PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOPHANTINE NON LINIER KUADRAT

SKRIPSI

OLEH
MUHAS SHANAH
NIM. 15610044

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOPHANTINE NON LINIER KUADRAT

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhas Shanah
NIM. 15610044

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2020

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOPHANTINE NON LINIER KUADRAT

SKRIPSI

Oleh
Muhas Shanah
NIM. 15610044

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 Oktober 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	Juhari, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006	NIDT. 19840209 20160801 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOPHANTINE NON LINIER KUADRAT

SKRIPSI

Oleh
Muhas Shanah
NIM. 15610044

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Oktober 2020

Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Anggota Penguji	: Juhari, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhas Shanah

NIM : 15610044

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan Diophantine Non Linier Kuadarat

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Desember 2020
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
904DEAEF831464616
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhas Shanah
NIM. 15610044

MOTO

"Karena Sesungguhnya Sesudah Kesulitan itu Ada Kemudahan,

Sesungguhnya Sesudah Kesulitan itu Ada Kemudahan"

(Q.S. Asy-Syarh : 5&6)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua penulis yaitu Bapak Moh. Zainuddin. Alm

semoga diampuni dosanya oleh Allah dan Ibu Hozaimah yang selalu mendoakan penulis, memberi semangat dan selalu memberi dukungan kepada penulis, serta untuk kakak penulis yang selalu memberi arahan dan nasihat kepada penulis dan untuk adik penulis yang memberi dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun kita dari jaman kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu agama islam

Penulisan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran serta do'a dari berbagai pihak. Atas selesainya penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Prof. Dr. Turmudi, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing saya dan memberikan arahan kepada saya agar dapat menyelesaikan skripsi.
5. Bapak Juhari, M.Si selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan juga membimbing saya dalam menyelesaikan skripsi.
6. Ibu Evawati Alisah, M.Pd sebagai penguji utama

7. Ibu Dr. Heni Widayani, M.Si sebagai ketua penguji

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna dengan segala kekurangannya. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Aamiin

Malang, 27 September 2020

penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Shanah, Muhas. 2020. **Penyelesaian Persamaan Diophantine Non Linier Kuadarat**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D., (II) Juhari, M.Si.

Kata kunci : Persamaan Diophantine, Bilangan Asli Kuadrat Sempurna, Bilangan Asli Bukan Kuadrat Sempurna.

Salah satu kajian pada topik teori bilangan adalah Persamaan Diophantine. Hal ini disebabkan karena solusi dari persamaan ini berupa bilangan bulat. Pada penelitian ini dibahas tentang solusi persamaan Diophantine non linier kuadrat yang memiliki bentuk $ax^2 - by^2 = 1$ dan $x^2 - Dy^2 = 1$dengan $D, a, b \in \mathbb{N}$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil penyelesaian persamaan Diophantine non linier kuadrat. Langkah pertama yang dilakukan adalah memisalkan konstanta $D, a,$ dan b sebagai bilangan asli kuadrat sempurna atau bukan. Berikutnya dilakukan pemfaktoran terhadap persamaan Diophantine tersebut. Persamaan Diophantine berbentuk $ax^2 - by^2 = 1$ dengan a dan b merupakan bilangan asli bukan kuadrat sempurna memiliki solusi $x = y$ dan $y = x$. Persamaan Diophantine $ax^2 - by^2 = 1$ dengan a dan b merupakan bilangan asli kuadrat sempurna memiliki solusi $x = y$ dan $y = x$. Sedangkan persamaan Diophantine berbentuk $x^2 - Dy^2 = 1$, dengan D adalah bilangan asli kuadrat sempurna memiliki solusi $x = Dy$ dan $y = \frac{x}{D}$. Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penyelesaian persamaan Diophantine non linier kuadrat dapat disimpulkan bahwa hasil yang diperoleh dari bentuk persamaan Diophantine $ax^2 - by^2 = 1$ dengan a dan b merupakan bilangan asli bukan kuadrat sempuna atau a dan b merupakan bilangan asli kuadrat sempurna hasilnya adalah sama. Sedangakan persamaan Diophantine berbentuk $x^2 - Dy^2 = 1$, dengan D adalah bilangan asli kuadrat sempurna memiliki solusi $x = Dy$ dan $y = \frac{x}{D}$.

ABSTRACT

Shanah, Muhas. 2020. **Solving Quadratic Non Linear Diophantine Equation.** Thesis Department of Mathematics Faculty of Science and Technology Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D., (II) Juhari, M.Si

Keywords : Diophantine Equations, Perfect Square Natural Number, Natural Numbers Not Perfect Squares.

One of the studies on the topic of number theory is the Diophantine Equation. This is because the solution to this equation is an integer. This research discusses the non-linear quadratic Diophantine solution that has the form $ax^2 - by^2 = 1$ and $x^2 - Dy^2 = 1$ with $D, a, b \in N$. The purpose of this study was to determine the result of solving the quadratic nonlinear Diophantine equation. The first step to take is to assume the constants $D, a,$ and b are natural numbers of perfect squares or not. Next do the factoring of the Diophantine equation. The Diophantine equation is of the form $ax^2 - by^2 = 1$ where a and b are natural non-perfect squares having the solution $x = y$ and $y = x$. The Diophantine equation $ax^2 - by^2 = 1$ where a and b are natural numbers with perfect squares having the solution x = y and y = x. Meanwhile, the Diophantine equation is in the form $x^2 - Dy^2 = 1$, where D is a natural number that is a perfect square having a solution of $x = Dy$ and $y = \frac{x}{D}$. Based on the results obtained from solving the non-linear quadratic Diophantine equation, it can be concluded that the results obtained from the form of the Diophantine equation $ax^2 - by^2 = 1$ where a and b are natural numbers, not perfect squares or a and b are the original numbers of perfect squares. is the same. Whereas the Diophantine equation is in the form $x^2 - Dy^2 = 1$, where D is a natural number of perfect squares having the solution $x = Dy$ and $y = \frac{x}{D}$.

ملخص

محصنة ٢٠٢٠. **حل معادلات الديوفانتين(Diophantine) الرباعية غير الخطية**. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف(١) :البروفيسور الدكتور ترمودي الماجستير ،(٢ :)جوهري الماجستير

الكلمات الرئيسية: معادلة ديوفانتين ، أرقام أصلية مربعة مثالية ، الأرقام الأصلية ليست مربعات مثالية.

