JUMLAH DAN IRISAN DARI MULTIGRUP

SKRIPSI

OLEH
MAULANA FADLI
NIM 16610092

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

JUMLAH DAN IRISAN DARI MULTIGRUP

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh:
Maulana Fadli
NIM: 16610092

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2020

JUMLAH DAN IRISAN DARI MULTIGRUP

SKRIPSI

Oleh:
Maulana Fadli
NIM: 16610092

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang,

Dosen Pembimbing I,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP 19720604 199903 2 001

Dosen Pembimbing II

Dewi Ismiarti, M.Si
NIDT 19870505201608012058

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP 19650414 200312 1 001

JUMLAH DAN IRISAN MULTIGRUP

SKRIPSI

Oleh
Maulana Fadli
NIM. 16610092

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal

Penguji Utama	: Dr. Turmudi, M.Si. Ph.D	....
Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti S.Pd., M.Sc	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Nama : Maulana Fadli

NIM : 16610092

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Jumlah dan Irisan dari Multigrup

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,27 Desember 2020
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
C0000AAC000000001
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Maulana Fadli
NIM. 16610092

MOTO

“Hormati Orang Tuamu”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda dan Ibunda tercinta, yang selalu menjadi alasan penulis bertahan serta berjuang sampai saat ini, yang selalu mendoakan, memberi semangat, nasihat dan kasih sayang tiada tara. Serta adik dan seluruh keluarga besar yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

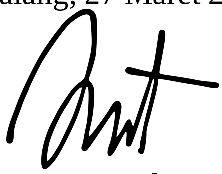
Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang dengan sabar memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb

Malang, 27 Maret 2020



Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Fadli, Maulana. 2020. **Jumlah dan Irisan dari Multigrup.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata Kunci: irisan multigrup ,jumlah multigrup, Multigrup, Multiset.

Misalkan X adalah himpunan. Multiset A dari himpunan X direpresentasikan oleh fungsi penghitung C_A yang didefinisikan sebagai $C_A: X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. $C_A(x)$ menunjukan berapa banyak unsur x muncul di A. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui deskripsi dan sifat-sifat multigrup serta untuk mengetahui apakah jumlah dan irisan dua multigrup adalah multigrup.

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah metode kepustakaan. Hasil penlitian ini adalah sebagai berikut:

1. Misalkan X adalah sebuah grup. Multigrup dari X adalah sebuah multiset G yang memenuhi dua aksioma berikut:
   i. $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$ untuk setiap $x, y \in X$
   ii. $C_G(x^{-1}) \geq C_G(x)$ untuk setiap $x \in X$

   Himpunan semua multigrup di X dinotasikan dengan $MG(X)$.
   Multigrup memiliki sifat-sifat sebagaimana berikut:
   i. $C_A(e) \geq C_A(x)$, untuk setiap x $\in X$;
   ii. $C_A(x^n) \geq C_A(x)$ untuk setiap x $\in X$, dimana n adalah bilangan bulat tak negatif;
   iii. $C_A(x^{-1}) = C_A(x)$ untuk setiap x $\in X$.
2. Jumlah dari dua multigrup adalah multigrup.
3. Irisan dari dua multigrup adalah multigrup.

ABSTRACT

Fadli, Maulana. 2020. **The Sum and Intersection of Multigroup.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: intersection multigroup, multigroup, multiset, sum multigroup.

Let X be a set. Multiset A over X is represented by a Count function of C_A defined as $C_A: X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, where $\mathbb{N}$ represents the set of natural numbers. $C_A(x)$ is the number of occurrence of the element x in A. The research aims to discuss the description and properties multigroup and prove the sum and intersection of two multigroups is a multigroup.

The method used in this research is library research. The result of this research are as follows:

1. Let X be a group. A multigroup G is multiset satisfies the following conditions:
   i. $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$ for each $x, y \in X$
   ii. $C_G(x^{-1}) \geq C_G(x)$ for each $x \in X$

   The set of all multigroups of X is denoted by $MG(X)$.
   Properties of multigroup:
   i. $C_A(e) \geq C_A(x)$, for each x $\in X$;
   ii. $C_A(x^n) \geq C_A(x)$ for each x $\in X$, where n is non negatif integers
   iii. $C_A(x^{-1}) = C_A(x)$ for each x $\in X$.
2. The Sum of two multigroups is a multigroup.
3. The Intersection of two multigroups is a multigroup

الملخّص

فضلي, مولانا, ٢٠٢٠. *مقدار تعدد الفرقة و قطعته* . البحث العلمي. قسم الرياضية. كلية العلوم و التكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرفة : إيفاواتي أليسة الماجستر و ديوي إسمارتي الماجيستر.

الكلمات المرشدة : القطعة, المقدار, تعدد الفرقة, تعدد تصور الجمع.

تعدد تصور الجمع A من مجموعة X كان موجودا من حساب C_A المعرّف لكونه " $C_A: X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ " إذ $\mathbb{N}$ هو مجموع العدد الأصلي. تدلّ $C_A(x)$ على كثرة العناصر X تظهر في A . و الهدف من هذا البحث معرفة التعريف و الأوصاف في تعدد الفرقة و معرفة العدد و القطعة من تعدّدي الفرقة هي هي تعدد الفرقة. و طريقة البحث المستخدمة في هذا البحث هي طريقة قائمة المراجع. و النتيجة من هذا البحث هي كما ستأتي بيانها : المثال , X هي الفرقة. و تعدد الفرقة منها هو تعدد تصور الجمع G الذي يملأ هاتين مسلّمتين :

$x.y \in X$ لكلّ $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$

$x \in X$ لكلّ $C_G(x) \geq C_G(x^{-1})$

و مجموعة كلّ تعدد الفرقة في X مع $MG(X)$

. و كان لتعدد الفرقة أوصاف كما تبيّنت :

١. $C_A(x), C_A(e) \geq$ لكلّ $x \in X$
٢. $C_A(x) C_A(x^n) \geq$ لكلّ $x \in X$ إذ n هو الرقم الكامل غير ناقص
٣. $C_A(x^{-1}) = C_A(x)$ لكلّ $x \in X$

العدد و القطعة من تعددي الفرقة ظاهر أنها من تعدد الفرقة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan cabang ilmu yang mempunyai peran penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Perkembangan matematika relatif cepat serta terus menerus dari masa ke masa. Salah satu bagian dari matematika yang terus dikembangkan adalah struktur aljabar. Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dengan satu atau lebih operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma. Selama ini contoh yang lebih dikenal dari struktur aljabar adalah grup dan ring. Padahal masih banyak contoh lainya dari struktur aljabar yang salah satunya adalah multigrup.

Konsep Multigrup pertama kali diperkenalkan oleh (Dresher & Ore, 1938). Pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan juga mempengaruhi matematikawan untuk meneliti multigrup lebih lanjut. Sehingga dilakukan penelitian lanjutan oleh (Nazmul, Majumdar, & Samanta, 2013) yang memperkenalkan multigrup yang diambil dari multiset.

Multiset adalah sebuah koleksi yang unsur-unsurnya boleh berulang. Dalam al-Qur'an banyak sekali ayat yang berkenaan dengan konsep koleksi atau himpunan, salah satunya adalah surat al-Fatihah ayat 7 yang artinya:

"(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepadanya; bukan (jalan) mereka yang dimurkai, dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat."

Dalam ayat tersebut Allah menjelaskan manusia dibagi menjadi tiga himpunan. Himpunan pertama adalah orang-orang yang diberi nikmat oleh Allah SWT. Himpunan kedua adalah orang-orang yang dimurkai oleh Allah SWT. Himpunan ketiga adalah orang-orang munafik.

Kemudian setelah diperkenalkan konsep multigrup yang diambil dari multiset banyak peniliti yang mengembangkan konsep multigrup ini. Beberapa dari mereka adalah (Awolola & Ibrahim, 2016) dan (Ejegwa & Ibrahim, 2020). Dalam artkelnya, mereka mengembangkan beberapa proposisi dan teorema mengenai sifat-sifat dari multigrup seperti, multigrup abelian, submultigrup dan sifat-sifat lainya. Namun, terdapat juga proposisi dan teorema yang pembuktianya masih memerlukan penjelasan lebih lanjut agar mudah dipahami.

Oleh karena itu, setelah membaca dan memahami konsep multigrup dari beberapa artikel di atas membuat penulis tertarik untuk mengkaji ulang pembahasan tentang konsep multigrup yang dibangun dari multiset dan mengkaji beberapa sifat-sifatnya serta melengkapi beberapa bukti dari teorema dan proposisi yang belum dibuktikan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah peneltian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana deskripsi dan sifat-sifat multigrup?
2. Apakah jumlah dua multigrup adalah multigrup?
3. Apakah irisan dua multigrup adalah multigrup?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui deskripsi dan sifat-sifat multigrup.
2. Untuk mengetahui apakah jumlah dua multigrup adalah multigrup.
3. Untuk mengetahui apakah irisan dua multigrup adalah multigrup.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut:

1. Memberi informasi mengenai deskripsi dan sifat-sifat multigrup.
2. Memberi informasi mengenai jumlah dari dua multigrup adalah sebuah multigrup
3. Memberi informasi mengenai irisan dari dua multigrup adalah sebuah multigrup.

