SIFAT-SIFAT BI-DERIVASI SIMETRIK PADA ALJABAR *INCLINE*

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD DZIKRULLAH HANAFI
NIM. 15610046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SIFAT-SIFAT BI-DERIVASI SIMETRIK PADA ALJABAR *INCLINE*

SKRIPSI

OLEH
MUHAMMAD DZIKRULLAH HANAFI
NIM. 15610046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SIFAT-SIFAT BI-DERIVASI SIMETRIK PADA ALJABAR *INCLINE*

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
MUHAMMAD DZIKRULLAH HANAFI
NIM. 15610046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SIFAT-SIFAT BI-DERIVASI SIMETRIK PADA ALJABAR *INCLINE*

SKRIPSI

Oleh
MUHAMMAD DZIKRULLAH HANAFI
NIM. 15610046

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 9 Oktober 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dewi Ismiarti, M.Si	M. Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870505 20160801 2 058	NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SIFAT-SIFAT BI-DERIVASI SIMETRIK PADA ALJABAR *INCLINE*

SKRIPSI

Oleh
MUHAMMAD DZIKRULLAH HANAFI
NIM. 15610046

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 9 Oktober 2020

Penguji Utama	: Dr. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: M. Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muhammad Dzikrullah Hanafi
NIM	: 15610046
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Bi-Derivasi Simetrik pada Aljabar *Incline*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Desember 2020
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
A5B83AAF01120..56
6000

Muhammad Dzikrullah Hanafi
NIM. 15610046

MOTO

إِذِالْفَتَى حَسْبَ اعْتِقَادِهِ رُفِعْ >< وَكُلُّ مَنْ لَمْ يَعْتَقِدْ لَمْ يَنْتَفِعْ

"Karena pencapaian seorang pemuda itu berdasarkan atas keyakinannya. Barang siapa yang tidak (mempunyai) keyakinan, maka dia tidak akan memperoleh kesuksesan."

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Almarhum ayahanda Hanafi Baihaqi, ibunda Mufidatul Husna, serta adik-adikku tersayang Mu'thi Syarifulah Hanafi dan Muhammad Kholilul Rahman yang selalu memberi semangat untuk penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Dewi Ismiarti, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 9 Oktober 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Hanafi, Muhammad Dzikrullah. 2020. **Sifat-Sifat Bi-Derivasi Simetrik pada Aljabar *Incline***. Tugas akhir/Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: aljabar *incline*, bi-derivasi simetrik, *trace*, aljabar.

Aljabar *incline* adalah suatu struktur aljabar yang dibentuk dari suatu himpunan tak-kosong dengan dua operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu. Suatu pemetaan simetrik D pada aljabar *incline* R disebut bi-derivasi simetrik jika memenuhi kondisi $D(x * y, z) = (D(x,z) * y) + (x * D(y,z))$ atau $D(x, y * z) = (D(x,y) * z) + (y * D(x,z))$ untuk semua $x, y, z \in R$. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif. Jenis penelitian yang digunakan berupa penelitian kepustakaan (*library research*). Berdasarkan hasil penelitian, didapatkan sifat-sifat dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* yang dinyatakan dalam proposisi, diantaranya yaitu: 1) Sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif; 2) Sifat *regular trace* dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan elemen nol; 3) Sifat bi-derivasi simetrik dan *trace* dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan identitas perkalian; 4) Sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* integral komutatif; 5) Sifat bi-derivasi simetrik untuk pemetaan suatu elemen tetap pada aljabar *incline* komutatif; 6) Sifat bi-derivasi simetrik untuk kasus pemetaan elemen tertentu dengan perkalian pasangan elemen pada aljabar *incline* komutatif; 7) Sifat bi-derivasi simetrik untuk kasus pemetaan elemen tetap nol pada aljabar *incline* komutatif; 8) Sifat *trace* dari bi-derivasi simetrik gabungan pada aljabar *incline* komutatif; dan 9) Sifat dua *trace* dari dua pemetaan bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* integral komutatif.

ABSTRACT

Hanafi, Muhammad Dzikrullah. 2020. **Properties of Symmetric Bi-Derivation of Incline Algebra**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: incline algebra, symmetric bi-derivation, trace, algebra.

Incline algebra is a non-empty set with two binary operations fullfilling certain axioms. A symmetric mapping D of incline algebra R is called symmetric bi-derivation if it satisfies the conditions $D(x*y,z)=(D(x,z)*y)+(x*D(y,z))$ or $D(x,y*z)=(D(x,y)*z)+(y*D(x,z))$ for all $x,y,z\in R$. The purpose of this study is to explain some properties of symmetric bi-derivation. The research method of this research is a qualitative approach, especially library research. We explain some properties of symmetric bi-derivation of incline algebra, namely: 1) Symmetric bi-derivation of commutative incline algebra; 2) Regular trace of symmetric bi-derivation of a commutative incline algebra with zero elements; 3) symmetric bi-derivation and trace of symmetric bi-derivation of a commutative incline algebra with multiplication identity; 4) Symmetric bi-derivation of a commutative integral incline algebra; 5) Symmetric bi-derivation of commutative incline algebra for mapping a fixed element; 6) Symmetric bi-derivation of a commutative incline algebra for the case of mapping certain elements by multiplying element pairs; 7) Symmetric bi-derivation of a commutative incline algebra for the case of mapping zero as a fixed element; 8) Trace of joinitive symmetric bi-derivation of a commutative integral incline algebra; and 9) a property of two traces of of two symmetric bi-derivation of a commutative integral incline algebra.

ملخص

حنفي، محمد ذكرالله. ٢٠٢٠. **خصائص الاشتقاق الثنائي المتماثل في الجبر المنحدر**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم و التيكنولوجيا، جامعة مولنا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة الأولى : دوي إسمايرتي الماجستير. المشرف الثاني : محمد نافع جوهاري الماجستير.

الكلمات الرئيسية : الجبر المنحدر، الاشتقاق الثنائي المتماثل، طبيعة الأثرية، الجبر.

الجبر المنحدر هو هيكل جبري الذي يتكون من مجموعة غير فارغة بعامل ثنائي وتحقيق بعض المسلمات المعينة. ويسمى أحد رسم الخرائط المتماثل D في الجبر المنحدر R باشتقاق ثنائي متماثل عندما يتحقق باشروط $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z))$ أو $D(x, y * z) = (D(x, y) * z) + (y * D(x, z))$ لجميع $x, y, z \in R$. كان الغرض من هذه الدراسة هو تعريف خصائص الاشتقاق الثنائي المتماثل في الجبر المنحدر. طريقة البحث المستخدمة في هذا البحث هي منهج الكيفي. يستخدم نوع البحث في شكل البحث المكتبي (البحث المكتبة). بناءً على نتائج البحث ، وجد أن خصائص الاشتقاق الثنائي المتماثل في الجبر المنحدر يتم التعبير عنها في افتراضات ، ومنها: ١) طبيعة الاشتقاق الثنائي المماثل للجبر المنحدر هي التبادلية. ٢) منتظم طبيعة الأثرية بالاشتقاق الثنائي المتماثل في الجبر المنحدر تبادلية بصفر من العناصر. ٣) الخصائص الاشتقاق الثنائي المتماثل والأثري للاشتقاق الثنائي المتماثل في الجبر المنحدر تبادلية مع هوية الضرب. ٤) طبيعة الاشتقاق الثنائي المتماثل في الجبر المنحدرالمتكامل تبادلية. ٥) طبيعة الاشتقاق الثنائي المماثل للجبر المنحدر هي التبادلية لرسم خرائط لعنصر ثابت. ٦) طبيعة الاشتقاق الثنائي المماثل للجبر المنحدر هي التبادلية في حالة تعيين عناصر معينة بضرب ازواج العناصر. ٧) طبيعة الاشتقاق الثنائي المماثل للجبر المنحدر هي التبادلية بالنسبة لحالة تعيين العنصر يبقى صفرا. ٨) طبيعة الأثرية من الاشتقاق الثنائي المماثل المركبي في الجبر المنحدر تبادلية. ٩) الطبيعة الأثرية الثنائية من تعيينين الاشتقاق الثنائي المماثل في الجبر المنحدر المتكامل تبادلية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta diciptakan oleh Allah SWT dengan ukuran yang sangat teliti serta struktur yang lengkap. Dalam buku Tafsir Ilmi dipaparkan mengenai struktur alam semesta dengan merujuk pada salah satu ayat Al-Qur'an dalam surat Ar-Ra'd ayat 2 yang artinya:

"Allah-lah Yang meninggikan langit tanpa tiang (sebagaimana) yang kamu lihat, kemudian Dia bersemayam di atas ´Arasy, dan menundukkan matahari dan bulan. Masing-masing beredar hingga waktu yang ditentukan. Allah mengatur urusan (makhluk-Nya), menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya), supaya kamu meyakini pertemuan(mu) dengan Tuhanmu".

