

**ANALISIS DINAMIK MODEL FRAKSIONAL RESPON IMUN
TERHADAP PATOGEN**

SKRIPSI

**OLEH:
YUSROTUL FAJRI
NIM. 16610063**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS DINAMIK MODEL FRAKSIONAL RESPON IMUN
TERHADAP PATOGEN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Yusrotul Fajri
NIM. 16610063**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS DINAMIK MODEL FRAKSIONAL RESPON IMUN
TERHADAP PATOGEN**

SKRIPSI

Oleh
Yusrotul Fajri
NIM. 16610063

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 November 2020

Pembimbing I



Dr. Heni Widayani, M.Si
NIP.19901006 20180201 2 229

Pembimbing II



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK MODEL FRAKSIONAL RESPON IMUN
TERHADAP PATOGEN**

SKRIPSI

Oleh
Yusrotul Fajri
NIM. 16610063

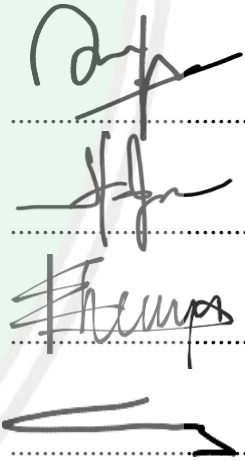
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Diisyaratkan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 30 November 2020

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Ketua Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yusrotul Fajri

NIM : 16610063

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil ciplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Desember 2020
Yang membuat pernyataan



Yusrotul Fajri
NIM. 16610063

MOTTO

“ Sekecil apapun nikmat yang diberikan Allah swt maka bersyukurlah karena dengan selalu bersyukur maka kebahagiaan akan selalu diraih ”



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua dan saudara kandung penulis, yang senantiasa dengan ikhlas serta sabar mendoakan, memberi semangat serta nasihat, dan kasih sayang yang tak terbatas



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberi arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberi arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademik Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayahanda dan ibunda, yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.

8. Sahabat-sahabat penulis yang menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.
Aamiin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 30 November 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
1.5 Batasan Masalah.....	3
1.6 Metode Penelitian.....	4
1.7 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Sistem Imun	6
2.2 Respon Imun	6
2.3 Respon Imun Non-Spesifik.....	7
2.4 Respon Imun Spesifik	9

2.5 Persamaan Diferensial	10
2.6 Persamaan Diferensial Biasa.....	10
2.7 Model Matematika Respon Imun Spesifik Terhadap Patogen	11
2.8 KalkulusFraksional	12
2.9 Sistem Dinamik.....	17
2.10 Titik Keseimbangan.....	26
2.11 Linierisasi.....	26
2.12 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	27
2.13 Ayat Al-Qur'an dan Hadist yang Berkaitan Dengan Sistem Imun Manusia.....	28
BAB III PEMBAHASAN	33
3.1 Konstruksi Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen	33
3.2 Titik Keseimbangan.....	33
3.3 Analisis Titik Keseimbangan.....	36
3.4 Simulasi Dengan Model Persamaan Diferensial Biasa.....	43
3.5 Simulasi Dengan Model Persamaan Diferensial Fraksional.....	47
BAB IV PENUTUP	50
4.1 Kesimpulan	50
4.2 Saran	50
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sistem respon kekebalan atau imun..... 7

Gambar 2.2 wilayah stabilitas titik equilibrium \bar{X} dari sistem (2.20) 25

Gambar 3.1 Tumor dan Sel T dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 1, c = 4, a = 0.2, \mu = 3.98, v = 1.9, \delta = 1.99, \alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 0.75$ 44

Gambar 3.2 Tumor dan Sel T dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 10, c = 4, a = 4, \mu = 3.9, v = 1.9, \delta = 1, \alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6$ 45

Gambar 3.3 Tumor dan Sel T dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 5, c = 4, a = 1, \mu = 3.9, v = 1.9, \delta = 1, \alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6$ 46

Gambar 3.4 Perubahan subpopulasi sistem $P(t)$ dan $T(t)$ untuk titik kesetimbangan E_0 dengan $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8$, dan $\alpha = 0.9$ 47

Gambar 3.5 Perubahan subpopulasi sistem $P(t)$ dan $T(t)$ untuk titik kesetimbangan E_1 dengan $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8$, dan $\alpha = 0.9$ 48

Gambar 3.6 Perubahan subpopulasi sistem $P(t)$ dan $T(t)$ untuk titik kesetimbangan E_2 dengan $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8$, dan $\alpha = 0.9$ 49

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Deskripsi dari Model dan Parameter	11
Tabel 3.1	Nilai-nilai dari Parameter	43



ABSTRAK

Fajri, Yusrotul. 2020, **Analisis Dinamik Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si. (2) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata Kunci: orde fraksional, model respon imun terhadap patogen, titik kesetimbangan, kestabilan asimtotik lokal

Penelitian ini membahas model fraksional dari respon imun terhadap patogen. Model tersebut mempunyai dua subpopulasi yaitu, subpopulasi imun spesifik (sel T) dan subpopulasi Tumor (patogen). Berdasarkan subpopulasi tersebut maka untuk laju dari perubahan kedua subpopulasi diasumsikan tidak hanya bergantung pada kondisi saat ini saja tetapi juga mempertimbangkan semua kondisi atau keadaan sebelumnya. Pada model orde fraksional ini dilakukan analisis eksistensi titik kesetimbangan dan kestabilan dari titik kesetimbangan yang bertujuan untuk mengetahui bagaimana perilaku dari model tersebut. Berdasarkan hasil analisis didapatkan tiga titik kesetimbangan. Pada analisis tersebut menunjukkan bahwa titik kesetimbangan kepunahan subpopulasi tidak stabil. Sedangkan, pada titik kesetimbangan yang lainnya stabil asimtotik lokal dengan syarat tertentu. Untuk mendukung hasil analisis, model fraksional tersebut dilakukan simulasi dengan bervariasi orde fraksional $\alpha \in (0,1)$. Simulasi numerik tersebut menunjukkan bahwa orde fraksional α menjadi salah satu faktor penyebab terjadinya perubahan perilaku solusi.

ABSTRACT

Fajri, Yusrotul. 2020, **Dynamic Analysis of Fractional Models of Immune Response to Pathogens**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si. (2) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keywords: fractional order, models of immune response to pathogens, equilibrium point, local asymptotic stability

This research discusses the fractional models of immune response to pathogens. This model has two subpopulations, namely, specific immune (T cells), and Tumor (pathogen). It is assumed that the growth rate of all subpopulation is not only depends on the current conditions but also the previous conditions. The fractional model analyzes the existence of an equilibrium point and stability of the equilibrium point which aims to find out how the model behaves. It is found that the model has three equilibrium points. Based on analysis result, the extinction point is unstable node while the others are conditionally stable under some conditions. To support the analysis results, the fractional order model is simulated with fractional order $\alpha \in (0,1)$. Numerical simulations show that the fractional order α is one of the factors that affect the solution behavior

ملخص

الفجري، يسرة. ٢٠٢٠ ، التحليل الديناميكي لنموذج كسري للاستجابة المناعية لمسببات الأمراض. البحث العلمي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالكا إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة : (١) الدكتورة حيني ويدياني الماجستير، المشرف : (٢) الدكتور عثمان باجالاي الماجستير.

الكلمات المفتاحية: الترتيب كسري ، نموذج استجابة المناعية لمسببات الأمراض، نقطة التوازن، الاستقرار مقارب المحلي.

تبحث هذه الدراسة في نموذج كسري للاستجابة المناعية لمسببات الأمراض. يحتوي النموذج على مجموعتين فرعيتين، وهما فئة السكان المناعية المحددة (الخلايا التائية) والسكان الفرعيين للورم (مسببات الأمراض). استنادًا إلى التجمعات السكانية الفرعية، يُفترض أن معدل التغيير بين المجموعتين الفرعيتين لا يعتمد فقط على الحالة الحالية ولكن أيضًا للنظر في جميع الشروط أو الظروف السابقة. في نموذج الترتيب كسري ، يتم إجراء تحليل لوجود نقطة توازن واستقرار نقطة التوازن من أجل معرفة كيف يتصرف النموذج. بناءً على نتائج التحليل تم الحصول على ثلاث نقاط توازن. يوضح هذا التحليل أن نقطة توازن انقراض السكان الفرعية غير مستقرة. في حين عند نقطة التوازن الأخرى، يكون مستقرًا مقاربًا محليًا مع ظروف معينة. لدعم نتائج التحليل، النموذج بتغيير الترتيب $\alpha \in (0,1)$ توضح المحاكاة العددية أن الترتيب كسري α هو أحد العوامل التي تسبب تغيرات في سلوك الحل.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mikroorganisme parasit yang dapat menyebabkan suatu penyakit pada inangnya disebut dengan patogen. Salah satu penyakit yang disebabkan mikroorganisme berbahaya ini adalah tumor. Tumor dapat terjadi baik pada pria maupun wanita, akan tetapi pada umumnya tumor ini lebih sering menyerang wanita. Tumor ini sering berukuran lebih besar pada pria dibandingkan wanita dikarenakan onset gejala biasanya terlambat pada pria (Linda, 2005: 73). Pada dasarnya, penyakit ini memiliki proses yang kompleks untuk tumor dan inangnya. Sistem kekebalan tubuh atau imun yang kuat menjadi faktor penting dalam mencegah perkembangan penyakit ini. Sistem imun dinyatakan sebagai sistem terstruktur dan biologis dalam suatu organisme yang melindungi tubuh dari organisme berbahaya. Sel sistem kekebalan tubuh seperti sel T diklasifikasikan menjadi dua jenis yang berbeda yaitu efektor dan memori sel T (Dasbasi, 2018).

Dalam Al-Qur'an telah dijelaskan bahwa setiap manusia telah diciptakan oleh Allah ﷻ dalam sebaik-baik bentuk. Oleh karena itu, nikmat tersebut harus selalu disyukuri dengan selalu menjaga kondisi fisik maupun mental, dan dengan hal tersebut juga berdampak pada penguatan sistem imun pada manusia itu sendiri, sebagaimana firman Allah ﷻ Q.S At-Tiin: 4, yang artinya: "Sesungguhnya kami telah menciptakan manusia dalam bentuk sebaik-baiknya"

Dalam tafsir Ibn Kathir menjelaskan bahwa "Dan inilah subjek sumpahnya, yaitu bahwa Allah ﷻ. Telah menciptakan manusia dalam bentuk yang paling baik dan rupa yang paling sempurna, tegak jalannya dan sempurna, lagi baik semua anggota tubuhnya." Dalam hadist Rasulullah ﷺ yang diriwayatkan oleh Muslim yang artinya, "Orang beriman yang kuat lebih baik dan lebih dicintai Allah daripada orang beriman yang lemah." Hadist tersebut menjelaskan bahwa Allah ﷻ sangat mencintai orang yang selalu menjaga kondisi fisik dan mental dengan kata lain membuat tubuh mereka kuat dan tidak lemah. Mempunyai tubuh yang kuat

maka sistem imun dalam tubuh juga akan kuat dalam melindungi tubuh dari berbagai macam penyakit.

Kalkulus fraksional merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang turunan dan integral orde fraksional. Orang yang pertama kali memperkenalkan kalkulus fraksional adalah Leibniz dan L'Hospital pada tahun 1665 (Diethelm, 2004). Model fraksional pada laju pertumbuhannya bergantung pada kondisi saat ini dan juga mempertimbangkan semua keadaan sebelumnya. Model persamaan diferensial fraksional ini memberikan deskripsi yang lebih akurat dibandingkan sistem dinamik orde satu untuk dinamika alam yang kompleks (Nugraheni, 2017).

Dinamika sel T dan tumor penting untuk dikaji agar sifat dari penyakit tersebut dapat diketahui. Untuk mengatasi masalah ini dilakukan suatu analisis kestabilan dengan menggunakan persamaan diferensial fraksional. Dasar dari penjelasan fraksional yang paling berguna adalah konsep memori. Jika output dari suatu sistem pada masing-masing waktu t hanya bergantung pada input di waktu t , maka sistem tersebut dikatakan sebagai sistem tanpa memori. Sebaliknya, jika sistem harus mengingat nilai input sebelumnya untuk menentukan nilai output saat ini, maka ini dinamakan sistem memori (Dasbasi, 2018).

Berdasarkan uraian diatas, maka penulis akan menjelaskan lebih mendalam lagi dengan mengangkat judul skripsi “Analisis Dinamik Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka diperoleh rumusan masalah yaitu, sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi model fraksional respon imun terhadap patogen?
2. Bagaimana titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan model fraksional respon imun terhadap patogen?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model fraksional respon imun terhadap patogen?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi model fraksional respon imun terhadap patogen.
2. Menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan model fraksional respon imun terhadap patogen.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik model fraksional respon imun terhadap patogen.

1.4 Manfaat Penelitian

berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh konstruksi model fraksional respon imun terhadap patogen.
2. Mengetahui analisis dinamik model fraksional respon imun terhadap patogen.
3. Memperoleh interpretasi hasil simulasi numerik model fraksional respon imun terhadap patogen.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Model yang digunakan pada penelitian ini merupakan sistem persamaan diferensial fraksional multi-orde dan akan dianalisis serta dilakukan simulasi numerik dari model tersebut.
2. Analisis dinamik pada penelitian ini adalah menentukan titik kesetimbangan model. Kemudian, berdasarkan ditentukan kestabilan titik kesetimbangan model tersebut.
3. Parameter yang digunakan berdasarkan parameter yang diberikan Dasbasi (2018).

1.6 Metode penelitian

Adapun langkah-langkah dari metode yang diterapkan dalam penelitian ini secara rinci dijabarkan sebagai berikut:

- A. Konstruksi Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen
 1. Menggunakan model respon imun terhadap patogen dengan laju kejadian nonlinear yang diperkenalkan oleh dasbasi (2018).
 2. Mengubah turunan orde biasa $\frac{dP}{dt}$ dan $\frac{dT}{dt}$ pada model tersebut menjadi turunan orde fraksional $\frac{d^{\alpha_1}P}{dt^{\alpha_1}}$ dan $\frac{d^{\alpha_2}T}{dt^{\alpha_2}}$.
- B. Menganalisis dinamika model fraksional respon imun terhadap patogen
 1. Konstruksi model
 2. Mencari titik kesetimbangan
 3. Melinearisasi persamaan
 4. Mencari matriks Jacobian, nilai eigen
 5. Menganalisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan.
- C. Simulasi numerik model fraksional respon imun terhadap patogen
 1. Simulasi dilakukan dengan menggunakan program Matlab yaitu dengan mendefinisikan model fraksional tersebut ke dalam program tersebut.
 2. Menginput parameter-parameter yang terdapat pada model tersebut.
 3. Dilakukan simulasi untuk mendapatkan gambaran dari kestabilan disekitar titik kesetimbangan pada model fraksional tersebut.
 4. Menginterpretasi hasil gambar dari analisis kestabilan model fraksional tersebut.

Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

untuk mempermudah pembaca dalam memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab yaitu sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dijelaskan konsep-konsep yang mendasar dalam teori yang dikaji, yaitu definisi persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, kalkulus fraksional, sistem dinamik, linearisasi, nilai eigen, sistem kekebalan tubuh, sel patogen, dan kaitan sistem kekebalan tubuh dalam Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dikemukakan hasil penelitian tentang titik kesetimbangan, linearisasi, nilai eigen, dan analisis kestabilan persamaan serta simulasi numerik dari persamaan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dikemukakan kesimpulan dari pembahasan dan beberapa saran yang berkaitan dengan penelitian.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

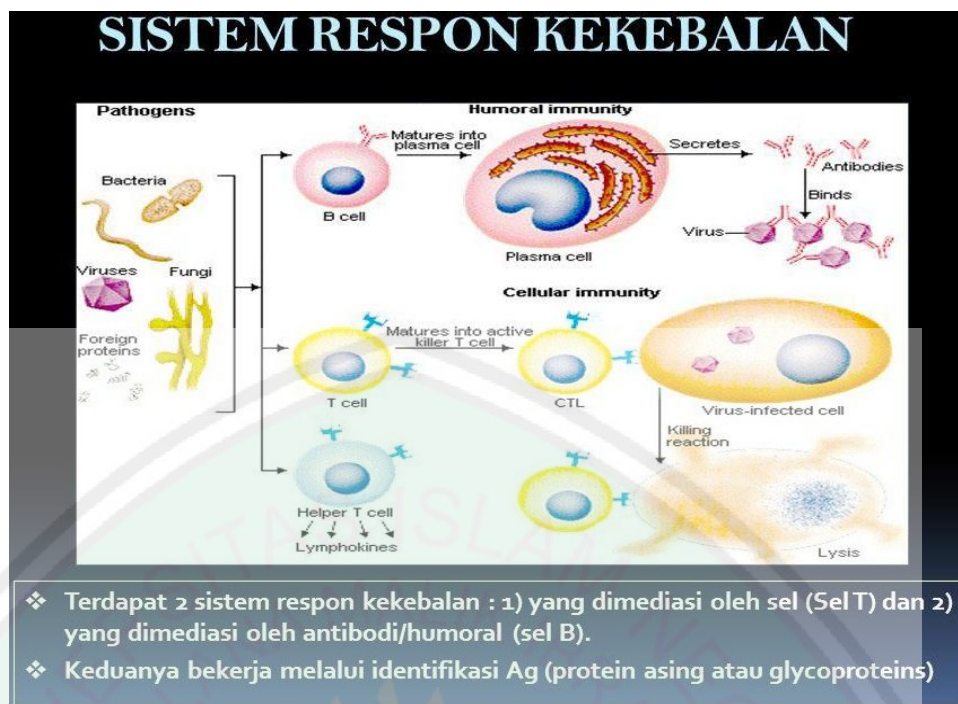
2.1 Sistem imun

Sistem imun manusia secara normal mempunyai kemampuan membedakan antara zat asing (*non-self*) yang dikenal sebagai antigen, dan zat yang berasal dari tubuh sendiri (*self*). Namun, pada beberapa kondisi patologis, sistem imun tidak mampu membedakan keduanya. Akibatnya, sel-sel dalam sistem imun membentuk zat anti terhadap jaringan tubuhnya, atau yang dikenal dengan autoantibodi (Antari, 2017:10-11).

2.2 Respon Imun

Respon imun adalah suatu respon dari semua komponen sistem imun secara bersama dan terkoordinasi untuk mengeliminasi antigen yang masuk ke dalam tubuh. Respon imun diawali dengan adanya pengenalan molekul antigen oleh komponen sistem imun melalui reseptor yang menstimulasi sistem saraf di dalam otak. Hal ini berguna untuk membangkitkan dan melakukan reaksi yang tepat guna mengeliminasi antigen tersebut (Antari, 2017:11).

Respon imun tubuh tergantung dari kemampuan komponen sistem imun dalam mengenali molekul antigen serta membangkitkan dan melakukan reaksi yang tepat dalam mengeliminasi antigen. Respon imun sendiri dapat dibedakan menjadi respon imun non-spesifik (*innate immunity*) dan respon imun spesifik (*adaptive immunity*) (Antari, 2017:11).



Gambar 2.1 sistem respon kekebalan atau imun

(<https://www.berbagaireviews.com/2018/06/sistem-kekebalan-tubuh-sistem-imun.html>).

2.3 Respon Imun Non-Spesifik

Respon imun non-spesifik merupakan respon terhadap antigen yang dapat timbul walaupun tubuh sebelumnya tidak atau belum pernah terpapar antigen. Respon imun ini telah ada dan berfungsi sejak lahir. Fungsi imun non-spesifik ini untuk memberikan respon dini terhadap antigen, dan menginduksi terjadi respon imun selanjutnya, yaitu respon imun spesifik (*adaptive immunity*) (Antari, 2017:11)

Mengingat fungsinya sebagai respon dini terhadap antigen, maka tentu saja komponen yang berperan sebagai pertahanan utama dan pertamanya adalah pertahanan fisik dan kimiawi yang meliputi enzim lisozim dalam air mata dan berbagai sekresinya, bakteri komersal, kulit, asam lemak, flora normal dalam vagina, mucus, silia, perubahan pH dalam saluran pencernaan, dan traktus urinaria. Selain pertahanan pertama, imun non-spesifik juga membutuhkan peranan lain yang dinamakan dengan pertahanan kedua, yang diperankan oleh berbagai jenis protein dalam darah, mediator inflamasi, sitokin, sel-sel polimorfonuklear (PMN), *natural killer (NK) cells*, *dendritic cells (DC)*,

makrofag, dan juga neutrofil (Antari, 2017:12). Adapun komponen utama respon imun nonspesifik adalah sebagai berikut:

a. Monosit

Monosit merupakan Suatu proses untuk pengenalan antigen, menelan, dan degradasi atau bisa disebut dengan fagosit, yang kemudian didistribusikan secara luas di organ limfoid dan organ lainnya. Peranan dari monosit ini adalah sebagai *Antigen Presenting Cell* (APC), memproduksi sitokin, mengenali mikroba, menyerang mikroba, dan kemudian, pertahanan sebagai respon terhadap infeksi (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

b. Neutrofil

Sel pertama yang masuk pada jaringan yang rusak adalah neutrofil. Neutrofil ini merupakan sebagian besar dari leukosit dalam sirkulasi. Fungsi dari neutrofil ini adalah mengenal patogen secara langsung, menghancurkan antigen melalui jalur oksigen independen dan oksigen dependen (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

c. Makrofag

Kegunaan dari makrofag ini adalah untuk memusnahkan benda, seperti mikroorganisme, kompleks antigen-antibodi dan bahan lain yang berstruktur seperti antigen. Pada tahapan proses dari makrofag ini, hasil akhirnya adalah bahan yang telah dikelompokkan sebagai antigen akan dicerna sehingga mengakibatkan ancaman bagi tubuh tidak ada lagi (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

d. Sel Dendritik

Kegunaan dari sel dendritik ini adalah pengenalan dan mengikat antigen, mengolah dan mempresentasikan antigen ke sel T atau sel B. Perlu diketahui bahwa, sel dendritik ini berasal dari prekursor monosit dalam darah atau dari monosit sendiri atau sel asal dalam sumsum tulang (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

e. Sel *Natural Killer* (NK)

Sel *Natural Killer* merupakan limfosit granular besar yang membunuh sel sasaran melalui Sel Antibodi Dependen *Cytotoxicity* (SADC) atau lisis

yang menggunakan mekanisme melalui Fas atau perforin (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

2.4 Respon imun spesifik

Imun spesifik adalah sistem imun yang bereaksi lebih lambat dengan kemampuan pertahanan yang lebih besar berupa rangkaian interaksi seluler yang hasil akhirnya adalah pengeluaran produk-produk selspesifik, dengan ciri khusus yaitu adanya spesifisitas, heterogenitas, diversitas, homeostasis, dan memori (Fitri, 2017:2)

Respon imun spesifik inang melibatkan aktivasi makrofag, limfosit T, limfosit B, disertai pelepasan sitokin dan antibodi, serta melibatkan berbagai sel imun yang lain. Respon imun seluler terhadap suatu infeksi juga tergantung dari peranan sel limfosit T (CD)4⁺ dan aktivitas sitokin yang dihasilkannya. Respon imun seluler yang protektif berhubungan dengan CD8⁺, kadar *interferon gamma* (IFN- γ) tinggi yang kemudian akan menyensitisasi makrofag untuk menyekresi tumour necrosis factor- α (TNF- α) (Fitri, 2017:3). Adapun limfosit yang berperan dalam respon imun spesifik adalah sebagai berikut:

a. Sel B

Sel B berfungsi untuk memproduksi antibodi untuk menetralkan patogen dan toksin. Sel B yang diaktifkan dapat berkembang menjadi sel plasma yang memproduksi dan mensekresi antibodi atau sel memori (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

b. Sel T

Peranan dari sel T ini adalah pada inflamasi, aktivasi fagositosis makrofag, aktivasi dan proliferasi sel B dalam produksi antibodi. Sel T juga mempunyai peranan lain yaitu untuk pengenalan dan penghancuran sel yang terinfeksi virus (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

c. Sel T Helper

Sel T Helper ini merupakan bagian dari sel T yang gunanya untuk mengaktifkan makrofag yang gunanya untuk membunuh antigen dan sel *Cytotoxic T Lymphocyte* (CTL) yang membunuh sel terinfeksi mikroba dan menyingkirkan sumber infeksi (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

d. Subset Sel T

Perlu diketahui bahwa sel T terdiri dari sel CD4+, CD8+, Treg/Tr/Ts/Th3, Sel t Naif, dan *Natural Killer Cell T*. Sel T yang mengekspresikan CD4+ gunanya untuk mengenal antigen yang berhubungan dengan MHC-II dan umumnya bekerja sebagai Th. Kemudian, sel T yang mengekspresikan CD8+ berguna untuk mengenal antigen yang diikat MHC-I yang umumnya berfungsi sebagai *T Cytotoxic*. Treg/Tr/Ts/Th3 berfungsi dalam toleransi oral, regulasi imunitas mukosa, melepas TGF dan IL-10 yang merupakan pertanda supresi. Selanjutnya, sel T naif ini merupakan sel yang berada dalam keadaan istirahat yang tidak terpapar antigen (Baratawidjaja dan Rengganis, 2010).

2.5 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang mempunyai bentuk diferensial, misalnya $\frac{dy}{dt}$ atau $\frac{dy}{dx}$. Pada bentuk diferensial $\frac{dy}{dx}$, x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tidak bebas. Persamaan diferensial merupakan manifestasi dalam usaha untuk memahami fenomena alam yang selanjutnya dapat digunakan untuk memprediksi fenomena alam tersebut. Jadi, persamaan diferensial merupakan bentuk matematis dari suatu model atau imitasi fenomena fisis, kimiawi maupun biologis. Pada umumnya, bentuk persamaan diferensial merupakan bentuk fenomena yang menerangkan objek yang diamatai (variabel tergantungnya) sebagai fungsi waktu (t) dan atau ruang (x, y, z) (Sasongko, 2010:141).

2.6 Persamaan diferensial biasa

Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasikan berdasarkan pangkat atau orde (order), linearitas, dan kondisi batas (boundary condition). Orde dari suatu persamaan diferensial merupakan orde tertinggi dari suatu derivasi (turunan) yang ada di dalam persamaan tersebut (Sasongko, 2010:142).

Berdasarkan linearitas, persamaan diferensial biasa dapat dikelompokkan menjadi persamaan linier dan persamaan non-linier. Secara umum, bentuk persamaan diferensial biasa linear adalah sebagai berikut.

$$b_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x) \quad (2.1)$$

Apabila nilai $R(x) = 0$, maka disebut dengan persamaan diferensial biasa linear homogen, sedangkan apabila nilai $R(x) \neq 0$, maka disebut dengan persamaan diferensial biasa linear non-homogen atau heterogen (Sasongko, 2010:141).

Berdasarkan kondisi batas, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi permasalahan nilai awal dan permasalahan dengan kondisi batas. Suatu persamaan diferensial disebut permasalahan nilai awal jika nilai dari variabel tak bebasnya (dependent variable) atau turunannya diketahui pada kondisi nilai mula-mula dari variabel bebasnya. Sedangkan persamaan diferensial akan disebut permasalahan dengan kondisi batas jika harga dari variabel tak bebasnya atau turunannya diketahui lebih dari satu dari nilai variabel bebasnya. Apabila nilai dari variabel tak bebasnya atau turunannya diketahui pada posisi awal dan kondisi akhir dari variabel bebasnya, maka persamaan diferensial tersebut digolongkan sebagai permasalahan dengan dua titik nilai batas (Sasongko, 2010:142-143).

2.7 Model Matematika Respon Imun Spesifik Terhadap Patogen

Adapun model matematika dari respon imun spesifik terhadap patogen adalah sebagai berikut (Dasbasi, 2018).

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \beta_p P \cdot \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cPT}{Pa+1} \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\mu P}{Pv+1} T - \delta T \end{aligned} \quad (2.2)$$

Parameter	Deskripsi	Unit
$P(t)$	Populasi patogen (Tumor)	Sel/hari
$T(t)$	Populasi sistem imun spesifik	Sel/hari
β_p	Tingkat pertumbuhan tumor	Hari
Λ	Daya dukung tumor	Sel
c	Tingkat pembunuhan maksimum tumor oleh sel-sel kekebalan tubuh	Hari
a	Sel imun untuk setengah efek maksimal pada tumor	Sel/hari
μ	Efek tingkat penangkapan sel imun	Hari

ν	Ukuran populasi tumor di ana tingkat pertumbuhan sel-sel kekebalan setengah dari maksimum	Sel/hari
δ	Tingkat kematian alami sel-sel kekebalan tubuh	Hari

Tabel 2.1 Deskripsi dari Model dan Parameter

2.8 Kalkulus Fraksional

pendefinisian kalkulus fraksional menggunakan beberapa pendekatan, yaitu menurut Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Kalkulus fraksional memiliki salah satu fungsi dasar yang digunakan untuk mendefinisikan kalkulus fraksional itu sendiri. Adapun fungsi dasarnya, yaitu fungsi Euler Gamma yang disimbolkan dengan $\Gamma(n)$. Akan tetapi, ada fungsi lain yang juga digunakan dalam kalkulus fraksional, yaitu fungsi Beta (Podlubny, 1999).

2.8.1 Fungsi Gamma

Defenisi fungsi Gamma adalah sebagai berikut

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt, \quad \text{untuk } n > 0. \quad (2.1)$$

Berdasarkan defensi fungsi Gamma tersebut maka

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(n+1)-1} dt, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt. \end{aligned}$$

Kemudian, misalkan jika $u = t^n$ maka $du = nt^{n-1} dt$ dan jika $d\vartheta = e^{-t} dt$ maka $\vartheta = -e^{-t}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt &= u\vartheta - \int \vartheta du \\ &= -t^n e^{-t} + \int e^{-t} n t^{n-1} dt \\ &= -t^n e^{-t} + n \int e^{-t} t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\Gamma(n+1) = \lim_{a \rightarrow \infty} [-t^n e^{-t}]_0^a + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \rightarrow \infty} [-a^n e^{-a} + 0^n e^0]_0^a + n\Gamma(n) \\
&= 0 + n\Gamma(n)
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n). \quad (2.2)$$

Apabila $n \in \mathbb{N}$ maka

$$\begin{aligned}
\Gamma(n + 1) &= n\Gamma((n - 1) + 1) \\
&= n(n - 1)\Gamma(n - 1) \\
&= n(n - 1)\Gamma((n - 2) + 1) \\
&= n(n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) \\
&= n(n - 1)(n - 2) \dots 2\Gamma(1) \\
&= n(n - 1)(n - 2) \dots (2)\Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan bahwa

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

(Podlubny, 1999)

2.8.2 Fungsi Beta

Defenisi fungsi Beta adalah sebagai berikut

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt. \quad (2.3)$$

Dimana konvergen untuk $n > 0$. Fungsi Beta juga dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi Gamma, yaitu

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

(Podlubny, 1999)

2.8.3 Integral Fraksional Riemann-Liouville

Misalkan α adalah bilangan real, maka integral fraksional orde α dari fungsi $f(t)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
J^\alpha f(t) &= D^{-\alpha} f(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Dengan $\alpha > 0$

(Petras, 2011).

