AUTOMORFISMA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING KOMUTATIF DENGAN KESATUAN

SKRIPSI

OLEH
DAVID SUDARMAWAN
NIM. 16610085

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2021

AUTOMORFISMA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING KOMUTATIF DENGAN KESATUAN

SKRIPSI

Diajukan kepada

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh

DAVID SUDARMAWAN

NIM. 16610085

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2021

AUTOMORFISMA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING KOMUTATIF DENGAN KESATUAN

SKRIPSI

Oleh
DAVID SUDARMAWAN
NIM. 16610085

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 4 Desember 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Juhari, M.Si
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19840209 201608 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

AUTOMORFISMA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING KOMUTATIF DENGAN KESATUAN

SKRIPSI

Oleh
DAVID SUDARMAWAN
NIM. 16610085

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 4 Desember 2020

Penguji Utama	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	
Ketua Penguji	:	Dewi Ismiarti, M.Si	…………
Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	…………
Anggota	:	Juhari M.Si	…………

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN PENULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: David Sudarmawan
NIM	: 16610085
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring Komutatif dengan Kesatuan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia meneriman sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Maret 2021

Yang membuat pernyataan,

David Sudarmawan

NIM. 16610085

MOTO

"Usaha akan selalu berbanding lurus dengan hasil apabila dilakukan dengan niat dan ketulusan hati serta didampingi dengan pendekatan rohani"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Sudarmanto dan ibunda Sriamah. Terimakasih atas perjuangan tanpa lelah, ketulusan do'a, kasih saying, dan penyemangat setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi lebih baik.

Kakak Sudarsri Lestari serta suaminya, Terimakasih atas do'a yang selalu dipanjatkan kepada penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala Puji bagi Allah Swt. Atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku pembimbing I penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.
5. Juhari, M.Si, selaku pembimbing II penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.

6. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd selaku penguji utama dalam ujian skripsi penulis. Atas bimbingan dan arahannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.
7. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku ketua penguji dalam ujian skripsi penulis. Atas bimbingan dan arahannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan beguna. Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua. *Amiin Ya rabbal 'alamiin.*

Alhamdulillahirabbil Alamin

Malang, 19 Maret 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Sudarmawan, David. 2020. ***Automorfisma Graf Pembagi Nol Total dari Ring Komutatif dengan Kesatuan***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

Kata kunci: automorfisma, graf pembagi nol total, fungsi.

Penelitian ini membahas tentang automorfisma graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{4n}$dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pola graf pembagi nol total dari bilangan bulat modulo 4 dan rumus umum banyaknya automorfismanya. Terdapat beberapa langkah untuk mendapatkan pola umum tersebut. Pertama, mencari himpunan pembagi nol total dengan menggunakan tabel caylay dari masing-masing ring. Selanjutnya, menggambarkan grafnya. Kemudian, menentukan fungsi bijektif dari himpunan $V(Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$ ke dirinya sendiri, dilanjutkan dengan menentukan automorfisma dari graf tersebut. Langkah terakhir, memunculkan dugaan mengenai banyaknya automorfisma dari graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{4n}$, kemudian dugaan tersebut akan dibuktikan secara umum. Dalam penelitian ini diperoleh hasil bahwa graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$ membentuk gabungan antara graf bintang dan komplemen graf komplit order 2 memiliki rumus umumnya yaitu $2 \times (2n-2)!$.

ABSTRACT

Sudarmawan, David. 2020. ***Automorphism of Total Zero Divisor Graph of Commutative Ring with Unity***. Thesis. Department of Mathematics, Sience and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: automorphism, total zero divider graph, function.

This study discusses the automorphism of the total zero divisor graph of the commutative ring with $\mathbb{Z}_4$ unity elements with a value of n is prime and $n \geq 3$. This study aims to determine the total zero divisor graph pattern of integer modula 4. There are several steps to obtain this general pattern. First, determine the set of the total zero divisor graph using the caylay table of each ring. Next, draw the graph. Then, determine the bijective function of the set $V(Z\Gamma\ (\mathbb{Z}_{4n})$ to itself, then determine the automorphism of the graph. The final step is to generate an assumption about the number of automorphisms from the total zero divisor graph of commutative ring with $\mathbb{Z}_{4n}$ unity elements, then the assumption will be generally proven. This research shows that the the zero divisor total graph of the commutative ring with the unit element $\mathbb{Z}_{4n}$ with an value of n is prime and $n \geq 3$ form between star graph and complement complete order 2 has a general number is $2 \times (2n-2)!$.

مستخلص البحث

سودارماوان ، دافيد. 2020. الشكل التلقائي للرسم البياني الإجمالي للمقسم الصفري للحلقة التبادلية مع الوحدة. البحث العلمي. قسم الرياضيات ، كلية العلوم و التكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة الأولى: إيفاواتي أليساه الماجستير ؛ المشرف الثاني: جوهري الماجستير.

الكلمات المفتاحية: الشكل التلقائي ، الرسم البياني الإجمالي للمقسم الصفري ، الوظيفة .

ناقشت هذه الدراسة حول الشكل التلقائي للرسم البياني الإجمالي للمقسم الصفري للحلقة التبادلية مع عنصر الوحدة $\mathbb{Z}_{4n}$ مع قيمة n من الأعداد الأولية و $n \geq 3$. تهدف هذه الدراسة إلى تحديد نمط الرسم البياني الإجمالي للمقسم الصفري لمقياس 4 و الصيغة العامة لعدد الأشكال التلقائية. هناك عدة خطوات للحصول على هذا النمط العام. أولاً ، أوجد إجمالي صفر قاسم مجموعة باستخدام جدول كيلي ($Caylay$) لكل حلقة. بعد ذلك ، ارسم الرسم البياني. ثم ، حدد الوظيفة الحكيمة للمجموعة $V(Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$ لنفسها ، متبوعة بتحديد التشكل التلقائي للرسم البياني. في هذه الدراسة ، أوضحت النتائج أن الرسم البياني الإجمالي للمقسم الصفري للحلقة التبادلية مع الوحدة مع عنصر الوحدة $\mathbb{Z}_{4n}$ مع قيمة n من الأعداد الأولية و $n \geq 3$ يشكل مزيجًا من الرسم البياني النجمي و الرسم البياني التكميلي من رتبتين مع الصيغة العامة لعدد الأشكال التلقائية للرسم البياني هي $2 \times (2n-2)!$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Jika uv merupakan sisi dari G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (Chartand, dkk, 2016:3).

Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected)* jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaliknya jika ada dua titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009:56).

Kajian teori graf dalam al-Qur'an dapat digambarkan berupa silaturrahmi atau hubungan. Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an Surat an-Nisa ayat 36 yang berbunyi :

وَاعْبُدُوا اللهَ وَلَا تُشْرِكُوْا بِهٖ شَيْـًٔـا ۖ وَّبِالْوَالِدَيْنِ اِحْسَانًا وَّبِذِى الْقُرْبٰى وَالْيَتٰمٰى وَ الْمَسٰكِيْنِ
وَالْجَـارِ ذِى الْقُرْبٰى وَالْجَـارِ الْجُـنُبِ وَالصَّاحِبِ بِالْجَـنْۢبِ وَابْنِ السَّبِيْلِ ۙ وَمَا مَلَـكَتْ اَيْمَانُكُمْ ۗ اِنَّ
اللهَ لَا يُحِبُّ مَنْ كَانَ مُخْتَالًا فَخُوْرَا

"*Dan sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatu apapun. Dan berbuat-baiklah kepada kedua orang tua, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga dekat dan tetangga jauh, teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahaya yang kamu miliki. Sungguh, Allah tidak menyukai orang yang sombong dan membanggakan diri.*"

Al-Qur'an surat an-Nisa ayat 36 menjelaskan bahwa Allah SWT memerintahkan setiap manusia agar senantiasa taat kepada-Nya dan berbuat baik kepada sesama manusia karena sesungguhnya perbuatan yang baik dapat mempererat tali silaturrahim antar umat manusia.

Penelitian tentang graf yang diperoleh dari ring telah mengalihkan perhatian para peneliti untuk mengkaji lebih dalam misteri pada teori graf. Ring adalah struktur yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan $(R,*,\cdot)$ yaitu operasi pertama dilambangkan dengan $*$ dan operasi kedua dilambangkan dengan $\cdot$. Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan R mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua yaitu operasi $\cdot$. Terdapat beberapa topik penelitian dalam graf yang menarik untuk dikaji diantaranya penelitian tentang automorfisma graf.