معادلة ديوفانتين هي إحدى الدراسات نظرية العدد. لأنّ حل هذه المعادلة هي عدد صحيح. يناقش هذا البحث الحل التربيعي غير الخطي لمعادلة الديوفانتين التي لها شكل $ax^2 - by^2 = 1$ و $x^2 - Dy^2 = 1$ مع $D, a, b \in \mathbb{N}$. والغرض هذا البث لمعرفة نتجة حل معادلة يوفانتين التربيعية اللاخطية. الخطوة الأولى التي يجب اتخاذها هي الحل بافتراض الثوبت $D, a,$ مع b كعدد طبيعي مربع كامل أم لا. و قم بإجراء الحسابات على معادلة ديو فانتين هي الخطوة التالية. معادلة ديو فانتين على شكل $ax^2 - by^2 = 1$ مع a و b هو عدد طبيعي وليس مربعا كاملا له الحل التالي $x = y$ و $y = x$. معادلة ديو فانتين $ax^2 - by^2 = 1$ مع a و b هو عدد طبيعي مربعا كاملا له الحل التالي $x = y$ و $y = x$. وأمّا معادلة ديو فانتين على شكل $x^2 - Dy^2 = 1$ مع D هو عدد طبيعي للمربعات الكاملة التي لها حل $x = Dy$ و $y = \frac{x}{D}$. و نتائج عن الحصول عليها من حل معادلة ديوفانتين غير الخطية التربيعية التي يتم استنتاجها من شكل المعادلة التربيعية $ax^2 - by^2 = 1$ مع a وb عددان طبيعيان وليسا مربعين كاملين أو a و b عددان طبيعيان يمثلان مربعين كاملاين والنتيجة هي نفسها. وأمّا معادلة ديو فانتين على شكل

$x^2 - Dy^2 = 1$ ، مع D هو عدد طبيعي يحتوي على حل مربع مثالي $x = Dy$ و $y = \frac{x}{D}$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Diophantine adalah persamaan yang mempunyai solusi berupa bilangan bulat. Persamaan Diophantine pertama kali dikemukakan oleh seorang matematikawan Yunani yang bernama Diophantus. Diophantus terkenal dengan karyanya yang berjudul Arithmetica. Arithmetica merupakan suatu pembahasan teori bilangan yang berisi tentang pengembangan aljabar yang dilakukan dengan membuat suatu persamaan dan persamaan tersebut disebut dengan persamaan Diophantine. Persamaan Diophantine hanya melibatkan koefisien bilangan bulat.

Banyak cara untuk menyelesaikan persamaan Diophantine seperti menggunakan sifat-sifat kongruensi, keterbagian, FPB, KPK serta keprimaan. Seperti firman Allah dalam Al-Qur'an surat al-baqarah ayat 153 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱسْتَعِينُوا۟ بِٱلصَّبْرِ وَٱلصَّلَوٰةِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ

"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar".

Ayat tersebut menjelaskan bahwa dalam menghadapi masalah kita dapat menempuh lebih dari satu cara. Pada ayat tersebut di jelaskan bahwa menghadapi masalah dengan bersabar dan dengan shalat. Dan pada ayat di atas sekaligus merupakan solusi agar umat secara kolektif bisa mengatasi kesulitan dan problematika yang dating silih berganti dengan baik. Oleh karena itu dengan ayat ini Allah memerintahkan kepada kita agar kita meminta pertolongan kepada Allah dengan senantiasa mengedepankan sikap sabar dan menjaga shalat dengan istiqamah (Luthfi, 2009)

Penelitian tentang penyelesaian persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 + axy + by^2 = c$ sebelumnya telah dilakukan oleh Bona Martua Siburian, Mashadi dan Sri Gemawati (2015). Penyelesaian persamaan tersebut dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas serta dengan melakukan modifikasi aljabar. Hasil yang didapatkan dengan cara tersebut hanya satu nilai saja. Selanjutnya, penelitian penyelesaian persamaan Diophantine juga dilakukan oleh Ayu Puspitasari dkk.(2017) dengan menggunkan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. Pada penelitianya menghasilkan $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ atau $(x, y) = (-F_n, -F_{n-1})$ dengan n bilangan genap dan ganjil. Kemudian Deisi Natalia Maapanawang dkk. (2016) dalam jurnalnya juga meneliti solusi persamaan Diophantine tipe Ramanujan-Nagell dengan x diambil pada beberapa sub himpunan bilangan ganjil. Hasil dari penelitian tersebut adalah pada sub himpunan ganjil G_2 dan $n = 3$ hanya terdapat satu solusi. Sub himpunan bilangan ganjil $G_1 n \geq 3$, G_3 $n > 3$, G_4 $n > 3$, G_5 $n > 4$ tidak mempunyai solusi bilangan bulat.sementara pada y kuadrat sempurna dan $n = 3$ menghasilkan $(x, y) = (221,36)$. Oleh karena itu berdasarkan latar belakang tersebut, pada penelitian kali ini peneliti tertarik untuk mengkaji lebih lanjut tentang solusi persamaan Diophantine khususnya persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 - Dy^2 = 1$ dan $ax^2 - by^2 = 1$ dengan menggunakan Teorema 2 “ jika D adalah bilangan asli yang bukan kuadrat sempurna paling sedikit ada satu pasangan bilangan asli x dan y yang memenuhi persamaan Diophantine $x^2 - Dy^2 = 1$”(Wahyu,dkk, 2014). Dan dalam penelitian ini peneliti mengangkat judul “Penyelesaian Persamaan Diophantine non linier kuadrat”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas diperoleh rumusan masalah yaitu, bagaimanakah hasil penyelesaian persamaan Diophantine non linier kuadrat dengan menggunakan teorema 2?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui hasil penyelesaian persamaan Diophantine non linier kuadrat dengan menggunakan teorema 2.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan harapan dapat memberi manfaat:

a. Menambah wawasan pengetahuan yang berhubungan dengan persamaan Diophantine.
b. Mengembangkan ilmu pengetahuan dan mempelajari lebih dalam pengetahuan tentang persamaan Diophantine.
c. Sebagai tambahan informasi dalam perkuliahan, khusunya tentang persamaan Diophantine.
d. Sebagai tambahan kepustakaan.
e. Sebagai acuan penelitian selanjutnya.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau kajian pustaka. Pada tahap ini akan dilakukan kajian pustaka berupa mengumpulkan informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung yang berupa definisi dan teorema dan membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan.

Adapun langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Memisalkan persamaan Diophantine $ax^2 - by^2 = 1$ menjadi $ax_1^2 - by_1^2 = ax_2^2 - by_2^2 = 1$ dan $x^2 - Dy^2 = 1$ menjadi $x_1^2 - Dy_1^2 = x_2^2 - Dy_2^2 = 1$ dan
2. Memfaktorkan persamaan Diophantine $ax^2 - by^2 = 1$ menjadi $(x_1 - y_1)(ax_2 + by_2) = ax_1x_2 - by_1y_2 + ax_1y_2 - bx_2y_1$Dan $x^2 - Dy^2 = 1$ menjadi $(x_1 - y_1D)(x_2 + y_2D) = x_1x_2 - y_1y_2D^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)D$
3. Mengalikan dua hasil pemfaktoran persamaan Diophantine
   a. Mengalikan $(x_1 - y_1)(2x_2 + 2y_2) = 1(u + v2)$ dan $(x_1 + y_1)(ax_2 - by_2) = 1(u - v2)$
   b. Mengalikan $(x_1 - y_1D)(x_2 + y_2D) = k(u + vD)$ dan $(x_1 + y_1D)(x_2 - y_2D) = k(u - vD)$

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami dalam membaca hasil penelitian ini, maka penulisan ini dibagi menjadi empat bab, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang teori-teori tentang Himpunan bilangan, persamaan Diophantine.

