F-INDEX PADA GRAF TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO 2*P* DAN 4*P*

SKRIPSI

OLEH
KIKI RIZKIYATUL fAJRIYAH
NIM. 16610106

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

F-INDEX PADA GRAF TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO 2*P* DAN 4*P*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Kiki Rizkiyatul Fajriyah
NIM. 16610106

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

F-INDEX* PADA GRAF TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO 2*P* DAN 4*P

SKRIPSI

Oleh
Kiki Rizkiyatul Fajriyah
NIM. 16610106

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 18 November 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	Dewi Ismiarti, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006	NIDT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

F-INDEX* PADA GRAF TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO 2*P* DAN 4*P

SKRIPSI

Oleh
Kiki Rizkiyatul Fajriyah
NIM. 16610106

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 4 Desember 2020

Penguji Utama	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	…………………………
Ketua Penguji	: M. Nafie Jauhari, M.Si	…………………………
Sekertaris Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	…………………………
Anggota Penguji	: Dewi ismiarti, M.Si	…………………………

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Kiki Rizkiyatul Fajriyah
NIM	: 16610106
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: *F-index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ dan $4p$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 November 2020
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
4E799ADF742888838
6000

Kiki Rizkiyatul Fajriyah
NIM. 16610106

MOTO

“jangan berhenti berusaha karena hasil tidak menghianati usaha”

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ibunda Muasih, ayahanda Abdul Hamid dan adik tercinta M. Rifqi Dwi Rahmatullah yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,dan kasih sayang yang tak ternilai.

Keluarga penulis yang selalu memberi doa.

Teman serta sahabat penulis yang tidak dapat disebutkan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*F-index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ dan $4p$" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu ad-Din al-Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen penguji utama yang telah memberi arahan dan bimbingannya kepada penulis.
7. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen ketua penguji dan wali dosen yang telah memberikan arahan dan bimbingannya kepada penulis.
8. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
9. Orang tua serta semua keluarga yang telah memberi do'a, dukungan, semangat, dan motivasi demi keberhasilan penulis.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016 yang berjuang bersama-sama untuk menggapai impian.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 18 November 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Fajriyah, Kiki Rizkiyatul. 2020. ***F-index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2P$ dan $4P$**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata kunci: *F-index*, graf total, ring bilangan bulat modulo

Misalkan R adalah ring komutatif dengan kesatuan. Graf total dari R yang dilambangkan dengan $T(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titik-titiknya adalah semua anggota dari ring R dan setiap $x, y \in R$ yang berbeda terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$ dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol dari R. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menggunakan beberapa buku dan artikel sebagai bahan rujukan. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. *F-index* pada graf $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ adalah
$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) = 2p^4$$
2. *F-index* pada graf $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ adalah
$$F\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}))\right) = 4p(2p+1)^3.$$

ABSTRACT

Fajriyah, Kiki Rizkiyatul. 2020. ***F-index* of Total Graph of the Ring of Integers Modulo 2P and 4P**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: *F-index*, total graph, ring integers modulo

Let R be a commutative ring with unity. The total graph of R denoted by $T(\Gamma(R))$ is a graph with vertices all elements of R and two distinct vertices $x, y \in R$ are adjacent if and only if $x + y$ is a zero divisor of R or $x + y \in Z(R)$. The purpose of this research is to determine a formula of *F-index* of total graph of ring integers modulo $2p$ and $4p$ with p prime numbers and $p \geq 3$. The method of this research is literature study. The result of this research are the following:

1. *F-index* of graph $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ is
$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) = 2p^4$$
2. *F-index* of graph $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ is
$$F\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}))\right) = 4p(2p+1)^3.$$

ملخص

الفجرية ، كيكي رزيقات. ٢٠٢٠. فهرس-F للرسم البياني الإجمالي لأعداد الحلقة الصحيحة Modulo $2p$ و $4p$. البحث الجامعي.شعبة الرياضيات,كليةالعلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف (١) البروفيسور، الدكتور,ترمودي الماجستير. المشرفة (٢) دوي إسمايارتي،الماجستير.

الكلمات الرئيسية : فهرس-F، إجمالي الرسم البياني،أعداد الحلقة الصحيحة Modulo

دع R يكون الأعداد الصحيحة الدائري $2p$ و $4p$. الرسم البياني $T(\Gamma(R))$ مثل الرسم البياني مع رؤوس جميع عناصر R وذروتين مميزتين $x, y \in R$ متجاورين إذا وفقط إذا كان x + y مقسومًا صفرًا في R أو $x + y \in Z(R)$. الغرض من هذالبحث هوتحديد معادله *F-index* للرسم البياني الإجمالي لأعداد الحلقة الصحيحة Modulo $2p$ و $4p$ مع p الأعداد الأولية و $p \geq 3$. طريقةالبحث المستخدمة هي دراسة الادب باستخدام بعض الكتب والمجلات كمراجع.نتائج هذه الدراسة هي علي النحو التالي :

١.) فهرس-F على الرسم البياني $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ هي

$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) = 2p^4$$

٢.) فهرس-F على الرسم البياني $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ هي

$$F\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}))\right) = 4p(2p+1)^3.$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan dalam berbagai bidang. Oleh karena itu, matematika disebut sebagai *Queen of Science*. Cabang dari ilmu matematika sangat banyak, salah satunya adalah teori graf. Studi mengenai perkembangan teori graf merupakan salah satu ilmu matematika yang sangat menarik perhatian para ilmuan maupun pakar aljabar. Teori graf mempunyai banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin ilmu, antara lain dalam bidang matematika, biologi, kimia, fisika, ilmu komputer,ilmu kesehatan, ekonomi, dan ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan (Abdussakir, dkk, 2009:1).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surah Al-Furqan ayat 2 yang artinya:

"*dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya*".

Berdasarkan ayat di atas, maka tidaklah salah jika dikatakan bahwa Allah adalah Maha matematis (Abdussakir, 2007:79-80). Seluruh isi alam semesta memuat konsep matematika. Allah menciptakan segala sesuatu dengan ukuran serapi-rapinya, artinya Allah menciptakan segala sesuatu tidak asal buat. Allah menciptakan alam semesta dengan ukuran yang pasti. Hal tersebut dapat dilihat dari penciptaan bumi dan benda-benda langit lainnya yang tersusun rapi sesuai dengan orbitnya, sehingga tidak saling bertabrakan satu sama lain. Segala sesuatu di alam semesta ini ada ukuran atau hitungannya. Para ilmuwan matematika tidaklah menciptakan rumus, tetapi mereka hanya menemukan rumus tersebut.

Graf G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik *(vertex)*, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi *(edge)* (Abdussakir, dkk, 2009). Himpunan titik dan sisi di graf G berturut-turut dapat dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ (Chartrand, dkk, 2016:3).

Furtula dan Gutman pada tahun 2015 memperkenalkaan *index* baru. *Index* tersebut dinamakan *Forgotten Topological index* atau disebut juga *F-index*. *Forgotten Topological index* atau *F-index* adalah jumlah pangkat tiga dari derajat setiap titik v pada graf G dinotasikan dengan $F(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u)^3$, di mana $\deg(v)$ didefinisikan sebagai derajat titik v (jumlah titik yang terhubung langsung dengan titik v). Furtula dan Gutman (2015) mengemukakan bahwa kemampuan prediksi dari *Forgotten Topological index* atau *F-index* hampir mirip dengan *First Zagreb index* untuk faktor esentrik dan entropi dan keduanya memperoleh koefisien korelasi lebih besar dari 0,95. Fakta tersebut menyiratkan alasan mengapa *Forgotten Topological index* berguna untuk menguji bahan kimia dan sifat farmakologis dari struktur molekul obat (Gao, dkk, 2016:259).