Automorfisma dari suatu graf G adalah suatu permutasi ϕ dari himpunan titik-titik dari G yang bersifat mengawetkan ketetanggaan (Suryoto, 2001). Dalam kata lain, automorfisma adalah suatu permutasi ϕ yang memetakan titik pada suatu graf menjadi titik, serta memetakan sisi menjadi sisi kembali.

Penelitian mengenai graf dan ring sangat menarik untuk dikaji lebih dalam, khususnya tentang automorfisma dari graf. Oleh karena itu, kami akan melakukan penelitian terkait dengan hal tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana pola graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan?
2. Bagaimana rumus umum banyaknya automorfisma graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini memiliki tujuan untuk mengetahui:

1. Pola graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan.
2. Rumus umum banyaknya automorfisma graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan.

1.4 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat kepada pembaca untuk mengetahui pola graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan dan mengetahui rumus umum banyaknya automorfisma graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penilitian ini yaitu penulis mengambil ring yaitu ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian berupa studi literatur *(literature study)*. Studi literatur merupakan suatu metode penelitian yang berkenaan dengan pengumpulan data pustaka, membaca, mencatat, serta mengolah bahan penelitian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mencari banyaknya automorfisma graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan adalah sebagai berikut:

1. Mencari unsur pembagi nol dan menggambarkan pola graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$.
2. Tabulasi hasil gambar pola graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ terhadap banyaknya titik berderajat satu dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$, banyaknya titik berderajat $(2n-2)$ dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$, banyaknya titik berderajat nol dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$, dan banyaknya anggota titik dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$. Menarik kesimpulan dari tabulasi hasil gambar pola graf graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$.
3. Mencari banyaknya automorfisma graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$. Karena banyaknya bentuk automorfisma graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$, maka peneliti menggunakan program *sageMath* sehingga dapat menjamin akurasi dan ketelitiannya. Flowchart dan list program tertera pada lampiran.
4. Tabulasi hasil gambar pola graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ terhadap banyaknya automorfisma pada $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$, dan pola banyaknya automorfisma pada $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$. Menarik kesimpulan dari hasil tabulasi mencari rumus perumuman untuk banyaknya automorfisma graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan kesatuan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, peneliti membagi tulisan ini ke dalam empat bab. Sehingga penulisan penelitian ini sistematis dan mudah dipahami oleh pembaca. Masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab I ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab II ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat graf, ring, graf pembagi nol ring komutatif dengan unsur kesatuan, graf pembagi nol total ring komutatif dengan unsur kesatuan, automorfisma graf, dan kajian islam tentang silaturrahim.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab III ini dipaparkan tentang pola graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$, dan automorfisma graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab IV ini dikemukakan kesimpulan akhir dari penelitian dan beberapa saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

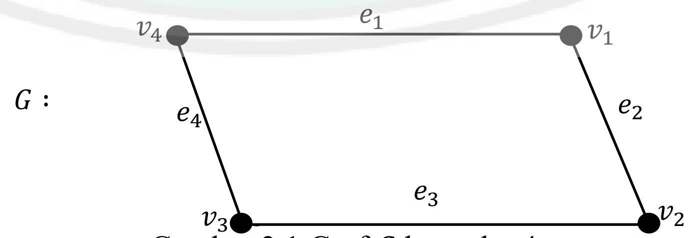
Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Graf menggambarkan struktur tersebut dalam beberapa obyek yang dinyatakan dengan noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dan titik-titik berada di G yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan silambangkan $q(G)$, jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *orde* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh



Gambar 2.1 Graf G berorder 4

Pada Gambar 2.1 Graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$,yaitu

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{e_1 = (v_1v_4), e_2 = (v_1v_2), e_3 = (v_2v_3), e_4 = (v_3v_4)\}$

Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$. Graf G mempunyai 4 sisi sehingga size G adalah $q = 4$.

Definisi 2.2

Graf trivial adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986:6).

Contoh

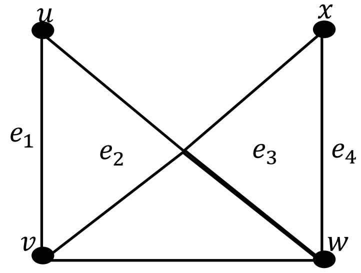
Gambar 2.2 Graf Trivial dan Nontrivial

Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf trivial karena G_1hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

Definisi 2.3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, u dan e serta v dan e disebut terkait langsung *(incident)*. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh



Gambar 2.3 Graf G

Dari Gambar 2.3 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung).

2.2 Ring

Definisi 2.4

Ring adalah struktur yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan $(R,*,\cdot)$ yaitu operasi pertama dilambangkan dengan $*$ dan operasi kedua dilambangkan dengan $\cdot$ yang keduanya memenuhi aksioma berikut :

i. $(R,*)$ adalah grup abelian.

ii. Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di R.

iii. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap $*$ di R, baik distributif kiri maupun distributif kanan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:313).

Contoh

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring, dengan $\mathbb{Z}$ adalah bilangan bulat, $+$ adalah operasi penjumlahan, dan $\times$ adalah operasi perkalian. Karena $(\mathbb{Z},+,\times)$ memenuhi :

i. $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup abelian.

ii. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$.

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$.

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c), \forall a,b,c\in \mathbb{Z}.$$

$$a\times (b+c)=(a\times b)+(a\times c), \forall a,b,c\in \mathbb{Z}.$$

Definisi 2.5

Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif jika dan hanya jika operasi kedua $(\cdot)$ bersifat komutatif di R (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif, karena untuk setiap $a,b\in\mathbb{Z}$, maka $a\times b=b\times a$, yang berarti operasi kedua $(\times)$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$.

Jadi, $(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif.

Definisi 2.6

Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika R mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua $(\cdot)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan, karena ada $1\in\mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $a\in\mathbb{Z}$, maka $a\times 1=1\times a=a$, yang berarti terdapat unsur identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi kedua $(\times)$.

Jadi, $(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan.

Definisi 2.7

Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan R mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua yaitu operasi $\cdot$. Dengan kata lain R merupakan ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan, sehingga $(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Definisi 2.8

Suatu unsur a dari ring komutatif dengan unsur kesatuan R disebut pembagi nol apabila terdapat unsur tak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $Z(R)$ (Joshi,K.D.,1989).

Contoh

Misalkan $(\mathbb{Z}_6,+,\times)$ adalah ring, dengan $\mathbb{Z}_6$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 6. Himpunan anggota dari ring $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$

$\bar{2}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{3}$ sehingga $\bar{2}\times\bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$

$\bar{3}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{2}$ sehingga $\bar{3}\times\bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$

$\bar{4}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{3}$ sehingga $\bar{4}\times\bar{3} = \overline{12} = \bar{0}$

Jadi, pembagi nol dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{2},\bar{3}$ dan $\bar{4}$.

2.3 Graf Pembagi nol total Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Definisi 2.9

Graf pembagi nol total dari R dilambangkan dengan $Z\Gamma(R)$ adalah graf dengan himpunan titiknya adalah semua elemen dari $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ dan untuk $\forall\, x, y \in Z(R)^*$ dimana titik x dan titik y dihubungkan oleh sebuah sisi jika dan hanya jika $xy = 0$ dan $x + y \in Z(R)$.(Duric dan Jevdenic, 2019)

Contoh

Ring bilangan bulat modulo 8 ($\mathbb{Z}_8$) dengan anggotanya adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dapat membentuk graf pembagi nol total. Dua anggota di ring $\mathbb{Z}_8$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian modulo dapat disajikan dalam Tabel Cayley berikut :

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring $\mathbb{Z}_8$

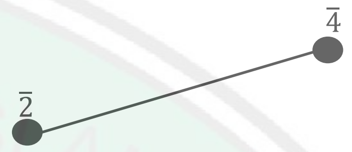
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	1	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	1	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	1

Berdasarkan Tabel 2.1, dapat diketahui bahwa pada ring $\mathbb{Z}_8$ memiliki 2 titik yaitu $\{\bar{2}, \bar{4}\}$ karena terdapat :

$\bar{2}$ yang memenuhi $\bar{2} \times \bar{4} = \bar{8} = \bar{0}$ dan $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} \in Z(\mathbb{Z}_8)*$.

$\bar{4}$ yang memenuhi $\bar{4} \times \bar{2} = \bar{8} = \bar{0}$ dan $\bar{4} + \bar{2} = \bar{6} \in Z(\mathbb{Z}_8)*$.

