_D}$

Gambar 4.6 dan gambar 4.7 masing-masing menunjukkan hubungan antara efisiensi mesin Brayton dengan rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$  dan hubungan antara efisiensi

mesin Brayton dengan rasio kompresi lebar potensial  $\frac{L_A}{L_D}$ . Dalam fungsi rasio gaya, didapatkan hasil bahwa jika rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$  ditingkatkan, maka efisiensi dari masing-masing sistem akan semakin meningkat. Sedangkan dalam fungsi rasio kompresi lebar potensial, jika rasio kompresi lebar potensial  $\frac{L_A}{L_D}$  ditingkatkan, maka efisiensi dari masing-masing sistem akan menurun.

Jika dibandingkan antara 3 grafik yang terdapat pada gambar 4.6 dan 4.7, didapatkan bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi memiliki nilai efisiensi tertinggi dibandingkan efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik dan mesin Brayton klasik, meskipun masing-masing memiliki nilai rasio gaya maupun rasio kompresi yang sama. Ini mengindikasikan bahwa nilai efisiensi tidak hanya bergantung pada rasio gaya atau rasio kompresi lebar potensial saja, melainkan juga dipengaruhi oleh zat kerja. Diketahui zat kerja berupa sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi memiliki koefisien adiabatik  $\gamma = 3$ , zat kerja berupa sistem osilator harmonik memiliki  $\gamma = 2$ , dan zat kerja berupa gas ideal monoatomik (klasik) memiliki  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Ini menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai koefisien adiabatik dari suatu zat kerja, maka semakin tinggi pula nilai efisiensinya, dan dari grafik pada gambar 4.6 dan 4.7 dapat ditunjukkan pula bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum lebih tinggi daripada mesin Brayton klasik.

Dari studi yang telah dilakukan, bisa disimpulkan bahwa efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik sesuai dengan ungkapan efisiensi

mesin Brayton klasik. Ini mengindikasikan bahwa definisi gaya (tekanan) yang diperluas dalam ranah kuantum memiliki bentuk yang tetap konsisten (*self-consistent*) dan mempunyai implikasi fisis yang jelas, sehingga studi ini dapat menjembatani siklus termodinamika berdasarkan sistem klasik dan sistem kuantum.

## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

1. Pada proses adiabatik kuantum, sistem mengalami perubahan tingkat energi namun tidak mengalami perubahan probabilitas okupasi tiap keadaan eigen. Dan pada proses isobarik kuantum, sistem dijaga agar gaya (tekanan) tetap konstan. Pada proses isobarik kuantum sistem partikel tunggal pada sumur potensial tak hingga 1 dimensi, untuk menjaga agar  $F$  tetap konstan, maka harus ditinjau temperatur sistem agar proporsional dengan lebar dinding potensial  $\beta(L) = \frac{1}{(FL)}$  ; sedangkan pada proses isobarik kuantum sistem osilator harmonik, untuk menjaga agar  $F$  tetap konstan, maka harus ditinjau temperatur sistem  $\beta(L)$  secara cermat karena bentuk fungsi temperatur sistem lebih kompleks, yaitu  $\beta(L) = \frac{L}{\hbar s \pi c} \ln \frac{(2FL^2 + \hbar s \pi c)}{(2FL^2 - \hbar s \pi c)}$ .
2. Efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik didapatkan dan dinyatakan dalam fungsi rasio gaya dan rasio kompresi lebar potensial. Jika rasio gaya ditingkatkan, maka efisiensi mesin Brayton kuantum akan meningkat; namun jika rasio kompresi lebar potensial yang ditingkatkan, maka efisiensinya akan menurun.

### 5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan dengan mengkaji mesin Brayton kuantum berbasis multipartikel dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik. Selain itu dapat dikembangkan pula kajian tentang mesin panas kuantum berbasis multipartikel dalam sumur potensial tak