Penelitian yang membahas tentang *F-Index* pada suatu graf telah dilakukan beberapa kali diantaranya adalah oleh Furtula dan Gutman (2015) membahas tentang *A Forgotten Topological index*. Wei Gao, dkk (2016) membahas tentang *Forgotten Topological index* pada struktur kimia di obat-obatan. Ghobadi dan Ghorbaninejad (2016) membahas tentang *Forgotten Topological Index* dari empat operasi pada beberapa graf spesial. Khaksari dan Ghorbani (2017) membahas tentang On the *Forgotten Topological Index*.

Ring R merupakan himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\times)$ yang memenuhi sifat grup abelian terhadap operasi penjumlahan, bersifat tertutup terhadap operasi perkalian, bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian, dan operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan. Ring R disebut ring komutatif dengan kesatuan jika dan hanya jika R bersifat komutatif terhadap operasi perkalian dan R memiliki unsur identitas terhadap operasi perkalian. Dengan kata lain R merupakan ring komutatif sekaligus ring dengan kesatuan (Gilbert,2009:261).

Misalkan R adalah ring komutatif dengan kesatuan. Graf total dari R dinotasikan dengan $T(\Gamma(R))$ adalah graf dengan himpunan titik-titiknya adalah semua anggota dari ring R dan setiap $x, y \in R$ yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$ dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol dari R (Anderson dan Badawi, 2007). Penelitian yang membahas tentang graf total telah dilakukan oleh Aderson dan Badawi (2007) tentang graf total pada ring komutatif. S. Akbari, dkk (2009) membahas tentang graf total dan graf regular pada ring. Riyanti, dkk (2018) membahas tentang graf pembagi nol dan graf total pada kode genetik.

Berdasarkan beberapa penelitian terdahulu, penelitian mengenai *F-Index* dapat diperluas dan digabungkan dengan graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$. Dengan demikian, untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya, peneliti melakukan penelitian yang membahas tentang "*F-Index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ dan $4p$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah :

1. Bagaimana rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$?
2. Bagaimana rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Untuk menentukan rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
2. Untuk menentukan rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan dengan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Untuk memperoleh lebih banyak pengetahuan mengenai *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
2. Untuk memperoleh lebih banyak pengetahuan mengenai *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada graf total dan juga dibatasi pada ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif yang bahasannya dimulai dari hal-hal khusus menuju hal-hal yang bersifat generalisasi dengan metode penelitian kepustakaan. Penelitian dilakukan dengan mengkaji terhadap buku-buku teori graf dan aljabar abstrak. Adapun kajian tentang teori graf diperoleh dari buku-buku teori graf dan artikel yang terkait dengan penelitian ini. Kajian tentang F-*index* diperoleh dari jurnal internasional. Serta kajian tentang topik ring diperoleh dari jurnal internasional dan buku aljabar abstrak.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Langkah-langkah yang digunakan pada *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah sebagai berikut:
   1. Menentukan himpunan pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
   2. Menggambar graf total dengan menghubungkan setiap dua titik di $\mathbb{Z}_{2p}$ yang hasil penjumlahanya di $Z(R)$.
   3. Mencari derajat titik dari semua titik pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
   4. Menentukan *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$. Menyusun Teorema untuk mendukung pembuktian *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

b. Langkah-langkah yang digunakan pada *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ adalah sebagai berikut:
   1. Menentukan himpunan pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

2. Menggambar graf total dengan menghubungkan setiap dua titik di $\mathbb{Z}_{4p}$ yang hasil penjumlahanya di $Z(R)$.
3. Mencari derajat titik dari semua titik pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.
4. Menentukan *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$. Menyusun Teorema untuk mendukung pembuktian *Forgotten Topological index* atau *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan pada penelitian ini mudah dipahami dan lebih terarah, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab dan setiap bab terdiri dari subbab sebagai berikut :

1. Bab I Pendahuluan

   Bab pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
2. Bab II Tinjauan Pustaka

   Bab tinjauan pustaka meliputi teori-teori atau literature pendukung yang berhubungan dengan topik penelitian, diantaranya tentang teori graf, derajat titik, graf terhubung, graf total, *F-Index*, ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$, serta kajian agama yang berkaitan dengan teori graf.
3. Bab III Pembahasan

Bab pembahasan berisi tentang bagaimana *F-Index* atau *Forgotten Topological index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.

4. Bab IV Penutup

   Bab penutup meliputi kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Operasi Biner

Definisi 2.1.1 Operasi biner yang dilambangkan dengan $*$ memiliki definisi sebagai berikut:

1. Operasi biner $*$ pada suatu himpunan tak kosong G adalah suatu pemetaan $G \times G \rightarrow G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a * b$ untuk $*(a, b)$.
2. Suatu operasi biner $*$ pada suatu himpunan G bersifat asosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Operasi biner $*$ pada suatu himpunan G, dikatakan komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$.

(Dummit & Foote, 1991:16).

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ (penjumlahan) pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, karena operasi $+$ merupakan pemetaan $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Hasil penjumlahan dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat juga.

2.1.2 Definisi Grup

Definisi 2.1.2

1. Misalkan $(G,*)$ adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$, $(G,*)$ adalah grup apabila memenuhi empat sifat berikut:

   (i) Operasi $*$ bersifat tertutup di G. Untuk semua $a, b \in G$ berlaku
   $$a * b \in G$$

   (ii) Operasi $*$ bersifat asosiatif di G. Untuk semua $a, b, c \in G$ berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

(iii) G mempunyai unsur identitas e terhadap operasi $*$ sehingga $e * a = a * e = a$ untuk setiap $a \in G$.

(iv) Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$. Untuk setiap unsur $a \in G$,terdapat unsur $a^{-1} \in G$ yang disebut invers dari a sedemikian sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

(v) Grup $(G,*)$ disebut grup abelian (komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Gilbert, 2009:137-138).

Contoh :

Misalkan $(\mathbb{Z}, +)$ adalah himpunan bilangan bulat dengan $+$ merupakan operasi penjumlahan, maka:

i. $a + b \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ (tertutup terhadap penjumlahan).

ii. $a + (b + c) = (a + b) + c$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (assosiatif).

iii. Terdapat 0 di $\mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ (ada identitas).

iv. Terdapat $-a$ di $\mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ (mempunyai invers).

v. $a + b = b + a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ (komutatif).

Jadi $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif.

2.2 Ring

Definisi 2.2.1 Suatu *Ring* $(R,*,\cdot)$ adalah sebuah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu $*$ sebagai opersi pertama dan $\cdot$ sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(R,*)$ adalah grup abelian.

2. Operasi $\cdot$ tertutup di R yaitu jika $a, b \in R$ maka $a \cdot b \in R$
3. Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di R. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

4. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap operasi $*$ di R. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c)$$

(Gilbert, 2009:257).

Contoh :

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian, maka $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring karena berlaku:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian
2. $a \times b \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ (tertutup terhadap perkalian)
3. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (assosiatif)
4. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (distributif)

Jadi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring.

Definisi 2.2.2 Suatu Ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif jika dan hanya jika operasi biner kedua (operasi $\cdot$) bersifat komutatif di R (Gilbert,2009:261).

Contoh :

Diberikan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ring dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka:

$a \times b = b \times a$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ (komutatif)

Jadi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif.

Definisi 2.2.3 Suatu Ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring dengan kesatuan jika dan hanya jika R memiliki unsur identitas terhadap operasi biner kedua (operasi $\cdot$) (Gilbert,2009:261).

Contoh:

Diberikan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ring dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka:

Terdapat $1 \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ (mempunyai identitas)

Jadi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dengan kesatuan.

Definisi 2.2.4 Suatu Ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif dengan kesatuan jika dan hanya jika operasi kedua (operasi $\cdot$) bersifat komutatif dan R memiliki unsur identitas terhadap operasi biner kedua (operasi $\cdot$) (Gilbert,2009:261).