Sehingga dapat membentuk graf sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_8$

2.4 Automorfisma Graf

Definisi 2.10

Misalkan g adalah fungsi dari B ke C. Fungsi g disebut fungsi $1-1$ jika untuk setiap $y, z \in B$ dengan $g(y) = g(z)$, maka $y = z$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi g adalah $1-1$ jika untuk setiap $y, z \in B$ dengan $y \neq z$, maka $g(y) \neq g(z)$. Fungsi $1-1$ sering juga disebut dengan fungsi injektif.

Definisi 2.11

Fungsi g disebut fungsi onto jika $g(B) = C$. Jadi, $g: B \rightarrow C$ disebut fungsi onto jika untuk setiap $z \in C$ maka ada $y \in B$ sehingga $g(y) = z$. Fungsi onto sering disebut juga fungsi surjektif atau fungsi pada.

Definisi 2.12

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan sujektif disebut fungsi bijektif.(Bartle dan Donald, 2000 : 8)

Definisi 2.13

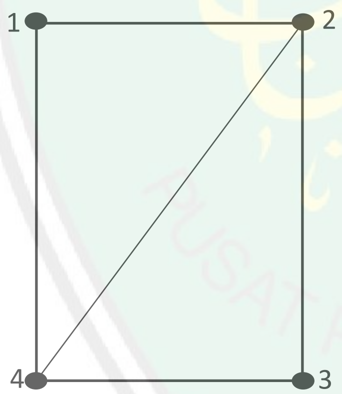
Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu ϕ antara $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ sedemikian hingga misal $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $\big(\phi(u)\phi(v)\big) \in E(G_2)$. Jika G_1 isomorfik terhadap G_2 dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$. (Tri, 2011 : 2)

Definisi 2.14

Automorfisma pada suatu graf G adalah isomorfisme dari G ke dirinya sendiri. Maka automorfisma pada graf G adalah suatu permutasi ϕ yang mengawetkan keterhubungan langsung.

Contoh

Misal diberikan graf H seperti dibawah ini :



Gambar 2.6 Graf H

Automorfisma yang mungkin terjadi dari graf di samping adalah :

1. $\alpha_1 = (1)(2)(3)(4)$
2. $\alpha_2 = (1)\ (3)\ (2\ 4)$
3. $\alpha_3 = (1\ 3)\ (2)\ (4)$
4. $\alpha_4 = (1\ 3)\ (2\ 4)$

Definisi 2.15

Himpunan automorfisma dari graf H membentuk suatu grup (terhadap operasi komposisi), dinamakan grup automorfisma dimana notasi $Aut(H)$.(Chartrand dkk, 2016 : 217)

Teorema 2.1

Abdussakir, dkk (2018, hal 4) Grup automorfisma dari graf bintang $K_{1,n-1}$ merupakan grup simetri S_{n-1}.

Bukti :

Pada graf bintang $K_{1,n-1}$ satu titik merupakan titik pusat dan $n-1$ titik merupakan titik berderajat satu yang terhubung langsung dengan titik pusat. Dengan demikian, banyaknya automorfisma pada graf bintang $K_{1,n-1}$ adalah $(n-1)!$ yang merupakan banyaknya permutasi dari titik-titik yang berderajat 1. Jadi grup automorfisma pada graf bintang adalah grup simetri S_{n-1} dengan anggota sebanyak $(n-1)!$.

2.6 Kajian Islam tentang Silaturrahim

Silaturrahim berasal dari kata shilah yang artinya hubungan dan rahim artinya kerabat. Rahim sendiri juga berasal dari ar-Rahman yang berarti kasih saying, sehingga sering disebut dengan berkasih saying atau menjalin kekerabatan pada istilah silaturrahim.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an Surat an-Nisa ayat 36 yang berbunyi :

وَاعْبُدُوا اللهَ وَلَا تُشْرِكُوْا بِهٖ شَيْـًٔـا ۖ وَّبِالْوَالِدَيْنِ اِحْسَانًا وَّبِذِى الْقُرْبٰى وَالْيَتٰمٰى وَ الْمَسٰكِيْنِ
وَالْجَارِ ذِى الْقُرْبٰى وَالْجَارِ الْجُنُبِ وَالصَّاحِبِ بِالْجَنْۢبِ وَابْنِ السَّبِيْلِ ۙ وَمَا مَلَكَتْ اَيْمَانُكُمْ ۗ اِنَّ
اللهَ لَا يُحِبُّ مَنْ كَانَ مُخْتَالًا فَخُوْرَا

Artinya: *"Dan sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatu apapun. Dan berbuat-baiklah kepada kedua orang tua, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga dekat dan tetangga jauh, teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahaya yang kamu miliki. Sungguh, Allah tidak menyukai orang yang sombong dan membanggakan diri."*

Al-Qur'an surat an-Nisa ayat 36 menjelaskan bahwa Allah SWT memerintahkan setiap umat manusia agar senantiasa taat kepada-Nya dan berbuat baik kepada sesama manusia karena sesungguhnya perbuatan baik adalah salah satu cara untuk mempererat tali silaturrahim antar umat manusia.

Rasulullah SAW bersabda bahwa "Engkau menyembah Allah dan tidak menyekutukan-Nya dengan sesuatu apapun, mendirikan sholat, menunaikan zakat, dan menyambung silaturrahim".(HR Bukhari).

Menyambung silaturrahim menurut hadits diatas juga termasuk ke dalam bagian dari ajaran islam. Untuk itu Rasulullah memerintahkan agar umat islam menjaga dan menyambung kekerabatan khususnya bagi sesama muslim.

Perintah silaturrahim juga terdapat dalam al-Qur'an surat an-Nisa ayat 1 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُم مِّن نَّفْسٍ وَٰحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا وَنِسَآءً ۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِى تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلْأَرْحَامَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيْكُمْ رَقِيبًا

"*Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan kalian yang telah menciptakan kalian dari seorang diri, dan darinya Allah menciptakan istrinya; dan dari keduanya Allah memperkembangbiakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan peliharalah hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kalian".*

Ayat tersebut menjelaskan tentang perintah Allah kepada umatnya agar senantiasa taat kepada-Nya. Selain perintah taat kepada Allah, dalam ayat tersebut juga ditegaskan agar umat manusia senantiasa menyambung silaturrahim dan tidak memutuskannya. Hubungan antara manusia dengan Allah juga dapat digambarkan dalam bentuk graf.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pola Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{4n}$

3.1.1 Pola Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{12}$

Anggota dari ring $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{11}\}$. Dua anggota di ring $\mathbb{Z}_{12}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley Ring $\mathbb{Z}_{12}$

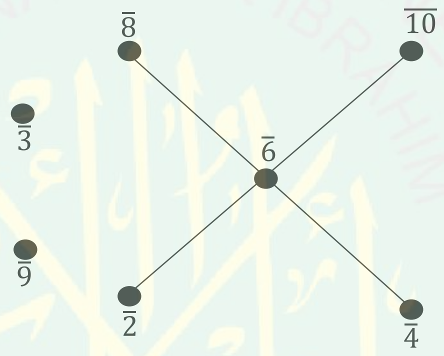
·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.1, dapat diketahui $Z(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \bar{3}, \bar{9}\}$ dan $Z(\mathbb{Z}_{12})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \bar{3}, \bar{9}\}$. Selanjutnya dibentuk graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{12}$ dengan himpunan titiknya adalah $Z(\mathbb{Z}_{12})^*$. Untuk menentukan keterhubungan pada graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{12}$ dibentuk tabel penjumlahan pada $Z(\mathbb{Z}_{12})^*$ sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Operasi Penjumlahan $Z(\mathbb{Z}_{12})^*$

+	2	3	4	6	8	9	10
2	4	5	6	8	10	11	0
3	5	6	7	9	11	0	1
4	6	7	8	10	0	1	2
6	8	9	10	0	2	3	4
8	10	11	0	2	4	5	6
9	11	0	1	3	5	6	7
10	0	1	2	4	6	7	8

Berdasarkan perhitungan pada tabel 3.1 dan tabel 3.2, maka dapat digambarkan graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{12}$

3.1.2 Pola Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{20}$

Anggota dari ring $\mathbb{Z}_{20} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{19}\}$. Dua anggota di ring $\mathbb{Z}_{20}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley berikut:

Tabel 3.3 Tabel Caylay Ring $\mathbb{Z}_{20}$

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	1	4	7	10	13	16	19	2	5	8	11	14	17
4	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16
5	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15