BAB III Pembahasan

Bab ini berisi tentang penyelesaian persamaan Diophantine non linier kuadrat

BAB IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Bilangan

Himpunan adalah kumpulan objek yang mempunyai karakteristik yang sama. Notasi dari himpunan menggunakan huruf kapital sedangkan element atau anggotanya diberi notasi dengan huruf kecil. Beberapa notasi himpunan bilangan adalah sebagai berikut:

1. Bilangan Asli ($\mathbb{N}$)

Himpunan bilangan asli dinotasikan dengan $\mathbb{N}$. Himpunan bilangan asli adalah sebagai berikut:

$$\{1,2,3,\dots\}$$

2. Bilangan Bulat ($\mathbb{Z}$)

Yang dimaksud himpunan bilangan bulat adalah

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$$

Himpunan bilangan bulat terdiri atas 3 bagian sebagai berikut:

a. Himpunan bilangan bulat terdiri dari himpunan bilangan bulat positif dan himpunan bilangan bulat non positif.

   Himpunan bilangan bulat positif $= \{1,2,3,4,5,\dots\}$

   Himpunan bilangan bulat non positif $= \{\dots,-3,-2,-1,0\}$

b. Himpunan bilangan bulat terdiri dari himpunan bilangan bulat negatif dan himpunan bilangan bulat non negatif.

   Himpunan bilangan bulat negatif $= \{\dots,-4,-3,-2,-1\}$

   Himpunan bilangan bulat non negatif $= \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$

c. Himpunan bilangan bulat terdiri dari himpunan bilangan bulat positif, bilangan nol dan himpunan bilangan bulat negatif

Himpunan bilangan bulat positif $= \{1,2,3,4,5, \dots\}$

Himpunan bilangan nol $= \{0\}$

Himpunan bilangan bulat negatif $= \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

Jika himpunan bilangan bulat dikenai dua operasi dasar yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian maka membentuk suatu sistem yang disebut sebagai Lapangan (Field).

Beberapa sifat yang berlaku pada himpunan bilangan bulat dengan kedua operasi tersebut (sistem bilangan bulat) adalah sebagai berikut:

1. Terhadap operasi penjumlahan

TABEL 2.1 Sifat himpunan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan

Sifat	Uraian
Tertutup	$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ Maka $a + b \in \mathbb{Z}$
Komutatif	$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ Maka $a + b = b + a$
Asosiatif	$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
Ada elemen identitas (elemen identitas = 0)	$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists 0 \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$
Tiap elemen punya invers $(-a)$ adalah invers dari a	$\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists (-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $(a^{-1} = -a)$

2. Terhadap operasi perkalian

TABEL 2.2 Sifat himpunan bilangan bulat terhadap operasi perkalian

Sifat	Uraian
Tertutup	$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \times b \in \mathbb{Z}$
Komutatif	$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \times b = b \times a$
Asosiatif	$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku

	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Ada elemen identitas (elemen identitas $= 1$)	$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists 1 \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$

Kecuali 1 dan -1, elemen di $\mathbb{Z}$ tidak punya invers terhadap operasi perkalian. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa $\forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$ dan $a \neq -1$ maka tidak ada $a - 1 \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $a \times a - 1 = 1$ atau $a - 1 \times a = 1$.

3. Terhadap operasi perkalian dan penjumlahan, terdapat sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan yaitu:

   Distributif kiri:

   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

   Distributif kanan:

   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $c \times (a + b) = (c \times a) + (c \times b)$ (Wahyu,dkk, 2014).

3. Bilangan Rasional ($\mathbb{Q}$)

Himpunan bilangan rasional adalah anggota dari bilangan asli yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{b}{a}$ dimana $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$ (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh : $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

4. Bilangan Irrasional

Himpunan bilangan irrasional adalah anggota bilangan asli yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{b}{a}$. (Bartle & Sherbert, 2000).

Contoh: $\sqrt{2}$

2.2 Persamaan Diophantine

2.2.1 Sejarah Persamaan Diophantine

Persamaan Diophantine pertama dikemukakan oleh seorang matematikawan Yunani yang bernama Diophantus. Diophantus adalah seorang ahli matematika yang produktif dan terakhir dari zaman Yunani. Diophantus adalah ahli matematika yanga pertama kali melakukan operasi seperti $(x-1)(x-2)$. Dia melakukan operasi secara geometri tanpa referensi. Dan Diophantus juga membuktikan identitas seperti $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ secara aljabar. Dan dia juga menyelesaikan persamaan-persamaan simultan dan beberapa karyanya dalam teori bilangan yang sangat dikagumi oleh para cendekiawan matematika samapai saat ini.

Selama abad 14-16 tidak ada kemajuan oleh Diophantus dan juga Fermat yang juga ahli matematika. Sehingga untuk selanjutnya Fermat tertarik dengan bahasan yang timbul setelah Diophantus membaca buku dari Bachet edisi 1621. Buku tersebut mengingatkan Fermat pada pekerjaan Diophantus. Maka dengan topik modern dari Fermat analisis Diophantine telah dimulai (Harold, 1970)

Persamaan Diophantine adalah persamaan polinomial yang penyelesaiannya berupa bilangan bulat. Permasalahan dari persamaan Diophantine adalah persamaan yang memiliki sedikit variabel yang tidak diketahui dan meliputi cara menentukan bilangan bulat dengan benar dari seluruh persamaan. Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan bulat dan semuanya bukan nol, dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan variabel dan c merupakan konstanta, maka bentuk persamaan Diophantine linier adalah

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c \text{ (Niven,dkk, 1991)}$$

2.2.2 Macam-macam Persamaan Diophantine

Persamaan Diophantine dibagi menjadi dua, yaitu Persamaan Diophantine Linier dan Persamaan Diophantine Non Linier.

1. Persamaan Diophantine Linier

   Persamaan Diophantine Linier dengan dua variabel berbentuk $ax + by = c$ dimana a, b, c adalah bilangan bulat dan selesaian dari persamaan ini adalah x dan y yang juga bilangan bulat. Sepasang bilangan bulat (x, y) merupakan solusi dari $ax + by = c$ jika $a = b = c = 0$. Dan $ax + by = c$ tidak ada selesaiannya jika $a = b = 0$ dan $c \neq 0$ (Niven,dkk,1991).

   Persamaan Diophantine Linier yang memiliki dua variabel disebut persamaan Diophantine linier dua peubah, jika variabelnya tiga maka disebut persamaan Diophantine tiga peubah dan seterusnya.