Definisi 2.2.5 Suatu elemen x dari ring komutatif R disebut pembagi nol apabila terdapat elemen tak nol $y \in R$ sedemikian sehingga $xy = 0$ atau $yx = 0$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $Z(R)$ (Joshi, K.D., 1989:390).

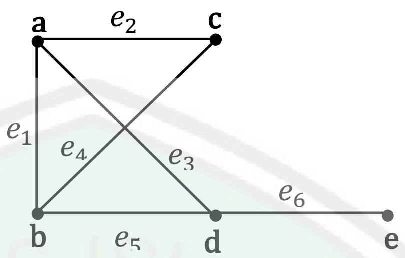
Elemen 0 merupakan pembagi nol pada ring apa saja. (Selain pada ring trivial. Beberapa penulis mensyaratkan, seperti dalam kasus aljabar Boolean, bahwa ring harus memiliki setidaknya 2 elemen.) Pada ring bilangan bulat, tidak ada pembagi nol kecuali 0 (Joshi, K.D., 1989:390).

2.3 Graf

Definisi 2.3.1 Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:

Graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (d, e)\}$. Graf G tersebut ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 2.1 Graf G

Graf G mempunyai 5 titik dan mempunyai 6 sisi.

2.3.1 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Definisi 2.3.2 Dua titik u, v di G disebut terhubung langsung atau bertetangga jika $e = (u, v)$ adalah sisi di G. Titik u dan sisi e serta titik v dan sisi e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e (Diestel, Reinhard, 2005).

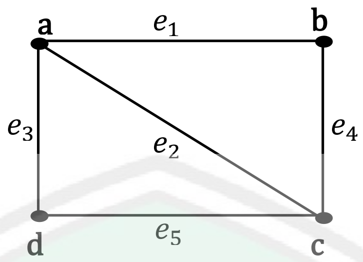
2.3.2 Derajat Titik

Definisi 2.3.3 Misalkan v adalah titik pada graf G, maka semua himpunan titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan dinotasikan $N_G(v)$ (Abdussakir, dkk, 2009).

Definisi 2.3.4 Derajat titik v di graf G adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. Dalam suatu konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf yaitu graf G, maka derajat dari suatu titik v dinotasikan $deg_G(v)$ atau disingkat menjadi $deg(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 2016:5).

Contoh:

Seperti ditunjukkan pada Gambar 2.2 merupakan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.2 Graf G dengan order 4

Dari gambar tersebut diperoleh bahwa

$deg(a) = 3$ $\quad$ $deg(c) = 3$

$deg(b) = 2$ $\quad$ $deg(d) = 2$

2.4 Relasi Ekuivalensi dan Kongruensi Modulo m

Definisi 2.4.1 Suatu relasi $\mathcal{R}$ dalam suatu himpunan tak kosong A disebut relasi ekuivalensi jika memenuhi sifat-sifat berikut ini.

1. Refleksif, jika untuk setiap $a \in A$, berlaku $a\mathcal{R}a$
2. Simetris, jika untuk setiap $a, b \in A, a\mathcal{R}b$ mengakibatkan $b\mathcal{R}a$
3. Transitif, jika untuk setiap $a, b, c \in A, a\mathcal{R}b$ dan $b\mathcal{R}c$ mengakibatkan $a\mathcal{R}c$

(Abdurrahman, 2019).

Definisi 2.4.2 Misalkan $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A dan $x \in A$, kelas ekuivalensi yang memuat x adalah subhimpunan-subhimpunan yang dinyatakan dengan

$$[x] = \{y \in A | y\mathcal{R}x\}$$

Untuk setiap $x \in A$ (Abdurrahman, 2019).

Definisi 2.4.3 Misalkan m adalah bilangan bulat positif, $m > 1$. Untuk bilangan bulat a dan b, dikatakan a kongruen dengan b modulo m jika dan hanya jika $a - b$ adalah kelipatan dari m. Ditulis $a \equiv b(mod\ m)$. Misalkan $0 \leq r < m$ maka $a \equiv r\ (mod\ m)$ dapat dituliskan $a\ mod\ m = r$ (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Contoh :

$20 \equiv 2\ (mod\ 6)$ karena 6 membagi habis $20 - 2$.

Teorema 2.4.1 Relasi kongruensi modulo m adalah relasi ekuivalensi di $\mathbb{Z}$.

Bukti :

Misalkan $m > 1$, dan $x, y, z\ \in \mathbb{Z}$

1. Refleksif : $x - x = (m)(0)$ maka $x \equiv x(mod\ m)$.
2. Simetris : $x \equiv y(mod\ m) \Rightarrow x - y = mq$ untuk $q \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow y - x = m(-q)$ dan $-q \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow x \equiv y(mod\ m)$.
3. Transitif : $x \equiv y(mod\ m)$ dan $y \equiv z(mod\ m)$

   $\Rightarrow x - y = mq$ dan $y - z = mk$ dan $q, k \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow x - z = x - y + y - z$

   $= m(q + k)$

   $\Rightarrow x \equiv z(mod\ m)$.

Jadi relasi fungsi adalah suatu relasi ekivalen (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Misalkan $m \in \mathbb{Z}, m > 1$, berdasarkan Definisi 2.4.2 untuk $a \in \mathbb{Z}$ diperoleh kelas ekivalen

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a(mod\ m)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = mk, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x = a + mk, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{a + mk | k \in \mathbb{Z}\}$$

Dua kelas ekivalen $[a]$ dan $[b]$ sama jika dan hanya jika $a \equiv b (mod\ m)$.

Terdapat m kelas ekivalen berbeda pada $\mathbb{Z}$, sebagai berikut

$$[0] = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -2m + 1, -m + 1, 1, m + 1, 2m + 1, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -2m + 2, -m + 2, 2, m + 2, 2m + 2, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$[m] = \{\dots, -m - 1, -1, m - 1, 2m - 1, 3m - 1, \dots\}$$

Kelas ekivalen tersebut disebut dengan kelas kongruensi. Untuk selanjutnya $[a]$ akan disimbolkan dengan $\bar{a}$. Himpunan semua kelas kongruensi modulo m pada $\mathbb{Z}$ dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m - 1}\}.$$

2.4.1 Ring Bilangan Bulat Modulo m

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dan $m > 1$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_m$ merupakan ring komutatif dengan kesatuan.

1. $\mathbb{Z}_m$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

   Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \in \mathbb{Z}_m$$

2. Operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} &= \overline{(a+b)}+\bar{c}\\ &= \overline{(a+b)+c}\\ &= \overline{a+(b+c)}\\ &= \bar{a}+\overline{(b+c)}\\ &= \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})\end{aligned}$$

3. Setiap unsur di $\mathbb{Z}_m$ memiliki identitas terhadap operasi penjumlahan

   Terdapat$\bar{0} \in \mathbb{Z}_m$ sehingga untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\bar{0}+\bar{a} = \overline{0+a} = \bar{a} \text{ dan } \bar{a}+\bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a}$$

4. Setiap unsur di $\mathbb{Z}_m$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan

   Untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ terdapat $\overline{-a} \in \mathbb{Z}_m$ sehingga

   $\overline{-a}+\bar{a} = \overline{-a+a} = \bar{0}$ dan $\bar{a}+(-\bar{a}) = \overline{a+(-a)} = \bar{0}$

5. Operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$ bersifat komutatif

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\begin{aligned}\bar{a}+\bar{b} &= \overline{a+b}\\ &= \overline{b+a}\\ &= \bar{b}+\bar{a}.\end{aligned}$$

6. $\mathbb{Z}_m$ tertutup terhadap operasi perkalian

   Untuk semua $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a\cdot b} \in \mathbb{Z}_m$$