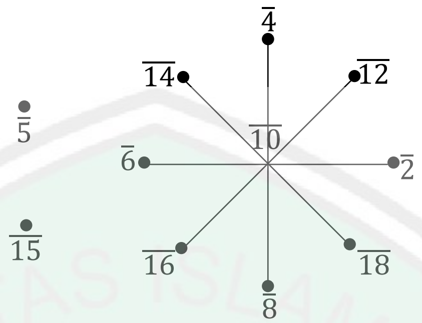
6	0	6	12	18	4	10	16	2	8	14	0	6	12	18	4	10	16	2	8	14
7	0	7	14	1	8	15	2	9	16	3	10	17	4	11	18	5	12	19	6	13
8	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12
9	0	9	18	7	16	5	14	3	12	1	10	19	8	17	6	15	4	13	2	11
10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10
11	0	11	2	13	4	15	6	17	8	19	10	1	12	3	14	5	16	7	18	9
12	0	12	4	16	8	0	12	4	16	8	0	12	4	16	8	0	12	4	16	8
13	0	13	6	19	12	5	18	11	4	17	10	3	16	9	2	15	8	1	14	7
14	0	14	8	2	16	10	4	18	12	6	0	14	8	2	16	10	4	18	12	6
15	0	15	10	5	0	15	10	5	0	15	10	5	0	15	10	5	0	15	10	5
16	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4
17	0	17	14	11	8	5	2	19	16	13	10	7	4	1	18	15	12	9	6	3
18	0	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	18	16	14	12	10	8	6	4	2
19	0	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.3, dapat diketahui $Z(\mathbb{Z}_{20}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{5}, \overline{15}\}$ dan $Z(\mathbb{Z}_{20})^* = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{5}, \overline{15}\}$. Selanjutnya dibentuk graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{20}$ dengan himpunan titiknya adalah $Z(\mathbb{Z}_{20})^*$. Untuk menentukan keterhubungan pada graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{20}$ dibentuk tabel penjumlahan pada $Z(\mathbb{Z}_{20})^*$ sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel Operasi Penjumlahan $Z(\mathbb{Z}_{20})^*$

+	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18
2	4	6	7	8	10	12	14	16	17	18	0
4	6	8	9	10	12	14	16	18	19	0	2
5	7	9	10	11	13	15	17	19	0	1	3
6	8	10	11	12	14	16	18	0	1	2	4
8	10	12	13	14	16	18	0	2	3	4	6
10	12	14	15	16	18	0	2	4	5	6	8
12	14	16	17	18	0	2	4	6	7	8	10
14	16	18	19	0	2	4	6	8	9	10	12
15	17	19	0	1	3	5	7	9	10	11	13
16	18	0	1	2	4	6	8	10	11	12	14
18	0	2	3	4	6	8	10	12	13	14	16

Berdasarkan perhitungan pada tabel 3.3 dan tabel 3.4, maka dapat digambarkan graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{20}$ sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{20}$

3.1.3 Pola Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{28}$

Anggota dari ring $\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{27}\}$. Dua anggota di ring $\mathbb{Z}_{28}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley pada Lampiran II.

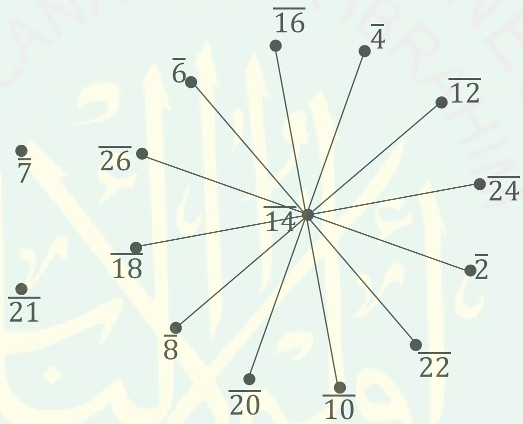
Berdasarkan Tabel Caylay dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ dapat diketahui $Z(\mathbb{Z}_{28}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \bar{7}, \overline{21}\}$ dan $Z(\mathbb{Z}_{28})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \bar{7}, \overline{21}\}$. Selanjutnya dibentuk graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{28}$ dengan himpunan titiknya adalah $Z(\mathbb{Z}_{28})^*$. Untuk menentukan keterhubungan pada graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{28}$ dibentuk tabel penjumlahan pada $Z(\mathbb{Z}_{28})^*$ sebagai berikut:

Tabel 3.5 Tabel Operasi Penjumlahan $Z(\mathbb{Z}_{28})^*$

+	2	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24	26
2	4	6	8	9	10	12	14	16	18	20	22	23	24	26	0
4	6	8	10	11	12	14	16	18	20	22	24	25	26	0	2
6	8	10	12	13	14	16	18	20	22	24	26	27	0	2	4
7	9	11	13	14	15	17	19	21	23	25	27	0	1	3	5
8	10	12	14	15	16	18	20	22	24	26	0	1	2	4	6

10	12	14	16	17	18	20	22	24	26	0	2	3	4	6	8
12	14	16	18	19	20	22	24	26	0	2	4	5	6	8	10
14	16	18	20	21	22	24	26	0	2	4	6	7	8	10	12
16	18	20	22	23	24	26	0	2	4	6	8	9	10	12	14
18	20	22	24	25	26	0	2	4	6	8	10	11	12	14	16
20	22	24	26	27	0	2	4	6	8	10	12	13	14	16	18
21	23	25	27	0	1	3	5	7	9	11	13	14	15	17	19
22	24	26	0	1	2	4	6	8	10	12	14	15	16	18	20
24	26	0	2	3	4	6	8	10	12	14	16	17	18	20	22
26	0	2	4	5	6	8	10	12	14	16	18	19	20	22	24

Berdasarkan perhitungan pada tabel cayley dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ dan tabel 3.5, maka dapat digambarkan graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{28}$ sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{28}$

3.1.4 Pola Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{44}$

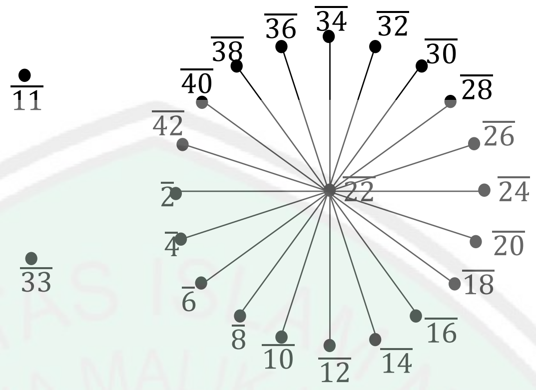
Anggota dari ring $\mathbb{Z}_{44} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{43}\}$. Dua anggota di ring $\mathbb{Z}_{44}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley pada Lampiran II.

Berdasarkan Tabel Caylay dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ dapat diketahui $Z(\mathbb{Z}_{44}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}, \overline{11}, \overline{33}\}$ dan $(\mathbb{Z}_{44})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}, \overline{11}, \overline{33}\}$. Selanjutnya dibentuk graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{44}$ dengan himpunan titiknya adalah $Z(\mathbb{Z}_{44})^*$. Untuk menentukan keterhubungan pada graf pembagi nol total di $\mathbb{Z}_{44}$ dibentuk tabel penjumlahan pada $Z(\mathbb{Z}_{44})^*$ sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Operasi Penjumlahan $Z(\mathbb{Z}_{44})^*$