Untuk $\alpha \geq 0$ dan $\beta \geq 0$, maka integral fraksional yang dikemukakan Riemann-Liouville mempunyai sifat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{a) } J^\alpha J^\beta f(t) &= J^{\alpha+\beta} f(t) \\ \text{b) } J^\alpha J^\beta f(t) &= J^\beta J^\alpha f(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Defenisi ini mempunyai arti bahwa notasi integral fraksional berorde α dengan batas bawah $t_0 = 0$ dari fungsi $f(t)$ ditulis sebagai $J^\alpha f(t)$. Integral fraksional berorde α merupakan anti turunan fraksional berorde $(-\alpha)$ untuk fungsi $f(t)$ yng ditulis sebagai $D^{-\alpha} f(t)$, akibatnya berlaku $J^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t)$ dengan $D^{-\alpha}$ adalah operator turunan fraksional berorde α dengan batas bawah $t_0 = 0$ (Johansyah, 2019, p. 10-11).

Defenisi dari turunan fraksional Riemann-Liouville sebagai berikut

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds, \quad (2.6)$$

Untuk $n - 1 < \alpha < n$, dimana α dan t adalah operator dari ${}_\alpha D_t^\alpha f(t)$.

(Petras, 2011).

Contoh 2.1. Turunan fraksional untuk $f(t) = t^p$ dengan $p, t > 0$ dan $0 < \alpha < 1$ adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{s^p}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t s^p (t-s)^{n-\alpha-1} ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t s^p (t)^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Kemudian, misalkan $\lambda = \frac{s}{t}$ maka diperoleh

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \int_0^1 \lambda^p (t-\lambda)^{n-\alpha-1} d\lambda,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \beta(p+1, n-\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+n-\alpha)} \frac{\Gamma(p+1+n-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha},
\end{aligned}$$

Disebabkan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (t^{n-\alpha+p}) &= (n-\alpha+p)t^{n-\alpha+p-1} \\
\frac{d^2}{dt^2} (t^{n-\alpha+p}) &= (n-\alpha+p)(n-\alpha+p-1)t^{n-\alpha+p-2} \\
&\vdots \\
\frac{d^k}{dt^k} (t^{n-\alpha+p}) &= (n-\alpha+p) \cdots (n-\alpha+p-1)t^{n-\alpha+p-k} \\
&= \frac{(n-\alpha+p)!}{(n-\alpha+p-k)!} t^{n-\alpha+p-k} \\
\frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+p}) &= \frac{(n-\alpha+p)!}{(-\alpha+p)!} t^{-\alpha+p} \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)}{\Gamma(-\alpha+p+1)} t^{-\alpha+p}
\end{aligned}$$

Dimana, untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

(Saprianto, 2019)

2.8.4 Turunan Fraksional Caputo

Turunan fraksional untuk defenisi Caputo adalah sebagai berikut,

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{d^n f(s)}{dt^n} (t-s)^{\alpha-n+1} ds \quad (2.7)$$

Untuk $n-1 < \alpha < n$. $n \in \mathbb{N}$ (Petras, 2011).

Contoh 2.2. Turunan fraksional untuk $f(t) = t^p$ dengan $p, t > 0$ dan $0 < \alpha < 1$ adalah sebagai berikut,

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{d^n (s^p)}{dt^n} (t-s)^{\alpha-n+1} ds$$

Dikarenakan,

$$\frac{d^n (s^p)}{dt^n} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} s^{p-n}$$

Maka diperoleh,

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} (s)^{p-n} (t-s)^{n-\alpha-1} ds.$$

Kemudian, misalkan $\lambda t = s$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (\lambda t)^{p-n} ((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1} t d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} (t)^{p-\alpha} \int_0^1 (\lambda)^{p-n} (1-\lambda)^{n-\alpha-1} d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} (t)^{p-\alpha} \beta(p-n+1, n-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} (t)^{p-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \end{aligned}$$

(Saprianto, 2019)

Perlu diketahui hubungan antara operator Riemann-Liouville dan operator diferensial fraksional Caputo adalah sebagai berikut:

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \quad (2.8)$$

Untuk $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, \dots, n - 1)$.

Turunan fraksional caputo bermanfaat dalam mengaplikasikan turunan fraksional dalam memodelkan peristiwa pada dunia nyata, disebabkan karena nilai kondisi awal pada turunan fraksional Caputo sama dengan persamaan diferensial biasa (petras, 2011).

2.8.5 Fungsi Mittag-Leffler

Fungsi Mittag-Leffler disimbolkan dengan E_α . misalkan $\alpha > 0$ maka defenisi fungsi E_α adalah sebagai berikut,

$$E_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^\alpha}{\Gamma(j\alpha + 1)} \quad (2.9)$$

Fungsi Mittag-Leffler ini mempunyai peran penting juga dalam persamaan diferensial fraksional (Diethelm, 2010).

2.9 Sistem Dinamik

2.9.1 Sistem Otonomous PDF (Persamaan Diferensial Fraksional)

Operator ${}_0D_t^\alpha$ yang merupakan notasi dari persamaan diferensial fraksional turunan caputo. Adapun bentuk umum dari sistem persamaan diferensial fraksional linear adalah sebagai berikut.

$$D^\alpha \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad (2.10)$$

Dengan $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan $0 < \alpha < 1$

Sistem diferensial fraksional dimensi n dapat dinyatakan sebagai berikut,

$${}_0D_t^\alpha x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t),$$

$${}_0D_t^\alpha x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$${}_0D_t^\alpha x_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)$$

(Petras, 2011)

2.9.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan diferensial fraksional linear (2.11) sebagai berikut,

- Dikatakan stabil apabila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga solusi masalah kondisi $x(0) = x_0$ dan nilai awal yang terdiri dari sistem diferensial fraksional linear memenuhi jika $|x_1(0) - x_1^*|^2 + |x_2(0) - x_2^*|^2 + \dots + |x_n(0) - x_n^*|^2 < \delta$ ada, maka berlaku $|x_1(t) - x_1^*|^2 + |x_2(t) - x_2^*|^2 + \dots + |x_n(t) - x_n^*|^2 < \varepsilon$, untuk setiap $t > 0$.
- Dikatakan stabil asimtotik apabila stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ dengan $0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga suatu penyelesaian sistem persamaan diferensial fraksional linear (2.11) yang memenuhi $|x_1(0) - x_1^*|^2 + |x_2(0) - x_2^*|^2 + \dots + |x_n(0) - x_n^*|^2 < \delta_0$ ada, untuk semua $t > 0$ maka berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ (Diethelm, 2010).

2.9.3 Kestabilan Routh-Hurwitz Orde Fraksional

Titik kesetimbangan dari sistem otonomous fraksional dikatakan stabil asimtotik lokal, jika semua akar persamaan karakteristik dari matriks Jacobiannya

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (2.11)$$

Dengan semua koefisiennya (2.12) adalah bilangan riil. Pada persamaan karakteristik yang merupakan polinomial berorde 3, yaitu

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3. \quad (2.12)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut didefinisikan

$$D(p) = - \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$= 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3a_1^3 - 4a_2^3 - 27a_3^2,$$

Selanjutnya, sifat kestabilan dari titik kesetimbangan E^* dapat dinyatakan sebagai berikut,

- Jika $D(P)$ bernilai positif dan memenuhi kriteria Routh-Hurwitz yaitu $D(P) > 0, a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$ maka E^* stabil asimtotik lokal.
- Jika $D(P) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0, \alpha < \frac{2}{3}$, maka E^* stabil asimtotik lokal dan juga jika $D(P) < 0, a_1 < 0, a_2 < 0, \alpha > \frac{2}{3}$ maka semua akar $P(\lambda) = 0$ memenuhi $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ sehingga E^* stabil asimtotik lokal.
- Jika $D(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 = a_3$, maka E^* stabil asimtotik lokal untuk semua $\alpha \in [0,1)$.

Bukti dapat dilihat pada (Ahmed dkk., 2006).

2.9.4 Sistem Otonomous Nonlinear Persamaan Diferensial Fraksional

Misalkan sistem dua dimensi sebagai berikut,

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= f(x, y) \\ D^\alpha y(t) &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dengan $\alpha \in (0,1]$. Kemudian, nilai awal $x(0) = x_0$ dan $y(0) = y_0$. Maka akan dicari titik kesetimbangannya sebagai berikut, misalkan

$$D^\alpha x(t) = D^\alpha y(t) = 0,$$

Maka

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0.$$

Misalkan didapatkan titik kesetimbangan (x^*, y^*) . Selanjutnya, mengevaluasi kestabilan lokal dari titik kesetimbangan, misalkan

$$\begin{aligned} x(t) &= x^* + \varepsilon_1(t), \\ y(t) &= y^* + \varepsilon_2(t), \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} D^\alpha(x^* + \varepsilon_1) &= f(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \\ D^\alpha(x^* + \varepsilon_2) &= g(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} D^\alpha \varepsilon_1(t) &= f(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2), \\ D^\alpha \varepsilon_2(t) &= g(x^* + \varepsilon_1, y^* + \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Kemudian, deret Taylor fungsi f dan g di sekitar (x^*, y^*) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} f(x, y) &\cong f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 + \eta_1(x, y), \\ g(x, y) &\cong g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 + \eta_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa.

Berdasarkan hampiran orde satu persamaan (2.14), maka suku sisa tersebut memenuhi sifat yaitu,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\vec{\varepsilon}\|} &= 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\vec{\varepsilon}\|} &= 0, \end{aligned}$$

Dengan $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Jika (x, y) berada cukup dekat dengan (x^*, y^*) , maka $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bernilai kecil, sehingga diperoleh persamaan (2.14) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 \\ g(x, y) &= \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Dengan $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} D^\alpha \varepsilon_1(t) &\cong \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 \\ D^\alpha \varepsilon_2(t) &\cong \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Maka diperoleh sistem

$$D^\alpha \vec{\varepsilon} = A \vec{\varepsilon},$$

Dengan nilai awal $\varepsilon_1(0) = x(0) - x^*$, $\varepsilon_2(0) = y(0) - y^*$, dengan $\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Merupakan matriks Jacobian yang dinotasikan dengan $j(x^*, y^*)$. Selanjutnya diperoleh,

$$B^{-1}AB = C,$$

Dengan C adalah matriks diagona; dari A sebagai berikut,

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

Untuk λ_1, λ_2 adalah nilai eigen dari matriks A . Kemudian, B adalah vektor eigen matriks A , sehingga

$$\begin{aligned} AB &= BC, \\ A &= BCB^{-1}. \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} D^\alpha \vec{\varepsilon} &= (BCB^{-1})\vec{\varepsilon}, \\ D^\alpha (B^{-1}\vec{\varepsilon}) &= C(B^{-1}\vec{\varepsilon}), \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan,

$$D^\alpha \zeta_1 = C\zeta_1, \quad \zeta_1 = B^{-1}\vec{\varepsilon}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}.$$

Sistem otonomous non linear fraksional (2.13) dapat dihindarkan dengan sistem linear sebagai berikut,

$$\begin{aligned} D^\alpha \zeta_1 &= \lambda_1 \zeta_1, \\ D^\alpha \zeta_2 &= \lambda_2 \zeta_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

(Ahmed dkk., 2006)

Persamaan (2.15) secara umum berbentuk sebagai berikut,

$$D^\alpha \zeta_1(t) = \lambda_1 \zeta_1(t) \quad \zeta_i(0) = \zeta_{i_0}, \lambda_i > 0 \quad i = 1, 2 \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Untuk penyelesaiannya sendiri dengan menggunakan rumus umum taylor, diasumsikan $\zeta_i(t)$ sebagai berikut,

$$\zeta_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

Berdasarkan defenisi turunan fraksional caputo, didapatkan

$$D^\alpha \zeta_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

Sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} D^\alpha \zeta_i(t) &= \lambda_i \zeta_i(t), \\ D^\alpha \zeta_i(t) - \lambda_i \zeta_i(t) &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{n+1} - \lambda_i c_n &= 0, \\c_{n+1} &= \lambda_i c_n, \quad c_0 = \zeta_{i_0}, \\c_{n+1} &= \lambda_i \zeta_{i_0},\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$c_n = \lambda_i^n \zeta_{i_0}. \quad (2.16)$$

Sehingga solusi persamaan (2.15) adalah

$$\zeta_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \zeta_{i_0} = \zeta_{i_0} E_\alpha(\lambda_i t^\alpha).$$

(Odibat dan Shawagfeh, 2007)

Dengan $E_\alpha(\lambda_i t^\alpha)$ adalah fungsi Mittag-Leffler.

2.9.5 Prilaku Solusi dari Fungsi Mittag-Leffler

Misalkan $\alpha > 0$ dan $\lambda = r e^{i\theta}$. Dimana, $r = |\lambda|$ dan $\theta = \arg(\lambda)$.

Sehingga, solusi prilaku dari fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(\lambda)$ adalah sebagai berikut,

- $E_\alpha(r e^{i\theta}) \rightarrow 0$ untuk $r \rightarrow \infty$ jika $|\theta| > \frac{\alpha\pi}{2}$,
- $E_\alpha(r e^{i\theta})$ terbatas untuk $r \rightarrow \infty$ jika $|\theta| = \frac{\alpha\pi}{2}$,
- $E_\alpha(r e^{i\theta}) \rightarrow \infty$ untuk $r \rightarrow \infty$ jika $|\theta| < \frac{\alpha\pi}{2}$,

(Diethelm, 2010)

2.9.6 Kestabilan Lokal Sistem Nonlinear Persamaan Diferensial Fraksional

Titik kesetimbangan dari E^* dikatakan stabil asimtotik lokal apabila setiap nilai eigen dari λ_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dari matriks jacobian memenuhi kondisi

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

(Petras, 2011)

2.9.7 Sistem persamaan diferensial fraksional multi-order

Dapat diasumsikan persamaan diferensial fraksional multi-order sebagai berikut,

$$\begin{aligned}D_t^\alpha X(t) &= F(t, X), \\X(0) &= X_0\end{aligned} \quad (2.17)$$

Dimana, variabel $X = [x_{1_1}(t), x_{2_1}(t), \dots, x_{n_1}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, dengan kondisi awal $X_0 = [x_{1_0}(0), x_{2_0}(0), \dots, x_{n_0}(0)]^T \in \mathbb{R}^n$, dengan fungsi $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \in \mathbb{R}^n$

dan $f_i: [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan orde turunannya adalah $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$.

Sama halnya juga dengan $D_t^\alpha = [D_t^{\alpha_1}, D_t^{\alpha_2}, \dots, D_t^{\alpha_n}]^T$, dengan $D_t^{\alpha_i}$ mengindikasikan α_i adalah turunan orde fraksional dalam artian *Caputo*. Dalam bagian ini, menunjukkan bahwa $D_t^\alpha X(t) = [D_t^{\alpha_1} x_{1_1}(t), D_t^{\alpha_2} x_{2_1}(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x_{n_1}(t)]^T$. Pada multi-order ini didalam matematika dapat diartikan dalam vektor nyata atau kompleks. Namun, dalam tulisan ini dibatas bahwa untuk α_i angka yang dimasukkan antara iinterval $[0, 1]$ (C.Li, 2007).

Remark 1. Berdasarkan (2.22), didapatkan asumsi bahwa

$$F(t, X) = F(X), \quad (2.18)$$

Dimana, variabel independent t tidak jelas terlihat dalam fungsi F . Titik equilibrium dari (2.18) adalah titik $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ yang terdapat dalam persamaan $F(\bar{X}) = 0$.