Definisi (Persamaan Diophantine Linier)

Persamaan Linear $ax + by = c$ yang dapat diselesaikan dalam domain (himpunan semesta) berupa bilangan bulat, jika domainnya bilangan bulat maka fungsi linear tersebut mempunyai solusi. Persamaan linear Diophantine mempunyai derajat satu (Graham,1975).

Teorema 1(Persamaan Linier dengan n Variabel)

Misalkan b bilangan bulat dan a_i juga bilangan bulat $(a_i, i = 1,2,3, \dots, n)$ sedemikian hingga $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1$ maka persamaan memiliki selesaian bulat, himpunan selesaiannya tidak terbatas dan dapat dinyatakan dalam bentuk $n - 1$ bilangan bulat yang ditentukan atau yang memenuhi:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Mempunyai selesaian bulat. Himpunan penyelesaiannya tidak terbatas dan dapat dinyatakan dalam bentuk $(n-1)$ bilangan bulat sebarang yang ditentukan. (Wahyu dkk, 2014).

Bukti:

Jika $n = 2$ ini berarti tepat sama dengan teorema 1. Asumsikan bahwa pernyataan dari teorema adalah benar untuk $n = k$, akan ditunjukkan pernyataan itu benar untuk $n = k + 1$.

Misalnya $(a_1\ a_2) = d$ dan tetapkan $a_1x_1 + a_2x_2 = dt$. Himpunan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+1}$ adalah penyelesaian dari: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{k+1}x_{k+1} = b$. Jika dan hanya jika $t, x + 3+, \dots, x_{k+1}$ penyelesaian umum dari $dt + a_3x_3 + \cdots + a_{k+1}x_{k+1} = b$ dan x_1, x_2 adalah penyelesaian umum dari $a_1x_1 + a_2x_2 = dt$.

Karena $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) = \big((a_1, a_2), a_3, \dots, a_{k+1}\big) = (d, a_3, \dots, a_{k+1})$

Persamaan $dt + a_3x_3 + \cdots + a_{k+1}x_{k+1} = b$

Mempumyai sifat $(d, a_3, \dots, a_{k+1}) = 1$. Ini adalah salah satu persamaan dalam k variabel, jadi dengan hipotesis ini menunjukkan bahwa himpunan penyelesaiannya merupakan himpunan bilangan bulat tak terbatas dan dapat disajikan dalam bentuk $k - 1$ bilangan bulat sebarang yang ditentukan. Oleh karena itu, himpunan penyelesaian dari $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{k+1}x_{k+1} = b$ adalah tak terbatas dan dapat dinyatakan dalam bentuk k bilangan bulat sebarang.

Contoh:

Tentukan nilai $x, y,$ dan z yang merupakan bilangan bulat yang memenuhi persamaan dibawah ini:

$$3x - 2y + 4z = 3$$

$$x + 2y - 6z = 1$$

Penyelesaian:

Jika ditulis dalam bentuk matriks maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena $(3, -2,\ 4) = 1$ dan $(1, 2, -6) = 1$, maka masing-masing persamaan mempunyai penyelesaian dalam bilangan bulat. Untuk mengecek kekonsistenan sistem, dilakukan dengan membandingkan rank dari koefisien matriks,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Dan rank yang diperbesar,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Dalam kasus ini, kedua matriks mempunyai rank 2.

Karena $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 8$

Kita dapat menyelesaikan persamaan,

$$3x - 2y = 3 - 4z$$

$$x + 2y = 1 + 6z$$

Dari kedua persamaan diatas diperoleh hasil sebagai berikut

$3x - 2y = 3 - 4z$

$x + 2y = 1 + 6z$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan tersebut maka hasilnya adalah

$4x = 4 + 2z$, maka $x = \frac{8+4z}{8}$

Dengan mensubtitusikan nilai x kesalah satu persamaan, maka diperoleh nilai y,

$y = \frac{22z}{8}$

Jika sistem persamaan mempunyai himpunan penyelesaian bilangan umum, maka kita harus memilih z sehingga $8 + 4z \equiv 0(mod\ 8)$ dan $22z \equiv 0(mod\ 8)$. Dari kongruensi yang pertama diperoleh $z \equiv 0(mod\ 2)$, dari kongruensi yang kedua diperoleh $z \equiv 0(mod\ 4)$. Kedua kongruensi ini memenuhi jika $z \equiv 0(mod\ 4)$.

Jadi sistem persamaan ini mempunyai himpunan penyelesaian:

$$\{(x, y, z): x = 1 + 2t, y = 11t, z = 4t, t \in Z\}$$

Subtitusikan nilai x, y, z yang telah diperoleh kedalam persamaan

$$3x - 2y + 4z = 3$$

$$x + 2y - 6z = 1$$

Karena $t \in Z$ maka $t = 0,1,2, \ldots$

1. Jika $t = 0$ maka

   $(3 \times 1) - (2 \times 0) + (4 \times 0) = 3$ dan

   $1 + (2 \times 0) - (6 \times 0) = 1$

2. Jika $t = 1$ maka

   $(3 \times 3) - (2 \times 11) + (4 \times 4) = 9 - 22 + 16 = 3$ dan

   $3 + (2 \times 11) - (6 \times 4) = 3 + 22 - 24 = 1$

3. Jika $t = 2$ maka

   $(3 \times 5) - (2 \times 22) + (4 \times 8) = 15 - 44 + 32 = 3$ dan

   $5 + (2 \times 22) - (6 \times 8) = 5 + 44 - 48 = 1$

2. Persamaan Diophantine Non Linier

Persamaan Diophantine non linier merupakan persamaan Diophantine yang variabelnya berpangkat lebih dari satu. Misal $a_1, a_2, \dots, a_k,\ n$ bilangan bulat, kemudian ditentukan bentuk polynomial $f(x_1, \dots, x_k)$ dengan variabel $x_1, \dots, x_k$ yang diberikan oleh $f(x_1, \dots, x_k) = a_1x_1^2 + \cdots + a_kx_k^2$, maka $f(x_1, \dots, x_k) = n$ disebut persamaan Diophantine kuadrat.

Beberapa persamaan Diophantine non linier dapat berupa persamaan Pythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ dengan nilai x, y dan z berupa bilangan bulat positif (Dickson,1971). Selain persamaan Pythagoras persamaan Diophantine non linier juga memiliki bentuk lain yaitu $x^2 - Dy^2 = N$.

Definisi (Persamaan Diophantine Non Linear)

Persamaan Linear $ax^2 + by^2 = C^2$ yang dapat diselesaikan dalam domain (himpunan semesta) berupa bilangan bulat, jika domainnya bilangan bulat maka fungsi linear tersebut mempunyai solusi. Persamaan non linear Diophantine mempunyai derajat dua (Graham,1975).