Dalam buku Tafsir Ilmi tersebut dijelaskan bahwa alam semesta diciptakan oleh Allah dalam suatu struktur yang sangat harmonis (RI, 2016).

Salah satu struktur yang harmonis (memiliki aturan) dalam ilmu matematika adalah struktur aljabar. Struktur aljabar merupakan materi yang paling sederhana dalam aljabar abstrak. Suatu himpunan tak kosong G dengan satu atau lebih operasi biner di G disebut struktur aljabar atau sistem aljabar (Raisinghania & Aggarwal, 1980). Beberapa struktur aljabar yang sering dipelajari adalah grup dan ring. Namun masih banyak struktur aljabar selain grup dan ring, salah satunya adalah aljabar *incline*.

Teori *incline* didasarkan pada teori *semiring* dan teori latis. Aljabar *boolean* dan teori *fuzzy* adalah dua contoh dari suatu struktur umum yang disebut *incline* (Cao, Kim, & Roush, 1984). Sedangkan, struktur aljabar adalah suatu himpunan tak-kosong dengan satu atau lebih operasi biner yang dapat didefinisikan pada himpunan tersebut (Gallian, 2010). Sehingga, dapat dikatakan bahwa aljabar *incline* adalah suatu struktur aljabar yang dibentuk dari suatu himpunan tak-kosong dengan dua operasi biner serta memenuhi beberapa aksioma tertentu.

Salah satu konsep yang dapat diterapkan pada aljabar *incline* adalah bi-derivasi simetrik. Konsep bi-derivasi simetrik merupakan suatu pemetaan simetrik yang memenuhi suatu kondisi tertentu. Suatu pemetaan D pada aljabar *incline* R disebut pemetaan yang simetrik jika $D(x, y) = D(y, x)$ untuk semua $x, y \in R$.

Kemudian, suatu pemetaan simetrik D pada aljabar *incline* R disebut bi-derivasi simetrik jika memenuhi kondisi $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z))$ atau $D(x, y * z) = (D(x, y) * z) + (y * D(x, z))$ untuk semua $x, y, z \in R$ (Ozbal & Firat, 2011).

Teori aljabar *incline* diperkenalkan oleh Z.Q. Cao, K.H. Kim, dan F.W. Roush, pada tahun 1984 dalam bukunya yang berjudul "*Incline Algebra and Applications"* (Cao et al., 1984). Kemudian diteliti kembali oleh Sule Ayar Ozbal dan Alev Firat pada tahun 2011 (Ozbal & Firat, 2011) dan pada tahun 2016 Ozbal dan Firat mengkaji kembali dalam suatu penelitian berjudul "*On Symmetric Bi-Multiplier of Incline Algebras"* (Firat & Ozbal, 2016). Kemudian pada tahun 2019, Fita Loka Dewi dan Agung Lukito mengkaji lebih mendalam mengenai sifat-sifat *bi-multiplier* simetrik pada aljabar *incline* (Loka Dewi & Lukito, 2019).

Konsep derivasi pada aljabar *incline* dan beberapa hasil pembuktian derivasi pada suatu *incline* dan integral *incline* dipekenalkan oleh N.O. Alshehri pada tahun 2010 (NO, 2010). Sedangkan, Sule Ayar Ozbal dan Alev Firat pada tahun 2011 memperkenalkan konsep *f*-derivasi pada aljabar *incline* dan sifat-sifatnya (Ozbal & Firat, 2011). Pada tahun yang sama, Ozbal dan Firat memperkenalkan konsep bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* (Özbal & Firat, 2011).

Selanjutnya akan dikaji lebih mendalam pada penelitian ini mengenai sifat-sifat dari bi-derivasi simetrik dan bi-derivasi umum simetrik pada aljabar *incline*. Sifat-sifat tersebut dapat digunakan pada beberapa penerapan, yaitu untuk aplikasi dalam kemungkinan penalaran dan automata, aplikasi untuk grafik, pengelompokan dan pemrograman, serta sistem linier (Cao et al., 1984). Oleh karena itu, penelitian ini menarik untuk dikaji lebih mendalam. Sehingga dipilih judul "Sifat-Sifat Bi-Derivasi Simetrik pada Aljabar *Incline*" pada penelitian ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian, maka rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Bagaimana sifat-sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*?
2. Bagaimana aljabar *incline* dalam islam?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk mengetahui sifat-sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*.
2. Untuk mengetahui aljabar *incline* dalam islam.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi berbagai kalangan dalam mempelajari dan memperluas wawasan mengenai aljabar *incline*, khususnya sifat-sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif. Jenis penelitian yang digunakan berupa penelitian kepustakaan (*library research*). Kajian yang diambil tentang aljabar *incline* dan sifat-sifatnya, simetrik, dan teori derivasi. Batasan masalah pada penelitian ini hanya mengkaji dan membuktikan sifat-sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* yang dinyatakan dalam proposisi.

Langkah-langkah dalam penelitian ini antara lain menganalisis data dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menunjukkan dan membuktikan sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif.
2. Menunjukkan dan membuktikan sifat *regular* trace dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan elemen nol.
3. Menunjukkan dan membuktikan sifat trace dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* dengan identitas perkalian 1.
4. Menunjukkan dan membuktikan sifat bi-derivasi simterik pada aljabar *incline* integral komutatif.
5. Menunjukkan dan membuktikan sifat bi-derivasi simetrik untuk pemetaan suatu elemen tetap pada aljabar *incline* komutatif.
6. Menunjukkan dan membuktikan sifat bi-derivasi simetrik untuk kasus pemetaan elemen tertentu dengan perkalian pasangan elemen pada aljabar *incline* komutatif.

7. Menunjukkan dan membuktikan sifat bi-derivasi simetrik untuk kasus pemetaan elemen tetap nol pada aljabar *incline* komutatif.
8. Menunjukkan dan membuktikan sifat trace dari bi-derivasi simetrik gabungan pada aljabar *incline* integral komutatif.
9. Menunjukkan dan membuktikan sifat dua *trace* dari dua pemetaan bi-derivasi simetrik gabungan pada aljabar *incline* integral komutatif.
10. Menunjukkan kajian aljabar *incline* dalam islam.
11. Menyimpulkan sifat-sifat bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*, serta kajian aljabar *incline* dalam islam.

1.6 Sistematika Penulisan

Penelitian ini ditulis berdasarkan sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini meliputi beberapa subbab yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini meliputi beberapa subbab yaitu pemetaan, operasi biner, aljabar boolean, aljabar *incline*, pemetaan simetrik, bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*, pemetaan gabungan, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini meliputi subbab yang mendeskripsikan tentang sifat-sifat bi-derivasi simetrik dan kajian aljabar *incline* dalam Islam.

Bab IV Penutup

Pada bab ini meliputi subbab yaitu kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Beberapa materi dasar yang perlu dipahami sebelum mengarah ke aljabar *incline* adalah materi tentang pemetaan dan operasi biner.

2.1 Pemetaan

Konsep pemetaan telah banyak digunakan di berbagai bidang matematika, terutama di bidang aljabar. Pemetaan merupakan materi dasar dalam bidang aljabar. Berikut definisi dari pemetaan:

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan f dari suatu himpunan A ke himpunan B, dilambangkan $f: A \to B$, adalah suatu aturan yang memetakan setiap elemen a dari A dengan tepat pada satu elemen b dari B. Himpunan A disebut *domain* dari f, dan B disebut *kodomain* dari f. Jika f memetakan a ke b, maka b disebut *peta* dari a atas f. Sub himpunan dari B yang terdiri dari semua *peta* dari elemen-elemen A disebut *range* dari A atas f (Gallian, 2010).