7. Operasi perkalian di $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c} = \overline{(a\cdot b)}\cdot\bar{c}$$
$$= \overline{(a\cdot b)\cdot c}$$
$$= \overline{a\cdot(b\cdot c)}$$
$$= \bar{a}\cdot\overline{(b\cdot c)}$$
$$= \bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$$

8. Operasi perkalian bersifat distributif perkalian terhadap operasi penjumlahan

   Ambil sebarang $\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\mathbb{Z}_m$, berlaku

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\overline{(b+c)}$$
$$= \overline{a\cdot(b+c)}$$
$$= \overline{(a\cdot b)+(a\cdot c)}$$
$$= \overline{(a\cdot b)}+\overline{(a\cdot c)}$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{b})+\overline{(a\cdot c)}$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot\bar{c})$$

9. Setiap unsur di $\mathbb{Z}_m$ memiliki identitas terhadap operasi perkalian

   Terdapat $\bar{1}\in\mathbb{Z}_m$ sehingga untuk setiap $\bar{a}\in\mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\bar{1}\cdot\bar{a} = \overline{1\cdot a} = \bar{a} \text{ dan } \bar{a}\cdot\bar{1} = \overline{a\cdot 1} = \bar{a}$$

10. Operasi perkalian di $\mathbb{Z}_m$ bersifat komutatif

    Untuk semua $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a\cdot b}$$
$$= \overline{b\cdot a}$$
$$= \bar{b}\cdot\bar{a}.$$

Jadi $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ adalah ring komutatif dengan kesatuan.

Operasi pada ring $\mathbb{Z}_m$dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b \bmod m}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b \bmod m}$$

2.5 Graf Total dari Ring Komutatif

Definisi 2.5.1 Misalkan R adalah ring komutatif dengan kesatuan. Graf total dari ring R yang dilambangkan $T(\Gamma(R))$ yaitu graf dengan himpunan titiknya adalah himpunan R dan setiap $x, y \in R$ yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in Z(R)$ (Anderson dan Ayman, 2007).

2.6 *F-Index* atau *Forgotten Topological Index*

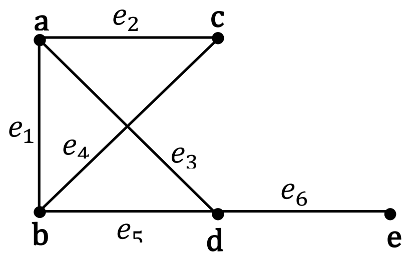
Definisi 2.6.1 Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jika u dan v adalah dua titik yang terhubung langsung di G, maka sisi yang menghubungkan dinotasikan dengan (u, v). Misalkan $deg\ (v_i)$ adalah derajat titik v_i untuk $i = 1,2, \dots, n$. *F-Index* atau *Forgotten Topological index* pada graf G yang dilambangkan $F(G)$ adalah jumlah pangkat tiga dari derajat setiap titik v pada graf G, sebagai berikut:

$$F(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)^3$$

(Furtula dan Guttman, 2015).

Contoh:

Gambar 2.4 merupakan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



Gambar 2.3 Graf dengan order 5

Dari gambar tersebut, diperoleh

$deg(a) = 3$ $deg(b) = 3$ $deg(c) = 2$

$deg(d) = 3$ $deg(e) = 1$

Sehingga *F-index* dari graf tersebut adalah

$$F(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)^3$$

$$= \deg(a)^3 + \deg(b)^3 + \deg(c)^3 + \deg(d)^3 + \deg(e)^3$$

$$= 3^3 + 3^3 + 2^3 + 3^3 + 1^3$$

$$= 90$$

2.7 Kajian Al-Qur'an

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surah Al-Hujurat ayat 13 yang artinya:

"*Hai manusia! Sungguh, Kami telah menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan, kemudian Kami jadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar kamu saling mengenal. Sungguh, yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling bertakwa. Sungguh, Allah Maha Mengetahui, Maha Teliti. (13)*"

Tafsir Sayyid Quthb menjelaskan bahwa Allah menciptakan manusia bersuku-suku dan berbangsa-bangsa dengan tujuan supaya harmonis dan saling mengenal. Adapun perbedaan bahasa dan warna kulit, perbedaan akhlak dan watak, perbedaan bakat dan potensi merupakan kergaman yang tidak perlu menimbulkan pertentangan atau perelisihan. Namun, justru untuk menimbulkan kerja sama supaya bangkit dan memikul segala tugas dan memenuhi segala kebutuhan (Quthb, Sayyid, 2004:421).

Warna kulit, ras, bahasa, negara, dan yang lainnya tidaklah ada dalam pertimbangan Allah. Di sana hanya ada satu timbangan untuk menguji seluruh nilai dan mengetahui keutamaan manusia yaitu *"Sungguh, yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling bertakwa"*. Orang paling mulia yang hakiki ialah yang mulia menurut pandangan Allah. Dialah yang menimbangmu berdasarkan pengetahuan dan berita dengan aneka nilai dan timbangan (Quthb, Sayyid, 2004:422).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa semua manusia merupakan satu keturunan yaitu dari nabi Adam dan ibu Hawa. Dari satu keturunan tersebut, kemudian Allah menjadikan manusia berkembang menjadi sangat banyak. Allah menjadikan manusia berbangsa-bangsa dan bersuku-suku dengan tujuan agar manusia saling mengenal satu sama lain. Sehingga dapat saling bekerja sama dan saling memberi manfaat satu sama lain.

Selain untuk mengenal satu sama lain, manusia juga dianjurkan untuk menjalin hubungan baik dengan sesama manusia lainnya. Rasulullah SAW bersabda yang artinya :

"seorang muslim adalah saudara bagi muslim lainnya, dia tidak mendzaliminya dan tidak membiarkannya untuk disakiti. Siapa yang membantu kebutuhan saudaranya maka Allah akan membantu kebutuhannya. Siapa yang menghilangkan satu kesusahan seorang muslim, maka Allah menghilangkan satu kesusahan baginya dari kesusahan-kesusahan hari kiamat. Dan siapa yang menutupi (aib)

seorang muslim maka Allah akan menutup aibnya pada hari kiamat"(H.R. Bukhari no. 2262)

Hadis tersebut menjelaskan bahwa semua orang muslim merupakan saudara bagi orang muslim lainya. Sesama muslim dilarang untuk mendzalmi, oleh karena itu orang muslim tidak boleh membedakan muslim satu dengan muslim lainnya. Hadis tersebut menganjurkan agar sesama umat muslim harus saling tolong menolong dalam kebaikan. Kebaikan seorang muslim kepada muslim lainnya senantiasa dibalas oleh Allah. Ketika seorang muslim membantu saudara muslim lainnya yang kesusahan, maka Allah pun tidak akan membiarkan seorang muslim tersebut dalam kesusahan. Seorang muslim yang menutup aib saudara muslim lainnya, Allah pun menutup aib seorang muslim tersebut baik di dunia maupun di akhirat.

Manusia diciptakan oleh Allah sebagai makhluk sosial. Oleh karena itu manusia tidak dapat hidup sendiri tanpa bantuin manusia lainnya. Sehingga timbul interaksi antara manusia satu dengan manusia yang lainnya. Dalam graf, manusia dapat diinterpretasikan sebagai titik, sedangkan hubungan manusia satu dengan manusia yang lainnya dapat diinterpretasikan sebagai sisi. Titik satu dengan titik yang lainnya diibaratkan sebagai manusia satu dengan manusia yang lainnya. Sisi adalah yang menghubungkan manusia satu dengan manusia yang lainnya. Sisi akan terbentuk ketika titik satu dengan titik yang lainnya saling terhubung. Begitu pula hubungan manusia satu dengan manusia lainnya, hubungan manusia satu dengan manusia yang lainnya akan terbentuk ketika manusia satu dengan manusia yang lainnya saling berinteraksi. Misalnya hubungan pertemanan, di mana manusia sebagai titik dan hubungan silaturrahim sebagai sisi.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$.