1.5 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan (studi literatur) yaitu usaha mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang bersumber dari skripsi, buku, jurnal dan lain-lain. Artikel utama yang digunakan dalam penelitian ini adalah artikel yang ditulis oleh Ejegwa dan Ibrahim yang berjudul *Some Properties of Multigrup.*

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mendeskripsikan multigrup.
2. Memberikan contoh dan bukan contoh multigrup
3. Membuktikan beberapa proposisi sifat-sifat multigrup.
4. Membuktikan teorema jumlah dari dua multigrup adalah multigrup.
5. Memberikan contoh teorema jumlah dari dua multigrup adalah multigrup.
6. Membuktikan teorema irisan dari dua multigrup adalah multigrup.
7. Memberikan contoh teorema irisan dari dua multigrup adalah multigrup.
8. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri atas empat bab. Setiap bab dibagi ke dalam beberapa subbab sebagaimana berikut.

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan teori yang mendasari penulisan skripsi ini. Dasar teori yang digunakan meliputi definisi, teorema, dan sifat-sifat mengenai himpunan, subhimpunan, grup, subgrup, multiset serta beberapa sifat-sifatnya.

Bab III Pembahasan

Bab pembahasan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Definisi 2.1.1

Himpunan (*set*) didefinisikan sebagai kumpulan atau koleksi objek-objek yang terdefinisi dengan jelas (*well defined*). Maka "objek" dalam definisi tersebut sangat luas. Objek dapat berupa objek nyata dan dapat juga berupa objek abstrak. Objek dapat berbentuk orang, nama orang, hewan, benda, bilangan, planet, nama hari atau lainnya. Sebagai contoh kumpulan nama-nama hari dalam satu minggu. Himpunan dapat dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya di dalam tanda kurung kurawal (Abdussakir, Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an, 2009).

Untuk lebih memperjelas, (Arifin, 2000) membagi tiga pengertian dasar, yaitu himpunan, anggota dan relasi keanggoaan $\in$. Misalkan X himpunan dan a anggota X. Penulisan $a \in X$ berarti a anggota X, atau X memuat a. Sebaliknya, Penulisan $a \notin X$ berati a bukan anggota X atau X tidak memuat a. Anggota himpunan X dapat dikatakan juga sebagai unsur himpunan X.

Contoh 2.1.2

Akan didefinisikan himpunan bilangan prima dari 1 sampai 10. Maka dapat ditulis:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

Mengindikasinkan A mengandung unsur 2,3,5,7 dan tidak unsur lainya. Notasi $\{2, 3, 5, 7\}$ dibaca "himpunan dengan unsur 2,3,5,dan 7".

2.2. Subhimpunan

Definisi 2.2.1

Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan A disebut subhimpunan dari B jika dan hanya jika setiap anggota di himpunan A adalah anggota dari himpunan B. Notasi A subhimpunan dari B adalah $A \subseteq B$ atau notasi $B \supseteq A$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.2.2:

Diketahui himpunan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $B = \{1, 3, 5\}$. Maka dapat dikatakan bahwa B merupakan subhimpunan dari A atau ditonasikan $B \subseteq A$ karena semua anggota B juga di A. Namun A bukan subhimpunan dari B atau $A \nsubseteq B$ karena ada sebagain anggota A tidak ada di B.

Definisi 2.2.3

Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan. Maka A adalah subhimpunan sejati dari B jika dan hanya jika $A \subseteq \mathrm{B}$ dan $A \neq B$. Himpunan A merupakan subhimpunan sejati dari B yang biasa dinotasikan dengan $A \subset B$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.2.4

Misalkan $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$dan $B = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$, maka $A \subseteq \mathrm{B}$ dan $A \neq B$ maka $A \subset B$.

2.3 Relasi

Definisi 2.3.1

Relasi di himpunan tak kosong A adalah himpunan tak kosong R dari pasangan terurut (x,y) dari unsur x dan y dari A. Relasi R adalah sub himpunan dari $A \times A$. Jika pasangan (a, b) di R, ditulis aRb dan dikatakan bahwa a memiliki relasi R ke b. Jika $(a, b) \notin R$, ditulis $a\not{R}b$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Definisi 2.3.2

Relasi R dikatakan relasi ekuivalen jika beberapa kondisi di bawah ini terpenuhi untuk sebarang x, y, z di A:

1. xRx Reflektif
2. Jika xRy, maka yRx. Simetris
3. Jika xRy dan yRz, maka xRz Transitif (Gilbert & Gilbert, 2009).

2.4 Pemetaan

Definisi 2.4.1

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu sub himpunan dari $A \times B$ adalah pemetaan f dari A ke B jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$ ada unsur yang tunggal (satu dan hanya satu) $b \in B$ sedemikian sehingga $(a, b) \in f$. Jika f adalah pemetaan dari A ke B dan pasangan (a, b) ada di dalam f, ditulis $b = f(a)$ dan disebut sebagai peta dari a oleh f (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.4.2

Misalkan $A = \{1, -1,2,3\}$ dan misalkan $B = \{1,4,9,16\}$. Kemudian himpunan $f = \{(1,1), (-1,1), (2,4), (3,9)\}$ adalah pemetaan dari A ke B, karena untuk setiap $a \in A$ ada unsur tunggal $b \in B$ sedemikian sehingga $(a, b) \in `f$. Secara efisien, pemetaan ini dapat dijelaskan melalui aturan yang diberikan bagi peta atas f, yaitu $f(a) = a^2$, untuk setiap $a \in A$.

2.5 Grup

Sebelum dijelaskan mengenai definisi grup terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai operasi biner.

Definisi 2.5.1

1. Sebuah operasi biner $*$ pada sebuah himpunan G adalah sebuah fungsi $*$: $G \times G \rightarrow G$. Untuk setiap $a.b \in G$, Umumnya ditulis $a * b$ untuk $*\ (a.b)$,
2. Sebuah operasi biner $*$ pada sebuah himpunan G adalah asosiatif jika semua $a, b, c \in G$ kita punya $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Jika $*$ adalah sebuah operasi biner pada sebuah himpunan G maka dapat dikatakan unsur a dan b di G kommut jika $a * b = b * a$, Operasi $*$ (atau G) adalah komutatif jika untuk semua $a.b \in G. a * b = b * a$ (Dummit & Foote, 2004).

Contoh 2.5.2

Operasi $+$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ dapat dinyatakan sebagai suatu pemetaan dari $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap (a, b) di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ maka $(a + b)$ juga di $\mathbb{Z}$.

Definisi 2.5.3

Diberikan operasi biner $*$ yang didefinisikan untuk anggota-anggota himpunan tak kosong G. Maka G beserta operasi biner $*$ adalah suatu grup jika memenuhi 4 kondisi berikut:

1. G tertutup di bawah operasi $*$. Untuk setiap $x.y \in G$ maka $x * y \in G$
2. Operasi $*$ bersifat assosiatif. Untuk setiap $x.y.z \in G$ sedemikian sehingga $x * (y * z) = (x * y) * z$

3. G memuat elemen identitas e. Terdapat $e \in G$ sedemikan sehingga $x * e = e * x = x$ untuk setiap $x \in G$.
4. G memuat elemen invers. Untuk setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$.

Grup G dengan operasi biner $*$ biasa dinotasikan $(G.*)$. Jika untuk setiap $a.b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka $(G.*)$ disebut grup abelian (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.5.4

Akan dibuktikan bilangan bulat modulo-6 (Z_6) yang dikenai operasi " $+$ " adalah grup dan grup abelian.

Bukti:

Z_6 = { [0], [1], [2], [3], [4], [5] }

Untuk lebih jelasnya, kita dapat membuat Tabel hasil operasinya (tabel Cayley) seperti berikut.

Tabel 2.1 Tabel Caley $(Z_6 +)$

+	**[0]**	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

Dari tabel cayley tersebut yaitu dengan melihat hasil operasi antara dua unsur di Z_6 , jelas bahwa operasi $+$ tertutup di Z_6 . Kemudian operasi $+$ bersifat asosiatif di himpunan bilangan bulat. Elemen identitas di Z_6 terhadap operasi $+$ adalah $[0]$. Setiap elemen di Z_6 memiliki invers terhadap operasi +, yaitu

$$[0]^{-1} = [0] \text{ karena } [0] + [0] = [0] + [0] = [0]$$

$$[1]^{-1} = [5] \text{ karena } [1] + [5] = [5] + [1] = [0]$$

$$[2]^{-1} = [4] \text{ karena } [2] + [4] = [4] + [2] = [0]$$

$$[3]^{-1} = [3] \text{ karena } [3] + [3] = [3] + [3] = [0]$$

$$[4]^{-1} = [2] \text{ karena } [4] + [2] = [2] + [4] = [0]$$

$$[5]^{-1} = [1] \text{ karena } [5] + [1] = [1] + [5] = [0]$$

Jadi, $(Z_6, +)$ adalah grup dan karena operasi penjumlahan bersifat komutatif di Z_6 maka $(Z_6, +)$ adalah grup abelian.