hingga 1 dimensi dan sistem osilator harmonik menggunakan siklus yang lain, seperti siklus Carnot, siklus Otto, dan siklus Diesel.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah, Mikrajuddin. 2016. *Fisika Dasar I*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Abidin, Moch. Zainal. 2017. Mesin Otto, Diesel, dan Brayton Kuantum Sistem 2 Partikel Antisimetri dalam Kotak 1 Dimensi 3 Tingkat Energi Terendah. Skripsi. Tidak Diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam. Universitas Negeri Malang: Malang.
- Akbar, Muhammad Syawaluddin. 2016. Mesin Carnot, Otto, Brayton, dan Diesel Kuantum Sistem Masless-Boson dalam Kotak Potensial 1 Dimensi. Skripsi. Tidak Diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam. Universitas Negeri Malang: Malang.
- Al-Qur'an dan Terjemahan. 2008. Departemen Agama RI. Bandung: Diponegoro.
- Al-Qurthubi. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Baiquni, Ahmad., dkk. 2014. *Tafsir Salman: Tafsir Ilmiah Juz 'Amma*. Bandung: Mizan.
- Bender, dkk. 2000. *Quantum-Mechanical Carnot Engine*. arXiv: quant-ph/007002v1.
- Callen, Herbert B. 1985. *Thermodynamics and An Introduction To Thermostatistics Second Edition*. Hoboken: Wiley.
- Gemmer, dkk. 2004. *Quantum Thermodynamics*. Berlin: Springer.
- Giancoli, Douglas C. 2001. *Fisika Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Ginting, Raja Ulungen. 1989. Dasar-dasar Termodinamika Teknik. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Proyek Pengembangan Lembaga pendidikan Tenaga Kependidikan.
- Griffiths, David J. 1994. *Introduction to Quantum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall.
- Ibnu Katsir. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Asy-Syafi'i.
- Latifah, Eny dan Agus Purwanto. 2011. *Multiple-State Quantum Carnot Engine*. Journal of Modern Physics. 2, 1366-1372.
- Latifah, Eny dan Agus Purwanto. 2013. *Quantum Heat Engine; Multiple-State 1D Box System*. Journal of Modern Physics. 4, 1091-1098.
- Latifah, Eny dan Agus Purwanto. 2014. *Multiple-State Quantum Otto Engine, 1D Box System*. AIP Conference Proceedings. 1589, 137.

- Mulyono, Agus dan Ahmad Abtokhi. 2006. *Fisika & Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang-Press.
- Munoz, Enrique dan Francisco J. Pena. 2012. *Quantum Heat Engine in the Relativistic Limit: The Case of Dirac-Particle*. ArXiv: 1207.6149v2.
- Pathria, R. K. dan Paul D. Beale. 1972. *Statistical Mechanics: Third Edition*. Oxford: Pergamon.
- Pointon, A. J. 1967. *An Introduction to Statistical Physics for Students*. London: Longman.
- Purwanto, Agus. 2005. *Fisika Kuantum*. Yogyakarta: Gava media.
- Purwanto, Agus. 2007. *Fisika Statistik*. Yogyakarta: Gava media.
- Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-Ayat Semesta*. Bandung: Mizan.
- Quan, dkk. 2007. *Quantum Thermodynamic Cycles and Quantum Heat Engines*. Phys. Rev. E 76, 031105.
- Quan, dkk. 2009. *Quantum Thermodynamic Cycles and Quantum Heat Engines. II*. Phys. Rev. E 79, 041129.
- Rezek, Yair dan Ronnie Kosloff. 2006. *Irreversible Performance of a Quantum Harmonic Heat Engine*. New Journ. of Phys. 8, 83.
- Saputra dan Agus Purwanto. 2009. *Mesin Panas Kuantum Berbasis Sumur Potensial Satu Dimensi*. Surabaya: Seminar Fisika dan Aplikasinya.
- Scovil dan E. O. Schulz-DuBois. 1959. *Three-Level Masers as Heat Engines*. Phys. Rev. Lett. Vol. 2, 6.
- Sears dan Gerhard L. Salinger. 1982. *Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Thermodynamics Third Edition*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company.
- Singh, Satnam. 2019. *Quantum Brayton Engine of Non-Interacting Fermions in One Dimensional Box*. arXiv: 1908.09281v3.
- Siregar, Rustam E. 2012. *Fisika Statistik*. Bandung: UNPAD Press.
- Suana, wayan. 2012. *Osilator Harmonik*. Lampung: Universitas Lampung.
- Young dan Roger A. Freedman. 2012. *Sears & Zemansky's University Physics with Modern Physics 13<sup>th</sup> Edition*. Boston: Addison-Wesley
- Zemansky dan Richard H. Dittman. 1986. *Kalor dan Termodinamika*. Bandung: Penerbit ITB.