Singkatnya dapat ditulis $f(a) = b$ dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

Contoh 2.1.1

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,5,7\}$. Kemudian, pemetaan $f(x) = 2x + 1$ memetakan setiap elemen di A ke elemen tunggal di B. Sehingga peta dari A oleh f adalah B atau dengan kata lain $f(A) = B$.

2.2 Operasi Biner

Operasi biner merupakan salah satu contoh pemetaan dengan kondisi tertentu. Berikut definisi dari operasi biner:

Definisi 2.2.1

Misalkan G himpunan tak-kosong. Operasi biner pada G adalah pemetaan dari $G \times G$ ke G (Gallian, 2010).

Jadi, dapat dikatakan bahwa operasi biner pada G adalah pemetaan dari $G \times G$ ke himpunan G itu sendiri.

Contoh 2.2.1

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$, pemetaan $f(a,b) = a + b$ adalah operasi biner karena jumlah dari bilangan real adalah bilangan real dan nilainya tunggal .

2.3 Aljabar Boolean

Salah satu struktur aljabar yang sering digunakan sebagai contoh adalah aljabar boolean. Aljabar boolean merupakan suatu himpunan dengan beberapa operasi yang memenuhi aksioma tertentu. Penjelasan lebih lengkap akan diterangkan sebagaimana berikut:

Definisi 2.3.1

Misalkan B adalah himpunan dan didefinisikan operasi OR ($+$), AND ($\cdot$), dan NOT ($'$) pada B. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B. Maka tupel

$$\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

disebut aljabar boolean jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma berikut:

1. Identitas
   (i) $a + 0 = a$
   (ii) $a \cdot 1 = a$
2. Komutatif
   (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Distributif
   (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
4. Komplemen
   Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $a' \in B$ sehingga
   (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a \cdot a' = 0$

(Munir, 2010)

Terdapat tiga operasi dasar dalam aljabar boolean, diantaranya yaitu NOT disimbolkan dengan operator $'$, OR dinotasikan dengan operator $+$, dan AND dinotasikan dengan operator $\cdot$. Ketiga operasi tersebut memiliki aturan masing-masing dalam pengoperasiannya.

1. NOT

   Simbol yang biasa digunakan untuk NOT adalah $'$. NOT dari suatu variabel adalah suatu variabel yang mempunyai nilai kebenaran berlawanan dari nilai kebenaran variabel semula. NOT dari variabel X dinyatakan dengan X'. Nilai kebenaran dari operasi NOT dapat dilihat pada Tabel 2.3.1 berikut.

Tabel 2.3.1 Kaidah Operasi NOT

X	*X'*
0	1
1	0

2. AND

   Simbol yang biasa digunakan untuk AND adalah $\cdot$ (tanda titik). Makna dari AND adalah bahwa jika kedua input bernilai 1, maka nilai keluarannya akan bernilai 1, selain itu akan bernilai 0. Input X dan Y yang dihubungkan dengan gerbang AND dinyatakan dengan $X \cdot Y = XY$. Nilai kebenaran dari operasi OR dapat dilihat pada Tabel 2.3.2.

Tabel 2.3.2 Kaidah Operasi AND

X	*Y*	*XY*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. OR

Simbol yang biasa digunakan untuk OR adalah $+$ (tanda plus). Makna dari OR adalah bahwa jika kedua input bernilai 0, maka nilai keluarannya akan bernilai 0, selain itu akan bernilai 1. Input X dan Y yang dihubungkan dengan gerbang OR dinyatakan dengan $X + Y$. Nilai kebenaran dari operasi AND dapat dilihat pada Tabel 2.3.3.

Tabel 2.3.3 Kaidah Operasi OR

X	Y	$X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(Manongga & Nataliani, 2013)

Terdapat beberapa sifat turunan yang berlaku dalam aljabar boolean. Sifat-sifat tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.3.4 berikut.

Tabel 2.3.4 Sifat-Sifat Turunan Aljabar Boolean

A1	Hukum Asosiatif	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
A2		$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
A3	Hukum Pembatalan	$X + 1 = 1$
A4		$X \cdot 0 = 0$
A5	Hukum Idempoten	$X + X = X$
A6		$X \cdot X = X$
A7	Hukum Penyerapan	$X + (X \cdot Y) = X$
A8		$X \cdot (X + Y) = X$
A9	Hukum Penyederhanaan	$X + (X' \cdot Y) = X + Y$
A10		$X \cdot (X' + Y) = X \cdot Y$
A11	Hukum De Morgan	$(X + Y)' = X' \cdot Y'$
A12		$(X \cdot Y)' = X' + Y'$
A13	Hukum Negasi Ganda	$(X')' = X$

(Manongga & Nataliani, 2013)

2.4 Aljabar *Incline*

Setelah dijelaskan mengenai fungsi dan operasi biner, maka dilanjutkan penjelasan tentang aljabar *incline* sebagai berikut.

Definisi 2.4.1

Aljabar *incline* adalah suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yang dilambangkan "$+$" dan "$*$" sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut, untuk semua $x, y, z \in R$:

(R1) $x + y = y + x$.

(R2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(R3) $x \, * (y * z) = (x * y) * z$.

(R4) $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$.

(R5) $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$.

(R6) $x + x = x$.

(R7) $x + (x * y) = x$.

(R8) $y + (x * y) = y$.

Selanjutnya, operasi "$+$" disebut penjumlahan dan operasi "$*$" disebut perkalian (Özbal & Firat, 2011).

Jadi, dapat dikatakan bahwa aljabar *incline* adalah suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi aksioma komutatif penjumlahan, asosiatif penjumlahan, asosiatif perkalian, distributif kanan, distributif kiri, idempoten, dan absorbsi (penyerapan).

Contoh 2.4.1

Aljabar boolean $\{0,1\}$ adalah aljabar *incline* terhadap operasi boolean.

Misalkan $A = \{0,1\}$ adalah suatu aljabar boolean dengan operasi $" \cdot "$ (AND) dan $" + "$ (OR). A adalah aljabar *incline* karena berlaku aksioma berikut:

(R1) $0 + 1 = 1 + 0$ (Definisi 2.3.1 (2i)

(R2) $0 + (1 + 0) = (0 + 1) + 0$ (A1)

(R3) $0 \cdot (1 \cdot 0) = (0 \cdot 1) \cdot 0$ (A2)

(R4) $0 \cdot (1 + 0) = (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0)$ (Definisi 2.3.1 (3i))

(R5)	$(1+0)\cdot 0 = (1\cdot 0)+(0\cdot 0)$	(Definisi 2.3.1 (3i))
(R6)	$1+1=1$	(A5)
(R7)	$0+(0\cdot 1)=0$	(A7)
(R8)	$1+(0\cdot 1)=1$	(A7)

Contoh 2.4.2

Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi biner "+" dan "×" tidak bisa dikatakan sebagai aljabar *incline*, karena tidak memenuhi aksioma (R6), (R7), dan (R8).

Definisi 2.4.2

Aljabar *incline* R dikatakan komutatif jika $x*y=y*x$ untuk semua $x,y\in R$ (Özbal & Firat, 2011).

Jadi, aljabar *incline* komutatif adalah aljabar *incline* yang memenuhi aksioma komutatif perkalian.

Selanjutnya, dalam aljabar *incline* terdapat suatu relasi yang unik. Relasi tersebut juga memenuhi beberapa sifat. Mengenai definisi dan sifat-sifat dari relasi tersebut akan dijelaskan sebagaimana berikut.

Definisi 2.4.3

Misalkan R aljabar *incline*. Untuk sebarang $x,y\in R$, didefinisikan $x\leq y$ jika dan hanya jika $x+y=y$ (Septaria, 2010; Sukardjono, 2002).

Relasi "≤" terinduksi oleh operasi "+" dan memenuhi sifat-sifat sebagaimana proposisi berikut.

Proposisi 2.4.4

Misalkan R ajabar *incline*. Relasi $\leq$ dalam Definisi 2.4.3 memenuhi sifat berikut:

(i) $x * y \leq x$ dan $x * y \leq y$ untuk semua $x, y \in R$.

(ii) $y \leq z$ mengakibatkan $x * y \leq x * z$ dan $y * x \leq z * x$ untuk semua $x, y \in R$.

*(iii)*Jika $x \leq y, a \leq b$, maka $x + a \leq y + b, x * a \leq y * b$.

(Özbal & Firat, 2011).