Remark 2. Untuk setiap titik equilibrium \bar{X} dari sistem autonomous pada (2.18), nilai eigen λ didapatkan dari persamaan berikut,

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - J(\bar{X})) = 0 \quad (2.19)$$

Dimana, $J(\bar{X})$ adalah matrik jacobii hasil dari titik equilibrium dan m adalah penyebut dari kelipatan umum terkecil dari bilangan rasional $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (Zaid, 2010).

Theorem 3. Untuk setiap titik equilibrium \bar{X} dari sistem (2.18), \bar{X} adalah stabil asimtotik lokal, jika nilai eigen λ_i yang diperoleh dari (2.19) memenuhi kriteria stabilitas *Routh-Hurwitz* atau ketidaksamaan $|\arg(\lambda_i)| > \left(\frac{\pi}{2m}\right)$ untuk $i = 1, 2, \dots, m(\alpha_1, \alpha_2)$ (W. Deng, 2007). Dikarenakan sistem 2 dimensi dari (2.18) digunakan dalam penelitian ini, analisis kestabilan sistem tersebut diuraikan secara terperinci dibawah ini.

Remark 3. Diasumsikan sistem autonomus dari persamaan differensial fraksional dengan multi-order sebagai berikut,

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x_1(t) &= f_1(x_1, x_2) \\ D^{\alpha_2} x_2(t) &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dengan kondisi awal tidak negatif

$$x_1(0) = x_{o1} \text{ dan } x_2(0) = x_{o2},$$

Dimana orde turunan α_1 dan α_2 adalah bilangan rasional pada interval $(0,1]$. Titik equilibrium pada sistem (2.20) adalah titik $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ yang diperoleh dari persamaan $D^{\alpha_i} x_i(t) = 0$ untuk $i = 1, 2$. Untuk mengevaluasi stabil asimtotik lokal dari titik equilibrium yaitu dengan menggunakan matrik Jacobian,

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_1)_{x_1} & (f_1)_{x_2} \\ (f_2)_{x_1} & (f_2)_{x_2} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan *Remark 2*, nilai eigen λ_i untuk $i = 1, 2, \dots, m(\alpha_1 + \alpha_2)$ diperoleh dari persamaan berikut,

$$\begin{aligned} &\det (\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J(\bar{X})) \\ &= \begin{vmatrix} (\lambda^{m\alpha_1} - (f_1)_{x_1}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}) & - (f_1)_{x_2}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \\ - (f_2)_{x_1}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} & (\lambda^{m\alpha_2} - (f_2)_{x_2}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

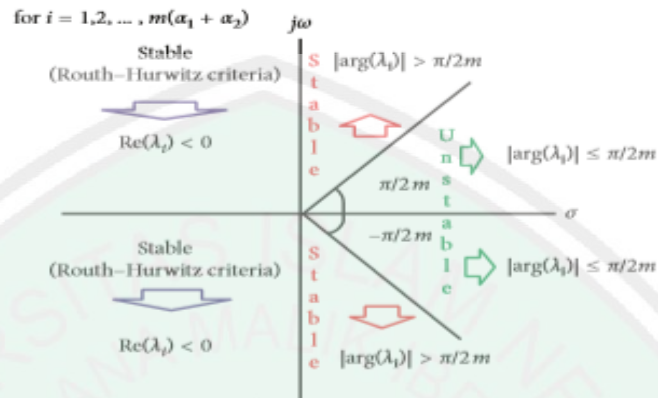
Oleh karena itu, persamaan karakteristik dari nilai eigen adalah,

$$\begin{aligned} &\lambda^{m(\alpha_1 + \alpha_2)} - \lambda^{m\alpha_1} (f_2)_{x_1}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} - \lambda^{m\alpha_2} (f_1)_{x_2}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} + \\ &\left(\begin{matrix} ((f_1)_{x_1}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}) & (f_2)_{x_2}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \\ - (f_1)_{x_2}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} & (f_2)_{x_1}|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \end{matrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Jika nilai eigen dari λ_i untuk $i = 1, 2, \dots, m(\alpha_1 + \alpha_2)$ memenuhi kriteria atau kondisi stabilitas *Routh-Hurwitz*,

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2m}, \quad (2.22)$$

Maka titik tetap (\bar{x}_1, \bar{x}_2) adalah titik stabil asimtotik lokal pada sistem (2.20). wilayah stabilitas pada sistem dari persamaan diferensial fraksional dengan multi-orde α_1 dan α_2 akan ditunjukkan pada gambar 2 (dimana σ dan ω adalah masing-masing bagian real dan imajiner dari nilai eigen, dan $j = \sqrt{-1}$) (Cong, 2016).



Gambar 2.2 wilayah stabilitas titik equilibrium \bar{X} dari sistem (2.20).

Remark 4. Diberikan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ pada sistem (2.20). Dikasu ini, kita mempunyai sistem

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= f_1(x_1, x_2) \\ D^\alpha x_2(t) &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dengan kondisi awal tidak negatif $x_1(0) = x_{o1}$ dan $x_2(0) = x_{o2}$. Berdasarkan persamaan $D^\alpha x_i(t) = 0$ untuk $i = 1, 2$ dapat dianggap bahwa titik equilibrium dari sistem (2.17) adalah $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 diperoleh dari persamaan

$$Det(J_{(x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)} - \lambda I_2) = 0 \tag{2.24}$$

Maka kondisi stabilitasnya

$$\left(|\arg(\lambda_1)| > \frac{\alpha\pi}{2}, |\arg(\lambda_2)| > \frac{\alpha\pi}{2} \right), \tag{2.25}$$

Sehingga, titik equilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) adalah titik yang stabil asimtotik lokal dari sistem (2.23). kondisi yang terdapat pada (2.25) dapat dirincikan sebagai berikut. Persamaan karakteristik dari (2.24) adalah polinomial umum sebagai berikut:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (2.26)$$

Ketika kedua kondisi (2.25) dan polonomial (2.26) dipertimbangkan secara bersamaan, kondisi stabil asimtotik lokal dari titik equilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) yaitu dengan menggunakan salah satu kondisi *Routh-Hurwitz* (El-Saka, 2013).

$$a_1, a_2 > 0, \quad (2.27)$$

Atau

$$a_1 < 0, 4a_2 > (a_1)^2, \left| \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4a_2 - (a_1)^2}}{a_1} \right) \right| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (2.28)$$

2.10 Titik Kesetimbangan

Misalkan x adalah titik Kesetimbangan dari suatu sistem, dikatakan bahwa x titik kesetimbangan dari suatu sistem jika x merupakan solusikonstan dari sistem tersebut. Hal ini berarti bahwa $f(x) = 0$.

Contoh:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

Dimana $r, K > 0$

Solusi:

Dengan membuat $\frac{dx}{dt} = 0$ dan melakukan manipulasi aljabar maka akan diperoleh $rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) = 0$. Ini berarti bahwa $rx = 0$ atau $\left(1 - \frac{x}{K} \right) = 0$ sehingga diperoleh titik kesetimbangannya adalah $x = 0$ atau $x = K$ (Ndi, 2018: 11).

2.11 Linierisasi

Defenisi dari linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial tidak linier menjadi persamaan linier yang tujuannya untuk membantu memahami persamaan diferensial tidak linear tersebut. Suatu persamaan autonomous dimana f adalah taklinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar x^* dan menghilangkan suku tidak linear.

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*) + \frac{df}{dx}(x^*)(x - x^*)$$

Dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ pada keadaan setimbang $f(x^*) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linear sebagai berikut

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx}(x^*)u$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt}(u) = A_0(u)$$

Dimana, $A_0 = [f_x]$, dan A_0 pada $x = x^*$. Matriks tersebut bisa disebut matriks Jacobian (Boyce dan Dilprima, 1999).

2.12 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen adalah nilai yang didapatkan yang dijadikan sebagai solusi dari persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks Jacobian (Neuhauser, 2004).

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$ maka sebuah vektor tak nol v pada R^n disebut sebagai vektor eigen dari A , jika Av adalah sebuah kelipatan skalar dari v , atau bisa dituliskan

$$Av = \lambda v$$

Untuk sebarang skalar λ , maka skalar λ disebut nilai eigen dari A dan v disebut vektor eigen dari A yang terkait dengan nilai eigen λ (Anton dan Rorres, 2004).

Jika λ adalah sebuah nilai eigen dari matriks A , dan v adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ . Maka $Av = \lambda v = Iv$. I adalah matriks identitas $n \times n$, sedemikian sehingga $(A - I)v = 0$, dikarenakan $v \in R^n$ yang tidak kosong, maka diperoleh (Chen, 2008).

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

atau

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - \lambda & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

2.13 Ayat Alqur'an dan Hadist yang berkaitan dengan sistem Imun Manusia

2.12.1 Q.S Al-Isra:82

Artinya:” Dan kami turunkan dari al-qur'an suatu yang menjadi penawar dan rahmat bagi orang-orang yang beriman dan al-qur'an itu tidaklah menambah kepada orang-orang yang zalim selain kerugian”. Menurut Hamka dalam tafsir al-azhar tegas ayat ini bahwa didalam Al-Qur'an terdapat obat-obat dan rahmat bagi orang yang beriman. Berbagai penyakit dapat disembuhkan dengan Al-Qur'an, dan sangat banyak peyakit yang menyerang jiwa manusia yang dapat disembuhkan dengan membaca Al-Qur'an. Salah satunya adalah kesombongan. Maka apabila dibacakan ayat-ayat yang menyatakan kebesaran dan kekuasaan Allah akan sembuhlah penyait sombong itu. Sungguh banyaak penyakit jiwa yang bias disemmbuhkann dengan ayat-ayat Al-Qur'an. Penyakit putus asa, malas, bodoh, mementingkan diri sendiri, rasa tamak, iri, dengki, dan sebagainya.

2.12.2 Q.S Al-Ra'd: 28

Artinya: “Ingatlah, hanya dengan mengingat Allah-lah hati menjadi tenang”. Dalam tafsir Ibnu Katsir menjelaskan bahwa maksud ayat ini adalah hati mereka senang dan tenang berada di sisi Allah, merasa tenang dengan mengingat-Nya, dan rela kepada-Nya sebagai pelindung dan penolong(nya). Maka ingatlah Allah agar hati menjadi tenang dan tenteram.

2.12.3 Q.S Al-Hijr: 97-98

Artinya:” Dan kami sungguh-sungguh mengetahui, bahwa dadamu menjadi sempit disebabkan apa yang mereka ucapkan, maka bertasbihlah dengan memuji Rabbmu dan jadilah kamu di antara orang-orang yang bersujud (sholat)”. Dalam tafsir Ibn-Kathir menjelaskan bahwa yakni sesungguhnya Kami, hai Muhammad ﷺ benar-benar mengetahui bahwa dadamu merasa sempit disebabkan ganggguan yang mereka lancarkan terhadap dirimu, jangan pula memalingkanmu dari menyampaikan risalah Allah ﷻ, dan bertakwalah kamu kepada-Nya, sesungguhnya Dialah yang memberimu kecukupan dan menolongmu dalam

menghadapi mereka. Maka sibukkanlah dirimu dengan berzikir mengingat Allah ﷻ, memuji-Nya dan bertasbih kepada-Nya serta menyembah-Nya, yaitu dengan mengerjakan shalat. Karena itulah disebutkan dalam firman-Nya: “Maka bertasbihlah dengan memuji Tuhanmu dan jadilah kamu diantara orang-orang yang bersujud” Karena itulah bilamana Rasulullah ﷺ mengalami suatu musibah, maka beliau shalat (sebagai penawarnya).

2.12.4 Q.S Al-Anfaal: 24

Artinya: “... (Hai orang-orang yang beriman) penuhilah seruan Allah dan seruan Rasul apabila (Rasul) mengajak kalian kepada suatu yang memberi kehidupan kepada kalian”. Dalam kitab Shahih Bukhari dengan nomor 4114 dari sebuah hadits sebagai berikut, telah menceritakan kepada kami Musaddad. Telah menceritakan kepada kami Yahya dari Syu’bah dia berkata: Telah menceritakan kepadaku Khubaib bin ‘Abdur Rahman dari Hafsh bin ‘Ashim dari Abu Sa’id bin Al Mu’alla dia berkata: suatu saat saya sedang melaksanakan shalat di masjid, tiba-tiba Rasulullah ﷺ memanggilku namun saya tidak menjawab panggilannya hingga shalatku selesai. Setelah itu, saya menemui beliau dan berkata:” Wahai Rasulullah ﷺ, sesungguhnya pada waktu itu saya sedang shalat. “ Beliau bersabda: “ Bukankah Allah ﷻ telah berfirman:’Hai orang-orang yang beriman, penuhilah seruan Allah dan seruan Rasul apabila Rasul menyeru kamu.” Beliau bersabda lagi:”Sungguh, saya akan mengajarmu tentang surat yang paling agung yang terdapat di dalam Al-Qur’an sebelum kamu keluar dari masjid.” Kemudian beliau memegang tanganku, dan saat beliau hendak keluar Masjid, saya pun berkata:”bukakah engkau berjanji:’Saya akan mengajarmu surat yang paling agung yang terdapat di dalam Al-Qur’an.’ Beliau menjawab: (Yaitu surat) AL HAMDU LILLAHI RABBIL ‘AALAMIIN (Segala puji bagi Allah, Rabb Semesta Alam), ia adalah As Sab’u Al Matsani, dan Al-Qur’an Al Azhim yang telah diwahyukan kepadaku.

2.12.5 Hadits Riwayat Muslim

Artinya:” Dan tiadalah suatu kaum berkumpul disalah satu rumah Allah (masjid) membaca kitabuallah (Al-Qur’an) dan mempelajarinya kecuali akan dikelilingi malaikat, dianugerahi ketenangan, diliputi rahmat dan disebut-sebut Allah dihadapan makhluk yang dekat kepadanya”. Penjelasan dari ayat al-qur’an dan hadits diatas bahwa Al-Qur’an adalah penawar bagi segala penyakit dan dengan membaca Al-Qur’an maka kita akan selalu mengingat Allah sehingga pikiran dan jiwa kita menjadi tenang, dimana pada dasarnya dengan ketengana jiwa maka stres akan hilang dan membuat imunitas tubuh kita semakin kuat.

2.12.6 Q.S Al-Maidah:6

Artinya: “ Hai orang-orang yang beriman, apabila kamu hendak mengerjakan sholat, maka basuhlah mukamu dan tanganmu sampai siku, dan sapulah kepalamu dan (basuh) kakimu sampai dengan kedua mata kaki, dan jika kamu junub maka mandilah, dan jika kamu sakit atau dalam perjalanan atau kembali dari tempat buang air (kakus) atau menyentuh perempuan, lalu kamu tidak memperoleh air, maka bertayammumlah dengan tanah yang baik (bersih); sapulah mukamu dan tanganmu dengan tanah itu. Allah tidak hendak menyulitkan kamu, tetapi dia hendak membersihkan kamu dan meyempurnakan nikmat-nya bagimu, supaya kamu bersyukur”. Imam Bukhari meriwayatkan dari Aisyah radhiyallahu ‘anha, ia berkata. “Kami keluar bersama Rasulullah ﷺ dalam sebagian safar beliau, sehingga kami berada di tengah lapangan atau berada dalam pasukan, tiba-tiba kalungku lepas, maka Rasulullah ﷺ mengirim beberapa orang untuk mencari kalung itu, sedangkan sebagian lain tetap vbersama Beliau. Saat itu, mereka tidak berada di dekat air dan tidak ada orang yang membawa air, lalu sebagian orang mendatangi Abu Bakar Ash Shiddiq dan berkata, “Tidakkah kamu melihat apa yang dilakukan Aisyah, ia telah membuat Rasulullah ﷺ diam di tempat, demikian juga para sahabatnya padahal mereka tidak di dekat air dan tidak ada yang memilikinya. “Maka Abu Bakar datang, sedangkan Rasulullah ﷺ tertidur meletakkan kepalanya di pahaku. Abu Bakar berkata, “Kamu telah membuat Rasulullah ﷺ dan para sahabatnya berhenti, padahal mereka tidak di dekat air dan tidak membawa air.” Aisyah berkata,”Abu Bakar mencelaku dan berkata kepadaku apa yang dikehendaki Allah ﷻ. Ia memicit

pingganku dengan tanganya dan tidak ada yang menghalangiku untuk bergerak kecuali karena Rasulullah ﷺ sedang berada di atas pahaku. Rasulullah ﷺ bangun di pagi harinya tanpa memiliki air, maka Allah menurunkan ayat tayammum, lalu mereka pun bertayammum.” Usaid bin Khudhair berkata.”Maka kami bangunkan unta, di mana aku berada di atasnya, lalu kami menemukan kalung di bawahnya.”