+	2	4	6	8	10	11	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	33	34	36	38	40	42
2	4	6	8	10	12	13	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	35	36	38	40	42	0
4	6	8	10	12	14	15	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	37	38	40	42	0	2
6	8	10	12	14	16	17	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	39	40	42	0	2	4
8	10	12	14	16	18	19	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	41	42	0	2	4	6
10	12	14	16	18	20	21	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	43	0	2	4	6	8
11	13	15	17	19	21	22	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	0	1	3	5	7	9
12	14	16	18	20	22	23	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	0	1	2	4	6	8	10
14	16	18	20	22	24	25	26	28	30	32	34	36	38	40	42	0	2	3	4	6	8	10	12
16	18	20	22	24	26	27	28	30	32	34	36	38	40	42	0	2	4	5	6	8	10	12	14
18	20	22	24	26	28	29	30	32	34	36	38	40	42	0	2	4	6	7	8	10	12	14	16
20	22	24	26	28	30	31	32	34	36	38	40	42	0	2	4	6	8	9	10	12	14	16	18
22	24	26	28	30	32	33	34	36	38	40	42	0	2	4	6	8	10	11	12	14	16	18	20
24	26	28	30	32	34	35	36	38	40	42	0	2	4	6	8	10	12	13	14	16	18	20	22
26	28	30	32	34	36	37	38	40	42	0	2	4	6	8	10	12	14	15	16	18	20	22	24
28	30	32	34	36	38	39	40	42	0	2	4	6	8	10	12	14	16	17	18	20	22	24	26
30	32	34	36	38	40	41	42	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	19	20	22	24	26	28
32	34	36	38	40	42	43	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24	26	28	30
33	35	37	39	41	43	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	22	23	25	27	29	31
34	36	38	40	42	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	23	24	26	28	30	32
36	38	40	42	0	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25	26	28	30	32	34
38	40	42	0	2	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	27	28	30	32	34	36
40	42	0	2	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	29	30	32	34	36	38
42	0	2	4	6	8	9	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	31	32	34	36	38	40

Berdasarkan perhitungan pada tabel cayley dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ dan tabel 3.6, maka dapat digambarkan graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{44}$ sebagai berikut:

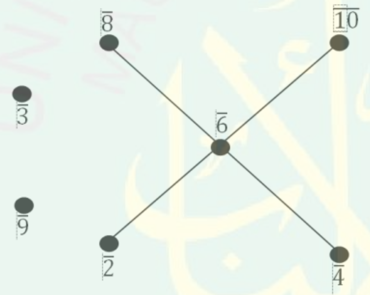
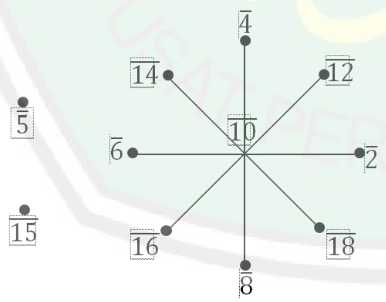


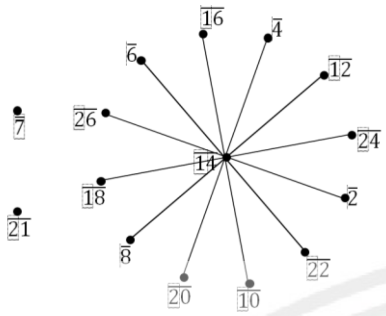
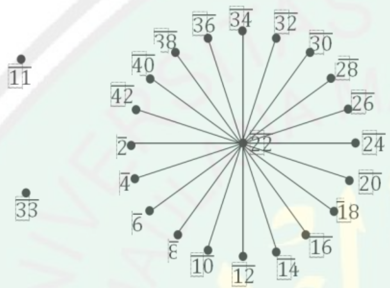
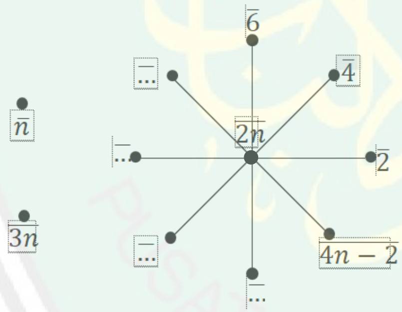
Gambar 3.4 Graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{44}$

3.2 Tabulasi Pola Graf Pembagi Nol Total dari Ring $\mathbb{Z}_{4n}$

Berdasarkan pembahasan 3.1, maka graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$ dapat disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.7 Pola graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$

n	Graf Pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{4n}$	Banyaknya Titik Berderajat Satu dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$	Banyaknya Titik Berderajat $(2n-2)$ dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$	Banyaknya Titik Berderajat nol dari $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$	Banyaknya Anggota titik $V(Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n}))$
3		4	1	2	7
5		8	1	2	11

7		12	1	2	15
11		20	1	2	23
n		2n-2	1	2	2n+1

Berdasarkan tabel 3.3 maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Proposisi 3.1

Himpunan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots., \overline{4n-2}, \bar{n}, \overline{3n}\}$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $\overline{2k}$ pembagi nol .

Karena memenuhi $\overline{2k} \times \overline{2n} = \overline{4kn} = \bar{0}$, maka $\overline{2k}$ adalah pembagi nol.

Akan dibuktikan bahwa $\bar{n}$ pembagi nol.

Karena memenuhi $\bar{n} \times \bar{4} = \overline{4n} = \bar{0}$, maka $\bar{n}$ adalah pembagi nol.

Akan dibuktikan bahwa $\overline{3n}$ pembagi nol.

Karena memenuhi $\overline{3n} \times \bar{4} = \overline{12n} = \bar{0}$, maka $\overline{3n}$ adalah pembagi nol.

Maka dengan demikian terbukti bahwa himpunan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots., \overline{4n-2}, \bar{n}, \overline{3n}\}$.

Proposisi 3.2

Himpunan titik graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\overline{2}, \overline{4}, \ldots, \overline{4n-2}, \overline{n}, \overline{3n}\}$. Derajat dari titik $\overline{2n}$ adalah $2n-2$. Derajat dari titik $\overline{2}, \overline{4}, \ldots, \overline{4n-2}$ kecuali titik $\overline{2n}$ adalah satu. Sedangkan derajat dari titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$ adalah nol.

Bukti:

Berdasarkan proposisi 3.1 dan definisi 2.9, sehingga diketahui bahwa himpunan titik graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\overline{2}, \overline{4}, \ldots, \overline{4n-2}, \overline{n}, \overline{3n}\}$. Titik $\overline{2n}$ terhubung langsung dengan semua titik kecuali titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$. Jadi, terbukti bahwa titik $\overline{2n}$ memiliki derajat $2n-2$. Titik $\overline{2k}$ kecuali titik $\overline{2n}$ hanya terhubung langsung dengan titik $\overline{2n}$. Jadi, titik $\overline{2k}$ kecuali titik $\overline{2n}$ berderajat satu. Sedangkan titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$ tidak terhubung dengan semua titik dan keduanya tidak terhubung langsung. Jadi, titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$ berderajat nol. Sehingga dengan demikian terbukti bahwa himpunan titik graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\overline{2}, \overline{4}, \ldots, \overline{4n-2}, \overline{n}, \overline{3n}\}$. Derajat dari titik $\overline{2n}$ adalah $2n-2$. Derajat dari titik $\overline{2}, \overline{4}, \ldots, \overline{4n-2}$ kecuali titik $\overline{2n}$ adalah satu. Sedangkan derajat dari titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$ adalah nol.

Proposisi 3.3

Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ membentuk gabungan graf bintang dan komplemen graf komplit order 2.

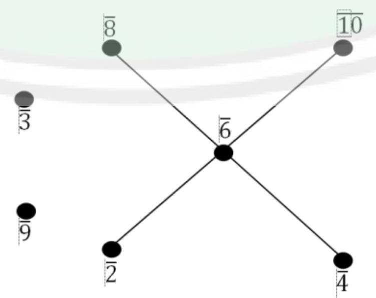
Bukti:

Berdasarkan proposisi 3.2 dapat diketahui bahwa anggota himpunan titik pada graf pembagi nol total pada ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\overline{2}, \overline{4}, \dots, \overline{4n-2}, \overline{n}, \overline{3n}\}$. Dengan titik $\overline{2n}$ terhubung langsung dengan titik $\overline{2}, \overline{4}, \dots, \overline{4n-2}$ kecuali titik $\overline{2n}$. Maka titik-titik tersebut membentuk graf bintang. Sedangkan titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$ tidak terhubung langsung dengan titik yang lain. Maka titik $\overline{n}$ dan $\overline{3n}$ membentuk komplemen graf komplit order 2. Sehingga dengan demikian terbukti bahwa graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ membentuk gabungan graf bintang dan komplemen graf komplit order 2.