Bukti:

(i) Misalkan R adalah aljabar *incline*

Akan dibuktikan bahwa $x * y \leq x$, untuk semua $x, y \in R$

$(x * y) + x$	$= x + (x * y)$	(R1)
$(x * y) + x$	$= x$	(R7)
$x * y$	$\leq x.$	(Definisi 2.4.3)

dan akan dibuktikan juga bahwa $x * y \leq y$, untuk semua $x, y \in R$

$(x * y) + y$	$= y + (x * y)$	(R1)
$(x * y) + y$	$= y$	(R8)
$x * y$	$\leq y.$	(Definisi 2.4.3)

Jadi, terbukti bahwa $x * y \leq x$ dan $x * y \leq y$.

(ii) Misalkan R adalah aljabar *incline*

Akan dibuktikan bahwa $x * y \leq x * z$, untuk semua $x, y, z \in R$

Karena $y \leq z$, maka

$y + z$	$= z$	(Definisi 2.4.3)
$x * (y + z)$	$= x * z$	
$(x * y) + (x * z)$	$= x * z$	(R4)
$x * y$	$\leq x * z.$	(Definisi 2.4.3)

dan akan dibuktikan juga bahwa $y * x \leq z * x$, untuk semua $x, y, z \in R$

$(y + z) * x$	$= z * x$	
$(y * x) + (z * x)$	$= z * x$	(R4)
$y * x$	$\leq z * x.$	(Definisi 2.4.3)

Jadi, terbukti bahwa jika $y \leq z$ maka $x * y \leq x * z$ dan $y * x \leq z * x$.

(iii) Misalkan R adalah aljabar *incline* dan $x \leq y, a \leq b$ untuk semua $x, y, a, b \in R$

Akan dibuktikan bahwa $x + a \leq y + b$

Perhatikan bahwa $x + y = y, a + b = b$, maka

$(x + y) + (a + b)$	$= y + b$	
$\big((x + y) + a\big) + b$	$= y + b$	(R2)
$\big(x + (y + a)\big) + b$	$= y + b$	(R2)
$\big(x + (a + y)\big) + b$	$= y + b$	(R1)
$((x + a) + y) + b$	$= y + b$	(R2)
$(x + a) + (y + b)$	$= y + b$	(R2)
$x + a \leq y + b.$		(Definisi 2.4.3)

dan akan dibuktikan juga bahwa $x * a \leq y * b$

Perhatikan bahwa $x + y = y, a + b = b$, maka

$(x + y) * (a + b)$	$= y * b$	
$\big((x + y) * a\big) + \big((x + y) * b\big)$	$= y * b$	(R4)
$(x * a) + (y * a) + (x * b) + (y * b)$	$= y * b$	(R5)
$(x * a) + (y * b) + (x * b) + (y * a)$	$= y * b$	(R1)
$(x * a) + ((y + x) * b) + (y * a)$	$= y * b$	(R5)
$(x * a) + ((x + y) * b) + (y * a)$	$= y * b$	(R1)
$(x * a) + (y * b) + (y * a)$	$= y * b$	(Diketahui)
$(x * a) + (y * (b + a))$	$= y * b$	(R4)
$(x * a) + (y * (a + b))$	$= y * b$	(R1)
$(x * a) + (y * b)$	$= y * b$	(Diketahui)
$x * a \leq y * b.$		(Definisi 2.4.3)

Jadi, terbukti bahwa jika $x \leq y, a \leq b$, maka

$x + a \leq y + b, x * a \leq y * b.$

Selain ketiga sifat di atas, terdapat suatu sifat lagi yaitu pemetaan *isoton*. Definsi mengenai pemetaan *isoton* akan dijelaskan sebagaimana berikut.

Definisi 2.4.5

Suatu pemetaan f dikatakan *isoton* jika $x \leq y$ berakibat $f(x) \leq f(y)$ untuk semua $x, y \in R$ (Kim, 2019).

Beberapa unsur yang terdapat dalam aljabar *incline* diantaranya adalah elemen nol, identitas perkalian, dan pembagi nol. Penjelasannya dapat diperhatikan pada definisi berikut.

Definisi 2.4.6

(i) Elemen nol, ditulis 0, pada aljabar *incline* R jika memenuhi $x + 0 = x = 0 + x$ dan $x * 0 = 0 = 0 * x$ untuk semua $x \in R$.

(ii) Identitas perkalian, ditulis 1, pada aljabar *incline* R memenuhi $x * 1 = 1 * x = x$ untuk semua $x \in R$.

(iii) Elemen tak nol a pada aljabar *incline* R dengan elemen nol disebut pembagi nol kiri jika ada elemen tak-nol $b \in R$ sehingga $a * b = 0$.

(iv) Elemen tak nol a pada aljabar *incline* R dengan elemen nol disebut pembagi nol kanan jika ada elemen tak-nol $b \in R$ sehingga $b * a = 0$.

(v) Pembagi nol adalah elemen pada R yang merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan.

(Özbal & Firat, 2011).

Contoh 2.4.5

Aljabar boolean $\{0,1\}$ adalah aljabar *incline* komutatif terhadap operasi boolean.

Misalkan $A = \{0,1\}$ adalah suatu aljabar boolean dengan operasi " . " (AND) dan " + " (OR).

(i) Terdapat elemen nol (0) pada aljabar boolean A, karena memenuhi $x + 0 = x = 0 + x$ dan $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ untuk semua $x \in A$.

(ii) Terdapat identitas perkalian (1) pada aljabar boolean A karena memenuhi $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ untuk semua $x \in A$.

(iii) Elemen tak nol 1 pada aljabar boolean A adalah pembagi nol kiri, karena terdapat elemen tak nol $1 \in A$ sehingga $1 \cdot 1' = 0$ (sifat komplemen).

(iv) Elemen tak nol 1 pada aljabar boolean A adalah pembagi nol kanan, karena terdapat elemen tak nol $1 \in A$ sehingga $1' \cdot 1 = 0$ (sifat komplemen).

(v) Elemen 1 adalah pembagi nol pada aljabar boolean A, karena $1 \in A$ merupakan pembagi nol kiri dan kanan.

Selain aljabar *incline*, juga dijelaskan mengenai aljabar *incline* integral dan *regular*. Aljabar *incline* integral berhubungan dengan ada atau tidaknya pembagi nol. Sedangkan pemetaan *regular* merupakan fungsi dari elemen nol pada aljabar *incline*. Definisinya akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.4.7

Aljabar *incline* R dengan identitas perkalian dan elemen nol disebut aljabar *incline* integral jika tidak memiliki pembagi nol (Özbal & Firat, 2011).

Definisi 2.4.8

Misalkan R adalah suatu aljabar incline dengan elemen nol. Suatu pemetaan $f: R \to R$ adalah *regular* jika $f(0) = 0$ (Kim, 2019).

2.5 Pemetaan Simetrik

Sebelum menjelaskan mengenai bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline*, perlu diketahui terlebih dahulu mengenai pemetaan simetrik sebagai berikut.

Definisi 2.5.1

Misalkan R adalah aljabar *incline*. Suatu pemetaan $D: R \times R \to R$ disebut simetrik jika $D(x, y) = D(y, x)$ untuk semua $x, y \in R$ (Özbal & Firat, 2011).

Contoh 2.5.1

Misalkan aljabar boolean $A = \{0,1\}$ adalah aljabar *incline*. Didefinisikan pemetaan $+: A \times A \to A$, dengan "+" adalah operasi OR pada aljabar boolean.

Karena $+(0,1) = 0 + 1 = 1 = 1 + 0 = +(1,0)$, maka $+$ adalah pemetaan simetrik.

Contoh 2.5.2

Misalkan $A = \{0,1\}$ adalah aljabar boolean dan himpunan matriks

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in A \right\}$$

adalah aljabar *incline*. Didefinisikan pemetaan $D: B \times B \to B$ adalah pemetaan dengan relasi perkalian matriks.

Dipilih matriks $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ untuk $0,1 \in A$

berlaku $D(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = D(B_2, B_1)$ untuk $B_1, B_2 \in B$. Maka D adalah pemetaan yang bukan simetrik.

Selain pemetaan simetrik, perlu diketahui juga mengenai *trace*. *Trace* adalah pemetaan simetrik dari operasi dua unsur yang sama. Lebih lanjut akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.5.2

Misalkan R adalah aljabar *incline* dan $D: R \times R \to R$ adalah pemetaan simetrik. Suatu pemetaan $d: R \to R$ yang didefinisikan dengan $d(x) = D(x, x)$ disebut *trace* dari $D(.,.)$(Özbal & Firat, 2011).