2.12.7 Hadits Riwayat at-Tirmizi: 2723

Artinya: “ Sesungguhnya Allah subhana wa ta’ala itu baik, Dia menyukai kebaikan, Allah itu bersih, Dia menyukai kebersihan. Allah itu mulia, Dia menyukai kemuliaan. Allah itu dermawan ia menyukai kedermawanan maka bersihkanlah olehmu tempat-tempatmu”.

2.12.8 Hadits Riwayat Baihaqi

Artinya: “Islam itu adalah bersih, maka jadilah kalian orang yang bersih. Sesungguhnya tidak masuk surga kecuali orang-orang yang bersih”.

2.12.9 Hadist Riwayat At-Thabrani

Artinya: Rasulullah bersabda, “Kebersihan itu mengantarkan kepada keimanan dan keimanan itu menyertai pemiliknya surga”. Ayat ini menjelaskan bahwa sebagai seorang mukmin hendaklah kita selalu menjaga kebersihan tubuh dengan menjaga kebersihan tubuh maka kita bisa terbebas dari segala kuman dan virus yang menempel pada tubuh kita dan dengan menjaga kebersihan tubuh ini maka peluang kita untuk terserang penyakit akan berkurang dan daya tahan tubuh kita meningkat.

2.12.10 Q.S At-Tiin: 4

Artinya: “Sesungguhnya kami telah menciptakan manusia dalam bentuk sebaik-baiknya”.

2.12.11 Hadits Riwayat Bukhari

Artinya: “Dan sesungguhnya atas badan kamu terdapat hak-hak yang wajib dipenuhi, maka penuhilah haknya”.

2.12.13 Hadist Riwayat Muslim

Artinya: “Orang beriman yang kuat lebih baik dan lebih dicintai Allah daripada orang beriman yang lemah”. Ayat Al-Qur’an dan hadits tersebut menjelaskan bahwa kita sebagai seorang mukmin untuk selalu menjaga kondisi fisik tubuh kita dengan memenuhi hak-hak dalam tubuh kita yang salah satunya dengan berolahraga. Dengan pentingnya berolahraga maka tubuh kita bisa sehat dan kuat dan dengan berolahraga ini sistem imun tubuh kita juga akan bertambah kuat.

2.12.14 Q.S an-Nahl: 69

Artinya “.... Dari perut lebah itu keluar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, didalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan”.

2.12.15 Hadits Riwayat Bukhari no.5704 dan Muslim no. 2205

Artinya: “Jika dalam pengobatan kalian ada sedikit pengebangan maka yang demikian itu bisa didapatkan pada keratan kulit orang yang bekam, atau seteguk madu atau sengatan api”. Sistem imun dan mekanisme kerjanya yang sangat unik dalam menangkal patogen penyebab penyakit yang masuk ke dalam tubuh, menjadikan kita selalu berusaha menjaga imun agar tetap kuat yaitu salah satunya dengan memakan bahan makanan yang dapat menguatkan sistem imun kita. Sehingga dari ayat tersebut menjelaskan bahwa bahan makanan (madu) ini mempunyai kandungan obat bagi manusia dan berpengaruh pada peningkatan sistem imun manusia.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Kontruksi Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen

Berdasarkan pada Subbab 2.7 model respon imun terhadap patogen dengan laju kejadian nonlinear yang diperkenalkan oleh dasbasi (2018) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \beta_p P \cdot \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cPT}{Pa + 1} \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\mu P}{Pv + 1} T - \delta T\end{aligned}\quad (3.1)$$

Model fraksional respon sistem imun terhadap patogen dengan multi order pada laju kejadian nonlinear diperoleh dengan mengubah turunan orde biasa $\frac{dP}{dt}$ dan $\frac{dT}{dt}$ pada sistem (3.1) menjadi turunan orde fraksional $\frac{d^{\alpha_1}P}{dt^{\alpha_1}}$ dan $\frac{d^{\alpha_2}T}{dt^{\alpha_2}}$. Maka diperoleh model sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\frac{d^{\alpha_1}P}{dt^{\alpha_1}} &= \beta_p P \cdot \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cPT}{Pa + 1} \\ \frac{d^{\alpha_2}T}{dt^{\alpha_2}} &= \frac{\mu P}{Pv + 1} T - \delta T\end{aligned}\quad (3.2)$$

3.2 Titik Kesetimbangan

titik kesetimbangan dari model diatas dapat diperoleh jika memenuhi

$$\frac{d^{\alpha_1}P}{dt^{\alpha_1}} = 0 \text{ dan } \frac{d^{\alpha_2}T}{dt^{\alpha_2}} = 0$$

$$\frac{d^{\alpha_1}P}{dt^{\alpha_1}} = \beta_p P \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cP}{Pa+1} T = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{d^{\alpha_2}T}{dt^{\alpha_2}} = \frac{\mu P}{Pv+1} T - \delta T = 0 \quad (3.4)$$

3.2.1 Titik Kesetimbangan E_0

Dari persamaan (3.3)diperoleh

$$P \left(\beta_p \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cT}{Pa + 1} \right) = 0$$

sehingga

$$P = 0 \text{ atau } \left(\beta_p \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cT}{Pa+1} \right) = 0$$

Dengan mensubtitusikan $P = 0$ ke persamaan (3.4) maka didapatkan titik kesetimbangan yang ke 1 yaitu $T_0 = 0$ dan $P_0 = 0$

3.2.2 Titik Keseimbangan E_1

Untuk titik keseimbangan selanjutnya, persamaan (3.4) diperoleh

$$T \left(\frac{\mu P}{Pv + 1} - \delta \right) = 0$$

Sehingga

$$T = 0 \text{ atau } \left(\frac{\mu P}{Pv + 1} - \delta \right) = 0$$

Dengan mensubstitusikan $T = 0$ ke persamaan (3.3) maka diperoleh

$$\beta_p P \left(1 - \frac{P}{\Lambda} \right) = 0$$

$$\beta_p P = \frac{\beta_p P^2}{\Lambda}$$

$$\frac{\beta_p P^2}{\beta_p P} = \Lambda$$

$$P = \Lambda$$

Didapat titik keseimbangan yang ke 2 yaitu $T_1 = 0$ dan $P_1 = \Lambda$

3.2.3 Titik Keseimbangan E_2

Untuk titik keseimbangan yang ketiga, apabila $P \neq 0$ dan $T \neq 0$ yaitu sebagai berikut

$$\frac{\mu P}{Pv + 1} - \delta = 0$$

$$\mu P = \delta(Pv + 1)$$

$$\mu P = \delta Pv + \delta$$

$$\mu P - \delta Pv = \delta$$

$$P(\mu - \delta v) = \delta$$

$$P = \frac{\delta}{\mu - \delta v}$$

Didapatkan titik $P = \frac{\delta}{\mu - \delta v}$, selanjutnya substitusikan titik P ke persamaan (3.3)

$$\left(\beta_p \left(1 - \frac{\frac{\delta}{\mu - \delta v}}{\Lambda} \right) - \frac{cT}{\frac{\delta a}{\mu - \delta v} + 1} \right) = 0$$

$$\left(\beta_p \left(1 - \frac{\delta}{\mu\Lambda - \delta v\Lambda} \right) - \frac{cT}{\frac{\delta a + \mu - \delta v}{\mu - \delta v}} \right) = 0$$

$$\beta_p \left(\frac{\mu\Lambda - \delta v\Lambda - \delta}{\mu\Lambda - \delta v\Lambda} \right) = \left(\frac{cT}{\frac{\delta a + \mu - \delta v}{\mu - \delta v}} \right)$$

$$\beta_p \left(\frac{\mu\Lambda - \delta v\Lambda - \delta}{\mu\Lambda - \delta v\Lambda} \right) \left(\frac{\delta a + \mu - \delta v}{\mu - \delta v} \right) = cT$$

$$\beta_p \left(\frac{(\Lambda(\mu - \delta v) - \delta)(\delta a + \mu - \delta v)}{\mu^2\Lambda - \delta v\mu\Lambda - \mu\delta v\Lambda + \delta^2 v^2\Lambda} \right) = -cT$$

$$\beta_p \left(\frac{(\Lambda(\mu - \delta v) - \delta)(\delta a + \mu - \delta v)}{(\delta^2 v^2\Lambda - \delta v\mu\Lambda - \delta v\mu\Lambda + \mu^2\Lambda)c} \right) = T$$

$$\beta_p \left(\frac{(\Lambda(\mu - \delta v) - \delta)(\delta a + \mu - \delta v)}{(\mu - \delta v)^2\Lambda c} \right) = T$$

Jadi didapatkan titik kesetimbangan yang ke 3 yaitu

$$P^* = \frac{\delta}{\mu - \delta v}$$

$$T^* = \frac{\beta_p(\Lambda(\mu - \delta v) - \delta)(\delta a + \mu - \delta v)}{(\mu - \delta v)^2\Lambda c}$$

Atau

$$T^* = \frac{\beta_p \left(1 - \left(\frac{P^*}{\Lambda} \right) \right)}{\frac{c}{(P^* a + 1)}}$$

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem (3.2) merupakan persamaan diferensial fraksional nonlinear. Oleh karena itu, untuk memperoleh kestabilan titik kesetimbangan model maka harus dilakukan linearisasi sistem (3.2) yaitu sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} f_P(P, T) & f_T(P, T) \\ g_P(P, T) & g_T(P, T) \end{pmatrix}$$

Dimana,

$$\begin{aligned} f_P(P, T) &= \beta_P P \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cPT}{Pa + 1} \\ &= \beta_P P - \frac{\beta_P P^2}{\Lambda} - \frac{cPT}{Pa + 1} \\ &= \beta_P - \frac{\beta_P 2P}{\Lambda} - \frac{((cT)(Pa + 1)) - ((cPT)(a))}{(Pa + 1)^2} \\ &= \beta_P - \frac{\beta_P 2P}{\Lambda} - \frac{cTPa + cT - cTPa}{(Pa + 1)^2} \\ &= \beta_P - \frac{\beta_P 2P}{\Lambda} - \frac{cT}{(Pa + 1)^2} \end{aligned}$$

Maka diperoleh hasil dari $f_P(P, T)$ yaitu:

$$f_P(P, T) = \beta_P \left(1 - \frac{2P}{\Lambda}\right) - \frac{cT}{(Pa + 1)^2}$$

Selanjutnya untuk mencari hasil dari $f_T(P, T)$ adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} f_T(P, T) &= \beta_P P \left(1 - \frac{P}{\Lambda}\right) - \frac{cPT}{Pa + 1} \\ &= -\frac{cP}{Pa + 1} \end{aligned}$$

Maka diperoleh hasil dari $f_T(P, T)$ yaitu:

$$f_T(P, T) = -\frac{cP}{Pa + 1}$$

Berikutnya, untuk memperoleh hasil untuk $g_P(P, T)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} g_P(P, T) &= \frac{\mu P}{Pv + 1} T - \delta T \\ &= \frac{\mu T}{(Pv + 1)^2} \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh hasil untuk $g_T(P, T)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} g_T(P, T) &= \frac{\mu P}{Pv + 1} T - \delta T \\ &= \frac{\mu P}{Pv + 1} - \delta \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks jacobianya yaitu sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} \beta_P \left(1 - \frac{2P}{\Lambda}\right) - \frac{cT}{(Pa + 1)^2} & -\frac{cP}{Pa + 1} \\ \frac{\mu T}{(Pv + 1)^2} & \frac{\mu P}{Pv + 1} - \delta \end{pmatrix}$$

3.3.1 Analisis kestabilan titik kesetimbangan E_0

Untuk titik kesetimbangan yang pertama $(0,0)$ diperoleh matriks Jacobiannya sebagai berikut,

$$\begin{aligned} J(E_0(0,0)) &= \begin{pmatrix} \beta_P \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{\Lambda}\right) - \frac{c \cdot 0}{(0 \cdot a + 1)^2} & -\frac{c \cdot 0}{0 \cdot a + 1} \\ \frac{\mu \cdot 0}{(0 \cdot v + 1)^2} & \frac{\mu \cdot 0}{0 \cdot v + 1} - \delta \end{pmatrix} \\ J(E_0(0,0)) &= \begin{pmatrix} \beta_P & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai λ yang skalar berlaku

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J(E_0(0,0))) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda^{m\alpha_1} - \beta_p & 0 \\ 0 & \lambda^{m\alpha_2} + \delta \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(\lambda^{m\alpha_1} - \beta_p)(\lambda^{m\alpha_2} + \delta) = 0$$

Diperoleh nilai eigen untuk titik kesetimbangan yang pertama yaitu

$$\lambda^{m\alpha_1} = \beta_p; \lambda^{m\alpha_2} = -\delta$$

Pada titik kesetimbangan pertama $(0,0)$ didapatkan nilai eigen yaitu $\lambda^{m\alpha_1} = \beta_p$ dan $\lambda^{m\alpha_2} = -\delta$. Pada $\lambda^{m\alpha_1}$ adalah bernilai positif. Dimana, $\lambda_i = {}^{1/m\alpha_1}\sqrt{\beta_p} \in \mathbb{R}^+$ untuk $i = 1, 2, \dots, m\alpha_1$. Dikarenakan $\lambda^{m\alpha_1} > 0$ maka titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak stabil.