3.3 Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{4n}$

3.3.1 Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{12}$

Berdasarkan pembahasan 3.1.1, graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

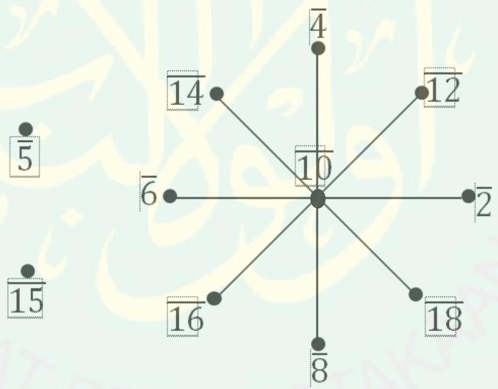


Gambar 3.5 Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12}$

Himpunan titik pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12}$ $(V(\mathbb{Z}_{12}))$ adalah $= \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \bar{3}, \bar{9}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $V(\mathbb{Z}_{12})$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V(\mathbb{Z}_{12}) \rightarrow V(\mathbb{Z}_{12})$. Karena graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12}$ memiliki 7 titik. Maka banyaknya permutasi yang harus diuji adalah sebanyak 7!. Untuk mengetahui banyaknya automorfsima dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12}$ digunakan program *sageMath* sehingga diperoleh banyaknya automorfisma yang mungkin terjadi pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12}$ sebanyak 48 permutasi.

3.3.2 Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{20}$

Berdasarkan pembahasan 3.1.2, graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{20}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

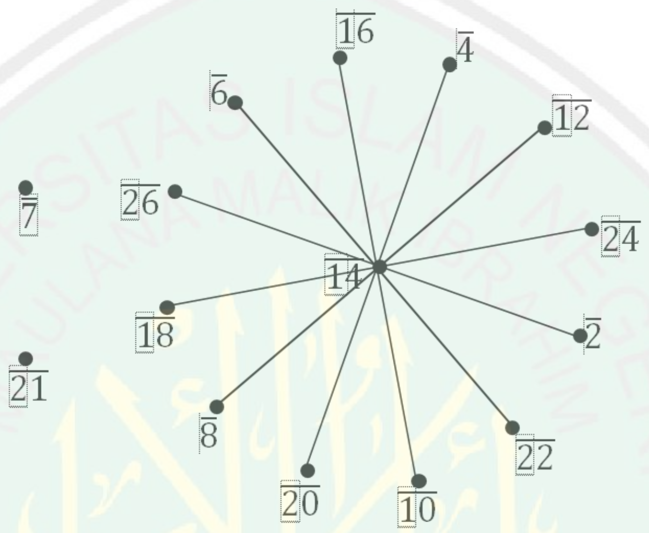


Gambar 3.6 Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{20}$

Himpunan titik pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{20}$ $(V(\mathbb{Z}_{20}))$ adalah $= \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \bar{5}, \overline{15}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $V(\mathbb{Z}_{20})$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V(\mathbb{Z}_{20}) \rightarrow V(\mathbb{Z}_{20})$. Karena graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{20}$ memiliki 11 titik. Maka banyaknya permutasi yang harus diuji adalah sebanyak 11!. Untuk mengetahui banyaknya automorfsima dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{20}$ digunakan program *sageMath* sehingga diperoleh banyaknya automorfisma yang mungkin terjadi pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{20}$ sebanyak 80.640 permutasi.

3.3.3 Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{28}$

Berdasarkan pembahasan 3.1.3, graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

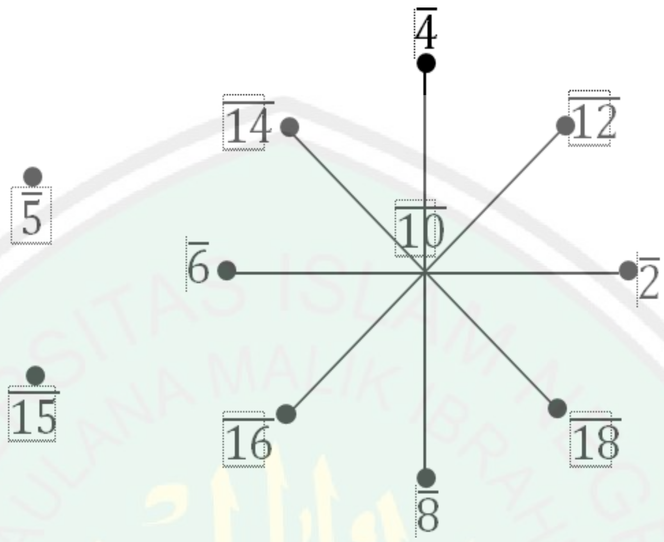


Gambar 3.7 Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{28}$

Himpunan titik pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ $(V(\mathbb{Z}_{28}))$ adalah $= \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{7}, \overline{21}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $V(\mathbb{Z}_{28})$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V(\mathbb{Z}_{28}) \to V(\mathbb{Z}_{28})$. Karena graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ memiliki 15 titik. Maka banyaknya permutasi yang harus diuji adalah sebanyak 15!. Untuk mengetahui banyaknya automorfsima dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ digunakan program *sageMath* sehingga diperoleh banyaknya automorfisma yang mungkin terjadi pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{28}$ sebanyak 958.003.200 permutasi.

3.3.4 Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{44}$

Berdasarkan pembahasan 3.1.4, graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{44}$

Himpunan titik pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ $(V(\mathbb{Z}_{44}))$ adalah $=\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8},\overline{10},\overline{12},\overline{14},\overline{16},\overline{18},\overline{20},\overline{22},\overline{24},\overline{26},\overline{28},\overline{30},\overline{32},\overline{34},\overline{36},\overline{38},\overline{40},\overline{42},\overline{11},\overline{33}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $V(\mathbb{Z}_{44})$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V(\mathbb{Z}_{44}) \to V(\mathbb{Z}_{44})$. Karena graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ memiliki 23 titik. Maka banyaknya permutasi yang harus diuji adalah sebanyak 23!. Untuk mengetahui banyaknya automorfsima dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ digunakan program *sageMath* sehingga diperoleh banyaknya automorfisma yang mungkin terjadi pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{44}$ sebanyak $4.865.804 \times 10^{18}$ permutasi.

3.4 Tabulasi Automorfisma Graf Pembagi nol total dari Ring $\mathbb{Z}_{4n}$

Berdasarkan pembahasan automorfisma pada masing-masing graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$, maka dapat dibentuk pola dari automorfisma yang mengacu pada pemetaan titik. Pola banyaknya automorfisma pada masing-masing graf disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 3.6 Pola Automorfisma Graf Pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{4n}$

n	**Banyaknya Automorfisma pada $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$**	**Pola Banyaknya Automorfisma pada $Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$**
3	48	$2 \times 4!$
5	80.640	$2 \times 8!$
7	958.003.200	$2 \times 12!$
11	$4.865.804 \times 10^{18}$	$2 \times 20!$
n	… …	$2 \times (2n-2)!$

Berdasarkan tabel 3.6 maka dapat diperoleh hasil berikut:

Proposisi 3.4

Banyaknya automorfisma dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ $(Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $2 \times (2n-2)!$.

Bukti:

Berdasarkan penjelasan pada pembuktian teorema 2.1 yaitu banyaknya automorfisma pada graf bintang $K_{1,n-1}$ adalah sebanyak $(n-1)!$. Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ $(Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$ berdasarkan proposisi 3.3 merupakan gabungan graf bintang dan komplemen graf komplit order 2. karena terdapat komplemen graf komplit order 2, sehingga menyebabkan banyaknya automorfisma dari graf tersebut adalah sebanyak dua kali banyaknya automorfisma graf bintanynya. Dengan demikian terbukti bahwa banyaknya automorfisma dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ $(Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$ dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $2 \times (2n-2)!$

3.5 Teori Graf dalam Pandangan Islam

Kajian teori graf dalam al-Qur'an sudah dijelaskan dalam Bab II, yakni tentang silaturrahim. Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an Surat an-Nisa ayat 36 yang berbunyi :

وَاعْبُدُوا اللهَ وَلَا تُشْرِكُوْا بِهٖ شَيْـًٔـا ۖ وَّبِالْوَالِدَيْنِ اِحْسَانًا وَّبِذِى الْقُرْبٰى وَالْيَتٰمٰى وَ الْمَسٰكِيْنِ
وَالْجَارِ ذِى الْقُرْبٰى وَالْجَارِ الْجُنُبِ وَالصَّاحِبِ بِالْجَنْۢبِ وَابْنِ السَّبِيْلِ ۙ وَمَا مَلَكَتْ اَيْمَانُكُمْ ۗ اِنَّ
اللهَ لَا يُحِبُّ مَنْ كَانَ مُخْتَالًا فَخُوْرَا

Artinya: *"Dan sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatu apapun. Dan berbuat-baiklah kepada kedua orang tua, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga dekat dan tetangga jauh,* *teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahaya yang kamu miliki. Sungguh, Allah tidak menyukai orang yang sombong dan membanggakan diri."*

Ayat diatas menjelaskan bahwa Allah SWT memerintahkan kepada kita setiap umat manusia agar selalu taat kepada-Nya dan senantiasa mempererat tali silaturrahim. Hubungan yang dijelaskan pada ayat tersebut adalah hubungan antara manusia dengan Allah, dan hubungan sesama umat manusia.