2.5.5 Sifat-sifat Grup

Jika diberikan sebarang grup $(G,*)$, maka akan berlaku beberapa sifat berikut. Sifat-sifat di bawah ini dapat dibuktikan melalui aksioma-aksioma grup.

1. Unsur identitas itu tunggal, yaitu jika e dan e' unsur pada grup G yang memenuhi hukum identitas maka $e = e'$.
2. Invers dari sebarang unsur G akan tunggal, yaitu jika a dan b merupakan invers dari x maka $a = b$ untuk setiap $a. b. x \in G$.
3. $(a^{-1})^{-1} = a.$ untuk setiap $a \in G$.

4. $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ untuk setiap $a.b \in G$.
5. Hukum kanselasi kiri : jika $a * x = a * y$ m aka $x = y$ unuk setiap $a.x.y \in G$.
6. Hukum kanselasi kanan : jika $x * a = y * a$ maka $x = y$ unuk setiap $a.x.y \in G$ (Setiawan, 2014).

Bukti :

1. Jika f dan g masing-masing adalah identitas, $f, g \in G$, maka dengan aksioma dari definisi grup $f * g = f$ (ambul $a = f$ dan $e = g$). Dengan aksioma yang sama $f * g = g$ (ambil $a = g$ dan $e = f$). Jadi, $f = g$ sehingga identitas dari G adalah tunggal.
2. Diasumsikan b dan c masing masing adalah invers dari a, misal e identitas dari G. Dengan $a * b = e$ dan $c * a = e$, sehingga

$$
\begin{aligned}
c &= c * e \\
&= c * (a * b) \\
&= (c * a) * b \\
&= e * b \\
&= b
\end{aligned}
$$

Jadi, $c = b$ sedemikian sehingga invers dari a adalah tunggal.

3. Untuk setiap $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

$i.$ $a * a^{-1} = e$

$$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e * (a^{-1})^{-1}$$

$$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$$

$$a * e = (a^{-1})^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

$ii. a^{-1} * a = e$

$$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * e$$

$$((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a = (a^{-1})^{-1}$$

$$e * a = (a^{-1})^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

Dari (i) dan (ii), maka diperoleh $(a^{-1})^{-1} = a$.

4. Misal $c = (a * b)^{-1}$. Sedemikian sehingga $(a * b) * c = e$. Maka

$$a * (b * c) = e$$

$$a^{-1} * \left(a * (b *)\right) = a^{-1} * e$$

$$(a^{-1} * a) * (b * c) = a^{-1}$$

$$e * (b * c) = a^{-1}$$

$$(b * c) = a^{-1}$$

$$b^{-1} * (b * c) = b^{-1} * a^{-1}$$

$$(b^{-1} * b) * c = b^{-1} * a^{-1}$$

$$e * c = b^{-1} * a^{-1}$$

$$c = b^{-1} * a^{-1}$$

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Jadi, terbukti bahwa $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

5. Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * b = a * c$, maka

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$

$$e * b = e * c$$

$$b = c$$

6. Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * c = b * c$, maka

$$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$$

$$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$$

$$a * e = b * e$$

$$a = b$$

2.6 Subgrup

Definisi 2.6.1

Diketahui S himpunan bagian dari grup $(G,*)$ dengan elemen identitas e. Himpunan S merupakan subgrup dari $(G,*)$ jika dan hanya jika memenuhi sifat:

1. $e \in S$,
2. S tertutup di bawah operasi dari G ,
3. untuk sebarang $x \in S$, inversnya x^{-1} terletak dalam S.

(Setiawan, 2014)

Bukti:

($\rightarrow$)

- Dikarenakan S subgrup dari $(G,*)$, maka $(S,*)$ adalah grup, sehingga memuat elemen identitas e'. Akan ditunjukkan $e' = e$, yaitu elemen identitas di $(G,*)$.

  $e'e' = e'$ (karena e' elemen identitas)

  $ee' = e'$ (karena e elemen identitas)

  Sehingga :

  $$e'e' = ee'$$

  Dengan kanselasi kanan diperoleh :

  $$e' = e$$

  $(e \in S)$

- Karena $(S,*)$ subgrup dari $(G,*)$, maka S tertutup dibawah operasi $*$ pada G.

- Misalkan $x \in S$. Karena $(S.*)$ grup maka x mempunyai invers x' dalam $(S.*)$. Dengan mengingat ketunggalan dari suatu invers maka $x' = x^{-1}$ yaitu invers dari x dalam $(G.*)$.

($\leftarrow$)

Syarat 1 sampai 3 merupakan tiga syarat agar suatu himpunan adalah suatu grup, yaitu memuat elemen identitas, syarat ketertutupan, dan memuat invers elemen. Syarat satu lagi yang harus dipenuhi adalah sifat asosiatif. $\forall a, b, c \in G$ berlaku :

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

karena $S \subseteq G$, dan maka $\forall p, q, r \in S$, juga berlaku :

$$(p * q) * r = p * (q * r)$$

yaitu S bersifat asosiatif terhadap operasi $*$. Sehingga, $(S,*)$ adalah grup, karena $S \subseteq G$, maka $(S,*)$ grup bagian dari $(G,*)$ (Setiawan, 2014).

Contoh 2.6.2

Misalkan $(Z, +)$ adalah grup, diberikan $K = \{5m|m \in Z\}$, akan ditunjukkan K adalah subgrup dari Z terhadap operasi jumlah $+$.

Bukti:

1. Unruk setiap $a \in K$, misalkan $a = 5m$,$m \in Z$. Karena $5 \in Z$, maka $5m \in Z$, sehingga $K \subseteq Z$. Karena $m = 0 \in Z$, maka $5.0 \in K$, sehingga $K \neq \emptyset$.
2. Misalkan $a, b \in K$ dengan $a = 5m, b = 5n$ $m, n \in Z$, selanjutnya :

$$\begin{aligned} a + b &= 5m + 5n \\ &= 5(m + n) \end{aligned}$$

   Karena $m, n \in Z$, maka $m + n \in Z$, sehingga $a + b \in K$

   (operasi $+$ tertutup di K)
3. Misalkan $a, b, c \in K$ dengan $a = 5m, b = 5n, c = 5q$ $m, n, q \in Z$, selanjutnya :

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= (5m + 5n) + 5q \\ &= 5(m + n) + 5q \\ &= 5\big((m + n) + q\big) \end{aligned}$$

$= 5\big(m + (n + q)\big)$

$= 5m + 5(n + q)$

$= 5m + (5n + 5q)$

$= a + (b + c)$

(K asosiatif terhadap $+$)

4. Diberikan $m = 0$, $5m = 5.0 \in K, 5.0 = 0$, selanjutnya untuk setiap $a \in K, a = 5q, q \in Z$, diperoleh :

$$a + 0 = 5q + 5.0 = 5(q + 0) = 5q$$

$$0 + a = 5.0 + 5.q = 5(0 + q) = 5q$$

Jadi $0 = 5.0$ adalah identitas di K.

5. Diberikan $a = 5m \in K, m \in Z$, maka $-m$ juga di Z , maka $5(-m) \in K$, selanjutnya :

$a + 5(-m) = 5m + 5(-m)$

$= 5\big(m + (-m)\big)$

$= 5(m - m)$

$= 5.0$

$= 0$

$5(-m) + a = 5(-m) + 5m$

$= 5(-m + m)$

$= 5.0$

$= 0$

Diperoleh $a + 5(-m) = 5(-m) + a = 0, a = 5m$, jadi $5(-m)$ adalah invers dari sebarang $a = 5m \in K$.

$\therefore (K, +)$ adalah subgrup dari $(Z, +)$.

2.7 Multi Set

Pada subbab ini akan dijelaskan definisi multiset, submultiset dan operasi pada multiset. multiset merupakan koleksi yang elemen-elemenya boleh berulang. Berikut diberikan definisi multiset.

Definisi 2.7.1

Sebuah Multiset A dari himpunan X direpresentasikan oleh fungsi penghitung C_A yang didefinisikan sebagai $C_A: X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. $C_A(x)$ menunjukan berapa banyak unsur x muncul di A. Himpunan semua multiset atas X dinotasikan $MS(X)$ (Najmul dkk, 2013).