3.1 *F-index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$

F-index pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.

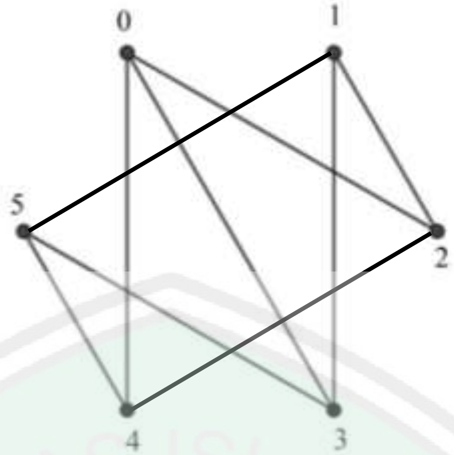
3.1.1 *F-index* pada $T(\Gamma(\mathbb{Z}_6))$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 6 adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 6 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.1 Tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$

Berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $T(\Gamma(\mathbb{Z}_6))$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_6$. Dua titik berbeda $u, v \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_6)))$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_6)$. Sehingga graf total dari $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_6))$

Dari Gambar 3.1 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_6))$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 3$ $\deg(\bar{2}) = 3$ $\deg(\bar{4}) = 3$

$\deg(\bar{1}) = 3$ $\deg(\bar{3}) = 3$ $\deg(\bar{5}) = 3$

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_6))$ sebagai berikut:

$$F(T(\Gamma(\mathbb{Z}_6))) = \sum_{u \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_6)))} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{0})^3 + \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg(\bar{5})^3$$

$$= 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3$$

$$= 6 \cdot 3^3$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$= 2 \cdot 3^4$$

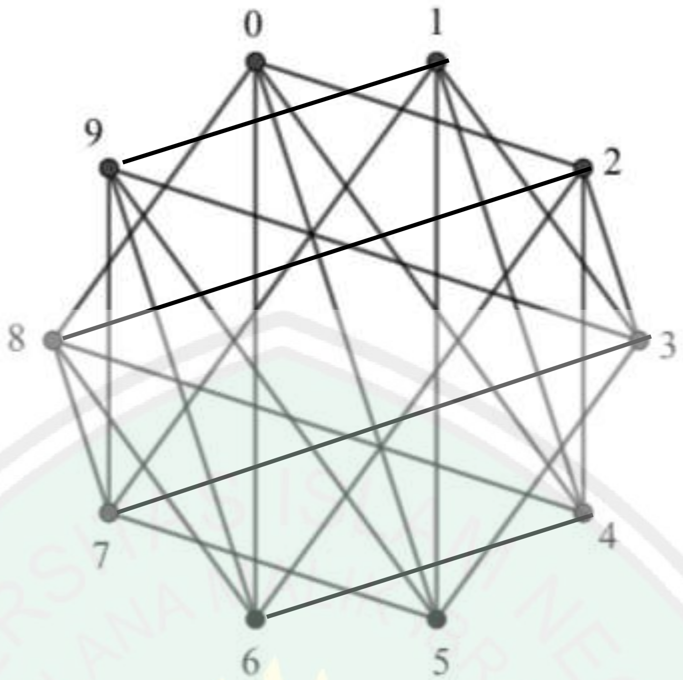
3.1.2 *F-index* pada $\boldsymbol{T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\right)}$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 10 adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 10 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.2 Tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{10}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	6	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\right)$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{10}$. Dua titik berbeda $u, v \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})\right)\right)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{10})$. Sehingga graf total dari $\mathbb{Z}_{10}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))$

Dari Gambar 3.2 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 5$	$\deg(\bar{2}) = 5$	$\deg(\bar{4}) = 5$	$\deg(\bar{6}) = 5$	$\deg(\bar{8}) = 5$
$\deg(\bar{1}) = 5$	$\deg(\bar{3}) = 5$	$\deg(\bar{5}) = 5$	$\deg(\bar{7}) = 5$	$\deg(\bar{9}) = 5$

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))$ sebagai berikut:

$$F(\,T(\Gamma(\mathbb{Z}_{10}))\,) = \sum_{u \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{10})))} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{0})^3 + \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg(\bar{5})^3$$

$$+ \deg(\bar{6})^3 + \deg(\bar{7})^3 + \deg(\bar{8})^3 + \deg(\bar{9})^3$$

$$= 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3$$

$$= 10 \cdot 5^3$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 5^3$$

$$= 2 \cdot 5^4$$

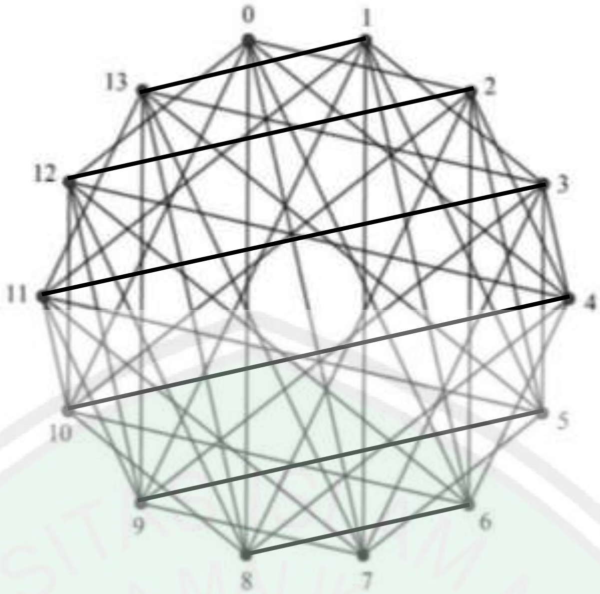
3.1.3 *F-index* pada $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 14 adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{13}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 14 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.3 Tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{14}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.3 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{14}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{14}$ yaitu $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{14}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})))$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{14})$. Sehingga graf total dari $\mathbb{Z}_{14}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{14}))$

Dari Gambar 3.3 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\big)$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 7$	$\deg(\bar{5}) = 7$	$\deg(\overline{10}) = 7$
$\deg(\bar{1}) = 7$	$\deg(\bar{6}) = 7$	$\deg(\overline{11}) = 7$
$\deg(\bar{2}) = 7$	$\deg(\bar{7}) = 7$	$\deg(\overline{12}) = 7$
$\deg(\bar{3}) = 7$	$\deg(\bar{8}) = 7$	$\deg(\overline{13}) = 7$
$\deg(\bar{4}) = 7$	$\deg(\bar{9}) = 7$	

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\big)$ sebagai berikut:

$$F\Big(T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\big)\Big) = \sum_{u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{14})\right)\right)} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{0})^3 + \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg(\bar{5})^3$$
$$+ \deg(\bar{6})^3 + \deg(\bar{7})^3 + \deg(\bar{8})^3 + \deg(\bar{9})^3 + \deg(\overline{10})^3$$
$$+ \deg(\overline{11})^3 + \deg(\overline{12})^3 + \deg(\overline{13})^3$$

$$= 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3$$

$$= 14 \cdot 7^3$$

$$= 2 \cdot 7 \cdot 7^3$$

$$= 2 \cdot 7^4$$

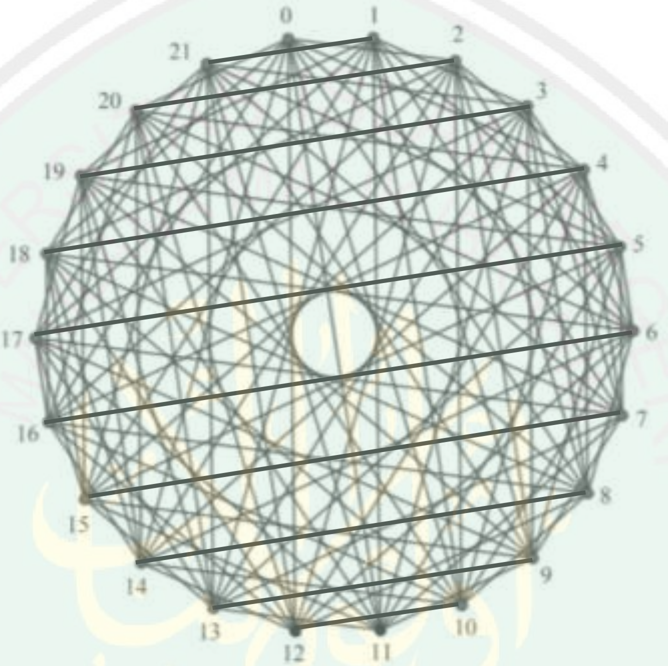
3.1.4 *F-index* pada $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 22 adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{21}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 22 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.4 Tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{22}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 3.4 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$ Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{22}$ yaitu $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{22}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{22})))$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{22})$. Sehingga graf total dari $\mathbb{Z}_{22}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))$