Lemma 1

Jika D adalah bilangan asli yang bukan kuadrat sempurna, maka ada tak berhingga pasangan bilangan bulat x dan y yang memenuhi pertidaksamaan:

$$|x^2 - Dy^2| < 1 + 2\sqrt{D} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Bukti:

$\sqrt{D}$ adalah bilangan rasional, berdasarkan teorema Wilson, ada tak berhingga pasangan bilangan bulat x dan y sehingga,

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{y^2}$$

Selanjutnya, $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| = \left|\frac{x}{y} - \sqrt{D} + 2\sqrt{D}\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D}$

Jadi, $|x^2 - Dy^2| = |x - y\sqrt{D}||x + y\sqrt{D}| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D} \leq 1 + 2\sqrt{D}$

Sehingga pertidaksamaan (1) mempunyai solusi bilangan bulat x dan y tak berhingga (Wahyu,dkk ,2014).

Contoh:

Buktikan bahwa $|x^2 - 3y^2| < 1 + 2\sqrt{3}$

Penyelesaian

$|x^2 - 3y^2| < 1 + 2\sqrt{3}$

$|x - y\sqrt{3}||x + y\sqrt{3}| < 1 + 2\sqrt{3}$

$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{3}$

$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{3}\right| < \frac{1}{y^2}$

Terbukti bahwa $|x^2 - 3y^2| < 1 + 2\sqrt{3}$

Teorema 2

Jika D adalah bilangan asli yang bukan kuadrat sempurna paling sedikit ada satu pasangan bilangan asli x dan y yang memenuhi persamaan Diophantine:

$$x^2 - Dy^2 = 1 \text{ .... (1)}$$

Contoh:

Selesaikan persamaan berikut:

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Penyelesaian:

$x^2 - 2y^2 = 1$

$x^2 - 1 = 2y^2$

$(x-1)(x+1) = 2y^2$

Perhatikan ruas kiri adalah dua perkalian bilangan bulat berurutan dengan selisih 2. Sedangkan diruas kanan adalah $2.y^2$. Akibatnya y^2 dan 2 harus berselisih 2. Yang hanya akan dipenuhi oleh $y^2 = 4 \rightarrow y = 2$ atau $y = -2$.

Sehingga untuk $y = 2$

$(x-1)(x+1) = 2.(2)^2 = 2.4$

$x - 1 = 2,\ \ x + 1 = 4$

$x = 3$

Jadi pasangan (x, y) adalah $(3,2)$

Untuk $y = -2$

$(x-1)(x+1) = 2.(-2)^2 = 2.4$

$x - 1 = 2,\ \ x + 1 = 4$

$x = 3$

Jadi pasangan (x, y) adalah $(3, -2)$

Hasil penyelesaiannya adalah pasangan $(3,2), (3,-2)$

Teorema 3

Jika D adalah suatu bilangan asli yang bukan kuadrat sempurna, persamaan Diophantine

$x^2 - Dy^2 = 1$ .... (*)

Mempunyai solusi x dan y yang positif diperoleh dengan formula:

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n$$

$x_1 + y_1\sqrt{D}$ adalah solusi fundamental dari $x^2 - Dy^2 = 1$ dan $n \in \mathbb{N}$, dimana;

$$\begin{cases} x_n = x_1^n + \sum \binom{n}{2k} n_1^{2-2k} y_1^{2k} D^k \\ y_n = \sum_{k=1} \binom{n}{2k-1} x_1^{n-2k+1} y_1^{2k-1} D^{k-1} \end{cases}$$

2.3 Kajian penyelesaian Persamaan Diophantine Dalam Al-Qur'an

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surah Asy-syarh ayat 5 dan 6:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٦

"5. Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

Allah SWT dalam ayat tersebut bermaksud menjelaskan salah satu sunnah-Nya yang bersifat umum dan konsisten yaitu, "setiap kesulitan pasti disertai atau disusul oleh kemudahan selama yang bersangkutan bertekad untuk menanggulanginya." Ini dibuktikan oleh Allah anatar lain dengan contoh konkret pada diri pribadi Rasulullah saw. Beliau datang sendiri, ditantang dan dianiaya, sampai-sampai beliau dan keluarganya diboikot oleh kaum musyrik di Mekkah, tidak boleh berjual beli atau kawin mawin, tidak pula boleh berbicara dengan beliau dan keluarganya selama setahun, disusul dengan setahun lagi sampai dengan tahun ketiga. Tetapi pada akhirnya tiba juga kelapangan dan jalan keluar yang selama ini mereka dambakan. Ayat di atas seakan menyatakan bahwa: Kelapangan dada yang engkau peroleh wahai Nabi, keringanan beban yang selama ini engkau rasakan, keharuman nama yang engkau sandang, itu semua disebabkan karena sebelum ini engkau telah mengalami puncak kesulitan. Namun engkau tetap tabah dan optimis, sehingga berlakulah bagimu sunnah (ketetapan Allah) yaitu, "apabila krisis atau kesulitan telah mencapai puncaknya maka pasti ia akan sirna dan disusul dengan kemudahan". Ayat di atas sejalan maknanya dengan isyarat yang dikandung oleh Firman Allah dalam QS. Al-hajj:61, yang artinya

"*Yang demikian itu adalah karena sesungguhnya Allah (kuasa) memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan bahwa Allah Maha Mendengar lagi Maha Melihat.*"

Ayat 5 di atas diulangi sekali lagi oleh ayat 6. Pengulangan tersebut sebagaimana banyak pengulangan ayat-ayat pada periode Mekah. Sementara para ulama memahami sebagai penekanan(Shihab,2002).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Persaman Diophantine Non Linier Kuadrat

Bentuk persamaan Diophantine yang dibahas dalam skripsi ini adalah persamaan Diophantine non linier kuadrat. Langkah-langkah yang digunakan untuk mencari hasil penyelesaian persamaan Diophantine adalah sebagai berikut:

3.1.1 Mengaplikasikan Teorema 2 ke dalam persamaan Diophantine

Menyelesaikan persamaan Diophantine $ax^2 - by^2 = 1$ dengan a, b adalah bilangan asli yang bukan kuadrat sempurna dan $a, b \neq 1$

Diberikan $a = 2$ dan $b = 2$

Penyelesaian:

Berdasarkan Lemma bahwa paling sedikit ada satu bilangan bulat $k, k \neq 0$, sehingga:a $x^2 - by^2 = 1$

Untuk tak berhingga pasangan bilangan bulat x dan y.