Contoh 2.7.2

Misalkan $X = \{a, b, c\}$ adalah sebuah himpunan, maka multiset $A = [a, a, b, b, c, c, c]$ dengan $C_A(a) = 2,\ C_A(b) = 2,\ C_A(c) = 3$.

Definisi 2.7.3

Misalkan $A. B \in MS(X)$. Multiset A dan multiset B dikatakan sama apabila $C_A(x) = C_B(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Contoh 2.7.4

Misalkan Z_3 adalah grup terhadap operasi penjumlahan. Misalkan $A = [1,1,1,2,2]$, dan $B = [2,2,1,1,1]$ adalah multiset atas Z_3. Akan dibuktikan bahwa $A = B$.

Bukti:

$$C_A(0) = 0 = C_B(0)$$

$$C_A(1) = 3 = C_B(1)$$

$$C_A(2) = 2 = C_B(2)$$

Karena $C_A(x) = C_B(x)$ untuk setiap $x \in Z_3$, maka berdasarkan Definisi 2.7 disimpulkan bahwa $A = B$.

2.8 Submultiset

Definisi 2.8.1

Misalkan $A, B \in MS(X)$. multiset A dikatakan submultiset B ditulis $A \subseteq B$ jika $C_A(x) \leq C_B(x)$ untuk setiap $x \in X$. Jika $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka A disebut submultiset sejati B dinotasikan sebagai $A \subset B$ (Ejegwa & Ibrahim, 2020).

2.9 Operasi Multiset

Definisi 2.9.1

Misalkan $A, B \in MS(X)$. Dan $\wedge$ dan $\vee$ masing-masing adalah notasi minimum dan maximum.

i. Irisan dari A dan B dilambangkan dengan $A \cap B$ adalah multiset yang memenuhi aturan bahwa untuk setiap unsur x $\in X$ berlaku:

$$C_{A \cap B}(x) = C_A(x) \wedge C_B(x)$$

dimana $\wedge$ adalah notasi minimum.

ii. Gabungan dari A dan B dilambangkan dengan $A \cup B$ adalah multiset yang memenuhi aturan bahwa untuk setiap unsur x $\in X$ berlaku:

$$C_{A\cup B}(x) = C_A(x) \vee C_B(x)$$

dimana $\vee$ adalah notasi maksimum.

iii. Jumlah dari A dan B dilambangkan dengan $A + B$ adalah multiset yang memenuhi aturan bahwa untuk setiap unsur x $\in X$ berlaku:

$$C_{A+B}(x) = C_A(x) + C_B(x)$$

(Ejegwa & Ibrahim, 2020).

Contoh 2.9.2

Misalkan $A = [\, a, a, a, c, d, d \,]$ dan $B = [\, a, a, b, c, c \,]$ masing-masing adalah multiset maka:

i. $$\begin{aligned} C_{A\cap B}(a) &= C_A(a) \wedge C_B(a) \\ &= 3 \wedge 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}(b) &= C_A(b) \wedge C_B(b) \\ &= 0 \wedge 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}(c) &= C_A(c) \wedge C_B(c) \\ &= 1 \wedge 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}(d) &= C_A(d) \wedge C_B(d) \\ &= 2 \wedge 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan hasil multiset $A \cap B = [a, a, c]$

ii. $C_{A \cup B}(a) = C_A(a) \vee C_B(a)$

$= 3 \vee 2$

$= 3$

$C_{A \cup B}(b) = C_A(b) \vee C_B(b)$

$= 0 \vee 1$

$= 1$

$C_{A \cup B}(c) = C_A(c) \vee C_B(c)$

$= 1 \vee 2$

$= 2$

$C_{A \cup B}(d) = C_A(d) \vee C_B(d)$

$= 2 \vee 0$

$= 2$

Sehingga didapatkan hasil multiset $A \cup B = [a, a, a, b, c, c, d, d]$,

iii. $C_{A+B}(a) = C_A(a) + C_B(a)$

$= 3 + 2$

$= 5$

$C_{A+B}(b) = C_A(b) + C_B(b)$

$= 0 + 1$

$= 1$

$C_{A+B}(c) = C_A(c) + C_B(c)$

$= 1 + 2$

$= 3$

$$
\begin{aligned}
C_{A+B}(d) &= C_A(d) + C_B(d) \\
&= 2 + 0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Sehingga didapatkan hasil multiset $A + B = [a, a, a, a, a, b, c, c, c, d, d]$

2.10 Integrasi

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang *well-defined*. Dalam himpunan tidak diperbolehkan pengulangan elemen dan banyaknya sebuah elemen muncul pada suatu himpunan juga tidak dianggap sebagai sesuatu yang penting. Padahal, dalam kehidupan nyata berlaku sebaliknya, pengulangan suatu elemen adalah sesuatu yang penting. Sebagai contoh, sekedar menyebutkan berbagai jenis sayuran dalam sebuah keranjang tidak dapat memberikan kita informasi rinci mengenai sayuran dalam keranjang tersebut kecuali kita merinci jumlah sayuran dari setiap jenisnya. Dalam matematika, koleksi yang elemen-elemenya boleh berulang disebut multiset.

Konsep multiset ini memang sangat banyak dijumpai dalam kehidupan nyata, termasuk dalam agama Islam. Islam mewajibkan 5 hal bagi pemeluknya yang disebut rukun islam, pertama syahadat, kedua sholat lima waktu, ketiga puasa, keempat zakat dan kelima haji. Sedikitnya 3 dari rukun islam itu menggunakan konsep perulangan dalam penerapanya.

Ibadah pertama yang menggunakan konsep perulangan adalah sholat. Sholat merupakan ibadah pokok dalam agama Islam. sebagaimana Surat *Tha-Ha*, Ayat 14 yang artinya:

"Sungguh, Aku ini Allah, tidak ada tuhan selain Aku, maka sembahlah Aku dan laksanakanlah shalat untuk mengingat Aku"

Ibadah sholat menggunakan konsep perulangan dalam pelaksanaanya karena sholat wajib dilakukan oleh seorang muslim setiap harinya. Konsep perulangan dalam sholat ini haruslah dilaksanakan oleh seorang muslim, jika tidak maka ia telah melanggar syariat agama Islam.

Dalam fikih sahnya sholat seorang muslim bergantung pada perulangan membaca surat al-Fatihah disetiap raka'atnya. Sekali saja seorang muslim tidak membaca surat al-Fatihah dalam sholatnya, maka sholatnya dianggap tidak sah (Suja', 2000).

Ibadah kedua yang menggunakan konsep perulangan adalah puasa Rhamadan. Puasa Rhamadan wajib hukumnya dilaksanakan oleh setiap muslim. Kewajiban puasa Ramadhan berdasarkan firman Allah surat al-Baqoroh ayat 185 yang artinya:

"(Beberapa hari yang ditentukan itu ialah) bulan Ramadhan, bulan yang di dalamnya diturunkan (permulaan) Al Qur'an sebagai petunjuk bagi manusia dan penjelasan-penjelasan mengenai petunjuk itu dan pembeda (antara yang hak dan yang bathil). Karena itu, barangsiapa di antara kamu hadir (di negeri tempat tinggalnya) di bulan itu, maka hendaklah ia berpuasa".

Ibadah puasa Ramadhan juga menggunakan konsep perulangan dalam pelaksanaanya. Puasa ini wajib dilaksanakan oleh seorang muslim setiap tahun dalam sebulan. Bahkan, dalam praktiknya seorang yang berpuasa harus mengulang niat puasanya setiap malam agar puasanya sah menurut hukum fikih. Hal ini berdasarkan hadits:

"Barang siapa tidak berniat puasa pada malam sebelum fajar, maka tidak sah puasanya". (HR. Nasai)

Ibadah ketiga yang menggunakan konsep perulangan adalah zakat. Zakat wajib dilaksanakan oleh seorang muslim berdasarkan firman Allah surat at-Taubah ayat 103 dan surat al-Baqoroh ayat 43 yang masing-masing artinya sebagai berikut:

"Ambillah zakat dari sebagian harta mereka, dengan zakat tersebut engkau membersihkan dan mensucikan mereka."

"Dirikanlah shalat, tunaikanlah zakat dan ruku'lah bersama dengan orang-orang yang ruku'."

Kemudian dari ayat-ayat ini terbentuklah ijma' ulama' terkait hukum wajibnya zakat (Suja', 2000).

Dalam fikih zakat dibagi menjadi dua dan keduanya dalam praktik pelakasanaanya juga menggunakan perulangan. Pertama zakat fitrah yang wajib dikeluarkan oleh seorang muslim setiap tahun pada bulan Ramadhan. Kedua, zakat mall yang wajib dikeluarkan ketika harta telah mencapai nisabnya setiap tahun. Pengulangan zakat fitrah setiap tahunya bersifat wajib bagi semua muslim begitu juga zakat mall bersifat wajib bagi semua muslim ketika hartanya telah menapai nisab selama setahun.