Dari Gambar 3.4 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 11$	$\deg(\bar{5}) = 11$	$\deg(\overline{10}) = 11$	$\deg(\overline{15}) = 11$	$\deg(\overline{20}) = 11$
$\deg(\bar{1}) = 11$	$\deg(\bar{6}) = 11$	$\deg(\overline{11}) = 11$	$\deg(\overline{16}) = 11$	$\deg(\overline{21}) = 11$
$\deg(\bar{2}) = 11$	$\deg(\bar{7}) = 11$	$\deg(\overline{12}) = 11$	$\deg(\overline{17}) = 11$	
$\deg(\bar{3}) = 11$	$\deg(\bar{8}) = 11$	$\deg(\overline{13}) = 11$	$\deg(\overline{18}) = 11$	
$\deg(\bar{4}) = 11$	$\deg(\bar{9}) = 11$	$\deg(\overline{14}) = 11$	$\deg(\overline{19}) = 11$	

Sehingga *F-index* pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{22}))$ sebagai berikut:

$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{22})\right)\right) = \sum_{u\in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{22})\right)\right)} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{0})^3 + \deg(\bar{1})^3 \dots + \deg(\overline{21})^3$$

$$= 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3$$
$$+ 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3 + 11^3$$
$$+ 11^3 + 11^3 + 11^3 + +11^3$$

$$= 22 \cdot 11^3$$

$$= 2 \cdot 11 \cdot 11^3$$

$$= 2 \cdot 11^4$$

3.1.5 Rumusan *F-index* pada $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)$

Berdasarkan perhitungan *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ untuk $p \geq 3$ dengan p bilangan prima, maka diperoleh dugaan pola umum *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ sebagai berikut:

Tabel 3.5 *F-index* pada $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)$

p	$Z(\mathbb{Z}_{2p})$	$u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)$	$\deg(u)$	$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)$
3	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ $= \{\bar{3}, 2\cdot\bar{0}, 2\cdot\bar{1},$ $2\cdot\bar{2}\}$	$\bar{0}$	3	$6 \cdot 3^3$ $= 2 \cdot 3 \cdot 3^3$ $= 2 \cdot 3^4$
		$\bar{1}$	3	
		$\bar{2}$	3	
		$\bar{3}$	3	
		$\bar{4}$	3	
		$\bar{5}$	3	
5	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8}\}$ $= \{\bar{5}, 2\cdot\bar{0}, 2\cdot\bar{1}, 2\cdot\bar{2},$ $2\cdot\bar{3}, 2\cdot\bar{4}\}$	$\bar{0}$	5	$10 \cdot 5^3$ $= 2 \cdot 5 \cdot 5^3$ $= 2 \cdot 5^4$
		$\bar{1}$	5	
		$\bar{2}$	5	
		$\bar{3}$	5	

		$\overline{4}$	5	
		$\overline{5}$	5	
		$\overline{6}$	5	
		$\overline{7}$	5	
		$\overline{8}$	5	
		$\overline{9}$	5	
7	$\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{10},\overline{12}\}$ $=\{\overline{7},2\cdot\overline{0},2\cdot\overline{1},2\cdot\overline{2},$ $2\cdot\overline{3},2\cdot\overline{4},2\cdot\overline{5},$ $2\cdot\overline{6}\}$	$\overline{0}$	7	$14\cdot 7^3$ $=2\cdot 7\cdot 7^3$ $=2\cdot 7^4$
		$\overline{1}$	7	
		$\overline{2}$	7	
		$\overline{3}$	7	
		$\overline{4}$	7	
		$\overline{5}$	7	
		$\overline{6}$	7	
		$\overline{7}$	7	
		$\overline{8}$	7	
		$\overline{9}$	7	
		$\overline{10}$	7	
		$\overline{11}$	7	
		$\overline{12}$	7	
		$\overline{13}$	7	
11	$\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8},\overline{10},\overline{11},\overline{12},$ $\overline{14},\overline{16},\overline{18},\overline{20}\}$ $=\{\overline{11},2\cdot\overline{0},2\cdot\overline{1},2\cdot\overline{2},$ $2\cdot\overline{3},2\cdot\overline{4},2\cdot\overline{5},$ $2\cdot\overline{6},2\cdot\overline{7},2\cdot\overline{8},2\cdot\overline{9}$ $,2\cdot\overline{10}\}$	$\overline{0}$	11	$22\cdot 11^3$ $=2\cdot 11\cdot 11^3$ $=2\cdot 11^4$
		$\overline{1}$	11	
		$\overline{2}$	11	
		$\overline{3}$	11	
		$\overline{4}$	11	
		$\overline{5}$	11	
		$\overline{6}$	11	
		$\overline{7}$	11	
		$\overline{8}$	11	
		$\overline{9}$	11	
		$\overline{10}$	11	
		$\overline{11}$	11	
		$\overline{12}$	11	

		$\overline{13}$	11	
		$\overline{14}$	11	
		$\overline{15}$	11	
		$\overline{16}$	11	
		$\overline{17}$	11	
		$\overline{18}$	11	
		$\overline{19}$	11	
		$\overline{20}$	11	
		$\overline{21}$	11	

Dari beberapa perhitungan yang telah dilakukan, untuk p bilangan prima, $p \geq 3$ diperoleh $F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) = 2p^4$ dengan himpunan pembagi nolnya adalah $\{\, p, 2k | k = 0,1,2, \dots, (p-1)\}$.

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, penulis menyusun teorema untuk mendukung pembuktian rumus umum *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

Suatu unsur a adalah pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $2p$ jika dan hanya jika $ax \equiv 0 \ (mod\ 2p)$ memiliki solusi tak nol. Sehingga kongruensi tersebut memiliki lebih dari satu selesaian jika dan hanya jika $(a, 2p) > 1$.

Proposisi 3.1.1

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. Himpunan pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\, p, 2k | k = 0,1,2, \dots, (p-1)\}$$

Bukti :

Jelas bahwa $0 \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$

Misalkan $u \in \mathbb{Z}_{2p}, u \neq 0$.

$u \in Z(\mathbb{Z}_{2p}) \Leftrightarrow ux \equiv 0 \ (mod\ 2p)$ memiliki solusi tak nol

$\Leftrightarrow (u, 2p) > 1.$

$\Leftrightarrow (u, 2p) = 2$ atau $(u, 2p) = p$, karena $u \neq 2p$.

$\Leftrightarrow 2|u$ atau $p|u$.

Jadi $Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{p, 2k|k = 0,1,2, \dots, (p-1)\}$

Lemma 3.1.1

Misalkan p bilangan prima dan $p \geq 3$, maka $\deg(u) = p$, untuk setiap $u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)$.