Diantara pasangan-pasangan x dan y, harus ada paling sedikit dua pasangan x_1, y_1 dan x_2, y_2 yang memenuhi kondisi kongruensi,

$x_1 \equiv x_2 (mod|1|)$ dan $y_1 \equiv y_2 (mod|1|)$............(2)

Sisa-sisa modulo $|1|$ dari 4 bilangan x_1, x_2, y_1, y_2 dapat dikombinasikan dalam suatu bilangan berhingga (1^2)

Langkah 1

Misalkan persamaan Diophantine $2x^2 - 2y^2 = 1$ ke dalam bentuk persamaan berikut:

$2x_1^2 - 2y_1^2 = 2x_2^2 - 2y_2^2 = 1$ ……………………….(3)

Dengan x_1, x_2, y_1, y_2 memenuhi kondisi (2)

Langkah 2

Persamaan Diophantine $2x^2 - 2y^2 = 1$ di faktorkan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$(x_1 - y_1)(2x_2 + 2y_2) = 2x_1x_2 - 2y_1y_2 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1$... (4)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh:

$2x_1x_2 - 2y_1y_2 \equiv 2x_1^2 - 2y_1^2 \equiv 0(mod|1|)$ dan

$2x_1y_2 - 2x_2y_1 \equiv 2x_2^2 - 2y_2^2 \equiv 0(mod|1|)$

Berarti,

$2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 1u$

$2x_1y_2 - 2x_2y_1 = 1v,\ u, v \in Z$

Sehingga dari persamaan (4) diperoleh:

$(x_1 - y_1)(2x_2 + 2y_2) = 1(u + v2)$ dan

$(x_1 + y_1)(2x_2 - 2y_2) = 1(u - v2)$

Langkah 3

Kalikan dua persamaan di bawah ini:

$(x_1 - y_1)(2x_2 + 2y_2) = 1(u + v2)$ dan

$(x_1 + y_1)(2x_2 - 2y_2) = 1(u - v2)$

Dua persamaan di atas dikalikan sehingga diperoleh:

$(x_1^2 - y_1^2)(4x_2^2 - 4y_2^2) = 1^2 = 1^2(u^2 - 4v^2)$

$u^2 - v^2 4 = 1,\ v \neq 0$

Jika $v = 0$, akan diperoleh $2x_1y_2 = 2x_2y_1, u = \pm 1$ dan

$(x_1 - y_1)(2x_2 + 2y_2)(2x_2 - 2y_2) = \pm 1(2x_2 - 2y_2)$

$(x_1 - y_1)(4x_2^2 - 4y_2^2) = \pm 1(x_2 - 2y_2)$

$(x_1 - y_1) = \pm \frac{1(2x_2 - 2y_2)}{(4x_2^2 - 4y_2^2)}$

$(x_1 - y_1) = \frac{1}{2x_2 - 2y_2}$

Jadi $\quad x = y,\ y = x$

Contoh:

Selesaikan persamaan Diophantine berikut:

$x^2 - 3y^2 = 1$…………(1)

Penyelesaian:

Berdasarkan Lemma bahwa paling sedikit ada satu bilangan bulat $k, k \neq 0$, sehingga: $x^2 - 3y^2 = 1$

Untuk tak berhingga pasangan bilangan bulat x dan y.

Diantara pasangan-pasangan x dan y, harus ada paling sedikit dua pasangan x_1, y_1 dan x_2, y_2 yang memenuhi kondisi kongruensi,

$x_1 \equiv x_2 (mod|1|)$ dan $y_1 \equiv y_2 (mod|1|)$…………(2)

Sisa-sisa modulo $|1|$ dari 4 bilangan x_1, x_2, y_1, y_2 dapat dikombinasikan dalam suatu bilangan berhingga (1^2)

Langkah 1

Misalkan persamaan $x^2 - 3y^2 = 1$ kedalam bentuk persamaan berikut:

$x_1^2 - 3y_1^2 = x_2^2 - 3y_2^2 = 1$ ……………………..(3)

Dengan x_1, x_2, y_1, y_2 memenuhi kondisi (2)

Langkah 2

Persamaan Diophantine $x^2 - 3y^2 = 1$ di faktorkan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$(x_1 - y_1)(x_2 + 3y_2) = x_1x_2 - 3y_1y_2 + 3x_1y_2 - x_2y_1$… (4)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh:

$x_1x_2 - 3y_1y_2 \equiv x_1^2 - 3y_1^2 \equiv 0(mod|1|)$ dan

$3x_1y_2 - x_2y_1 \equiv x_2^2 - 3y_2^2 \equiv 0(mod|1|)$

Berarti,

$x_1x_2 - 3y_1y_2 = 1u$

$3x_1y_2 - x_2y_1 = 1v,\ u, v \in Z$

Sehingga dari persamaan (4) diperoleh:

$(x_1 - y_1)(x_2 + 3y_2) = 1(u + v3)$ dan

$(x_1 + y_1)(x_2 - 3y_2) = 1(u - v3)$

Langkah 3

Dua persamaan di atas dikalikan sehingga diperoleh:

$(x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - 9y_2^2) = 1^2 = 1^2(u^2 - 9v^2)$

$u^2 - v^2 9 = 1,\ v \neq 0$

Jika $v = 0$, akan diperoleh $3x_1y_2 = x_2y_1, u = \pm 1$ dan

$(x_1 - y_1)(x_2 + 3y_2)(x_2 - 3y_2) = \pm 1(x_2 - 3y_2)$

$(x_1 - y_1)(x_2^2 - 9y_2^2) = \pm 1(x_2 - 3y_2)$

$(x_1 - y_1) = \pm \frac{1(x_2 - 3y_2)}{x_2^2 - 9y_2^2}$

$(x_1 - y_1) = \frac{1}{x_2 - 3y_2}$

Jadi $x_1 = y_1, x_2 = 3y_2, y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_2}{3}$

3.1.2 Menyelesaikan persamaan $x^2 - Dy^2 = 1$ dengan D adalah bilangan asli kuadrat sempurna menggunakan Teorema 2 Persamaan Diophantine

$$x^2 - Dy^2 = 1 \text{ .... (1)}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2 bahwa Diantara pasangan-pasangan x dan y, harus ada paling sedikit dua pasangan x_1, y_1 dan x_2, y_2 yang memenuhi kondisi kongruensi,

$x_1 \equiv x_2(mod|1|)$ dan $y_1 \equiv y_2(mod|1|)$…………(2)

Sisa-sisa modulo $|k|$ dari 4 bilangan x_1, x_2, y_1, y_2 dapat dikombinasikan dalam suatu bilangan berhingga (1^2).