Berbeda dengan sholat, puasa dan zakat, haji tidak diwajibkan dilakukan secara berulang. Haji hanya diwajibkan dilakukan sekali dengan syarat ia mampu berpergian haji. Namun demikian seorang muslim masih boleh berpegi haji dua kali dan seterusnya tetapi hukum kewajibanya telah gugur karena haji hanya diwajibkan dilaksanakan sekali.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa pegulangan atau konsep multiset sangat penting pada kehidupan kita sehari-hari. Termasuk dalam ibadah, seperti yang telah dijelaskan di atas. Pada wilayah ibadah justru pengulangan menempati hal yang paling urgent karena tanpa pengulangan, suatu ibadah bisa dihukumi tidak sah secara fikih atau tanpa melakukan pengulangan seorang muslim dihukumi melanggar syari'at secara fikih.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Multigrup

Dalam Bab II telah dijelaskan mengenai definisi multiset yang merupakan fungsi penghitung dari himpunan X ke himpunan bilangan bulat non negatif. Sedangkan multigrup adalah multiset yang fungsi penghitungnya memenuhi beberapa aksioma tertentu. Lebih jelasnya, dalam (Ejegwa & Ibrahim, 2020) multigrup didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.1

Misalkan X adalah sebuah Grup. Multigrup dari X adalah sebuah multiset G yang memenuhi dua aksioma berikut:

iv. $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$ untuk setiap $x, y \in X$

v. $C_G(x^{-1}) \geq C_G(x)$ untuk setiap $x \in X$

Himpunan semua multigrup di X dinotasikan dengan $MG(X)$.

Aksioma (i) menegaskan bahwa syarat untuk menjadi multigrup adalah $C_G(xy)$ harus lebih besar atau sama dengan min$\{C_G(x), C_G(y)\}$ untuk setiap $x, y \in X$. Adapun aksioma (ii) menegaskan bahwa $C_G(x^{-1})$ harus lebih besar atau sama dengan $C_G(x)$ untuk setiap $x \in X$.

Selanjutnya berdasarkan definisi multigrup yang telah dipaparkan di atas penulis merumuskan contoh dan bukan contoh multigrup sebagai berikut:

Contoh 3.1.2

Misalkan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah grup dengan operasi tambah modulo 4 dan misalkan $A = [0, 0, 0,0,1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3]$ adalah sebuah multiset atas Z_4. Akan dibuktikan G adalah sebuah multigrup dari Z_4.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $A = [0, 0, 0,0,1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3]$ adalah multigrup dari Z_4 maka akan ditunjukkan keberlakuan dua aksioma pada Definisi 3.1.1 berikut:

Aksioma (i)

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x, y di Z_4 berlaku $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$. Oleh karena itu akan kita cek kardinal hasil tambah unsur-unsurnya di Z_4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_G(0+1) &= C_G(1) \\ &= 3 \\ &\geq [4 \wedge 3] \\ &= [C_G(0) \wedge C_G(1)] \end{aligned}$$

Jadi, $C_G(0+1) \geq [C_G(0) \wedge C_G(1)]$

$$\begin{aligned} C_G(0+2) &= C_G(2) \\ &= 4 \\ &\geq [4 \wedge 4] \\ &= [C_G(0) \wedge C_G(2)] \end{aligned}$$

Jadi, $C_G(0+2) \geq [C_G(0) \wedge C_G(2)]$

$C_G(0+3) = C_G(3)$

$= 4$

$\geq [4 \wedge 3]$

$= [C_G(0) \wedge C_G(3)]$

Jadi, $C_G(0+3) \geq [C_G(0) \wedge C_G(3)]$

$C_G(1+2) = C_G(3)$

$= 3$

$\geq [3 \wedge 4]$

$= [C_G(1) \wedge C_G(2)]$

Jadi, $C_G(1+2) \geq [C_G(1) \wedge C_G(2)]$

$C_G(1+3) = C_G(0)$

$= 4$

$\geq [3 \wedge 4]$

$= [C_G(1) \wedge C_G(3)]$

Jadi, $C_G(1+3) \geq [C_G(1) \wedge C_G(3)]$

$C_G(2+3) = C_G(1)$

$= 3$

$\geq [4 \wedge 3]$

$= [C_G(0) \wedge C_G(2)]$

Jadi, $C_G(2+3) \geq [C_G(2) \wedge C_G(3)]$

Karena berlaku $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$ untuk setiap x di Z_4 maka aksioma (i) terpenuhi.

Aksioma (ii)

Pada bagian ini akan ditunjukkan untuk setiap x di Z_4 berlaku $C_G(x^{-1}) \geq C_G(x)$. Oleh karena itu akan kita cek setiap kardinal hasil tambah unsur-unsur di Z_4 sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
C_G(-0) &= C_G(0) \\
&= 4 \\
&\geq 4 \\
&= C_G(0)
\end{aligned}
$$

Jadi, $C_G(-0) \geq C_G(0)$

$$
\begin{aligned}
C_G(-1) &= C_G(3) \\
&= 3 \\
&\geq 3 \\
&= C_G(1)
\end{aligned}
$$

Jadi, $C_G(-1) \geq C_G(1)$

$$
\begin{aligned}
C_G(-2) &= C_G(2) \\
&= 4 \\
&\geq 4 \\
&= C_G(2)
\end{aligned}
$$

Jadi, $C_G(-2) \geq C_G(2)$

$C_G(-3) = C_G(1)$

$= 3$

≥ 3

$= C_G(3)$

Jadi, $C_G(-3) \geq C_G(3)$

Karena berlaku $C_G(x^{-1}) \geq C_G(x)$ untuk setiap x di Z_4 maka aksioma (ii) terpenuhi. Kemudian, karena aksioma (i) dan aksioma (ii) pada Definisi 3.1.1 telah terpenuhi maka terbukti bahwa A adalah multigrup dari Z_4.

Contoh 3.1.3

Misalkan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah grup dengan operasi tambah modulo 4 dan $B = [0,0,1,2,2,3]$ adalah sebuah multiset atas Z_4. Akan dibuktikan B adalah sebuah multigrup dari Z_4.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $B = [0,0,1,2,2,3]$ adalah multigrup dari Z_4 maka akan ditunjukkan keberlakuan dua aksioma pada Definisi 3.1.1 berikut:

Aksioma (i)

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x, y di Z_4 berlaku $C_B(xy) \geq C_B(x) \wedge C_B(y)$. Oleh karena itu akan kita cek kardinal hasil tambah unsur-unsurnya di Z_4 sebagai berikut:

$C_B(0+1) = C_B(1)$

$= 1$

$\geq [2 \wedge 1]$

$= [C_B(0) \wedge C_B(1)]$

Jadi, $C_B(0+1) \geq [C_B(0) \wedge C_B(1)]$

$C_B(0+2) = C_B(2)$

$= 2$

$\geq [2 \wedge 2]$

$= [C_B(0) \wedge C_B(2)]$

Jadi, $C_B(0+2) \geq [C_B(0) \wedge C_B(2)]$

$C_B(0+3) = C_B(3)$

$= 1$

$\geq [2 \wedge 1]$

$= [C_B(0) \wedge C_B(3)]$

Jadi, $C_B(0+3) \geq [C_B(0) \wedge C_B(3)]$

$C_B(1+2) = C_B(3)$

$= 1$

$\geq [1 \wedge 2]$

$= [C_B(1) \wedge C_B(2)]$

Jadi, $C_B(1+2) \geq [C_B(1) \wedge C_B(2)]$

$$C_B(1+3) = C_B(0)$$
$$= 2$$
$$\geq [1 \wedge 1]$$
$$= [C_B(1) \wedge C_B(3)]$$

Jadi, $C_B(1+3) \geq [C_B(1) \wedge C_B(3)]$

$$C_B(2+3) = C_B(1)$$
$$= 1$$
$$\geq [2 \wedge 1]$$
$$= [C_B(0) \wedge C_B(2)]$$

Jadi, $C_B(2+3) \geq [C_B(2) \wedge C_B(3)]$

Karena berlaku $C_B(xy) \geq C_B(x) \wedge C_B(y)$ untuk setiap x di Z_4 maka aksioma (i) terpenuhi.