3.3.2 Analisis kestabilan titik kesetimbangan E_1

Nilai eigen dari titik kesetimbangan yang ke dua didapat dari matriks jacobian sebagai berikut:

$$J(E_1(\Lambda, 0)) = \begin{pmatrix} \beta_p \left(1 - \frac{2 \cdot \Lambda}{\Lambda}\right) - \frac{c \cdot 0}{(0 \cdot a + 1)^2} & -\frac{c \cdot \Lambda}{\Lambda \cdot a + 1} \\ \frac{\mu \cdot 0}{(0 \cdot v + 1)^2} & \frac{\mu \cdot \Lambda}{\Lambda \cdot v + 1} - \delta \end{pmatrix}$$

$$J(E_1(\Lambda, 0)) = \begin{pmatrix} -\beta_p & -\frac{c\Lambda}{\Lambda a + 1} \\ 0 & \frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} - \delta \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama dalam mencari nilai eigen sebelumnya, maka berdasarkan matriks jacobian di titik $(\Lambda, 0)$ diperoleh hasil,

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J(E_0(0,0))) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda^{m\alpha_1} + \beta_p & \frac{c\Lambda}{\Lambda a + 1} \\ 0 & \lambda^{m\alpha_2} - \left(\frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} - \delta \right) \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(\lambda^{m\alpha_1} + \beta_p) \left(\lambda^{m\alpha_2} - \left(\frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} - \delta \right) \right) = 0$$

$$\lambda^{m\alpha_1} = -\beta_p; \quad \lambda^{m\alpha_2} = \frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} - \delta$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks $J(E_1(\Lambda, 0))$ sebagai berikut,

$$\lambda^{m\alpha_1} = -\beta_p \quad \text{dan} \quad \lambda^{m\alpha_2} = \frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} - \delta$$

Berdasarkan nilai eigen yang didapat dari titik kesetimbangan $E_1(\Lambda, 0)$ ini maka jelas bahwa

- a) $\lambda^{m\alpha_1} = -\beta_p < 0$ bernilai negatif. Berdasarkan *De Moivre's formula*, $\lambda^{m\alpha_1} = -\beta_p \text{cis}\pi \Rightarrow \lambda_i = \beta_p^{(1/m\alpha_1)} \text{cis}(\pi/m\alpha_1)$ dimana, $i = 1, 2, \dots, m\alpha_1$. Sedemikian sehingga, $\text{cis}\pi = \cos\pi + i \sin\pi, i = \sqrt{-1}$. Berdasarkan kriteria (2.21) kondisi stabilitas untuk $E_1(\Lambda, 0)$ yaitu $\alpha_1 < 2$ dikarenakan $|\arg(\lambda)| = \left| \frac{\pi}{(m\alpha_1)} \right| > \left(\frac{\pi}{2m} \right)$.
- b) Pada nilai eigen yang kedua didapatkan $\lambda^{m\alpha_2} = ((\mu\Lambda/(\Lambda v + 1)) - \delta)$. Nilai eigen ini bernilai negatif apabila $(\mu\Lambda/(\Lambda v + 1)) < \delta$, Berdasarkan *De Moivre's formula*, $\lambda^{m\alpha_2} = \left(\delta - \left(\frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} \right) \right) \text{cis}\pi \Rightarrow \lambda_i = \left(\delta - \left(\frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} \right) \right)^{(1/m\alpha_2)} \text{cis}(\pi/m\alpha_2)$ untuk $i = 1, 2, \dots, m\alpha_2$. Berdasarkan hal tersebut kondisi stabilitas $\alpha_2 < 2$ dengan $|\arg(\lambda)| = \left| \frac{\pi}{(m\alpha_2)} \right| > \left(\frac{\pi}{2m} \right)$. Sehingga, berdasarkan nilai eigen sebelumnya maka titik kesetimbangan $E_1(\Lambda, 0)$ adalah stabil. Akan tetapi, apabila $\left(\frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} \right) > \delta$ maka nilai eigennya bernilai positif dikarenakan $\lambda_i = \left(\delta - \left(\frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} \right) \right)^{(1/m\alpha_2)} \text{cis}0$ untuk $i = 1, 2, \dots, m\alpha_2$ diperoleh $\arg(\lambda_i) = 0$. Sehingga, tidak terdapat kondisi stabilitas dikarenakan $|\arg(\lambda)| = 0 < \left(\frac{\pi}{2m} \right)$ maka titik kesetimbangan $E_1(\Lambda, 0)$ tidak stabil.

3.3.3 Analisis kestabilan titik kesetimbangan E_2

Nilai eigen dari titik kesetimbangan yang ketiga didapat dari matriks jacobian sebagai berikut:

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} \beta_p \left(1 - \frac{2 \cdot P^*}{\Lambda} \right) - \frac{c \cdot T^*}{(P^* \cdot a + 1)^2} & -\frac{c \cdot P^*}{P^* \cdot a + 1} \\ \frac{\mu \cdot T^*}{(P^* \cdot v + 1)^2} & \frac{\mu \cdot P^*}{P^* \cdot v + 1} - \delta \end{pmatrix}$$

Misal,

$$\left(1 - \frac{P^*}{\Lambda} \right) = A_1,$$

$$\left(\frac{aP^*}{aP^* + 1} \right) = A_2,$$

Maka diperoleh,

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) & -\frac{c}{a}A_2 \\ \frac{a\beta_p\delta^2 A_1}{c\mu\Lambda(1 - A_1)A_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama dalam mencari nilai eigen sebelumnya, maka berdasarkan matriks jacobian di titik (E_2) diperoleh hasil,

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J(E_2)) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda^{m\alpha_1} - \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) & -\frac{c}{a}A_2 \\ \frac{a\beta_p\delta^2 A_1}{c\mu\Lambda(1 - A_1)A_2} & \lambda^{m\alpha_2} \end{bmatrix} \right) = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut,

$$\lambda^{m(\alpha_1 + \alpha_2)} - \lambda^{m\alpha_2} \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) + \frac{\beta_p\delta^2 A_1}{\mu\Lambda(1 - A_1)} = 0$$

Dengan menggunakan *De Moivre Formulas* dimana,

$$\lambda = r \text{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$\lambda^{m\alpha_1} = r^{m\alpha_1} \text{cis} m\alpha_1 \theta,$$

$$\lambda^{m\alpha_2} = r^{m\alpha_2} \text{cis} m\alpha_2 \theta,$$

Dimana $r \in \mathbb{R}^+$, sudut $\theta \in [0, 2\pi)$, dan $i = \sqrt{-1}$, sedemikian sehingga

$$(r^{m(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{cis} m(\alpha_1 + \alpha_2)\theta - \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{m\alpha_2} \text{cis} m\alpha_2\theta) + \frac{\beta_p\delta^2 A_1}{\mu\Lambda(1 - A_1)} = 0$$

Kemudian,

$$\left(r^{m(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos m(\alpha_1 + \alpha_2)\theta - \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{m\alpha_2} \cos m\alpha_2\theta + \frac{\beta_p\delta^2 A_1}{\mu\Lambda(1 - A_1)} \right) + i(r^{m(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin m(\alpha_1 + \alpha_2)\theta - \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{m\alpha_2} \sin m\alpha_2\theta) = 0 \quad (3.5)$$

Berdasarkan persamaan (3.5) maka diperoleh sistem,

$$r^{m(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin m(\alpha_1 + \alpha_2)\theta - \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{m\alpha_2} \sin m\alpha_2\theta = 0 \quad (3.6)$$

$$r^{m(\alpha_1+\alpha_2)} \cos m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{m\alpha_2} \cos m\alpha_2 \theta + \frac{\beta_P \delta^2 A_1}{\mu \Lambda (1 - A_1)} = 0$$

Kemudian dari sistem (3.6) dikedua ruasnya sama-sama dikalian dengan $\frac{1}{r^{m(\alpha_1+\alpha_2)}}$ maka diperoleh,

$$\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{-m\alpha_1} \sin m\alpha_2 \theta = 0 \quad (3.7)$$

$$\cos m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{-m\alpha_1} \cos m\alpha_2 \theta + \frac{\beta_P \delta^2 A_1}{\mu \Lambda (1 - A_1)} r^{-m(\alpha_1+\alpha_2)} = 0$$

Berdasarkan sistem pertama dari persamaan (3.7) diperoleh,

$$\begin{aligned} \sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{-m\alpha_1} \sin m\alpha_2 \theta &= 0 \\ -\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{-m\alpha_1} \sin m\alpha_2 \theta &= -\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta \\ \frac{-\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1)r^{-m\alpha_1} \sin m\alpha_2 \theta}{-\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta} &= \frac{-\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta}{-\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta} \\ r^{-m\alpha_1} &= \frac{-\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta}{-\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta} \\ \frac{1}{r^{m\alpha_1}} &= \frac{-\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta}{-\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta} \\ -\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta &= -\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta r^{m\alpha_1} \\ \frac{-\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{-\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} &= \frac{-\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta r^{m\alpha_1}}{-\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \\ r^{m\alpha_1} &= \frac{\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \\ r &= \sqrt[m\alpha_1]{\frac{\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta}} \\ r &= \left(\frac{\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{\frac{1}{m\alpha_1}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dengan mensubstitusikan (3.8) pada persamaan kedua pada (3.7), maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \cos m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \left(\frac{\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{\frac{-m\alpha_1}{m\alpha_1}} \cos m\alpha_2 \theta \\ + \frac{\beta_P \delta^2 A_1}{\mu \Lambda (1 - A_1)} \left(\frac{\beta_P(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{\frac{-m(\alpha_1+\alpha_2)}{m\alpha_1}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{-1} \cos m\alpha_2 \theta \\
&= - \frac{\beta_p \delta^2 A_1}{\mu \Lambda (1 - A_1)} \left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{-1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \\
& \cos m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \cos m\alpha_2 \theta}{\left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)} \\
&= - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \\
& \cos m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta - \frac{\cos m\alpha_2 \theta \sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta}{\sin m\alpha_2 \theta} \\
&= - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \\
& \frac{\theta(\sin m\alpha_2 \cos m(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos m\alpha_2 \sin m(\alpha_1 + \alpha_2))}{\sin m\alpha_2} \\
&= - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \\
& \frac{\theta(\sin m(\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)))}{\sin m\alpha_2} = - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \\
& \frac{\theta(\sin m(-\alpha_1))}{\sin m\alpha_2} = - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\left(\frac{\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \sin m\alpha_2 \theta}{\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta} \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \\
& - \frac{\sin m\alpha_1 \theta}{\sin m\alpha_2} = - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\frac{\left(\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (\sin m\alpha_2 \theta)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}{(\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}} \\
& - \frac{\sin m\alpha_1 \theta (\sin m\alpha_2 \theta)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}{\sin m\alpha_2 (\sin m(\alpha_1 + \alpha_2) \theta)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} = - \frac{\beta_p \delta^2 A_1 / \mu \Lambda (1 - A_1)}{\left(\beta_p(A_1(A_2 + 1) - 1) \right)^{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}
\end{aligned}$$

$$\frac{(\sin m\alpha_2\theta)^{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)} \sin m\alpha_1\theta}{(\sin m(\alpha_1+\alpha_2)\theta)^{\left(1+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right)}} = \frac{(\beta_p\delta^2 A_1)/(\mu\Lambda(1-A_1))}{(\beta_p(A_1(A_2+1)-1))^{\left(1+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right)}} \quad (3.9)$$

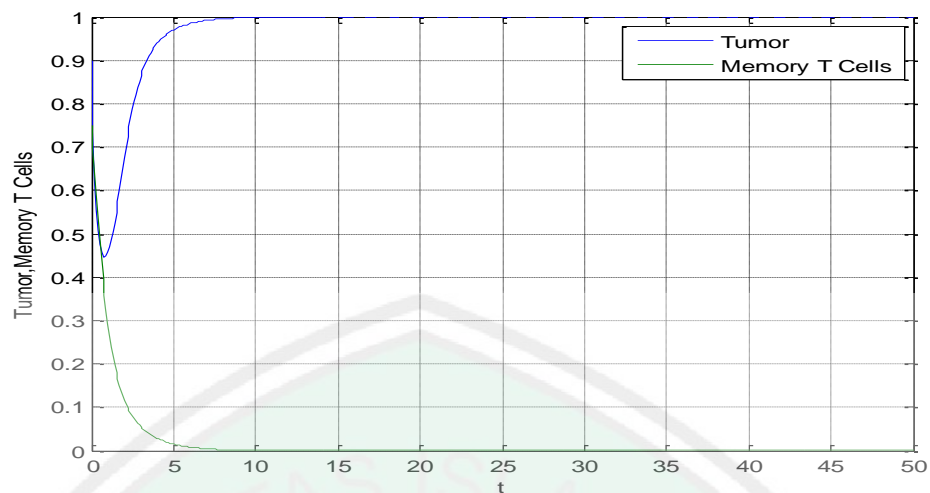
Oleh karena itu, sudut θ_i untuk $i = 1, 2, \dots, m(\alpha_1, \alpha_2)$ yang terdapat pada persamaan (3.9) memenuhi kriteria stabilitas *Routh-hurwitz* yaitu $\left(\frac{\pi}{2}\right) < \theta < \pi$ atau $\left(|\theta| > \left(\frac{\pi}{2m}\right)\right)$, maka titik kesetimbangan E_2 adalah stabil asimtotik lokal.

3.4 Simulasi Dengan Model Persamaan Diferensial Biasa

Dengan menggunakan program matlab maka didapat grafik dari persamaan diatas sebagai berikut

Parameter	Figure 1	Figure 2	Figure 3
β_p	2.4	2.4	2.4
Λ	1	10	5
c	4	4	4
a	0.2	4	1
μ	3.98	3.9	3.9
v	1.9	1.9	1.9
δ	1.99	1	1
α_1	0.9	0.8	0.8
α_2	0.75	0.6	0.6

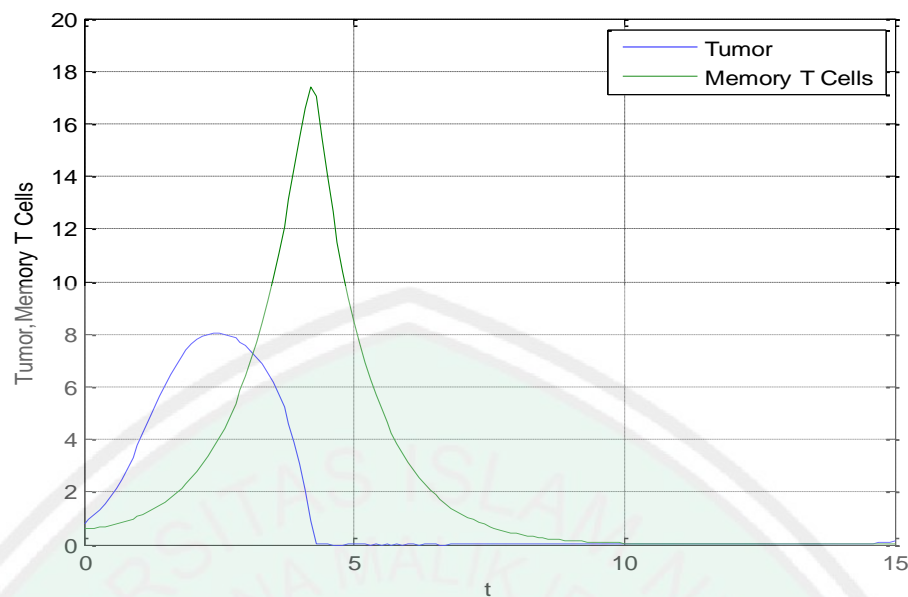
Tabel 3.1 Nilai-nilai dari Parameter



Gambar 3.1 Tumor dan Sel T dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 1, c = 4,$

$$a = 0.2, \mu = 3.98, v = 1.9, \delta = 1.99, P(0) = 0.9, T(0) = 0.75$$

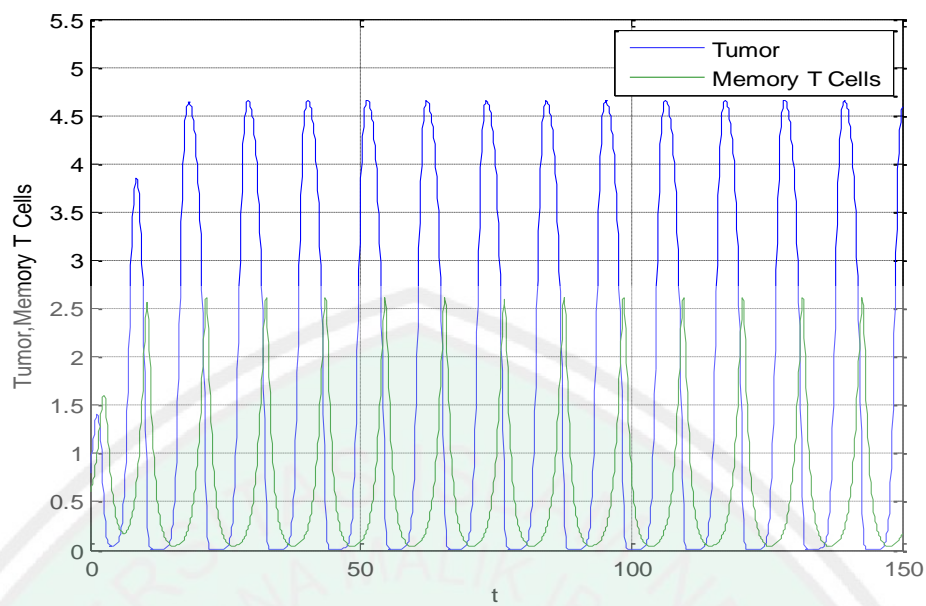
Gambar 3.1 merupakan interaksi dari respon imun terhadap pertumbuhan sel patogen (tumor) dengan $P(0) = 0.9$ sel/hari dan $T(0) = 0.75$ sel/hari dan $t = 50$ hari, terlihat bahwa laju sel T mengalami penurunan hingga $t = 8$ hari dengan jumlah sel 0 sel/hari yang kemudian sel T mengalami kestabilan hingga $t = 50$ hari. Sedangkan untuk laju sel patogen (tumor) mengalami penurunan pada $t = 1$ hari selanjutnya, mencapai puncaknya pada $t = 8$ hari dengan jumlah sel sebesar 1 sel/hari yang kemudian sel patogen (tumor) mengalami kestabilan hingga $t = 50$ hari.