2.6 Bi-Derivasi Simetrik pada Aljabar *Incline*

Bi-derivasi simetrik dalam penelitian ini adalah pemetaan simetrik dari operasi biner unsur dalam aljabar *incline*. Lebih lanjut akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.6.1

Misalkan R adalah aljabar *incline* dan $D : R \times R \to R$ adalah pemetaan simetrik. Pemetaan D disebut bi-derivasi simetrik pada R, jika memenuhi kondisi berikut:

$$D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z))$$

untuk semua $x, y, z \in R$.

Sehingga berlaku juga, suatu bi-derivasi simetrik D pada R memenuhi relasi $D(x, y * z) = (D(x, y) * z) + (y * D(x, z))$ untuk semua $x, y, z \in R$.

(Özbal & Firat, 2011)

Contoh 2.6.1

Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* komutatif dan suatu pemetaan dari R ke R didefinisikan dengan $D(x, y) = x * y$ untuk semua $x, y \in R$. Maka dapat dibuktikan bahwa D adalah bi-derivasi simetrik pada R.

Bukti:

Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif

Pemetaan pada R didefinisikan dengan $D(x, y) = x * y$ untuk semua $x, y, z \in R$

Akan dibuktikan D adalah bi-derivasi simetrik pada R

$$
\begin{aligned}
D(x * y, z) &= (x * y) * z && \text{(Definisi)} \\
&= \big((x * y) * z\big) + ((x * y) * z) && \text{(R6)} \\
&= (x * y * z) + (x * (y * z)) && \text{(R2)} \\
&= (x * z * y) + (x * (y * z)) && \text{(Komutatif *)} \\
&= \big((x * z) * y\big) + \big(x * (y * z)\big) && \text{(R2)} \\
&= (D(x, z) * y) + (x * D(y, z)) && \text{(Definisi)}
\end{aligned}
$$

Jadi, D adalah bi-derivasi simetrik pada R.

Contoh 2.6.2

Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* komutatif dan $a \in R$. Didefinisikan pemetaan dari R ke R dengan $D(x, y) = (x * y) * a$ untuk semua $x, y \in R$. Maka dapat dibuktikan bahwa D adalah bi-derivasi simetrik pada R.

Bukti:

Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif dan $a \in R$

Akan dibuktikan bahwa $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z)$,

untuk semua $x, y, z \in R$

$$
\begin{aligned}
D(x * y, z) &= \big((x * y) * z\big) * a && \text{(Definisi)} \\
&= \Big(\big((x * y) * z\big) * a\Big) + \Big(\big((x * y) * z\big) * a\Big) && \text{(R6)} \\
&= \big(x * y * (z * a)\big) + \big(x * (y * z * a)\big) && \text{(R2)}
\end{aligned}
$$

$$= (x * (z * a) * y) + (x * (y * z * a)) \quad \text{(Komutatif *)}$$
$$= (((x * z) * a) * y) + (x * ((y * z) * a)) \quad \text{(R2)}$$
$$= (D(x,z) * y) + (x * D(y,z)) \quad \text{(Definisi)}$$

Jadi, D adalah bi-derivasi simetrik pada R.

Lemma 2.6.2

Misalkan R adalah aljabar *incline* dan pemetaan $D: R \times R \to R$ adalah bi-derivasi simetrik pada R. Maka $D(0,x) = D(x,0) = 0$ untuk semua $x, y \in R$ (Kim, 2019).

2.7 Pemetaan Gabungan pada Aljabar *incline*

Selain bi-derivasi simetrik, dikenalkan juga pemetaan gabungan pada aljabar *incline*. Pemetaan gabungan ini juga merupakan pemetaan simetrik. Definisinya akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.7.1

Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* komutatif dan $D: R \times R \to R$ adalah suatu pemetaan simetrik. Pemetaan D disebut pemetaan gabungan jika memenuhi

$$D(x + y, z) = D(x,z) + D(y,z)$$

untuk semua $x, y, z \in R$.

(Özbal & Firat, 2011)

2.8 Kajian Agama

Salah satu disiplin ilmu yang terdapat dalam Al-Qur'an adalah Matematika. Konsep dasar dari disiplin ilmu matematika yang dijelaskan dalam Al-Qur'an diantaranya adalah himpunan. Himpunan dijelaskan dalam Al-Qur'an secara implisit, sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Faathir ayat 1 yang artinya:

"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, Yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu" (Kementerian Agama, 2013).

Ayat 1 surat Al-Faathir menjelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2007).

Berdasarkan ayat tersebut, diterangkan bahwa terdapat sekelompok malaikat yang memiliki jumlah sayap berbeda-beda. Kelompok yang pertama adalah malaikat yang mempunyai dua sayap, kemudian kelompok malaikat dengan tiga sayap, dan kelompok malaikat yang mempunyai empat sayap. Jumlah sayap tersebut merupakan karakteristik dari setiap kelompok malaikat. Sekelompok malaikat yang memiliki karakteristik yang sama inilah yang dinamakan himpunan. Jadi, dapat dikatakan bahwa terdapat himpunan malaikat bersayap dua, tiga, dan empat.

Teori himpunan dapat dikembangkan lagi menjadi struktur yang lebih kompleks. Jika himpunan dengan satu operasi atau lebih memiliki aksioma-aksioma yang berlaku pada himpunan tersebut, maka himpunan ini disebut struktur aljabar.

Dalam disiplin ilmu matematika, setiap struktur aljabar memiliki sifat-sifat berupa teorema atau proposisi. Sifat-sifat tersebut didapatkan dengan cara mengamati dan meneliti sehingga ditemukan hasil yang pasti dan dapat dibuktikan kebenarannya. Mengenai bagaimana menemukan sifat-sifat tersebut adalah tugas kita sebagai peneliti, sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Ali-Imron ayat 190 dan 191 yang artinya:

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka" (Kementerian Agama, 2013).

Berdasarkan ayat di atas, seseorang yang mencapai tingkatan *ulul albab* akan selalu berfikir mengenai semua yang diciptakan oleh Allah SWT dalam keadaan bagaimanapun dan dimanapun. Oleh karena itu, seseorang yang mempelajari matematika tidak cukup hanya dengan pemahaman intelektual, tapi juga perlu didukung dengan pemahaman emosional dan spiritual. Sehingga seseorang yang memahami ilmu matematika dengan konsep *ulul albab*, maka dia akan selalu memahaminya dengan kejujuran dan kesungguhan.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Sifat-Sifat Bi-Derivasi Simetrik pada Aljabar *Incline*

Berdasarkan definisi dan teorema yang dijelaskan pada bab sebelumnya, maka didapatkan sifat-sifat dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* yang dinyatakan dalam proposisi. Proposisi-proposisi berikut merupakan hasil review dari Firat dan Ozbal (2011).

Proposisi yang pertama adalah sifat dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif. Sifat ini terkait dengan penyederhanaan dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif, serta penyederhanaan dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* untuk kasus tertentu.

Proposisi 3.1.1

Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* komutatif dan D adalah bi-derivasi simetrik pada R. Untuk semua $x, y, z \in R$, berlaku sifat-sifat berikut :

1) $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$.
2) Jika $x \leq y$, maka $D(x * y, z) \leq y$.

Bukti:

1. Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif dan $x, y, z \in R$

   Dengan menggunakan Proposisi 2.4.4 (i), didapatkan

   $D(x, z) * y \leq D(x, z)$ dan $x * D(y, z) \leq D(y, z)$

   Selanjutnya berdasarkan Proposisi 2.4.4 (iii), didapatkan

   $(D(x, z) * y) + (D(y, z) * x) \leq D(x, z) + D(y, z)$

   $D(x * y, z) \quad \leq D(x, z) + D(y, z)$

   Jadi, terbukti bahwa $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$.

2. Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif dan $x \leq y$

   Perhatikan bahwa $D(y, z) \leq D(y, z)$

   Dengan menggunakan Proposisi 2.4.4 (iii), didapatkan

   $x * D(y, z) \leq y * D(y, z)$

   Karena $y * D(y, z) \leq y$ (Proposisi 2.4.4 (i)), didapatkan

   $x * D(y, z) \leq y * D(y, z) \leq y$ ....(3.1.1)

Selanjutnya dengan menggunakan Proposisi 2.4.4 (i), didapatkan juga

$D(x,z) * y \leq y$ ....(3.1.2)

Sehingga dengan menggunakan definisi bi-derivasi simetrik dan berdasarkan persamaan (3.1.1) dan (3.1.2), didapatkan

$$D(x * y, z) = ((D(x,z) * y) + (x * D(y,z)) \leq y + y = y$$

Jadi, terbukti jika $x \leq y$, maka $D(x * y, z) \leq y$.

Proposisi yang kedua adalah sifat *regular* trace dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan elemen nol. Sifat ini menyatakan bahwa *trace* dari elemen nol pada aljabar *incline* komutatif adalah *regular*.

Proposisi 3.1.2

Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* komutatif dengan elemen nol dan d sebagai *trace* dari bi-derivasi simetrik D pada R. Maka d adalah *regular*.

Bukti:

Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif dengan elemen nol dan $x \in R$, diperoleh

$d(0)$	$= D(0,0)$	(Definisi 2.5.2)
	$= D(x * 0,0)$	(Definisi 2.4.6 (i))
	$= (D(x,0) * 0) + (x * D(0,0))$	(Definisi 2.6.1)
	$= 0 + x * 0$	(Lemma 2.6.2)
	$= 0 + 0$	(Definisi 2.4.6 (i))
	$= 0$	(Definisi 2.4.6 (i))

Jadi, berdasarkan Definisi 2.4.8 terbukti bahwa d adalah *regular*.

Selanjutnya, proposisi yang ketiga adalah sifat dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan identitas perkalian 1. Proposisi ini memiliki dua sifat identitas perkalian pada aljabar incline komutatif. Sifat yang pertama adalah penyederhanaan dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan identitas perkaliann 1. Sedangkan, sifat yang kedua adalah penyederhanaan bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif dengan kondisi *trace* dari identitas perkalian 1 telah ditentukan.

Proposisi 3.1.3

Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* komutatif dengan identitas perkalian 1 dan d sebagai *trace* dari bi-derivasi simetrik D pada R. Untuk semua $x, y \in R$, berlaku sifat-sifat berikut :

1) $x * D(1, y) \leq D(x, y)$.
2) Jika $d(1) = 1$, maka $x \leq D(x, 1)$.

Bukti:

1) Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif dengan identitas perkalian 1 dan untuk semua $x, y \in R$, maka didapatkan

   $D(x, y) \quad = D(x * 1, y)$ (Definisi 2.4.6 (ii))

   $D(x, y) \quad = (D(x, y) * 1) + (x * D(1, y))$ (Definisi 2.6.1)

   $D(x, y) \quad = D(x, y) + (x * D(1, y)$ (Definisi 2.4.6 (ii))

   Sehingga

   $x * D(1, y) \leq D(x, y)$ (Definisi 2.4.3)

   Jadi, terbukti bahwa $x * D(1, y) \leq D(x, y)$.

2) Misalkan R adalah aljabar *incline* komutatif dengan identitas perkalian 1 dan untuk semua $x, y \in R$

   Berdasarkan sifat 1) di atas, didapatkan

   $x * D(1, y) \leq D(x, y)$.

   Jika diambil $y = 1$ (identitas perkalian pada R), maka

$$
\begin{aligned}
x * D(1,1) &\leq D(x, 1) \\
x * d(1) &\leq D(x, 1) \quad (Def. 2.5.2) \\
x * 1 &\leq D(x, 1) \quad (Diketahui) \\
x &\leq D(x, 1). \quad (Def. 2.4.6\ (ii))
\end{aligned}
$$

   Jadi, terbukti bahwa jika $d(1) = 1$, maka $x \leq D(x, 1)$.

Kemudian, proposisi yang keempat adalah sifat bi-derivasi simterik pada aljabar *incline* integral komutatif. Sebagaimana dijelaskan pada Definisi 2.4.6 bahwa aljabar *incline* integral adalah aljabar *incline* dengan identitas perkalian 1 dan elemen nol yang tidak memiliki pembagi nol.

Proposisi 3.1.4

Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* integral komutatif dan D sebagai suatu bi-derivasi simetrik dari R dan $a \in R$. Untuk semua $x, y \in R$, maka didapatkan:

1) Jika $a * D(x, y) = 0$, maka $a = 0$ atau $D(x, y) = 0$.
2) Jika $D(x, y) * a = 0$, maka $a = 0$ atau $D(x, y) = 0$.

Bukti:

1) Misalkan R adalah aljabar *incline* integral komutatif dan $a \in R$

   Perhatikan bahwa

   $a * D(x, y) = 0$ untuk semua $x, y \in R$

   Ambil $x = x * 1$, maka didapatkan

0	$= a * D(x, y)$	(Diketahui)
	$= a * D(x * 1, y)$	(Definisi 2.4.6 (ii))
	$= a * ((D(x, y) * 1) + (x * D(1, y)))$	(Definisi 2.6.1)
	$= (a * (D(x, y) * 1)) + (a * (x * D(1, y)))$	(R4)
	$= ((a * D(x, y)) * 1) + (a * (x * D(1, y)))$	(R2)
	$= (0 * 1) + (a * x * (D(1, y)))$	(Diketahui)
	$= 0 + (a * (x * D(1, y)))$	(Definisi 2.4.6 (i))
	$= a * x * D(1, y)$	(Definisi 2.4.6 (i))

   Dengan $x = 1$, maka didapatkan

$$a * D(1, y) = 0$$

   Karena R adalah aljabar *incline* integral, dimana R tidak memiliki pembagi nol, maka $a = 0$ atau $D(1, y) = 0$ untuk semua $y \in R$

   Sehingga dapat disimpukan bahwa $a = 0$ atau $D(x, y) = 0$.

   Terbukti bahwa jika $a * D(x, y) = 0$, maka $a = 0$ atau $D(x, y) = 0$.

2) Jelas karena R komutatif terhadap perkalian.

Proposisi yang kelima menunjukkan sifat bi-derivasi simetrik untuk pemetaan suatu elemen tetap pada aljabar *incline* komutatif.

Proposisi 3.1.5

Misalkan D adalah bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif R. Ditetapkan elemen $a \in R$, pemetaan $d_a: R \to R$ yang didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$ untuk setiap $x \in R$ adalah *regular*.

Bukti:

Misalkan D adalah bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif R. Untuk setiap $x \in R$, Maka

$$\begin{aligned} d_a(0) &= D(0, a) && (Diketahui) \\ &= D(0 * 0, a) && (Definisi\ 2.4.6(i)) \\ &= D(0, a) * 0 + 0 * D(0, a) && (Definisi\ 2.6.1) \\ &= 0 + 0 && (Definisi\ 2.4.6(i)) \\ &= 0 && (Definisi\ 2.4.6(i)) \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan Definisi 2.4.8 terbukti bahwa d_a *regular*.

Proposisi yang keenam adalah sifat bi-derivasi simetrik untuk kasus pemetaan elemen tertentu dengan perkalian pasangan elemen pada aljabar *incline* komutatif.

Proposisi 3.1.6

Misalkan D adalah bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif R. Ditetapkan elemen $a \in R$, pemetaan $d_a: R \to R$ didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$. Maka $d_a(x * y) = d_a(x) * y + x * d_a(y)$ untuk semua $x, y \in R$.

Bukti:

Misalkan D adalah bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif R. untuk semua $x, y \in R$, maka

$$\begin{aligned} d_a(x * y) &= D(x * y, a) && (Diketahui) \\ &= D(x, a) * y + x * D(y, a) && (Definisi\ 2.6.1) \\ &= d_a(x) * y + x * d_a(y) && (Diketahui) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $d_a(x * y) = d_a(x) * y + x * d_a(y)$.

Proposisi yang ketujuh merupakan sifat bi-derivasi simetrik untuk kasus pemetaan elemen tetap nol pada aljabar *incline* komutatif.

Proposisi 3.1.7

Misalkan D adalah bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif R. Ditetapkan elemen $a \in R$, pemetaan $d_a: R \to R$ didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$. Maka $d_0(x) = 0$ untuk semua $x \in R$.