Bukti :

Ambil $u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)$

Misalkan $v \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right), v \neq u.$

$u + v \in Z(\mathbb{Z}_{2p}) \Leftrightarrow u + v = x$, untuk suatu $x \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$

$\Leftrightarrow v = x - u$, untuk suatu $x \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$

Perhatikan bahwa $u = v \Leftrightarrow u = x - u$

$\Leftrightarrow x = 2u$

Oleh karena itu $N_G(u) = \left\{v \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) | v = x - u, \text{untuk suatu } x \in Z(\mathbb{Z}_{2p}), x \neq 2u\right\}$

Dengan demikian, $\deg(u) = |Z(\mathbb{Z}_{2p})| - 1$

$= (p+1) - 1$

$= p$

Teorema 3.1.1

Misal p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$.

F-index pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah

$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) = 2p^4$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.1.1 diperoleh $\deg(u) = p$ untuk setiap $u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)$, maka *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah

$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right) = \sum_{u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)} \deg(u)^3$$

$$= 2p \cdot p^3$$

$$= 2p^4.$$

3.2 *F-index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $4p$

F-index pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $4p$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$.

3.2.1 *F-index* pada $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}))$

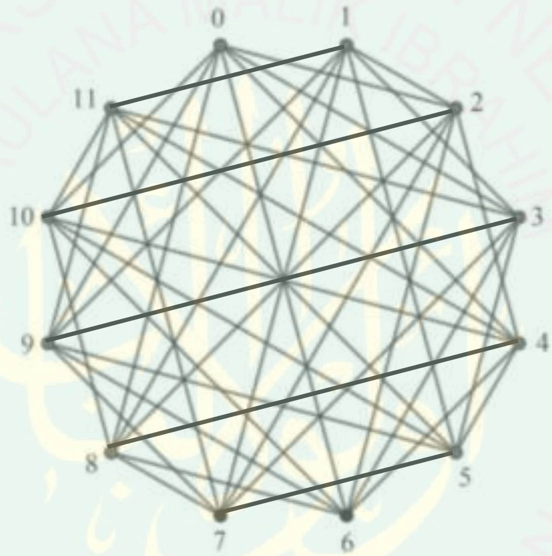
Anggota dari ring bilangan bulat modulo 12 adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 12 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.6 Tabel perkalian dari $(\mathbb{Z}_{12})$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	6	$\overline{11}$	4	9	$\bar{2}$	$\bar{7}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	9	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.6 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{12}$ yaitu $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}))$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{12}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})))$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{12})$. Sehingga graf total dari $\mathbb{Z}_{12}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}))$

Dari Gambar 3.5 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}))$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 7$	$\deg(\bar{4}) = 7$	$\deg(\bar{8}) = 7$
$\deg(\bar{1}) = 7$	$\deg(\bar{5}) = 7$	$\deg(\bar{9}) = 7$
$\deg(\bar{2}) = 7$	$\deg(\bar{6}) = 7$	$\deg(\overline{10}) = 7$
$\deg(\bar{3}) = 7$	$\deg(\bar{7}) = 7$	$\deg(\overline{11}) = 7$

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}))$ sebagai berikut:

$$F\left(T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})\big)\right) = \sum_{u \in V\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{12}))\right)} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\overline{0})^3 + \deg(\overline{1})^3 + \cdots + \deg(\overline{11})^3$$

$$= 12 \cdot 7^3$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 + 1)^3$$

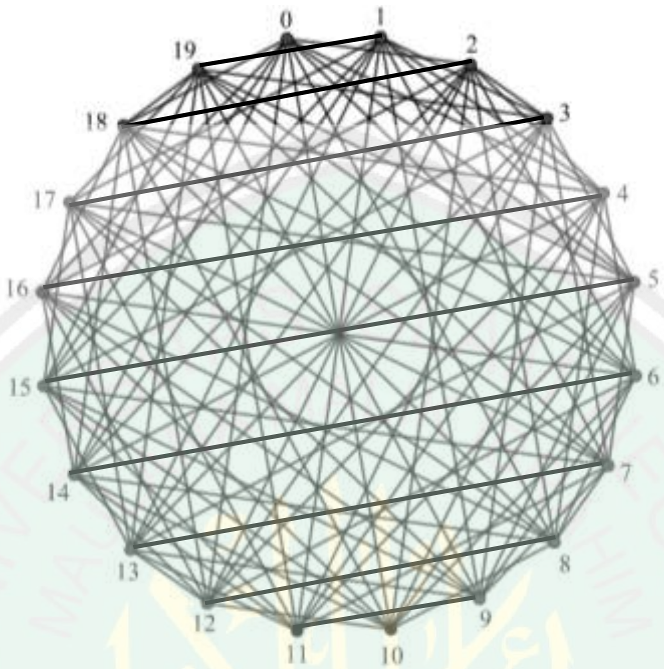
3.2.2 *F-index* pada $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 20 adalah $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \dots, \overline{19}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 20 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.7 Tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{20}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	18	$\overline{9}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 3.7 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{20}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{20}$ yaitu $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{20}$. Dua titik berbeda $u, v \in V\left(T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)\right)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{20})$. Sehingga graf total dari $\mathbb{Z}_{20}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)$

Dari Gambar 3.6 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 11$	$\deg(\bar{4}) = 11$	$\deg(\bar{8}) = 11$	$\deg(\overline{12}) = 11$	$\deg(\overline{16}) = 11$
$\deg(\bar{1}) = 11$	$\deg(\bar{5}) = 11$	$\deg(\bar{9}) = 11$	$\deg(\overline{13}) = 11$	$\deg(\overline{17}) = 11$
$\deg(\bar{2}) = 11$	$\deg(\bar{6}) = 11$	$\deg(\overline{10}) = 11$	$\deg(\overline{14}) = 11$	$\deg(\overline{18}) = 11$
$\deg(\bar{3}) = 11$	$\deg(\bar{7}) = 11$	$\deg(\overline{11}) = 11$	$\deg(\overline{15}) = 11$	$\deg(\overline{19}) = 11$

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)$ sebagai berikut:

$$F\Big(T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{20})\big)\Big) = \sum_{u \in V\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{20}))\right)} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{0})^3 + \deg(\bar{1})^3 + \dots + \deg(\overline{19})^3$$

$$= 20 \cdot 11^3$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 + 1)^3$$

3.2.3 *F-index* pada $T\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{28})\big)$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 28 adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \dots, \overline{27}$. Untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 28 dibangun tabel Cayley berikut :