Gambar 3.2 Tumor dan Sel T dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 10, c = 4,$

$$a = 4, \mu = 3.9, v = 1.9, \delta = 1.99, P(0) = 0.8, T(0) = 0.6$$

Gambar 3.2 merupakan interaksi dari respon imun terhadap pertumbuhan sel patogen (tumor) dengan $P(0) = 0.8$ sel/hari dan $T(0) = 0.6$ sel/hari dan $t = 15$ hari, terlihat bahwa laju sel T mengalami kenaikan dan mencapai puncaknya pada $t = 4$ hari dengan jumlah sel 17 sel/hari yang kemudian sel T mengalami penurunan pada $t = 10$ hari yang selanjutnya, Sel T mengalami kestabilan hingga $t = 15$ hari. Sedangkan untuk laju sel patogen (tumor) mengalami kenaikan dan mencapai puncaknya pada $t = 2$ hari dengan jumlah sel 8 sel/hari yang kemudian sel patogen (tumor) mengalami penurunan pada $t = 4$ hari yang selanjutnya, sel patogen (tumor) mengalami kestabilan hingga $t = 15$ hari.



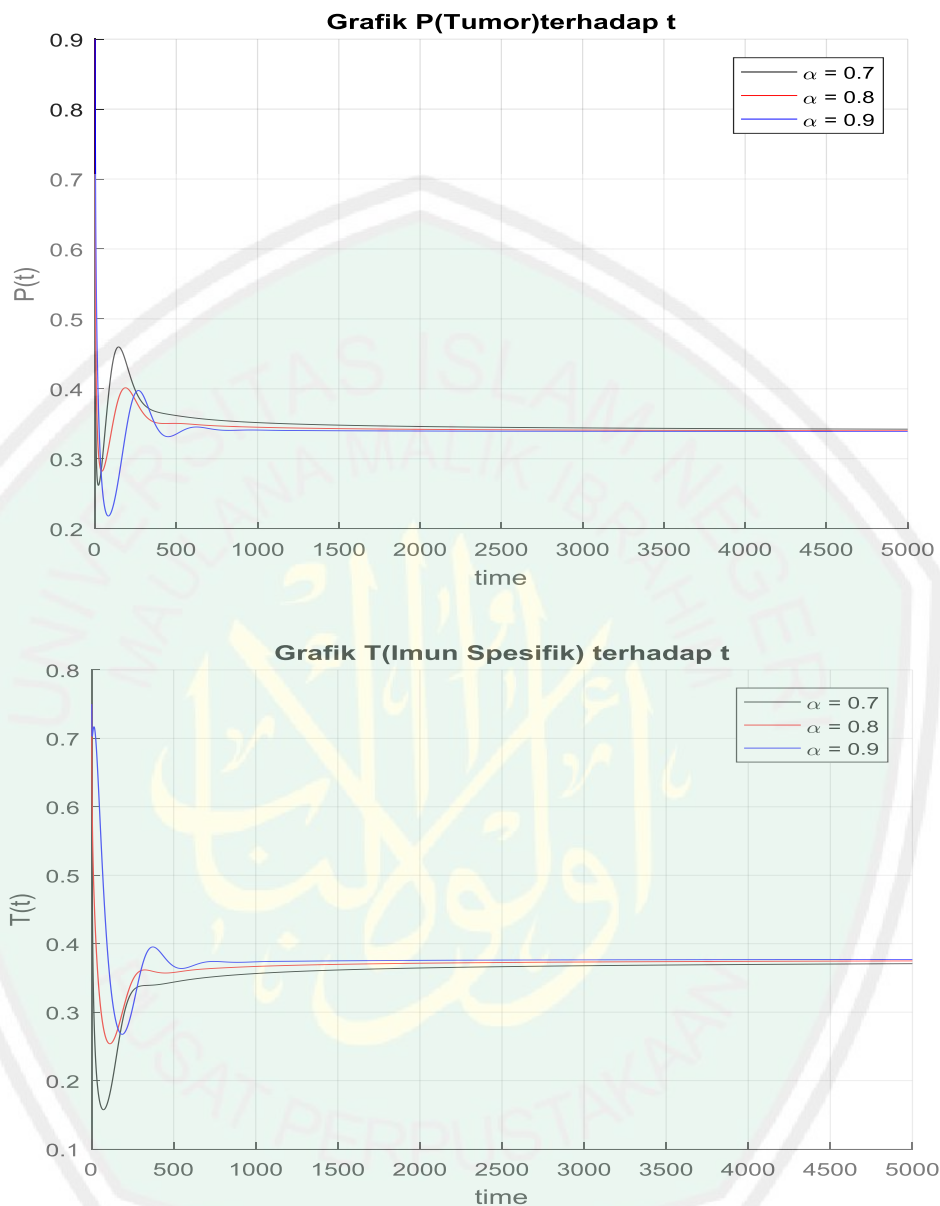
Gambar 3.3 Tumor dan Sel T dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 5, c = 4,$

$$a = 1, \mu = 3.9, v = 1.9, \delta = 1, P(0) = 0.8, T(0) = 0.6$$

Gambar 3.3 merupakan interaksi dari respon imun terhadap pertumbuhan sel patogen (tumor) dengan $P(0) = 0.8$ sel/hari dan $T(0) = 0.6$ sel/hari dan $t = 150$ hari, terlihat bahwa laju sel T dan laju sel patogen (tumor) berosilasi konstan mulai dari $t = 0$ hari sampai $t = 150$ hari.

3.5 Simulasi Dengan Model Persamaan Diferensial Fraksional

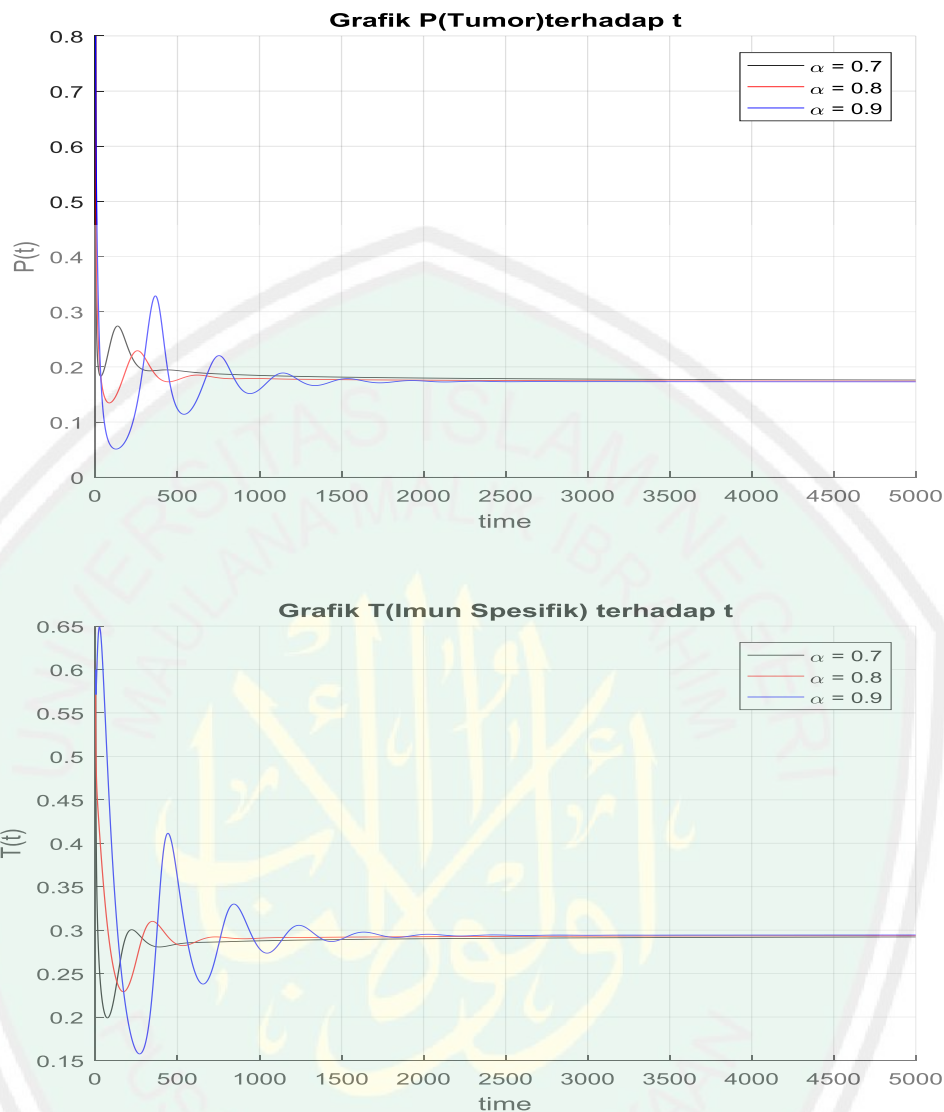
1. SIMULASI 1



Gambar 3.4 Perubahan subpopulasi sistem $P(t)$ dan $T(t)$ untuk titik kesetimbangan E_0 dengan $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8$, dan $\alpha = 0.9$

Gambar 3.4 menunjukkan hasil simulasi dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 1, c = 4, a = 0.2, \mu = 3.98, v = 1.9, \delta = 1.99, P(0) = 0.9, T(0) = 0.75$. Dengan dilakukan perubahan beberapa nilai α , yaitu $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 0.9$. Perubahan nilai α dengan nilai α yang besar menyebabkan grafik bergerak cepat menuju nilai setimbang.

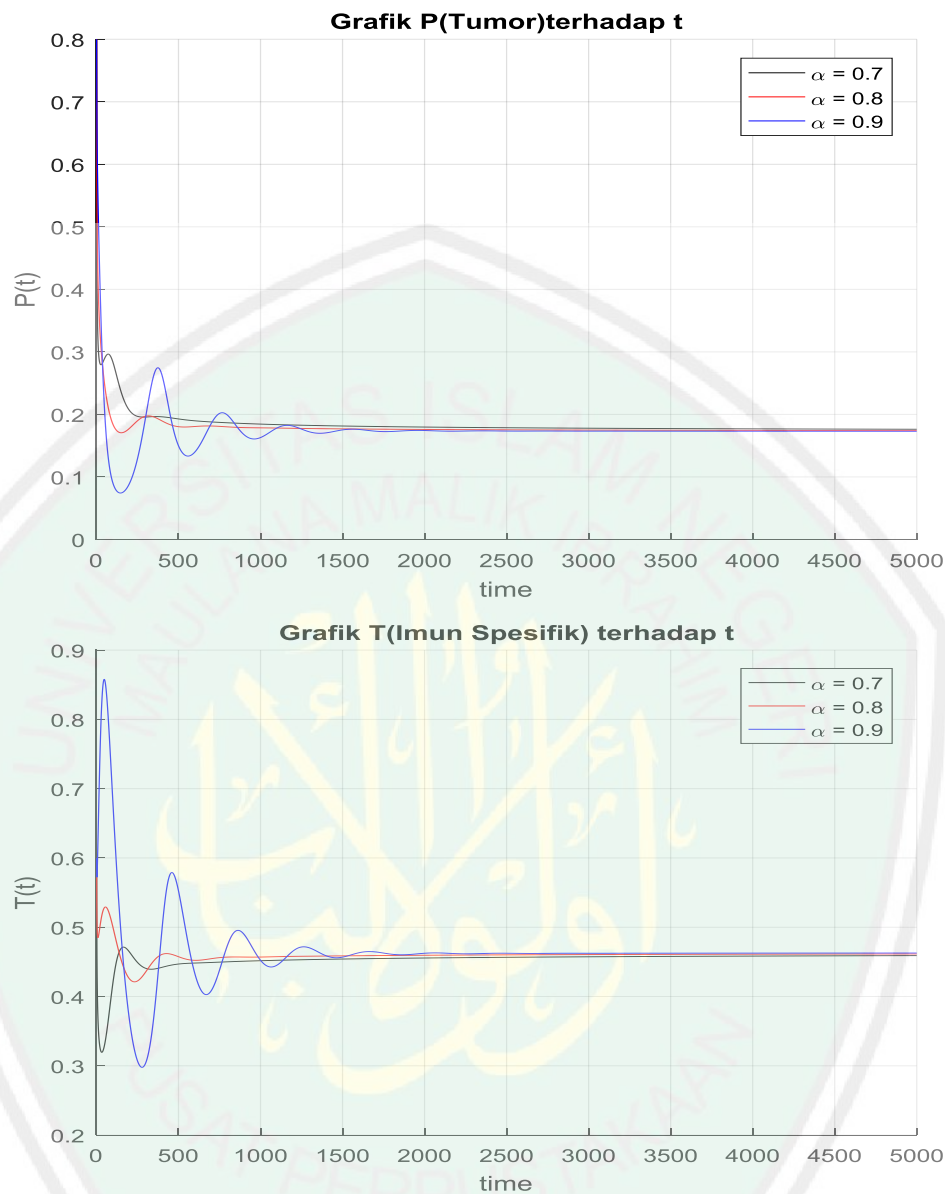
2. SIMULASI 2



Gambar 3.5 Perubahan subpopulasi sistem $P(t)$ dan $T(t)$ untuk titik kesetimbangan E_1 dengan $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8$, dan $\alpha = 0.9$

Gambar 3.5 menunjukkan hasil simulasi dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 10, c = 4, a = 4, \mu = 3.9, v = 1.9, \delta = 1.99, P(t) = 0.8, T(t) = 0.6$ dan dengan dilakukan perubahan beberapa nilai α , yaitu $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 0.9$. Perubahan nilai α dengan nilai α yang besar menyebabkan grafik bergerak cepat menuju nilai setimbang. Pada simulasi nilai α tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan, akan tetapi mempengaruhi kecepatan konvergensi solusi menuju titik kesetimbangan.