Aksioma (ii)

Pada bagian ini akan ditunjukkan untuk setiap x di Z_4 berlaku $C_B(x^{-1}) \geq C_B(x)$. Oleh karena itu akan kita cek setiap kardinal hasil tambah unsur-unsur di Z_4 sebagai berikut:

$$C_B(-0) = C_B(0)$$
$$= 2$$
$$\geq 2$$
$$= C_B(0)$$

Jadi, $C_B(-0) \geq C_B(0)$

$C_B(-1) = C_B(3)$

$= 1$

≥ 1

$= C_B(1)$

Jadi, $C_B(-1) \geq C_B(1)$

$C_B(-2) = C_B(2)$

$= 2$

≥ 2

$= C_B(2)$

Jadi, $C_B(-2) \geq C_B(2)$

$C_B(-3) = C_B(1)$

$= 1$

≥ 1

$= C_B(3)$

Jadi, $C_B(-3) \geq C_B(3)$

Karena berlaku $C_B(x^{-1}) \geq C_B(x)$ untuk setiap x di Z_4 maka aksioma (ii) terpenuhi. Kemudian, karena aksioma (i) dan aksioma (ii) pada Definisi 3.1.1 telah terpenuhi maka terbukti bahwa B adalah multigrup dari Z_4.

Contoh 3.1.4

Misalkan $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ adalah grup dengan operasi tambah modulo 3 dan misalkan $G = [0, 0, 0,0,1, 1, 1, 2, 2, 2, 2]$ adalah sebuah multiset atas Z_3. Perhatikan bahwa $-2 = 1$ dan

$$\begin{aligned} C_G(-2) &= C_G(1) \\ &= 3 \\ &\leq 4 \\ &= C_G(2) \end{aligned}$$

Jadi, $C_G(-2) \leq C_G(2)$

Karena $C_G(-2) \leq C_G(2)$ tidak mememenuhi aksioma (ii) maka G bukanlah multigrup dari Z_3.

Dalam pemaparan sifat-sifat multigrup, penulis mengkaji sifat-sifat multigrup pada penelitian (Ejegwa & Ibrahim, 2020). Sifat-sifat tersebut akan dipaparkan melalui proposisi-proposisi.

Proposisi 3.1.5

Misalkan X adalah grup dengan operasi yang dinyatakan sebagai perkalian, dan misalkan $x \in X$ adalah sebarang elemen di X. Selanjutnya misalkan $A \in MG(X)$ sebuah multigrup atas X, maka:

i. $C_A(e) \geq C_A(x)$, untuk setiap x $\in X$;

ii. $C_A(x^n) \geq C_A(x)$ untuk setiap x $\in X$, dimana n adalah bilangan bulat tak negatif;

iii. $C_A(x^{-1}) = C_A(x)$ untuk setiap x $\in X$;

Bukti:

Misalkan $x \in X$, maka:

i. Karena X adalah grup maka $e = xx^{-1}$. Selanjutnya karena $A \in MG(X)$ adalah multigrup atas X, maka berdasarkan Definisi 3.1.1, berlaku

$$C_A(xx^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(x^{-1})]$$

Selanjutnya, berdasarkan aksioma (ii) pada Definisi 3.1.1, berlaku

$$C_A(x^{-1}) \geq C_A(x)$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} C_A(e) &= C_A(xx^{-1}) \\ &\geq [C_A(x) \wedge C_A(x^{-1})] \\ &= \min\{C_A(x), C_A(x^{-1})\} \\ &= C_A(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $C_A(e) \geq C_A(x)$.

□

ii. Berdasarkan definisi integral eksponen, $x^n = x^{n-1}x$. Selanjutnya karena $A \in MG(X)$ adalah multigrup atas X, maka berdasarkan Definisi 3.1.1, berlaku

$$C_A(x^n) \geq C_A(x^{n-1}) \wedge C_A(x)$$

Dengan mengulang prosedur di atas untuk x^{n-1}, x^{n-2}, dan seterusnya, diperoleh

$$C_A(x^n) \geq [\, C_A(x) \wedge C_A(x) \wedge \ldots \wedge C_A(x)]$$

$$= \min\{C_A(x), C_A(x), \ldots., C_A(x)\}$$

$$= C_A(x)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $C_A(x^n) \geq C_A(x)$.

□

iii. Berdasarkan sifat invers elemen pada grup, berlaku $x = (x^{-1})^{-1}$. Jadi, berdasarkan sifat (i) yang telah dibuktikan sebelumnya, berlaku

$$C_A(x^{-1}) \geq C_A(x) = \; C_A((x^{-1})^{-1}) \geq C_A(x^{-1})$$

Pada ketaksamaan di atas ruas paling kiri sama dengan ruas paling kanan, jadi haruslah

$$C_A(x^{-1}) = C_A(x) = \; C_A((x^{-1})^{-1}) = C_A(x^{-1})$$

Dengan demenikan, terbukti bahwa $C_A(x^{-1}) = C_A(x)$.

□

Proposisi 3.1.6

Misalkan A adalah sebuah multiset atas X. Maka $A \in MG(X)$ jika dan hanya jika

$$C_A(xy^{-1}) \geq \; [C_A(x) \; \wedge \; C_A(y)],$$

untuk setiap $x, y \; \in X$.

Bukti:

(*syarat perlu*). Misalkan $A \in MG(X)$ dan misalkan $x, y \in X$ adalah sebarang dua elemen dari X, maka berdasarkan Definisi 3.1.1 diperoleh

$$C_A(xy^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y^{-1})]$$

Dari Proposisi 3.1.5 sifat (iii) diperoleh:

$$C_A(xy^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y)]$$

Maka kondisi yang diberikan sudah terpenuhi.

(*syarat cukup*). Sebaliknya misalkan

$$C_A(xy^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y)]$$

untuk setiap $x, y \in X$. Maka,

i. Berdasarkan Propisisi 3.1.5 sifat (iii), berlaku

$$C_A(y) = C_A(y^{-1})$$

Selanjutnya, karena

$$C_A(xy^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y)] \text{ , untuk setiap } x, y \in X.$$

Maka

$$C_A(xy) = C_A(x(y^{-1})^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y^{-1})] = [C_A(x) \wedge C_A(y)]$$

Dengan demikian $C_A(xy) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y)]$, untuk setiap $x, y \in X$.

ii. Karena

$$C_A(xy^{-1}) \geq \ [C_A(x) \ \wedge \ C_A(y^{-1})], \text{ untuk setiap } x, y \in X.$$

Maka dengan substitusi $x = e$ diperoleh

$$C_A(ey^{-1}) \ \geq [C_A(e) \ \wedge \ C_A(y)], \text{ untuk setiap } y \in X.$$

Selanjutnya, dengan mengoperasikan kedua ruas persamaan di atas dengan $C_A(e)$ terhadap operasi $\wedge$ diperoleh

$$\begin{aligned} C_A(e) \ \wedge C_A(ey^{-1}) \ &\geq C_A(e) \wedge [C_A(e) \ \wedge \ C_A(y)] \\ &\geq [C_A(e) \wedge \ C_A(e) \ \wedge \ C_A(y)] \\ &\geq [C_A(e) \ \wedge \ C_A(y)] \end{aligned}$$

Yaitu

$$\min\{C_A(e), C_A(ey^{-1})\} \geq \min\{C_A(e)\ , C_A(y)\}$$

Dengan menggunakan sifat dari operator minimum, maka diperoleh $C_A(ey^{-1}) \geq C_A(y)$, yaitu $C_A(y^{-1}) \geq C_A(y)$.

Berdasarkan (i), (ii), dan Definisi 3.1.1, maka disimpulkan bahwa A adalah multigrup atas X, yaitu $A \in MG(X)$.

□

3.2 Jumlah dari Multigrup

Misalkan $A, B \in MG(X)$. Jumlah dari A dan B dilambangkan dengan $A + B$ adalah multigrup yang memenuhi aturan bahwa untuk setiap unsur x $\in X$ berlaku $C_{A+B}(x) = C_A(x) + C_B(x)$.

Teorema 3.2.1

Jika $A, B \in MG(X)$, maka jumlah dari A dan B adalah sebuah multigrup di X.

Bukti:

Karena $A, B \in MG(X)$, maka berdasarkan Proposisi 3.1.6 yang telah dibuktikan sebelumnya, diperoleh

$$C_A(xy^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y)]$$

dan

$$C_B(xy^{-1}) \geq [C_B(x) \wedge C_B(y)]$$

untuk setiap $x, y \in X$. Maka

i. Berdasarkan Proposisi 3.1.6 dan dengan menggunakan definisi jumlah multigrup, maka diperoleh

$$\begin{aligned} C_{A+B}(xy^{-1}) &= C_A(xy^{-1}) + C_B(xy^{-1}) \\ &\geq (C_A(x) \wedge C_A(y)) + (C_B(x) \wedge C_B(y)) \\ &= (C_A(x) + C_B(x)) \wedge (C_A(y) + C_B(y)) \\ &= C_{A+B}(x) \wedge C_{A+B}(y) \end{aligned}$$

Dengan demikian, $C_{A+B}(xy^{-1}) \geq C_{A+B}(x) \wedge C_{A+B}(y)$.

ii. Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan dengan menggunakan sifat dari operator penjumlahan, maka diperoleh

$$C_{A+B}(x^{-1}) = C_A(x^{-1}) + C_B(x^{-1})$$

Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 3.1.5 sifat (iii) , diperoleh

$$C_{A+B}(x^{-1}) = C_A(x) + C_B(x)$$
$$= C_{A+B}(x)$$

Dengan demikian, $C_{A+B}(x^{-1}) = C_{A+B}(x)$.