Bukti:

Misalkan D adalah bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif R. untuk semua $x \in R$, maka

$$\begin{aligned}
d_0(x) &= D(x,0) && (Diketahui)\\
&= D(x, 0 * 0) && (Definisi\ 2.4.6(i))\\
&= D(x,0) * 0 + 0 * D(x,0) && (Definisi\ 2.6.1)\\
&= 0 + 0 && (Definisi\ 2.4.6(i))\\
&= 0 && (Definisi\ 2.4.6(i))
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $d_0(x) = 0$.

Selanjutnya, proposisi yang kedelapan adalah sifat dari bi-derivasi simetrik gabungan pada aljabar *incline* integral komutatif. Bi-derivasi simetrik gabungan seperti yang telah dijelaskan pada Definisi 2.7.1 memiliki tiga sifat pada aljabar *incline* komutatif. Sifat yang pertama dan kedua berkaitan dengan penyederhanaan *trace* dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif. Sedangkan, sifat yang ketiga adalah sifat isoton dari bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* komutatif.

Proposisi 3.1.8

Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* komutatif dan d sebagai *trace* dari bi-derivasi simetrik gabungan D pada R. Untuk semua $x, y \in R$, berlaku sifat-sifat berikut:

1) $d(x + y) = d(x) + d(y) + D(x, y)$ dan $d(x) + d(y) \leq d(x + y)$,
2) $D(x * y, x) \leq d(x)$,
3) D adalah bi-derivasi simetrik isoton pada R.

Bukti:

1) Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* komutatif dan $x, y \in R$, diperoleh

$d(x+y) = D(x+y, x+y)$ (Definisi 2.5.2)

$d(x+y) = D(x, x+y) + D(y, x+y)$ (Definisi 2.7.1)

$d(x+y) = D(x,x) + D(x,y) + D(y,x) + D(y,y)$ (Definisi 2.7.1)

$d(x+y) = D(x,x) + D(y,y) + D(x,y) + D(y,x)$ (R1)

$d(x+y) = D(x,x) + D(y,y) + D(x,y)$ (Definisi 2.5.1)

$d(x+y) = d(x) + d(y) + D(x,y)$ (Definisi 2.5.2)

Selanjutnya berdasarkan aksioma (R6), dapat ditulis

$d(x+y) = d(x) + d(x) + d(y) + d(y) + D(x,y)$

$d(x+y) = d(x) + d(y) + d(x) + d(y) + D(x,y)$ (R1)

$d(x+y) = d(x) + d(y) + (d(x) + d(y) + D(x,y))$ (R2)

$d(x+y) = d(x) + d(y) + d(x+y)$ (Diketahui)

$d(x) + d(y) \leq d(x+y)$ (Definisi 2.4.3)

Jadi, terbukti bahwa $d(x+y) = d(x) + d(y) + D(x,y)$ dan $d(x) + d(y) \leq d(x+y)$.

2) Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* komutatif dan $x, y \in R$, diperoleh

$d(x) = D(x,x)$ (Definisi 2.5.2)

$d(x) = D(x + (x*y), x)$ (R7)

$d(x) = D(x,x) + D(x*y, x)$ (Definisi 2.7.1)

$d(x) = d(x) + D(x*y, x)$ (Definisi 2.5.2)

Jelas bahwa $D(x*y, x) \leq d(x)$.(Definisi 2.4.4)

3) Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* komutatif

Perhatikan bahwa $(x,y) \leq (z,t)$ untuk $x, y, z, t \in R$

Dengan kata lain dapat juga ditulis

$$x + z = z$$

$$y + t = t$$

$$(x,y) + (z,t) = (z,t)$$

Sehingga dapat ditentukan bahwa

$$D(z,t) = D\big((x,y) + (z,t)\big) = D(x,y) + D(z,t)$$

Dengan kata lain $D(x,y) \leq D(z,t)$. (Definisi 2.4.3)

Jadi, terbukti bahwa D adalah bi-derivasi simetrik isoton pada R.

Proposisi yang kesembilan adalah sifat dari dua bi-derivasi simetrik gabungan pada aljabar *incline* integral komutatif. Sifat ini yang menyatakan bahwa salah satu *trace* dari dua bi-derivasi simetrik pada aljabar *incline* integral komutatif bernilai nol.

Proposisi 3.1.9

Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* integral komutatif. Diasumsikan bahwa terdapat bi-derivasi simetrik gabungan D_1 dan D_2 sedemikian hingga $D_1(d_1(x), x) = 0$ untuk semua $x \in R$ dengan d_1 dan d_2 berturut-turut adalah *trace* dari D_1 dan D_2. Maka $d_1 = 0$ atau $d_2 = 0$.

Bukti:

Misalkan R adalah suatu ajabar *incline* integral komutatif dan $x \in R$

Perhatikan bahwa

$D_1(d_2(x), x) = 0$ (Diketahui)

Dengan menggunakan sifat (R7), didapatkan

$$
\begin{aligned}
0 &= D_1(d_2(x) + (d_2(x) * x), x) && \text{(R7)} \\
&= D_1(d_2(x), x) + D_1(d_2(x) * x, x) && \text{(Definisi 2.7.1)} \\
&= 0 + D_1(d_2(x) * x, x) && \text{(Diketahui)} \\
&= 0 + (D_1(d_2(x), x) * x) + (d_2(x) * D_1(x, x)) && \text{(Definisi 2.6.1)} \\
&= 0 + (0 * x) + d_2(x) * d_1(x) && \text{(Diketahui)} \\
&= 0 + 0 + d_2(x) * d_1(x) && \text{(Definisi 2.4.6 (i))} \\
&= d_2(x) * d_1(x). && \text{(Definisi 2.4.6 (i))}
\end{aligned}
$$

Karena R adalah ajabar *incline* integral komutatif, maka didapatkan $d_1 = 0$ atau $d_2 = 0$.

Jadi, terbukti bahwa $d_1 = 0$ atau $d_2 = 0$.

3.2 Kajian Aljabar *Incline* dalam Islam

Pada bab sebelumnya, telah dijelaskan bahwa aljabar *incline* adalah suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi aksioma komutatif penjumlahan, asosiatif penjumlahan, asosiatif perkalian, distributif kanan, distributif kiri, idempoten, dan absorbsi (penyerapan).

Aksioma yang pertama adalah komutatif. Dalam islam, komutatif dicontohkan dalam perintah untuk saling tolong-menolong. Sebagai makhluk sosial, manusia diperintahkan untuk saling tolong-menolong antara satu dengan yang lainnya. Perintah tolong-menolong diterangkan dalam surat Al-Ma'idah ayat 2 yang artinya:

"Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu melanggar syi´ar-syi´ar Allah, dan jangan melanggar kehormatan bulan-bulan haram, jangan (mengganggu) binatang-binatang had-ya, dan binatang-binatang qalaa-id, dan jangan (pula) mengganggu orang-orang yang mengunjungi Baitullah sedang mereka mencari kurnia dan keridhaan dari Tuhannya dan apabila kamu telah menyelesaikan ibadah haji, maka bolehlah berburu. Dan janganlah sekali-kali kebencian(mu) kepada sesuatu kaum karena mereka menghalang-halangi kamu dari Masjidilharam, mendorongmu berbuat aniaya (kepada mereka). Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Dan bertakwalah kamu kepada Allah, sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya" (Kementerian Agama, 2013).

Aksioma selanjutnya adalah asosiatif. Dalam Islam asosiatif dicontohkan sebagai *muamalah*. Dalam surat Al-Baqarah ayat 281 terdapat kata "*tadaayantum*" yang memiliki arti:

"*bermuamalah ialah seperti berjual beli, hutang piutang, atau sewa-menyewa dan sebagainya*" (Kementerian Agama, 2013).

Muamalah di sini mengisyaratkan suatu sifat asosiatif.

Selanjutnya adalah aksioma distributif. Aksioma distributif dapat dicontohkan pada pembagian harta rampasan (*fai'*). Allah SWT telah membagi siapa yang harus mendapatkan harta rampasan tersebut. Salah satu tujuan pembagian tersebut adalah supaya harta rampasan tersebut terbagi secara merata. Dalam Al-Qur'an, penjelasan mengenai pembagian harta rampasan terdapat pada surat Al-Hasyr ayat 7-8 (Kementerian Agama, 2013).

Kemudian, aksioma selanjutnya adalah aksioma idempoten. Aksioma idempoten dalam islam dicontokan dengan introspeksi diri atau *muhasabah*. Firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Hasyr ayat 18 yang artinya:

"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan" (Kementerian Agama, 2013).