3. SIMULASI 3



Gambar 3.6 Perubahan subpopulasi sistem untuk titik kesetimbangan E_2 dengan $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8$, dan $\alpha = 0.9$

Gambar 3.6 menunjukkan hasil simulasi dengan parameter $\beta_p = 2.4, \Lambda = 5, c = 4, a = 1, \mu = 3.9, v = 1.9, \delta = 1, P(t) = 0.8, T(t) = 0.6$ dan dengan dilakukan perubahan beberapa nilai α , yaitu $\alpha = 0.7, \alpha = 0.8, \alpha = 0.9$. Perubahan nilai α dengan nilai α yang besar menyebabkan grafik bergerak cepat menuju nilai setimbang. Pada simulasi nilai α tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan, akan tetapi mempengaruhi kecepatan konvergensi solusi menuju titik kesetimbangan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun model fraksional dari respon imun terhadap patogen adalah sebagai berikut,

1. Bentuk persamaan diferensial fraksional respon imun terhadap patogen sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\frac{d^{\alpha_1}P(t)}{dt^{\alpha_1}} &= \beta_p P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{\Lambda}\right) - \frac{cP(t)T(t)}{P(t)a + 1} \\ \frac{d^{\alpha_2}T(t)}{dt^{\alpha_2}} &= \frac{\mu P(t)}{P(t)v + 1} T(t) - \delta T(t)\end{aligned}$$

Dengan nilai orde $0 < \alpha_i \leq 1, i = 1, 2$.

2. Hasil dari pembahasan didapatkan titik equilibrium atau kesetimbangan dari model fraksional respon imun terhadap patogen dengan miti order diatas adalah $E_0(0,0), E_1(\Lambda, 0), E_2\left(\frac{\delta}{\mu-\delta v}, \frac{\beta_p(\Lambda(\mu-\delta v)-\delta)(\delta a+\mu-\delta v)}{(\mu-\delta v)^2 \Lambda c}\right)$. Berdasarkan ketiga titik kesetimbangan tersebut didapatkan nilai eigen yaitu, untuk titik $E_0(0,0)$ nilai eigennya adalah $\lambda^{m\alpha_1} = \beta_p, \lambda^{m\alpha_2} = -\delta$. Kemudian, untuk titik kesetimbangan $E_1(\Lambda, 0)$ nilai eigennya adalah $\lambda^{m\alpha_1} = -\beta_p$ dan $\lambda^{m\alpha_2} = \frac{\mu\Lambda}{\Lambda v + 1} - \delta$. Selanjutnya, untuk titik kesetimbangan $E_2\left(\frac{\delta}{\mu-\delta v}, \frac{\beta_p(\Lambda(\mu-\delta v)-\delta)(\delta a+\mu-\delta v)}{(\mu-\delta v)^2 \Lambda c}\right)$ diperoleh akar karakteristik $\lambda^{m(\alpha_1+\alpha_2)} - \lambda^{m\alpha_2} \beta_p (A_1(A_2 + 1) - 1) + \frac{\beta_p \delta^2 A_1}{\mu \Lambda (1 - A_1)} = 0$. Sehingga, titik kesetimbangan diperoleh kestabilan dimana pada titik kesetimbangan $E_0(0,0)$ adalah tidak stabil dan pada titik kesetimbangan $E_1(\Lambda, 0), E_2\left(\frac{\delta}{\mu-\delta v}, \frac{\beta_p(\Lambda(\mu-\delta v)-\delta)(\delta a+\mu-\delta v)}{(\mu-\delta v)^2 \Lambda c}\right)$ adalah stabil.
3. Simulasi numerik menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan pada model orde fraksional dengan nilai eigen bernilai imajiner dengan real positif dengan sifat kestabilannya dipengaruhi nilai α .

4.2 Saran

Pada skripsi ini, analisis kestabilan yang dilakukan belum mengidentifikasi kestabilan global atau bifurkasi pada titik kesetimbangan. Oleh karena itu, disarankan untuk dilakukan analisis tentang kestabilan global atau bifurkasi pada titik kesetimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, E., dkk. (2006). *On Some Routh-Hurwitz Conditions for Fractional Order Differential Equation and Their Applications in Lorenz, Rossler, Chua and Chen Systems*, *Physics-Letters A*. 325: 173-182.
- Antari, A.L.. (2017). *Imunologi Dasar*. Yogyakarta: CV Budi Utama. Diakses dari <http://books.google.co.id/books>.
- Anton, H., Rorres, C.. (2004). *Aljabar Linier Elementersversi Aplikasi Jilid I*. Jakarta: Erlangga.
- Baratawidjaja, K.G., Rengganis, I.. (2010). *Imunologi Dasar edisi ke-20*. Jakarta: Fakultas Kedokteran UI.
- Boyce, W.E. dan DilPrima, R.C.. (1999). *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Chen. 2008. *Linear Algebra*. London: Imperial College.
- C. Li., dkk. (2011). *On Riemann-liouville and Caputo derivatives*. *Discrete in Nature and Society*. Article ID 562494.
- Cong, N.D., dkk. (2016). *Linearized Asymptotic Stability for Fractional Defferential Equations*. *Electronic Jurnal of Qualitative Theory of Defferential Equation*. Vol. 39. Pp. 1-13.
- Dasbasi, Bahatdin, 2018. *Stability Analysis of Mathematical Model including Pathogen-Specific Immune System Response with Fractional-Order Differential Equations*. *Hindawi Computational and Mahematical Methods in Medicine*. 1-10.
- W. Deng, dkk. (2007). *Analysis of Fractional Differential Equations with Multi-Orders*. *Fractals*. Vol. 59. No. 3. pp. 173-182.
- Diethelm, i.. (2010). *Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. pp. 67-157.
- El-Saka, H., El-Sayed, A.. (2013). *Fractional Order Equations and Dynamical Systems*. Saarbrücken, German: Lambert Academic Publishing. ISBN 978-3-659-40197-8.

- Fitri, L.E.. (2017). *Imunologi Malaria: Misteri Interaksi Inang dan Parasit*. Malang: UB Press. Diakses dari <http://books.google.co.id/books>.
- Johansyah, M. D., dkk.(2019). *Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Adomian Decomposition Method dan Variational Iteration Method*. Jurnal Matematika. 18. 9-20. Doi: 1412-5056|2598-8980
- Linda, J.H., Danny, J.S.. (2005). *At a Glance SistemReproduksi Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga. Diakses dari <http://books.google.co.id/books>.
- Ndii, M. Z.. (2018). *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. Yogyakarta: CV Budi Utama. . Diakses dari <http://books.google.co.id/books>.
- Neuhauser, C.. (2004). *Calculus for Biology and Medicine Second Edition*. London: Prentice-Hall Internasional.
- Nugraheni, Kartika.. (2017). *Analisis Dinamik dan Penyelesaian Numerik Model Eko-Epidemiologi Orde Fraksional*. Tesis. FMIPA, Matematika, Universitas Brawijaya, Malang
- Odibat, Z., Shawagfeh, N.. (2007). *Generalized Taylor's Formula*. Appl Math Comput 186:286-293
- Petras, I. (2011). *Fractional-Order Nonlinear Systems*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg. P. 9-63
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, Calif. USA.
- Saprianto, Rizky.. (2019). *Analisis Dinamik Model SIR Orde Fraksional Dengan Laju Kejadian Nonlinear*. Skripsi. FMIPA, Matematika, Universitas Brawijaya, Malang
- Sasongko, S. B.. (2010). *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: CV Andi. Diakses dari <http://books.google.co.id/books>.
- Zaid, M.. (2010). *Odibat Analytic Study on Linear Systems of Fractional Differential Equations*. Computers and Mathematics with Application. Vol. 59. No. 3. Pp. 1171-1183.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Simulasi Numerik Model Respon Imun Terhadap Patogen Orde Biasa menggunakan program MATLAB

Figure 3.1

```
function kontinu
t=0:0.1:50
initial_x=0.9;
initial_y=0.75;
[t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
legend('Tumor','Memory T Cells')
xlabel('t');ylabel('Tumor,Memory T Cells');
grid on
axis ([0 50 0 1])

function dxdt=kk(t,x)
dxdt_1=2.4*x(1)*(1-1*x(1))-4*x(1)*x(2)/(0.2*x(1)+1)
dxdt_2=3.98*x(1)*x(2)/(1.9*x(1)+1)-1.99*x(2)

dxdt=[dxdt_1;dxdt_2];
end
end
```

Figure 3.2

```
function kontinu
t=0:0.1:15
initial_x=0.8;
initial_y=0.6;
[t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
legend('Tumor','Memory T Cells')
xlabel('t');ylabel('Tumor,Memory T Cells');
grid on
axis ([0 15 0 20])

function dxdt=kk(t,x)
dxdt_1=2.4*x(1)*(1-(1/10)*x(1))-4*x(1)*x(2)/(4*x(1)+1)
dxdt_2=3.9*x(1)*x(2)/(1.9*x(1)+1)-x(2)

dxdt=[dxdt_1;dxdt_2];
end
end
```

Figure 3.3

```
function kontinu
t=0:0.1:150
initial_x=0.8;
initial_y=0.6;
[t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
legend('Tumor','Memory T Cells')
xlabel('t');ylabel('Tumor,Memory T Cells');
grid on
axis ([0 150 0 5.5])

function dxdt=kk(t,x)
dxdt_1=2.4*x(1)*(1-(1/5)*x(1))-4*x(1)*x(2)/(x(1)+1)
dxdt_2=3.9*x(1)*x(2)/(1.9*x(1)+1)-x(2)

dxdt=[dxdt_1;dxdt_2];
end
end
```

Lampiran 2

Simulasi Numerik Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen menggunakan program MATLAB

File 1

```
function [T,Y]=FOFinanc(parameters,orders,Tsim,Y0)
h=0.01;
n=round(Tsim/h);
a=parameters(1);b=parameters(2);c=parameters(3);
d=parameters(4);e=parameters(5);f=parameters(6);
g=parameters(7);
q1=orders(1);q2=orders(2);
cp1=1;cp2=1;
for j=1:n
    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
    cp1=c1(j);cp2=c2(j);
end
x(1)=Y0(1);y(1)=Y0(2);
for i=2:n
    x(i)=(a*x(i-1)*(1-x(i-1)/b)-(c*x(i-1)/1+d*x(i-1))*y(i-1))*h^q1-memo(x,c1,i);
    y(i)=((e*x(i-1)/1+f*x(i-1))*y(i-1)-g*y(i-1))*h^q2-memo(y,c2,i);
end
T=0:0.04166:50;
for j=1:n
    Y(j,1)=x(j);Y(j,2)=y(j);
end
```

File 2

```
function [yo]=memo(r,c,k)
temp=0;
for j=1:k-1
    temp=temp+c(j)*r(k-j);
end
yo=temp;
```

File 3 (Figure 3.4)

```
close all; clear all;
figure;
title ('Fractional Derivative')
hold on;
[t,y]=FOFinanc([2.4 1 4 0.2 3.98 1.9 1.99],[0.7 0.7],200,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'k');
[t,y]=FOFinanc([2.4 1 4 0.2 3.98 1.9 1.99],[0.8 0.8],200,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'r');
[t,y]=FOFinanc([2.4 1 4 0.2 3.98 1.9 1.99],[0.9 0.9],200,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'b');
legend('\alpha = 0.7', '\alpha = 0.8', '\alpha = 0.9')
xlabel('time');ylabel('x(t)');grid on;
```

File 4 (Figure 3.4b)

```
close all; clear all;
figure;
title ('Fractional Derivative')
hold on;
[t,y]=FOFinanc([2.4 1 4 0.2 3.98 1.9 1.99],[0.7 0.7],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'k');
[t,y]=FOFinanc([2.4 1 4 0.2 3.98 1.9 1.99],[0.8 0.8],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'r');
[t,y]=FOFinanc([2.4 1 4 0.2 3.98 1.9 1.99],[0.9 0.9],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'b');
legend('\alpha = 0.7', '\alpha = 0.8', '\alpha = 0.9')
xlabel('time');ylabel('x(t)');grid on;
```

File 5 (Figure 3.5)

```
close all; clear all;
figure;
title ('Fractional Derivative')
hold on;
[t,y]=FOFinanc([2.4 10 4 4 3.9 1.9 1],[0.7 0.7],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'k');
[t,y]=FOFinanc([2.4 10 4 4 3.9 1.9 1],[0.8 0.8],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'r');
[t,y]=FOFinanc([2.4 10 4 4 3.9 1.9 1],[0.9 0.9],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'b');
legend('\alpha = 0.7', '\alpha = 0.8', '\alpha=0.9')
xlabel('time');ylabel('x(t)');grid on;
```

File 6 (Figure 3.5b)

```
close all; clear all;
figure;
title ('Fractional Derivative')
hold on;
[t,y]=FOFinanc([2.4 10 4 4 3.9 1.9 1],[0.7 0.7],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'k');
[t,y]=FOFinanc([2.4 10 4 4 3.9 1.9 1],[0.8 0.8],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'r');
[t,y]=FOFinanc([2.4 10 4 4 3.9 1.9 1],[0.9 0.9],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'b');
legend('\alpha = 0.7', '\alpha = 0.8', '\alpha = 0.9')
xlabel('time');ylabel('x(t)');grid on;
```

File 7 (Figure 3.6)

```
close all; clear all;
figure;
title ('Fractional Derivative')
hold on;
[t,y]=FOFinanc([2.4 5 4 1 3.9 1.9 1],[0.7 0.7],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'k');
[t,y]=FOFinanc([2.4 5 4 1 3.9 1.9 1],[0.8 0.8],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'r');
[t,y]=FOFinanc([2.4 5 4 1 3.9 1.9 1],[0.9 0.9],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,1),'b');
legend('\alpha = 0.7', '\alpha = 0.8', '\alpha=0.9')
xlabel('time');ylabel('x(t)');grid on;
```

File 8 (Figure 3.6b)

```
close all; clear all;
figure;
title ('Fractional Derivative')
hold on;
[t,y]=FOFinanc([2.4 5 4 1 3.9 1.9 1],[0.7 0.7],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'k');
[t,y]=FOFinanc([2.4 5 4 1 3.9 1.9 1],[0.8 0.8],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'r');
[t,y]=FOFinanc([2.4 5 4 1 3.9 1.9 1],[0.9 0.9],50,[0.8
0.6]);plot(y(:,2),'b');
legend('\alpha = 0.7', '\alpha = 0.8', '\alpha = 0.9')
xlabel('time');ylabel('x(t)');grid on;
```

RIWAYAT HIDUP



Yusrotul Fajri atau biasa dipanggil Fajri, lahir di Pasaman pada tanggal 30 April 1998. Anak ketiga dari tujuh bersaudara dari pasangan Bapak Yulishar dan Ibu Nur Asiah. Pendidikan dasar ditempuh di SDN 18 Murni Panti atau sekarang sudah menjadi SDN 15 Murni Panti dan lulus pada tahun 2010. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MTSN Panti atau sekarang disebut MTSN 3 Pasaman dan lulus pada tahun 2013. Setelah itu melanjutkan pendidikan di MAN Lubuk Sikaping atau sekarang sudah menjadi MAN 1 Pasaman dan lulus pada tahun 2016. Kemudian pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil jurusan Matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Yusrotul Fajri
NIM : 16610063
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Fraksional Respon Imun Terhadap Patogen
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Maret 2020	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	1.
2.	24 April 2020	Perbaikan Ayat	2.
4.	27 April 2020	Revisi Bab I & Bab II	3.
5.	29 April 2020	Revisi ayat di Bab I & Bab II	4.
6.	28 April 2020	ACC untuk diseminarkan	5.
	3 Juli 2020	Revisi Bab II	6.
7.	13 November 2020	Revisi Bab III	7.
8.	15 November 2020	ACC untuk disidangkan	8.

Malang, 30 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001