Berdasarkan (i), (ii), dan Definisi 3.1.1, maka disimpulkan $A + B \in MG(X)$.

□

Contoh 3.2.2

Misalkan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah grup dengan operasi tambah. Dan misalkan $A = [0, 0, 0,0,1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3]$ dan $B = [0,0,1,2,2,3]$ masing-masing adalah multigrup atas Z_4. Akan dibuktikan $A + B$ adalah sebuah multigrup dari Z_4.

Bukti:

Sebelum membuktikan bahwa $A + B \in MG(Z_4)$, akan dicari terlebih dahulu hasil dari $A + B$, sehingga diperoleh:

$$A + B = [0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3]$$

Kemudian akan dibuktikan $A + B \in MG(Z_4)$ adalah multigrup menggunakan dua aksioma pada Definisi 3.1.1 berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma ini akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x, y di Z_4 berlaku $C_{A+B}(xy) \geq C_{A+B}(x) \wedge C_{A+B}(y)$. Oleh karena itu akan kita cek kardinal hasil tambah unsur-unsurnya di Z_4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{A+B}(0+1) &= C_{A+B}(1) \\ &= 4 \\ &\geq [6 \wedge 4] \\ &= [C_{A+B}(0) \wedge C_{A+B}(1)] \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga, $C_{A+B}(0+1) \geq [C_{A+B}(0) \wedge C_{A+B}(1)]$

$$\begin{aligned} C_{A+B}(0+2) &= C_{A+B}(2) \\ &= 6 \\ &\geq [6 \wedge 6] \\ &= [C_{A+B}(0) \wedge C_{A+B}(1)] \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga, $C_{A+B}(0+2) \geq [C_{A+B}(0) \wedge C_{A+B}(2)]$

$$\begin{aligned} C_{A+B}(0+3) &= C_{A+B}(3) \\ &= 4 \\ &\geq [6 \wedge 4] \\ &= [C_{A+B}(0) \wedge C_{A+B}(3)] \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga, $C_{A+B}(0+3) \geq [C_{A+B}(0) \wedge C_{A+B}(3)]$

$C_{A+B}(1+2) = C_{A+B}(3)$

$= 4$

$\geq [4 \wedge 6]$

$= [C_{A+B}(1) \wedge C_{A+B}(2)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A+B}(1+2) \geq [C_{A+B}(1) \wedge C_{A+B}(2)]$

$C_{A+B}(1+3) = C_{A+B}(0)$

$= 6$

$\geq [4 \wedge 4]$

$= [C_{A+B}(1) \wedge C_{A+B}(3)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A+B}(1+3) \geq [C_{A+B}(1) \wedge C_{A+B}(3)]$

$C_{A+B}(2+3) = C_{A+B}(1)$

$= 4$

$\geq [6 \wedge 4]$

$= [C_{A+B}(2) \wedge C_{A+B}(3)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A+B}(2+3) \geq [C_{A+B}(2) \wedge C_{A+B}(3)]$

Karena berlaku $C_{A+B}(xy) \geq C_{A+B}(x) \wedge C_{A+B}(y)$ untuk setiap x, y di Z_4. Maka aksioma (i) terpenuhi

Aksioma (ii)

Pada aksioma ini akan ditunjukkan untuk setiap x di Z_4 berlaku $C_{A+B}(x^{-1}) \geq C_{A+B}(x)$. Oleh karena itu akan kita cek kardinal hasil tambah setiap unsur di Z_4 sebagai berikut:

$C_{A+B}(-0) = C_{A+B}(0)$

$= 6$

≥ 6

$= C_{A+B}(0)$

Sedemeikian sehingga, $C_{A+B}(-0) \geq C_{A+B}(0)$

$C_{A+B}(-1) = C_{A+B}(3)$

$= 4$

≥ 4

$= C_{A+B}(1)$

Sedemikian Sehingga, $C_{A+B}(-1) \geq C_{A+B}(1)$

$C_{A+B}(-2) = C_{A+B}(2)$

$= 6$

≥ 6

$= C_{A+B}(2)$

Sedemikian Sehingga, $C_{A+B}(-2) \geq C_{A+B}(2)$

$C_{A+B}(-3) = C_{A+B}(1)$

$= 4$

≥ 4

$= C_{A+B}(3)$

Sedemikian Sehingga, $C_{A+B}(-3) \geq C_{A+B}(3)$

Karena berlaku $C_{A+B}(x^{-1}) \geq C_{A+B}(x)$ untuk setiap x di Z_4, maka aksioma (ii) terpenuhi. Kemudian karena aksioma (i) dan aksioma (ii) pada Definisi 3.1.1 telah terpenuhi maka disimpulkan bahwa $A + B$ adalah multigrup dari Z_4.

3.3 Irisan dari Multigrup

Misalkan $A, B \in MG(X)$. Irisan dari A dan B dilambangkan dengan $A \cap B$ adalah multigrup yang memenuhi aturan bahwa untuk setiap unsur x $\in X$ berlaku $C_{A \cap B}(x) = C_A(x) \wedge C_B(x)$.

Teorema 3.3.1

Jika $A, B \in MG(X)$, maka irisan dari A dan B adalah sebuah multigrup di X.

Bukti:

Karena $A, B \in MG(X)$, maka berdasarkan Proposisi 3.1.6 yang telah dibuktikan sebelumnya, diperoleh

$$C_A(xy^{-1}) \geq [C_A(x) \wedge C_A(y)].$$

dan

$$C_B(xy^{-1}) \geq [C_B(x) \wedge C_B(y)].$$

untuk setiap $x, y \in X$. Maka:

i. Berdasarkan Proposisi 3.1.6 dan dengan menggunakan definisi irisan dari multigrup, maka diperoleh

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}(xy^{-1}) &= C_A(xy^{-1}) \wedge C_B(xy^{-1}) \\ &\geq [C_A(x) \wedge C_A(y)] \wedge [C_B(x) \wedge C_B(y)] \\ &= C_A(x) \wedge C_A(y) \wedge C_B(x) \wedge C_B(y) \\ &= [C_A(x) \wedge C_B(x)] \wedge [C_A(y) \wedge C_B(y)] \\ &= C_{A\cap B}(x) \wedge C_{A\cap B}(y) \end{aligned}$$

Dengan demikian, $C_{A\cap B}(xy^{-1}) \geq C_{A\cap B}(x) \wedge C_{A\cap B}(y)$.

ii. Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan dengan menggunakan sifat dari operator minimum, maka diperoleh

$$C_{A\cap B}(x^{-1}) = C_A(x^{-1}) \wedge C_B(x^{-1})$$

Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 3.1.5 sifat (iii) , diperoleh

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}(x^{-1}) &= C_A(x) \wedge C_B(x) \\ &= C_{A\cap B}(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian, $C_{A\cap B}(x^{-1}) = C_{A\cap B}(x)$.

Berdasarkan (i), (ii), dan Definisi 3.1.1, maka disimpulkan bahwa $A \cap B \in MG(X)$.

□

Contoh 3.3.2

Misalkan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah grup dengan operasi tambah pada modulo empat. Dan misalkan $A = [0, 0, 0,0,1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3]$ dan $B =$ [0,0,1,2,2,3] masing-masing adalah multigrup atas Z_4. Akan dibuktikan bahwa $A \cap B$ adalah sebuah multigrup dari Z_4.