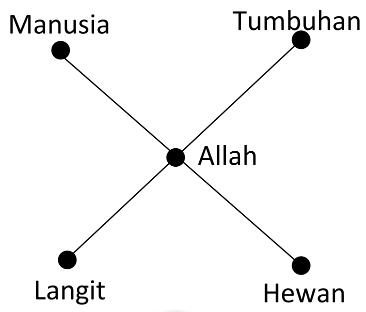
Graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ membentung graf bintang. Dalam kata lain pada graf tersebut terdapat satu titik yang menjadi pusat pada graf tersebut dan titik yang lain terhubung langsung dengannya.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an Surat al-Israa ayat 44 yang berbunyi :

تُسَبِّحُ لَهُ السَّمَاوَاتُ السَّبْعُ وَالأَرْضُ وَمَنْ فِيهِنَّ وَإِنْ مِنْ شَيْءٍ إِلا يُسَبِّحُ بِحَمْدِهِ وَلَكِنْ لا تَفْقَهُونَ تَسْبِيحَهُمْ

"Langit yang tujuh, bumi dan semua yang ada didalamnya bertasbih kepada Allah. Dan taka da suatu pun melainkan bertasbih dengan memuji-Nya, akan tetapi kamu sekalian tidak mengerti tasbih mereka."

Al-Qur'an Surat al-Israa ayat 44 menjelaskan bahwa setiap ciptaan Allah bertasbih kepada-Nya. Baik itu langit, bumi dan semua yang ada didalamnya, akan tetapi kita semua tidak mengerti tasbih mereka masing-masing. Hubungan Allah dengan makhluk-Nya dapat digambarkan dalam bentuk graf bintang sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf *I*

Berdasarkan gambar 3.10 dapat diketahui bahwa terdapat hubungan antara Allah dengan makhluk-Nya. Pada graf tersebut Allah dan makhluk-Nya merupakan suatu himpunan titik pada graf *G* yang dihubungkan dengan sisi.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan nilai n bilangan prima memiliki pola sebagai berikut:

1. Himpunan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{4n-2}, \bar{n}, \overline{3n}\}$. Himpunan titik graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ dengan n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{4n-2}, \bar{n}, \overline{3n}\}$. Derajat dari titik $\overline{2n}$ adalah $2n-2$. Derajat dari titik $\bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{4n-2}$ kecuali titik $\overline{2n}$ adalah satu. Sedangkan derajat dari titik $\bar{n}$ dan $\overline{3n}$ adalah nol. Sehingga grafnya membentuk gabungan antara graf bintang dan komplemen graf komplit order 2.
2. Banyaknya automorfisma dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4n}$ ($Z\Gamma(\mathbb{Z}_{4n})$) dengan nilai n bilangan prima dan $n \geq 3$ adalah $2 \times (2n-2)!$.

4.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis memberikan saran bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini untuk mengembangkan penelitian untuk graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, D.F., & Livingston, P.S. 1999 *The Zero-Divisor Graph of A Commutative Ring. Journal of Algebra*, 217 (2): 434-447.

Anderson, D. F., & Weber, D. (2018). *The zero-divisor graph of a commutative ring without identity*. International Electronic Journal of Algebra, 23, 176–202. https://doi.org/10.24330/ieja.373663.

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. (2009). *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, dkk. (2018). *Full Automorphism Group of Commuting and Non-commuting Graph of Dihedral and Symmetric Groups*. Malang: Journal of Physics: Conf. Series 1028.

Andika dan Juniati, Dwi. (2014). *Graf Total Dari Ring Komutatif*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. 3^{th}. USA: Jhon Wiley and Sons.

Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. 1986. *Graph and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, Gary. dkk. (2016). *Graphs & Diagraphs Sixth Edition*. USA: Taylor and Francis Group.

Dhorajia, A. M. (2018). *Some graph on prime ideals of a commutative ring*. International Electronic Journal of Algebra, 23, 157–166. https://doi.org/10.24330/ieja.373659

Duric, Alen. & Sara Jevdenic, 2019. *The Total Zero Divisor Graph of a Commutative Ring*. Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 18, No. 10, 1950190.

Joshi, K.D. 1989. *Foundations of Discrete Mathematics*. US

Raisinghania, M.D. & Aggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Tri, Rani Damayanti. 2011. Automorfisma *Graf Bintang dan Graf Lintasan*. Malang: Universitas Brawijaya.

LAMPIRAN

LAMPIRAN I

Flowchart Banyaknya Automorfisma Graf Pembagi Nol Total dari Ring $\mathbb{Z}_{4n}$

List Program Banyaknya Automorfisma Graf Pembagi Nol Total dari Ring $\mathbb{Z}_{4n}$

$$\mathbb{Z}_{4n} = \{2n: [2,4, \dots \dots ,4n-2], n: [\ ], 3n: [\ ]\}$$

$$G = Graph(\mathbb{Z}_{4n})$$

$$G.plot(\ ).show(\ )$$

$$G.automorphism\_group(\ ).list(\ )$$

$$len(G.automorphism\_group(\ ).list(\ ))$$

LAMPIRAN II

Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{28}$

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4	7	10	13	16	19	22	25
4	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24
5	0	5	10	15	20	25	2	7	12	17	22	27	4	9	14	19	24	1	6	11	16	21	26	3	8	13	18	23
6	0	6	12	18	24	2	8	14	20	26	4	10	16	22	0	6	12	18	24	2	8	14	20	26	4	10	16	22
7	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21
8	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20
9	0	9	18	27	8	17	26	7	16	25	6	15	24	5	14	23	4	13	22	3	12	21	2	11	20	1	10	19
10	0	10	20	2	12	22	4	14	24	6	16	26	8	18	0	10	20	2	12	22	4	14	24	6	16	26	8	18
11	0	11	22	5	16	27	10	21	4	15	26	9	20	3	14	25	8	19	2	13	24	7	18	1	12	23	6	17
12	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16
13	0	13	26	11	24	9	22	7	20	5	18	3	16	1	14	27	12	25	10	23	8	21	6	19	4	17	2	15
14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14
15	0	15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12	27	14	1	16	3	18	5	20	7	22	9	24	11	26	13
16	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12
17	0	17	6	23	12	1	18	7	24	13	2	19	8	25	14	3	20	9	26	15	4	21	10	27	16	5	22	11
18	0	18	8	26	16	6	24	14	4	22	12	2	20	10	0	18	8	26	16	6	24	14	4	22	12	2	20	10
19	0	19	10	1	20	11	2	21	12	3	22	13	4	23	14	5	24	15	6	25	16	7	26	17	8	27	18	9

20	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8
21	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7
22	0	22	16	10	4	26	20	14	8	2	24	18	12	6	0	22	16	10	4	26	20	14	8	2	24	18	12	6
23	0	23	18	13	8	3	26	21	16	11	6	1	24	19	14	9	4	27	22	17	12	7	2	25	20	15	10	5
24	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4
25	0	25	22	19	16	13	10	7	4	1	26	23	20	17	14	11	8	5	2	27	24	21	18	15	12	9	6	3
26	0	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	0	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{44}$

$\mathbb{Z}_{44}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	1	4	7	10	13	16	19
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	1	6	11	16	21	26	31	36	41	2	7	12	17
6	0	6	12	18	24	30	36	42	4	10	16	22	28	34	40	2	8	14	20	26	32	38
7	0	7	14	21	28	35	42	5	12	19	26	33	40	3	10	17	24	31	38	1	8	15
8	0	8	16	24	32	40	4	12	20	28	36	0	8	16	24	32	40	4	12	20	28	36
9	0	9	18	27	36	1	10	19	28	37	2	11	20	29	38	3	12	21	30	39	4	13
10	0	10	20	30	40	6	16	26	36	2	12	22	32	42	8	18	28	38	4	14	24	34
11	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11