Langkah 1

Misalakn persamaan $x^2 - Dy^2 = 1$ kedalam bentuk persamaan berikut:

$x_1^2 - Dy_1^2 = x_2^2 - Dy_2^2 = 1$ ……………………….(3)

Dengan x_1, x_2, y_1, y_2 memenuhi kondisi (2)

Langkah 2

Persamaan Diophantine $x^2 - Dy^2 = 1$ di faktorkan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$(x_1 - y_1 D)(x_2 + y_2 D) = x_1 x_2 - y_1 y_2 D^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)D \ldots$ (4)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh:

$x_1 x_2 - y_1 y_2 D^2 \equiv x_1^2 - y_1^2 D \equiv 0(mod|k|)$ dan

$x_1 y_2 D - x_2 y_1 D \equiv x_2^2 - y_2^2 D \equiv 0(mod|k|)$

Berarti,

$x_1 x_2 - y_1 y_2 D^2 = ku$

$x_1 y_2 D - x_2 y_1 D = kv,\ u, v \in Z$

Sehingga dari persamaan (4) diperoleh:

$(x_1 - y_1 D)(x_2 + y_2 D) = k(u + vD)$ dan

$(x_1 + y_1 D)(x_2 - y_2 D) = k(u - vD)$

Langkah 3

Dua persamaan di atas dikalikan sehingga diperoleh:

$(x_1^2 - y_1^2 D^2)(x_2^2 - y_2^2 D^2) = k^2 = k^2(u^2 - v^2 D^2)$

$u^2 - v^2 D^2 = 1,\ v \neq 0$

Jika $v = 0$, akan diperoleh $x_1 y_2 = x_2 y_1, u = \pm 1$ dan

$(x_1 - y_1 D)(x_2 + y_2 D)(x_2 - y_2 D) = \pm k(x_2 - y_2 D)$

$(x_1 - y_1 D)(x_2^2 - y_2^2 D^2) = \pm k(x_2 - y_2 D)$

$(x_1 - y_1 D) = \frac{x_2 - y_2 D}{(x_2^2 - y_2^2 D^2)}$

$(x_1 - y_1 D) = \frac{1}{x_2 - y_2 D}$

Jadi $x = Dy,\ y = \frac{x}{D}$

Contoh :

Selesaikan persamaan berikut!

$$x^2 - 4y^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2 bahwa Diantara pasangan-pasangan x dan y, harus ada paling sedikit dua pasangan x_1, y_1 dan x_2, y_2 yang memenuhi kondisi kongruensi,

$x_1 \equiv x_2 (mod|1|)$ dan $y_1 \equiv y_2 (mod|1|)$…………(2)

Sisa-sisa modulo $|1|$ dari 4 bilangan x_1, x_2, y_1, y_2 dapat dikombinasikan dalam suatu bilangan berhingga (1^2).

Langkah 1

Misalkan persamaan $x^2 - 4y^2 = 1$ kedalam bentuk persamaan berikut:

$x_1^2 - 4y_1^2 = x_2^2 - 4y_2^2 = 1$ ……………………..(3)

Dengan x_1, x_2, y_1, y_2 memenuhi kondisi (2)

Langkah 2

Persamaan Diophantine $x^2 - 4y^2 = 1$ di faktorkan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$(x_1 - 2y_1)(x_2 + 2y_2) = x_1x_2 - 4y_1y_2 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \ldots$ (4)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh:

$x_1x_2 - 4y_1y_2 \equiv x_1^2 - 4y_1^2 \equiv 0(mod|1|)$ dan

$2x_1y_2 - 2x_2y_1 \equiv x_2^2 - 4y_2^2 \equiv 0(mod|1|)$

Berarti,

$x_1x_2 - 4y_1y_2 = 1u$

$2x_1y_2 - 2x_2y_1 = 1v,\ u, v \in Z$

Sehingga dari persamaan (4) diperoleh:

$(x_1 - 2y_1)(x_2 + 2y_2) = 1(u + v2)$ dan

$(x_1 + 2y_1)(x_2 - 2y_2) = 1(u - v2)$

Langkah 3

Dua persamaan di atas dikalikan sehingga diperoleh:

$(x_1^2 - 4y_1^2)(x_2^2 - 4y_2^2) = 1^2 = 1^2(u^2 - 4v^2)$

$u^2 - v^2 4 = 1,\ v \neq 0$

Jika $v = 0$, akan diperoleh $2x_1y_2 = 2x_2y_1, u = \pm 1$ dan

$(x_1 - 2y_1)(x_2 + 2y_2)(x_2 - 2y_2) = \pm 1(x_2 - 2y_2)$

$(x_1 - 2y_1)(x_2^2 - 4y_2^2) = \pm 1(x_2 - 2y_2)$

$(x_1 - 2y_1)(1) = \pm 1(x_2 - 2y_2)$

$(x_1 - 2y_1) = \pm(x_2 - 2y_2)$

Jadi $x = 2y,\ y = \frac{x}{2}$.

3.1.3 Menyelesaikan persamaan $ax^2 - by^2 = 1$ dengan a, b adalah bilangan asli kuadrat sempurna dan $a, b \neq 1$

Diberikan $a = 4$ dan $b = 4$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2 bahwa Diantara pasangan-pasangan x dan y, harus ada paling sedikit dua pasangan x_1, y_1 dan x_2, y_2 yang memenuhi kondisi kongruensi,

$x_1 \equiv x_2 (mod|1|)$ dan $y_1 \equiv y_2 (mod|1|)$............(2)

Sisa-sisa modulo $|1|$ dari 4 bilangan x_1, x_2, y_1, y_2 dapat dikombinasikan dalam suatu bilangan berhingga (1^2),

Langkah 1

Misalkan persamaan $4x^2 - 4y^2 = 1$ kedalam bentuk persamaan berikut:

$4x_1^2 - 4y_1^2 = 4x_2^2 - 4y_2^2 = 1$ ……………………….(3)

Dengan x_1, x_2, y_1, y_2 memenuhi kondisi (2)

Langkah 2

Persamaan Diophantine $4x^2 - 4y^2 = 1$ di faktorkan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$(2x_1 - 2y_1)(2x_2 + 2y_2) = 4x_1x_2 - 4y_1y_2 + 4x_1y_2 - 4x_2y_1$.. (4)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh:

$4x_1x_2 - 4y_1y_2 \equiv 4x_1^2 - 4y_1^2 \equiv 0(mod|1|)$ dan

$4x_1y_2 - 4x_2y_1 \equiv 4x_2^2 - 4y_2^2 \equiv 0(mod|1|)$

Berarti,

$4x_1x_2 - 4y_1y_2 = 1u$

$4x_1y_2 - 4x_2y_1 = 1v,\ u, v \in Z$

Sehingga dari persamaan (4) diperoleh:

$(2x_1 - 2y_1)(2x_2 + 2y_2) = 1(u + 4v)$ dan

$(2x_1 + 2y_1)(2x_2 - 2y_2) = 1(u - 4v)$

Langkah 3

Dua persamaan di atas dikalikan sehingga diperoleh:

$(4x_1^2 - 4y_1^2)(4x_2^2 - 4y_2^2) = 1^2 = 1^2(u^2 - 16v^2)$

$u^2 - 16v^2 = 1,\ v \neq 0$

Jika $v = 0$, akan diperoleh $2x_1y_2 = 2x_2y_1, u = \pm 1$ dan

$(2x_1 - 2y_1)(2x_2 + 2y_2)(2x_2 - 2y_2) = \pm 1(2x_2 - 2y_2)$

$$(2x_1 - 2y_1)(4x_2^2 - 4y_2^2) = \pm 1(2x_2 - 2y_2)$$

$$(2x_1 - 2y_1)(1) = \pm 1(2x_2 - 2y_2)$$

$$(2x_1 - 2y_1) = \pm 1(2x_2 - 2y_2)$$

Jadi $x = y,\ y = x$

3.2 Kajian Islam

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an pada surat At-Thalaq ayat 2 & 3 yang artinya:

"……barang siapa bertwakal kepada Allah , niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar. Dan memberinya rezeki dari arah yang tiada disangka-sangkanya (2).Dan barang siapa yang bertawakal kepada Allah, niscaya Allah akan mencukupkan keperluannya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusan yang dikehendakiNya. Sesungguhnya Allah telah mengadakan ketentuan bagi tiap-tiap sesuatu (3)".