**LAMPIRAN A**  
**Ensembel Kanonik: Distribusi Maxwell-Boltzmann**

Ensembel kanonik merupakan gabungan dari suatu sistem partikel dan suatu reservoir panas yang besar. Dalam ensembel ini terjadi kontak termal antara sistem dan reservoir, sehingga suhu sistem partikel menjadi tetap. Yang konstan dari sistem partikel adalah suhu  $T$ , volume  $V$ , dan jumlah partikel  $N$ . Misalkan sistem menempati suatu keadaan mikro ke-  $i$  yang berenergi  $E_i$ . Energi ini jauh lebih kecil daripada energi reservoir sehingga jumlah keadaan mikro gabungan sama dengan jumlah keadaan mikro dalam sistem partikel (Siregar, 2012).

$$\Omega(U_{gab}) = \sum_i \Omega_{res}(U_{gab} - E_i) \quad (1)$$

Diketahui bahwa ungkapan entropi yang kaitannya dengan jumlah mikro maksimum dari suatu sistem dinyatakan dengan

$$S = k_B \ln \Omega \quad (2)$$

Dengan menggunakan hubungan entropi pada persamaan (2), maka

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= \frac{S}{k_B} \\ e^{\ln \Omega} &= e^{\frac{S}{k_B}} \\ \Omega &= e^{\frac{S}{k_B}} \end{aligned} \quad (3)$$

Jika definisi dari persamaan (1) diterapkan pada persamaan (3), maka didapatkan

$$\Omega(U_{gab}) = \sum_i e^{\left[ \frac{S_{res}(U_{gab} - E_i)}{k_B} \right]} \quad (4)$$

Suku dari pangkat eksponensial tersebut kemudian diuraikan dalam deret Taylor menjadi

$$\begin{aligned} \frac{S_{res}(U_{gab} - E_i)}{k_B} &\approx \frac{S_{res}(U_{gab})}{k_B} + \frac{1}{k_B} \frac{\partial S_{res}(U_{gab})}{\partial U_{gab}} (U_{gab} - E_i - U_{gab}) \\ &\approx \frac{S_{res}(U_{gab})}{k_B} - \frac{\partial S_{res}(U_{gab})}{\partial U_{gab}} \frac{E_i}{k_B} \end{aligned} \quad (5)$$

Dalam termodinamika dikenal hubungan suhu dan entropi dengan

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{N,V} \quad (6)$$

Persamaan (6) kemudian disubstitusikan ke persamaan (5), sehingga persamaan (5) menjadi

$$\frac{S_{res}(U_{gab} - E_i)}{k_B} \approx \frac{S_{res}(U_{gab})}{k_B} - \frac{E_i}{k_B T} \quad (7)$$

Substitusi persamaan (7) ke persamaan (4), didapatkan

$$\Omega(U_{gab}) = e^{\frac{S_{res}(U_{gab})}{k_B}} \sum_i e^{\frac{-E_i}{k_B T}} \quad (8)$$

Dari persamaan (8) ini terungkap bahwa probabilitas sistem pada keadaan mikro ke-  $i$  adalah

$$p_i \propto e^{\frac{-E_i}{k_B T}} \quad (9)$$

Probabilitas tersebut harus dinormalisasi; untuk itu

$$p_i = \frac{e^{\frac{-E_i}{k_B T}}}{Z_1} \quad (10)$$

dengan

$$Z_1 = \sum_i e^{\frac{-E_i}{k_B T}} \quad (11)$$

disebut sebagai fungsi partisi untuk satu partikel.

Energi rata-rata satu partikel dirumuskan dengan

$$\langle E \rangle = \sum_i p_i E_i \quad (12)$$

Dengan menggunakan persamaan (10) dan (11), maka

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_i \frac{e^{\frac{-E_i}{k_B T}}}{Z_1} E_i \\ &= - \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial \beta} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} \quad (13)$$

dimana  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ .

Diketahui bahwa probabilitas menemukan sistem pada keadaan mikro ke-  $i$  dapat dikaitkan dengan jumlah partikel pada keadaan tersebut, yakni

$$p_i = \frac{n_i}{N} \quad (14)$$

Dari persamaan (14) tersebut dan persamaan (10), dapat diperoleh ungkapan dari distribusi Maxwell-Boltzmann, yakni jumlah partikel yang menempati keadaan mikro ke-  $i$

$$\begin{aligned} n_i &= N p_i \\ &= \frac{N}{Z_1} e^{-\beta E_i} \end{aligned} \quad (15)$$

sedangkan

$$f(E_i) = e^{-\beta E_i} \quad (16)$$

disebut fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann.