$\mathbb{Z}_{44}$	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42
3	22	25	28	31	34	37	40	43	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	22	27	32	37	42	3	8	13	18	23	28	33	38	43	4	9	14	19	24	29	34	39
6	0	6	12	18	24	30	36	42	4	10	16	22	28	34	40	2	8	14	20	26	32	38
7	22	29	36	43	6	13	20	27	34	41	4	11	18	25	32	39	2	9	16	23	30	37
8	0	8	16	24	32	40	4	12	20	28	36	0	8	16	24	32	40	4	12	20	28	36
9	22	31	40	5	14	23	32	41	6	15	24	33	42	7	16	25	34	43	8	17	26	35
10	0	10	20	30	40	6	16	26	36	2	12	22	32	42	8	18	28	38	4	14	24	34
11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33	0	11	22	33

12	0	12	24	36	4	16	28	40	8	20	32	0	12	24	36	4	16	28	40	8	20	32	0	12	24	36	4	16	28	40	8	20	32	0	12	24	36	4	16	28	40	8	20	32
13	0	13	26	39	8	21	34	3	16	29	42	11	24	37	6	19	32	1	14	27	40	9	22	35	4	17	30	43	12	25	38	7	20	33	2	15	28	41	10	23	36	5	18	31
14	0	14	28	42	12	26	40	10	24	38	8	22	36	6	20	34	4	18	32	2	16	30	0	14	28	42	12	26	40	10	24	38	8	22	36	6	20	34	4	18	32	2	16	30
15	0	15	30	1	16	31	2	17	32	3	18	33	4	19	34	5	20	35	6	21	36	7	22	37	8	23	38	9	24	39	10	25	40	11	26	41	12	27	42	13	28	43	14	29
16	0	16	32	4	20	36	8	24	40	12	28	0	16	32	4	20	36	8	24	40	12	28	0	16	32	4	20	36	8	24	40	12	28	0	16	32	4	20	36	8	24	40	12	28
17	0	17	34	7	24	41	14	31	4	21	38	11	28	1	18	35	8	25	42	15	32	5	22	39	12	29	2	19	36	9	26	43	16	33	6	23	40	13	30	3	20	37	10	27
18	0	18	36	10	28	2	20	38	12	30	4	22	40	14	32	6	24	42	16	34	8	26	0	18	36	10	28	2	20	38	12	30	4	22	40	14	32	6	24	42	16	34	8	26
19	0	19	38	13	32	7	26	1	20	39	14	33	8	27	2	21	40	15	34	9	28	3	22	41	16	35	10	29	4	23	42	17	36	11	30	5	24	43	18	37	12	31	6	25
20	0	20	40	16	36	12	32	8	28	4	24	0	20	40	16	36	12	32	8	28	4	24	0	20	40	16	36	12	32	8	28	4	24	0	20	40	16	36	12	32	8	28	4	24
21	0	21	42	19	40	17	38	15	36	13	34	11	32	9	30	7	28	5	26	3	24	1	22	43	20	41	18	39	16	37	14	35	12	33	10	31	8	29	6	27	4	25	2	23
22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22	0	22
23	0	23	2	25	4	27	6	29	8	31	10	33	12	35	14	37	16	39	18	41	20	43	22	1	24	3	26	5	28	7	30	9	32	11	34	13	36	15	38	17	40	19	42	21
24	0	24	4	28	8	32	12	36	16	40	20	0	24	4	28	8	32	12	36	16	40	20	0	24	4	28	8	32	12	36	16	40	20	0	24	4	28	8	32	12	36	16	40	20
25	0	25	6	31	12	37	18	43	24	5	30	11	36	17	42	23	4	29	10	35	16	41	22	3	28	9	34	15	40	21	2	27	8	33	14	39	20	1	26	7	32	13	38	19

26	0	26	8	34	16	42	24	6	32	14	40	22	4	30	12	38	20	2	28	10	36	18	0	26	8	34	16	42	24	6	32	14	40	22	4	30	12	38	20	2	28	10	36	18
27	0	27	10	37	20	3	30	13	40	23	6	33	16	43	26	9	36	19	2	29	12	39	22	5	32	15	42	25	8	35	18	1	28	11	38	21	4	31	14	41	24	7	34	17
28	0	28	12	40	24	8	36	20	4	32	16	0	28	12	40	24	8	36	20	4	32	16	0	28	12	40	24	8	36	20	4	32	16	0	28	12	40	24	8	36	20	4	32	16
29	0	29	14	43	28	13	42	27	12	41	26	11	40	25	10	39	24	9	38	23	8	37	22	7	36	21	6	35	20	5	34	19	4	33	18	3	32	17	2	31	16	1	30	15
30	0	30	16	2	32	18	4	34	20	6	36	22	8	38	24	10	40	26	12	42	28	14	0	30	16	2	32	18	4	34	20	6	36	22	8	38	24	10	40	26	12	42	28	14
31	0	31	18	5	36	23	10	41	28	15	2	33	20	7	38	25	12	43	30	17	4	35	22	9	40	27	14	1	32	19	6	37	24	11	42	29	16	3	34	21	8	39	26	13
32	0	32	20	8	40	28	16	4	36	24	12	0	32	20	8	40	28	16	4	36	24	12	0	32	20	8	40	28	16	4	36	24	12	0	32	20	8	40	28	16	4	36	24	12
33	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11	0	33	22	11
34	0	34	24	14	4	38	28	18	8	42	32	22	12	2	36	26	16	6	40	30	20	10	0	34	24	14	4	38	28	18	8	42	32	22	12	2	36	26	16	6	40	30	20	10
35	0	35	26	17	8	43	34	25	16	7	42	33	24	15	6	41	32	23	14	5	40	31	22	13	4	39	30	21	12	3	38	29	20	11	2	37	28	19	10	1	36	27	18	9
36	0	36	28	20	12	4	40	32	24	16	8	0	36	28	20	12	4	40	32	24	16	8	0	36	28	20	12	4	40	32	24	16	8	0	36	28	20	12	4	40	32	24	16	8
37	0	37	30	23	16	9	2	39	32	25	18	11	4	41	34	27	20	13	6	43	36	29	22	15	8	1	38	31	24	17	10	3	40	33	26	19	12	5	42	35	28	21	14	7
38	0	38	32	26	20	14	8	2	40	34	28	22	16	10	4	42	36	30	24	18	12	6	0	38	32	26	20	14	8	2	40	34	28	22	16	10	4	42	36	30	24	18	12	6
39	0	39	34	29	24	19	14	9	4	43	38	33	28	23	18	13	8	3	42	37	32	27	22	17	12	7	2	41	36	31	26	21	16	11	6	1	40	35	30	25	20	15	10	5

40	0	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
41	0	41	38	35	32	29	26	23	20	17	14	11	8	5	2	43	40	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	42	39	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3
42	0	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
43	0	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

RIWAYAT HIDUP

David Sudarmawan lahir di Kabupaten Banyuwangi pada 8 Desember 1997. Memiliki nama panggilan David. Alamatnya berada di Dusun Sempu RT 04 RW 02 Desa Sarimulyo Kecamatan Cluring Kabupaten Banyuwangi. Merupakan anak kedua dari Bapak H. Sudarmanto, S.Pd dan Ibu Hj. Sriamah, S.Pd.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu TK Kartini. Kemudian melanjutkan sekolahnya di SD Negeri 3 Sarimulyo dan lulus pada tahun 2010. Menempuh pendidikan SMP di Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Cluring lulus pada tahun 2013. Melanjutkan pendidikan SMA di Sekolah Menengah Atas Negeri 2 Genteng lulus pada tahun 2016.

Tahun 2016 melanjutkan studi ke jenjang pendidikan strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Prestasi-prestasi yang pernah diraihnya yaitu Juara 1 Debat Ilmiah Fakultas Saintek 2016 dan meraih The Best Speaker pada Lomba Debat Ilmiah Fakultas Saintek 2016, Juara 2 Debat Ilmiah Fakultas Saintek 2017.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAUALANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : David Sudarmawan
NIM : 16610085
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Automorfisma Graf Pembagi Nol Total dari Ring Komutatif dengan Kesatuan
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	25 Agustus 2020	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	1.
2	26 Agustus 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	2.
3	10 September 2020	Revisi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	3.
4	10 September 2020	Revisi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	4.
5	01 Oktober 2020	Konsultasi Bab III, Bab IV, Bab V	5.
6	02 Oktober	Konsultasi Kajian Keagamaan & Kepenulisan pada Bab II	6.
7	03 Oktober 2020	ACC Bab I, Bab II, Bab III, Bab IV, Bab V dan Kajian Keagamaan Bab I dan Bab II	7.
8	01 Desember 2020	Konsultasi Keseluruhan	8.
9	24 Desember 2020	Revisi Keseluruhan	9.
10	02 Maret 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 19 Maret 2021
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001