Dalam ayat tersebut, terdapat kalimat yang artinya "...*dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akherat)..".* Ibnu Katsir *rahimahullah* dalam tafsirnya berkata bahwa kalimat tersebut maksudnya adalah perintah untuk mengintrospeksi diri sebelum dihisab dan memperhatikan amal sholeh yang telah dipersiapkan untuk hari kemudian serta pertanggungjawaban di hadapan Allah SWT (Katsir & Isma'il, 2004).

Aksioma terakhir dari aljabar *incline* adalah absorbsi. Absorbsi dikenal juga dengan istilah penyerapan. Dalam Islam, absorbsi dicontohkan dalam perintah saling memaafkan. Perintah saling memaafkan dalam Al-Qur'an terdapat pada surat Asy-Syuraa ayat 40 yang artinya:

"Dan balasan suatu kejahatan adalah kejahatan yang serupa, maka barang siapa memaafkan dan berbuat baik maka pahalanya atas (tanggungan) Allah. Sesungguhnya Dia tidak menyukai orang-orang yang zalim" (Kementerian Agama, 2013).

Dalam Islam, absorbsi adalah memaafkan atau menghapus atau mengampuni kesalahan orang lain. Pada ayat di atas terdapat kalimat yang artinya "*memaafkan*". Berdasarkan ayat tersebut, orang yang mau memaafkan kesalahan orang lain akan mendapatkan derajat tinggi.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Misalkan R adalah suatu aljabar *incline* komutatif dan D adalah bi-derivasi simetrik pada R. Pemetaaan d adalah *trace* dari D dan d_a didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$. Untuk $x, y, z, \in R$, berlaku:
   (i) $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$.
   (ii) Jika $x \leq y$, maka $D(x * y, z) \leq y$.
   (iii) Jika R memuat elemen nol, maka d adalah *regular*.
   (iv) Jika R memuat identitas perkalian 1, maka berlaku sifat-sifat berikut:
      a) $x * D(1, y) \leq D(x, y)$.
      b) Jika $d(1) = 1$, maka $x \leq D(x, 1)$.
   (v) Jika R integral dan $a \in R$, maka didapatkan:
      a) Jika $a * D(x, y) = 0$, maka $a = 0$ atau $D(x, y) = 0$.
      b) Jika $D(x, y) * a = 0$, maka $a = 0$ atau $D(x, y) = 0$.
   (vi) Ditetapkan elemen $a \in R$, pemetaan $d_a: R \to R$ yang didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$ adalah *regular*.
   (vii) Ditetapkan elemen $a \in R$, pemetaan $d_a: R \to R$ didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$. Maka $d_a(x * y) = d_a(x) * y + x * d_a(y)$.
   (viii) Ditetapkan elemen $a \in R$, pemetaan $d_a: R \to R$ didefinisikan dengan $d_a(x) = D(x, a)$. Maka $d_0(x) = 0$.
   (ix) Jika R integral dan D *gabungan*, maka berlaku sifat-sifat berikut:
      a) $d(x + y) = d(x) + d(y) + D(x, y)$ dan
      $d(x) + d(y) \leq d(x + y)$,
      b) $D(x * y, x) \leq d(x)$,
      c) D adalah isoton pada R.
   (x) Jika R integral dan terdapat bi-derivasi simetrik *gabungan* D_1 dan D_2 sedemikian hingga $D_1(d_1(x), x) = 0$ dengan d_1 dan d_2 adalah *trace* dari D_1 dan D_2. Maka $d_1 = 0$ atau $d_2 = 0$.

2. Kajian aljabar *incline* dalam Islam

   Aksioma-aksioma aljabar *incline* dalam kajian islam diantaranya adalah:

   (i) Komutatif dicontohkan dalam perintah untuk saling tolong-menolong (Al-Ma'idah ayat 2).

   (ii) Asosiatif dicontohkan sebagai *muamalah* (Al-Baqarah ayat 281).

   (iii) Distributif dapat dicontohkan pada pembagian harta rampasan (Al-Hasyr ayat 7-8).

   (iv) Idempoten dalam islam dicontokan dengan introspeksi diri atau *muhasabah* (Al-Hasyr ayat 18).

   (v) Absorbsi dicontohkan dalam perintah saling memaafkan (Asy-Syuraa ayat 40).

4.2 Saran

Pada penelitian ini, hanya dibahas tentang sifat-sifat bi-derivasi simetrik dan bi-derivasi umum simetrik pada aljabar *incline*. Disarankan bagi pembaca untuk mengkaji lebih dalam mengenai bisa atau tidaknya terbentuk aljabar *incline* baru dari pasangan aljabar *incline* yang sudah ada.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, A. (2007). Ketika kyai mengajar matematika. UIN-Maliki Press.

Cao, Z.-Q., Kim, K. H., & Roush, F. W. (1984). *Incline algebra and applications*. E. Horwood.

Firat, A., & Ozbal, S. A. (2016). On Symmetric Bi-Multipliers of Incline Algebras. In *International Mathematical Forum* (Vol. 11, pp. 189–196).

Gallian, J. A. (2010). Contemporary Abstract Algebra.

Katsir, I., & Isma'il, A.-I. A. F. (2004). Terjemahan Tafsir Ibnu Katsir. Jakarta: Sinar Baru AL-Gensindo.

Kementerian Agama, R. I. (2013). al-Qur'an al-Karim dan Terjemahnya. *Surabaya: Halim Publishing Dan Distributing*.

Kim, K. H. (2019). On Symmetric Bi-Generalized Derivations of Incline Algebras. In *International Mathematical Forum* (Vol. 14, pp. 1–9).

Loka Dewi, F., & Lukito, A. (2019). BI-MULTIPLIER SIMETRIK PADA ALJABAR INCLINE. *MATHunesa*, *7*(2).

Manongga, D., & Nataliani, Y. (2013). Matematika Diskrit. *Jakarta: Prenadamedia Group. Indonesia*.

Munir, R. (2010). Matematika diskrit. Bandung: Informatika Bandung.

NO, A. (2010). On derivations of incline algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, *71*(3), 349–355.

Ozbal, S. A., & Firat, A. (2011). On f-derivations of incline algebras. *International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics*, *3*(1), 83–90.

Özbal, S. A., & Firat, A. (2011). On Symmetric Bi-Derivations of Incline Algebras. In *International Mathematical Forum* (Vol. 6, pp. 2031–2036).

Raisinghania, M. D., & Aggarwal, R. S. (1980). Modern Algebra. *Chad & Company LTD, Raw Negar, New Delhi*.

RI, K. A. (2016). Tafsir Ilmi: PENCIPTAAN JAGAD RAYA dalam Perspektif al-Qur'an dan Sains Jilid 7.

Septaria, I. (2010). Latis modular dan sifat-sifatnya. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Sukardjono. (2002). *Teori Latis*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.

RIWAYAT HIDUP

Muhammad Dzikrullah Hanafi, lahir di kabupaten Jember pada tanggal 11 Juni 1996, biasa dipanggil Iik, tinggal di Jl. Gading Pesantren No. 38 Klojen Malang. Anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Alm. Bapak Hanafi Baihaqi dan Ibu Mufidatul Husna.

Pendidikan dasarnya ditempuh di TK Fathus Salafi Jember dan lulus pada tahun , setelah itu melanjutkan ke MI Fathus Salafi Jember dan lulus pada . Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMPN 5 Jember dan lulus tahun , setelah itu melanjutkan ke MAN 1 Jember dan lulus tahun . Selanjutnya, pada tahun 2015 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika. Selain kuliah, dia juga menempuh pendidikan informal di Pondok Pesantren Miftahul Huda Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Dzikrullah Hanafi
NIM : 15610046
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Bi-Derivasi Simetrik pada Aljabar *Incline*
Pembimbing I : Dewi Ismiarti, M.Si
Pembimbing II : M. Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Agustus 2019	Konsultasi Judul	1.
2.	5 Desember 2020	Konsultasi Bab I	2.
3.	28 Maret 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II	3.
4.	15 April 2020	Acc Bab I dan Konsultasi Bab II dan Bab III	4.
5.	1 Mei 2020	ACC Bab II	5.
6.	1 Mei 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	6.
7.	23 Agustus 2020	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	6 Oktober 2020	Konsultasi Bab III dan Bab IV	8.
9.	9 Oktober 2020	ACC Bab III dan Bab IV	9.
10.	26 Desember 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001