## LAMPIRAN B

### Fungsi Energi Bebas Helmholtz

Energi bebas Helmholtz didefinisikan dengan

$$f = U - TS \quad (1)$$

dimana  $f$  = energi bebas Helmholtz;  $U$  = energi internal; dan  $S$  = entropi. Dan bentuk diferensialnya berupa

$$df = dU - TdS - SdT \quad (2)$$

Sebelumnya, berdasarkan hukum pertama termodinamika dapat dituliskan hubungan antara energi internal dengan entropi, yaitu

$$dU = TdS - PdV \quad (3)$$

dimana  $P$  = tekanan dan  $V$  = volume. Kemudian substitusi persamaan (3) ke (2) dan diperoleh

$$\begin{aligned} df &= dU - TdS - SdT \\ &= (TdS - PdV) - TdS - SdT \\ &= -PdV - SdT \end{aligned} \quad (4)$$

dengan meninjau

$$U = U(S, V)$$

$$f = f(T, V)$$

Dari persamaan (4) dapat diperoleh

$$P = - \left( \frac{\partial f}{\partial V} \right)_T \quad (5)$$

dan

$$S = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_V \quad (6)$$

Persamaan (5) dapat digunakan untuk mencari persamaan keadaan sistem yang akan dinyatakan oleh tekanan sistem dalam fungsi volume dan temperatur sistem (Pointon, 1967).

Apabila persamaan (6) dijabarkan lebih lanjut, didapatkan

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}[U - TS] \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}[-T(k_B \ln Z)] \\ S &= \frac{\partial}{\partial T}[Tk_B \ln Z] \end{aligned} \tag{7}$$

dengan  $S = k_B \ln Z$ ; dimana  $S$  = entropi,  $k_B$  = konstanta Boltzmann, dan  $Z$  = fungsi partisi.

## LAMPIRAN C

### Script Grafik Efisiensi Mesin Brayton

1. Script grafik efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dalam fungsi rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$ .

```

1 - F0=1 % Gaya F_0
2 - F1=2 %Gaya F_1
3 - m=F1/F0
4 - N=[];
5 - for i=0:0.2:1.0
6 -     e=1-(m)^(-2/3)
7 -     m=m+0.01
8 -     N=[N; m e]
9 - end
10 - N
11 - plot(N(:,1),N(:,2),'r')
12 - title ('\bf{Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum 1DB}');
13 - xlabel ('\bf{\it{F_1}/F_0} (Rasio Gaya)');
14 - ylabel ('\bf{\it{\eta}} (Efisiensi)');

```

2. Script grafik efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi dalam fungsi rasio kompresi  $\frac{L_A}{L_D}$ .

```

1 - LA=1 %Lebar potensial di titik A
2 - LD=2 %Lebar potensial di titik D
3 - m=LA/LD
4 - N=[];
5 - for i=0:0.5:1.0
6 -     e=1-(m)^(2)
7 -     m=m+0.01
8 -     N=[N; m e]
9 - end
10 - plot(N(:,1),N(:,2),'r')
11 - title ('\bf{Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum 1DB}');
12 - xlabel ('\bf{\it{L_A}/L_D} (Rasio Kompresi)');
13 - ylabel ('\bf{\it{\eta}} (Efisiensi)');

```

3. Script grafik efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik dalam fungsi rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$ .

```

Editor - Grafik1DHRRevisi.m
1 - FO=1 %Gaya F_0
2 - F1=2 %Gaya F_1
3 - m=F1/FO
4 - N=[];
5 - for i=0:0.2:10
6 -     e=1-(m)^(-1/2)
7 -     m=m+0.01
8 -     N=[N; m e]
9 - end
10 - plot(N(:,1),N(:,2))
11 - title ('\bf{Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum 1DH}');
12 - xlabel ('\bf{\it{(F_1)/F_0}} (Rasio Gaya)');
13 - ylabel ('\bf{\it{\eta}} (Efisiensi)');

```

4. Script grafik efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem osilator harmonik dalam fungsi rasio kompresi  $\frac{L_A}{L_D}$ .

```

Editor - Grafik_lebar_Potensial_1DB.m
1 - LA=1 %Gaya F_0
2 - LD=2 %Gaya F_1
3 - m=LA/LD
4 - N=[];
5 - for i=0:0.5:10
6 -     e=1-(m)^(1)
7 -     m=m+0.01
8 -     N=[N; m e]
9 - end
10 - plot(N(:,1),N(:,2))
11 - title ('\bf{Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum 1DH}');
12 - xlabel ('\bf{\it{(L_A)/L_D}} (Rasio Kompresi)');
13 - ylabel ('\bf{\it{\eta}} (Efisiensi)');