Basyir dalam tafsirnya yang berjudul tafsir Al-Muyassar menjelaskan bahwa siapa saja yang takut kepada Allah , hendaklah mengerjakan yang diperintahkan kepadanya dan menghindari yang dilarang, maka Allah pun akan menjadikan jalan keluar dari setiap keadaan yang sulit dan membuka pintu rezeki-Nya tanpadiperkirakan atau disangka-sangka. Siapa saja yang bertawakal kepada Allah maka Dia akan mencukupinya dalam segala urusannya. Sesungguhnya, perkara Allah pasti dan tidak dapat dihalangi oleh sesuatu pun. Allah telah menjadikan batas waktu untuk segala sesuatu. Ketetapan-Nya tidak dapat dihindari (Basyir, 2011).

Banyak jalan yang bisa di tempuh untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi. Dalam surat at-Thalaq disebutkan bahwa mematuhi perintah Allah dan menjauhi larangan-Nya dan juga bertawakal kepada Allah adalah cara untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi. Seperti halnya pada penelitian ini. Banyak cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Diophantine. Namun dalam penelitian ini penulis mengaplikasikan teorema 2 persamaan Diophantine untuk menyelesaikan persamaan Diophantine yang diteliti.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah disampaikan, maka dapat disimpulkan bahwa penyelesaian persamaan Diophantine non linier yang berbentuk $x^2 - Dy^2 = 1$ dan persamaan Diophantine yang berbentuk $ax^2 - by^2 = 1$ dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema 2 persamaan Diophantine. Adapun hasil dari penyelesaian persamaan Diophantine $x^2 - Dy^2 = 1$ dengan D merupakan bilangan asli kuadrat sempurna adalah $x = Dy,\ y = \frac{x}{D}$. Hasil penyelesaian persamaan Diophantine yang berbentuk $ax^2 - by^2$ dengan a dan b merupakan bilangan asli bukan kuadrat sempurna adalah $x = y,\ y = x$. Hasil penyelesaian persamaan Diophantine yang berbentuk $ax^2 - by^2$ dengan a dan b merupakan bilangan asli kuadrat sempurna adalah $x = y,\ y = x$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk membahas lebih lanjut persamaan Diophantine non linier dengan menggunakan metode dan menggunakan persamaan Diophantine non linier yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis* . New York: John Wiley & Son, Inc.

Basyir, H. (2011). at-Tafsir al-Muyassar terj. *Izzudin Karimi, Dkk. Solo: An-Naba*.

Dickson, Leonard Eugene. 1971. *History of The Theory of Numbers Volume II Diophantine Analysis.* New York: Chelsea Publishing Company.

Graham, M. 1975. *Modern Elementary Mathematics*. New York: Harcort Brace Jonanovich, Inc.,

Irawan, W.H, dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-MALIKI PRESS.

Luthfi, A. (2009). Tafsir Tazkiyah. *Penerbit Gema Insani. Jakarta*.

Maapanawang, D., Titaley, J., & Mananohas, M. 2016. *Eksistensi Solusi Persamaan Diophantine Tipe Ramanujan–Nagell* $x^2 = y^n + 2185$ *Dengan* x *Diambil Pada Beberapa Sub Himpunan Bilangan Ganjil.* Vol. 5, N0. 2

Niven, Ivan, dkk. 1991. *Introduction to The Theory Number Fifth Edition.* New York: Jhon Wiley Addison.

Shihab, M.Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah.* Jakarta: Lentera Hati.

Siburian, B. M., Mashadi, M., & Gemawati, S. 2015. *Solusi Bilangan Bulat suatu Persamaan Diophantine melalui Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas*. Riau University. Vol. 2, No. 1

Stark, Harold M. 1970. *An Introduction to Number Theory.* USA: Markham Publishing Company.

Sumanto, Y. D., & Widowati, W. 2017. *Solusi Persamaan Diophantine Dengan Identitas Bilangan Fibonacci Dan Bilangan Lucas.* Jurnal Matematika Undip. Vol. 20, No. 1: 15–19.

RIWAYAT HIDUP

Muhas Shanah, lahir di Pamekasan pada tanggal 29 november 1996. Anak kedua dari 4 bersaudara dari pasangan Bapak Moh. Zainuddin. Alm dan ibu Hozaimah. Memiliki satu kakak perempuan yang bernama Siti. Qamariyah dan memiliki dua adik yaitu Moh. Nur Rahman. Alm dan Rika Jamiliyah. Penulis menempuh sekolah dasar di SDN Larangan Luar II dan melanjutkan ke sekolah menengah pertama di SMPN I Larangan. Selanjutnya sekolah menengah atas ditempuh di MA Miftahul Huda Kepanjen Malang sekaligus penulis mondok di Pondok Pesantren Miftahul Huda Kepanjen Malang. Setelah lulus dari Madrasah aliyah penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil jurusan Matematika fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Muhas Shanah
NIM	:	15610044
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Penyelesaian Persamaan Diophantine Non Linier Kuadrat
Pembimbing I	:	Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
Pembimbing II	:	Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	03 Mei 2019	Revisi Bab I dan konsultasi Bab II	1.	
2	30 Agustus 2019	Revisi Bab I dan Bab II		2.
3	11 September 2019	Revisi Bab I dan Bab II	3.	
4	19 November 2019	Konsultasi Agama Bab I dan Revisi Bab I		4.
5	02 Maret 2020	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	5.	
6	09 Maret 2020	Revisi Bab I, Bab II & Bab III		6.
7	30 Maret 2020	Konsultasi Agama Bab I & Bab II dan ACC Sempro	7.	
8	31 Maret 2020	ACC Sempro		8.
9	02 Oktober 2020	Konsultasi Bab III & Bab IV	9.	
10	03 Oktober 2020	Revisi Bab III & Bab IV		10.
11	08 Oktober 2020	Konsultasi Agama Bab III	11.	
12	08 Oktober 2020	Konsultasi Bab I, II, III & Bab IV		12.
13	09 Oktober 2020	Acc Agama Keseluruhan	13.	
14.	09 Oktober 2020	Acc Keseluruhan		14.

Malang, 30 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001