Bukti:

Sebelum membuktikan bahwa $A \cap B \in MG(Z_4)$, akan dicari terlebih dahulu hasil dari $A \cap B$ sehingga diperoleh

$$A \cap B = [0,0,1,2,2,3]$$

Kemudian akan dibuktikan $A \cap B \in MG(Z_4)$ adalah multigrup menggunakan dua aksioma pada Definisi 3.1.1 berikut:

Aksioma (i)

Pada aksioma ini akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x, y di Z_4 berlaku $C_{A\cap B}(xy) \geq C_{A\cap B}(x) \wedge C_{A\cap B}(y)$. Oleh karena itu akan kita cek kardinal hasil tambah unsur-unsurnya di Z_4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{A\cap B}(0+1) \geq\ & C_{A\cap B}(1) \\ &= 1 \\ &\geq [2 \wedge 1] \\ &= [C_{A\cap B}(0) \wedge C_{A\cap B}(1)] \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(0+1) \geq [C_{A\cap B}(0) \wedge C_{A\cap B}(1)]$

$C_{A\cap B}(0+2) \geq \ C_{A\cap B}(2)$

$= 2$

$\geq [2 \ \wedge \ 2]$

$= [C_{A\cap B}(0) \ \wedge \ C_{A\cap B}(2)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(0+2) \geq [C_{A\cap B}(0) \ \wedge \ C_{A\cap B}(2)]$

$C_{A\cap B}(0+3) \geq \ C_{A\cap B}(3)$

$= 1$

$\geq [2 \ \wedge \ 1]$

$= [C_{A\cap B}(0) \ \wedge \ C_{A\cap B}(3)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(0+3) \geq [C_{A\cap B}(0) \ \wedge \ C_{A\cap B}(3)]$

$C_{A\cap B}(1+2) \geq \ C_{A\cap B}(3)$

$= 1$

$\geq [1 \ \wedge \ 2]$

$= [C_{A\cap B}(1) \ \wedge \ C_{A\cap B}(2)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(1+2) \geq [C_{A\cap B}(1) \ \wedge \ C_{A\cap B}(2)]$

$C_{A\cap B}(1+3) \geq \ C_{A\cap B}(0)$

$= 2$

$\geq [1 \ \wedge \ 1]$

$= [C_{A\cap B}(1) \ \wedge \ C_{A\cap B}(3)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(1+3) \geq [C_{A\cap B}(1) \ \wedge \ C_{A\cap B}(3)]$

$C_{A\cap B}(2+3) \geq C_{A\cap B}(1)$

$= 1$

$\geq [2 \wedge 1]$

$= [C_{A\cap B}(2) \wedge C_{A\cap B}(3)]$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(2+3) \geq [C_{A\cap B}(2) \wedge C_{A\cap B}(3)]$

Karena berlaku $C_{A\cap B}(xy) \geq C_{A\cap B}(x) \wedge C_{A\cap B}(y)$ untuk setiap x, y di Z_4, maka aksioma (i) terpenuhi.

Aksioma (ii)

Pada aksioma ini akan ditunjukkan untuk setiap x di Z_4 berlaku $C_{A\cap B}(x^{-1}) \geq C_{A\cap B}(x)$. Oleh karena itu akan kita cek hasil tambah setiap unsur di Z_4 sebagai berikut:

$C_{A\cap B}(-0) = C_{A\cap B}(0)$

$= 2$

≥ 2

$= C_{A\cap B}(0)$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(-0) \geq C_{A\cap B}(0)$.

$C_{A\cap B}(-1) = C_{A\cap B}(3)$

$= 1$

≥ 1

$= C_{A\cap B}(1)$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(-1) \geq C_{A\cap B}(1)$.

$C_{A\cap B}(-2) = C_{A\cap B}(2)$

$= 2$

≥ 2

$= C_{A\cap B}(1)$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(-2) \geq C_{A\cap B}(2)$.

$C_{A\cap B}(-3) = C_{A\cap B}(1)$

$= 1$

≥ 1

$= C_{A\cap B}(3)$

Sedemikian sehingga, $C_{A\cap B}(-3) \geq C_{A\cap B}(3)$.

Karena berlaku $C_{A\cap B}(x^{-1}) \geq C_{A\cap B}(x)$ untuk setiap x di Z_4, maka aksioma (ii) terpenuhi. Kemudian karena aksioma (i) dan aksioma (ii) pada Definisi 3.1.1 telah terpenuhi maka disimpulkan bahwa $A \cap B$ adalah multigrup dari Z_4.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan dapat disimpulkan bahwa:

1. Multigrup merupakan sebuah multiset yang fungsi penghitungnya di petakan terhadap bilangan bulat non negatif dengan syarat syarat tertentu. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

   Misalkan X adalah sebuah Grup. Multigrup dari X adalah sebuah multiset G yang memenuhi dua aksioma berikut:

   i. $C_G(xy) \geq C_G(x) \wedge C_G(y)$ untuk setiap $x, y \in X$

   ii. $C_G(x^{-1}) \geq C_G(x)$ untuk setiap $x, \in X$

   Himpunan semua multigrup di X dinotasikan dengan $MG(X)$.

   Multigrup memiliki sifat-sifat sebagaimana berikut:

   i. $C_A(e) \geq C_A(x)$, untuk setiap x $\in X$;

   ii. $C_A(x^n) \geq C_A(x)$ untuk setiap x $\in X$, dimana n adalah bilangan bulat tak negatif;

   iii. $C_A(x^{-1}) = C_A(x)$ untuk setiap x $\in X$.

2. Jumlah dari multigrup yakni $A + B \in MG(X)$ telah terbukti merupakan multigrup karena memenuhi dua aksioma yang diberikan pada definisi multigrup.

3. Irisan dari multigrup yakni $A \cap B \in MG(X)$ telah terbukti merupakan multigrup karena memenuhi dua aksioma yang diberikan pada definisi multigrup.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan sifat-sifat multigrup pada penjumlahan multigrup dan irisan multigrup. Maka dari itu, penulis menyarakan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut tentang sifat-sifat lain yang dapat memenuhi syarat-syarat pada multigrup.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. (2009). *Matematika 1: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an*. Malang: Uin Malang Pres.

Abdussakir, & Rosimanidar. (2017). Model Integrasi Matematika dan Al-Qur'an serta praktik Pembelajaranya. *Makalah Seminar Nasional Integrasi Matematika di dalam Al-Quran*, (pp. 1-16). Bukittinggi.

Arifin, A. (2000). *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung..

Awolola, J. A., & Ibrahim, M. a. (2016). Some Result on Multigroups. *Quasigroups and Related System*, 169-177.

Dresher, M., & Ore, O. (1938). Theory of Multigroups. *American J. Math*, 705-733.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra Third Edition*. United states ofAamerica: Jhon wiley & sons, inc.

Ejegwa, P. A., & Ibrahim, A. M. (2020). Some Properties of Multigroup. *Palestine Journal of Mathematics*, 31-47.

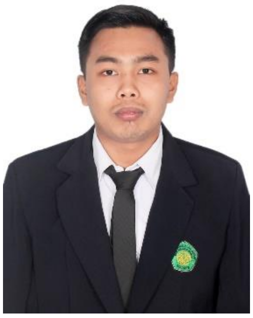
Gilbert, L., & Gilbert, J. (2009). *Elements of Modern Algebra*. USA: BROOKS/COLE CENGAGE Learning.

masykuri, s. (2016). *Ilmu Faraid*. Kediri: Lirboyo Press.

Nazmul, S., Majumdar, P., & Samanta, S. K. (2013). On Multiset and Multigroups. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 643-656.

Setiawan, A. (2014). *Dasar-dasar Aljabar Modern : Teori Grup dan Teori Ring*. Salatiga: Tisara Grafika.

RIWAYAT HIDUP



Maulana Fadli, yang akrab dipanggil Fadli, merupakan mahasiswa Jurusan Matematika Fakulta Sains dan Teknologi di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Pria kelahiran Bali, 6 Januari 1998 ini pernah menempuh pendidikan non-formal di PP. Al-Mahrusiyah Lirboyo Kediri (2013-2016). Selain itu, ia juga aktif dalam organisasi intra dan ekstra kampus. Salah satunya, ia pernah menduduki posisi sebagai Ketua PKPT IPNU UIN Malang (2019-2020).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI

Nama	:	Maulana Fadli
NIM	:	16610092
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Jumlah dan Irisan dari Multigrup
Pembimbing I	:	Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II	:	Dewi Ismiarti, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	20 Februari 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2.	28 Februari 2020	Revisi Bab I dan Bab II, Konsultasi Bab III		2.
3.	10 Maret 2020	ACC Bab I, Revisi Bab II dan Bab III	3.	
4.	27 Maret 2020	ACC Bab II dan Bab III		4.
5.	29 Maret 2020	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II	5.	
6.	14 April 2020	Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II		6.
7.	23 April 2020	ACC Agama Bab I dan Revisi Bab II	7.	
8.	01 Mei 2020	ACC Kajian Agama Bab II		8.
9.	01 Mei 2020	ACC Ujian Sempro Pembimbing 1	9.	
10.	01 Mei 2020	ACC Ujian Sempro Pembimbing 2		10.
11.	2 Juni 2020	Konsultasi Pembuktiaan Bab III	11.	
12.	18 Juni 2020	Revisi Pembuktian Bab III		12.
13.	15 Juli 2020	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II (ganti ayat baru)	13.	
14.	07 September 2020	Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II		14.

15.	14 September 2020	Revisi Pembuktian Bab III	15.	
16.	29 September 2020	ACC Pembuktian Bab III dan Konsultasi Bab IV		16.
17.	04 November 2020	ACC Kajian Agama Bab I dan Revisi Kajian Agama Bab II	17.	
18.	09 November 2020	ACC Kajian Agama Bab II		18.
19.	09 November 2020	ACC Keseluruhan untuk Ujian Sidang dari Pembimbing 1	19.	
20.	09 November 2020	ACC Keseluruhan untuk Ujian Sidang dari Pembimbing 2		20.

Malang, 27 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001