```

5. Script grafik efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi, sistem osilator harmonik, dan klasik dalam fungsi rasio gaya  $\frac{F_1}{F_0}$ .

```

1 - FO=1 % Gaya F_0
2 - F1=2 %Gaya F_1
3 - m=F1/FO
4 - O=[];
5 - for i=0:0.2:10
6 -     e=1-(m)^(-2/3)
7 -     m=m+0.01
8 -     O=[O; m e]
9 - end
10 - N
11 - FO=1 % Gaya F_0
12 - F1=2 %Gaya F_1
13 - m=F1/FO
14 - N=[];
15 - for i=0:0.2:10
16 -     e=1-(m)^(-1/2)
17 -     m=m+0.01
18 -     N=[N; m e]
19 - end
20 - N

21 - FO=1 % Gaya F_0
22 - F1=2 %Gaya F_1
23 - m=F1/FO
24 - P=[];
25 - for i=0:0.2:10
26 -     e=1-(m)^(-2/5)
27 -     m=m+0.01
28 -     P=[P; m e]
29 - end
30 - P
31 - plot(O(:,1),O(:,2),'r',N(:,1),N(:,2),'b',P(:,1),P(:,2),'g')
32 - title ('\bf{Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum 1DB & 1DH} dan klasik');
33 - xlabel ('\bf{\it{F_1}/F_0} (Rasio Gaya)');
34 - ylabel ('\bf{\it{\eta} (Efisiensi)}');
35 - legend('1DB','1DH','klasik')

```

6. Script grafik efisiensi mesin Brayton kuantum berdasarkan sistem partikel tunggal dalam sumur potensial tak hingga 1 dimensi, sistem osilator harmonik, dan klasik dalam fungsi rasio kompresi  $\frac{L_A}{L_D}$ .

```

1 - LA=1 %Lebar potensial di titik A
2 - LD=2 %Lebar potensial di titik D
3 - m=LA/LD
4 - O=[];
5 - for i=0:0.5:10
6 -     e=1-(m)^(2)
7 -     m=m+0.01
8 -     O=[O; m e]
9 - end
10 - O
11 - LA=1 %Lebar potensial di titik A
12 - LD=2 %Lebar potensial di titik D
13 - m=LA/LD
14 - N=[];
15 - for i=0:0.5:10
16 -     e=1-(m)^(1)
17 -     m=m+0.01
18 -     N=[N; m e]
19 - end
20 - N
21 - LA=1 %Lebar potensial di titik A
22 - LD=2 %Lebar potensial di titik D
23 - m=LA/LD
24 - P=[];
25 - for i=0:0.5:10
26 -     e=1-(m)^(2/3)
27 -     m=m+0.01
28 -     P=[P; m e]
29 - end
30 - P
31 - plot(O(:,1),O(:,2),'r',N(:,1),N(:,2),'b',P(:,1),P(:,2),'g')
32 - title ('\bf{Grafik Efisiensi Mesin Brayton Kuantum 1DB & 1DH} dan klasik');
33 - xlabel ('\bf{it{(L_A/L_D)} (Rasio Kompresi)}')
34 - ylabel ('\bf{it{\eta} (Efisiensi)}')
35 - legend('1DB','1DH','klasik')

```



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana NO.50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : NISAUL AINIYAH  
NIM : 16640067  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/Fisika  
Judul Skripsi : Studi Mesin Brayton Kuantum Berbasis Sistem Partikel Tunggal pada Sumur Potensial tak Hingga 1 Dimensi dan Sistem Osilator Harmonik  
Pembimbing I : Drs. Abdul Basid, M.Si  
Pembimbing II : Arista Romadani, M.Sc

No.	Hari/Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	Rabu/26 Agustus 2020	Konsultasi Bab I	
2	Jumat/28 Agustus 2020	Konsultasi Turunan Rumus	
3	Jumat/25 September 2020	Konsultasi Bab I dan III	
4	Selasa/13 Oktober 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
5	Selasa/01 Desember 2020	Konsultasi Turunan Rumus Bab IV	
6	Kamis/14 Januari 2021	Konsultasi Bab III dan Turunan Rumus Bab IV	
7	Selasa/02 Februari 2021	Konsultasi Bab I, II, III, dan ACC	
8	Rabu/03 Maret 2021	Konsultasi Integrasi Al-Quran	
9	Senin/08 Maret 2021	Konsultasi Abstrak, Bab IV dan V	
10	Selasa/09 Maret 2021	Konsultasi Integrasi Al-Quran	
11	Selasa/23 Maret 2021	Konsultasi Bab IV	
12	Rabu/21 April 2021	Konsultasi seluruh Bab dan ACC	

Malang, 28 April 2021

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si  
NIP. 19650504 199003 1 003