Tabel 3.8 Tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{28}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{26}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{26}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	$\overline{27}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{23}$	$\overline{26}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{22}$	$\overline{25}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{22}$	$\overline{27}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{24}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{26}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{23}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{26}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{26}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\overline{18}$	$\overline{27}$	$\bar{8}$	$\overline{17}$	$\overline{26}$	$\bar{7}$	$\overline{16}$	$\overline{25}$	$\bar{6}$	$\overline{15}$	$\overline{24}$	$\bar{5}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\bar{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\overline{26}$	$\bar{8}$	$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\bar{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\overline{26}$	$\bar{8}$	$\overline{18}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\bar{5}$	$\overline{16}$	$\overline{27}$	$\overline{10}$	$\overline{21}$	$\bar{4}$	$\overline{15}$	$\overline{26}$	$\bar{9}$	$\overline{20}$	$\bar{3}$	$\overline{14}$	$\overline{25}$	$\bar{8}$	$\overline{19}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{24}$	$\bar{7}$	$\overline{18}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\bar{6}$	$\overline{17}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\bar{8}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\bar{8}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\bar{8}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\bar{8}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$
$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{26}$	$\overline{11}$	$\overline{24}$	$\bar{9}$	$\overline{22}$	$\bar{7}$	$\overline{20}$	$\bar{5}$	$\overline{18}$	$\bar{3}$	$\overline{16}$	$\bar{1}$	$\overline{14}$	$\overline{27}$	$\overline{12}$	$\overline{25}$	$\overline{10}$	$\overline{23}$	$\bar{8}$	$\overline{21}$	$\bar{6}$	$\overline{19}$	$\bar{4}$	$\overline{17}$	$\bar{2}$	$\overline{15}$
$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$
$\overline{15}$	$\bar{0}$	$\overline{15}$	$\bar{2}$	$\overline{17}$	$\bar{4}$	$\overline{19}$	$\bar{6}$	$\overline{21}$	$\bar{8}$	$\overline{23}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	$\overline{12}$	$\overline{27}$	$\overline{14}$	$\bar{1}$	$\overline{16}$	$\bar{3}$	$\overline{18}$	$\bar{5}$	$\overline{20}$	$\bar{7}$	$\overline{22}$	$\bar{9}$	$\overline{24}$	$\overline{11}$	$\overline{26}$	$\overline{13}$
$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\bar{8}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\bar{8}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\bar{8}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\bar{8}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$
$\overline{17}$	$\bar{0}$	$\overline{17}$	$\bar{6}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\overline{18}$	$\bar{7}$	$\overline{24}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\overline{19}$	$\bar{8}$	$\overline{25}$	$\overline{14}$	$\bar{3}$	$\overline{20}$	$\bar{9}$	$\overline{26}$	$\overline{15}$	$\bar{4}$	$\overline{21}$	$\overline{10}$	$\overline{27}$	$\overline{16}$	$\bar{5}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$
$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\bar{8}$	$\overline{26}$	$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\bar{4}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\bar{8}$	$\overline{26}$	$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\bar{4}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{19}$	$\bar{0}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\overline{22}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{23}$	$\overline{14}$	$\bar{5}$	$\overline{24}$	$\overline{15}$	$\bar{6}$	$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\bar{7}$	$\overline{26}$	$\overline{17}$	$\bar{8}$	$\overline{27}$	$\overline{18}$	$\bar{9}$
$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$
$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$
$\overline{22}$	$\bar{0}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{26}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{26}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\overline{23}$	$\bar{0}$	$\overline{23}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{26}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{24}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{27}$	$\overline{22}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{24}$	$\bar{0}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{25}$	$\bar{0}$	$\overline{25}$	$\overline{22}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{26}$	$\overline{23}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{27}$	$\overline{24}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{26}$	$\bar{0}$	$\overline{26}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{26}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{27}$	$\bar{0}$	$\overline{27}$	$\overline{26}$	$\overline{25}$	$\overline{24}$	$\overline{23}$	$\overline{22}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.8 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{28}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{28}$ yaitu $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{28}))$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{28}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{28})))$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{28})$. Sehingga diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{28}))$ yaitu:

$\deg(\overline{0}) = 15$	$\deg(\overline{7}) = 15$	$\deg(\overline{14}) = 15$	$\deg(\overline{21}) = 15$
$\deg(\overline{1}) = 15$	$\deg(\overline{8}) = 15$	$\deg(\overline{15}) = 15$	$\deg(\overline{22}) = 15$
$\deg(\overline{2}) = 15$	$\deg(\overline{9}) = 15$	$\deg(\overline{16}) = 15$	$\deg(\overline{23}) = 15$
$\deg(\overline{3}) = 15$	$\deg(\overline{10}) = 15$	$\deg(\overline{17}) = 15$	$\deg(\overline{24}) = 15$
$\deg(\overline{4}) = 15$	$\deg(\overline{11}) = 15$	$\deg(\overline{18}) = 15$	$\deg(\overline{25}) = 15$
$\deg(\overline{5}) = 15$	$\deg(\overline{12}) = 15$	$\deg(\overline{19}) = 15$	$\deg(\overline{26}) = 15$
$\deg(\overline{6}) = 15$	$\deg(\overline{13}) = 15$	$\deg(\overline{20}) = 15$	$\deg(\overline{27}) = 15$

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{28}))$ sebagai berikut:

$$F\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{28}))\right) = \sum_{u \in V\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{28}))\right)} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\overline{0})^3 + \deg(\overline{1})^3 + \cdots + \deg(\overline{27})^3$$

$$= 28 \cdot 15^3$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 7 + 1)^3$$

3.2.4 *F-index* pada $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44}))$

Anggota dari ring bilangan bulat modulo 44 adalah $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \dots, \overline{43}$. Sama seperti cara sebelumnya pada ring bilangan bulat modulo $2p$, untuk menentukan anggota dari himpunan pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo 44 yaitu dengan mengoperasikan dua anggota dari ring bilangan bulat modulo 44 menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{44}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}\}$. Selanjutnya dibangun graf total dari $\mathbb{Z}_{44}$ yaitu $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44}))$ yang titiknya dalah anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_{44}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44})))$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v \in Z(\mathbb{Z}_{44})$. Sehingga diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44}))$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 23$	$\deg(\bar{9}) = 23$	$\deg(\overline{18}) = 23$	$\deg(\overline{27}) = 23$	$\deg(\overline{36}) = 23$
$\deg(\bar{1}) = 23$	$\deg(\overline{10}) = 23$	$\deg(\overline{19}) = 23$	$\deg(\overline{28}) = 23$	$\deg(\overline{37}) = 23$
$\deg(\bar{2}) = 23$	$\deg(\overline{11}) = 23$	$\deg(\overline{20}) = 23$	$\deg(\overline{29}) = 23$	$\deg(\overline{38}) = 23$
$\deg(\bar{3}) = 23$	$\deg(\overline{12}) = 23$	$\deg(\overline{21}) = 23$	$\deg(\overline{30}) = 23$	$\deg(\overline{39}) = 23$
$\deg(\bar{4}) = 23$	$\deg(\overline{13}) = 23$	$\deg(\overline{22}) = 23$	$\deg(\overline{31}) = 23$	$\deg(\overline{40}) = 23$
$\deg(\bar{5}) = 23$	$\deg(\overline{14}) = 23$	$\deg(\overline{23}) = 23$	$\deg(\overline{32}) = 23$	$\deg(\overline{41}) = 23$
$\deg(\bar{6}) = 23$	$\deg(\overline{15}) = 23$	$\deg(\overline{24}) = 23$	$\deg(\overline{33}) = 23$	$\deg(\overline{42}) = 23$
$\deg(\bar{7}) = 23$	$\deg(\overline{16}) = 23$	$\deg(\overline{25}) = 23$	$\deg(\overline{34}) = 23$	$\deg(\overline{43}) = 23$
$\deg(\bar{8}) = 23$	$\deg(\overline{17}) = 23$	$\deg(\overline{26}) = 23$	$\deg(\overline{35}) = 23$	

Sehingga diperoleh *F-index* pada graf $T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44}))$ sebagai berikut:

$$F\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44}))\right) = \sum_{u \in V\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{44}))\right)} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{0})^3 + \deg(\bar{1})^3 + \cdots + \deg(\overline{43})^3$$

$$= 44 \cdot 23^3$$

$$= 4 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 11 + 1)^3$$

3.2.5 Rumusan *F-index* pada $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$

Berdasarkan perhitungan *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ untuk $p \geq 3$ dengan p bilangan prima, maka diperoleh dugaan pola umum *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ sebagai berikut:

Tabel 3.11 *F-Index* $T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$

p	$Z(\mathbb{Z}_{4p})$	$u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})\right)\right)$	$\deg(u)$	$T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)$
3	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\bar{9},\overline{10}\}$ $=\{1\cdot\bar{3},3\cdot\bar{3},2\cdot\bar{0},$ $2\cdot\bar{1},2\cdot\bar{2},2\cdot\bar{3},2\cdot\bar{4},$ $2\cdot\bar{5}\}$	$\bar{0}$	7	$12\cdot 7^3$ $=4\cdot 3\cdot(2\cdot 3+1)^3$
		$\bar{1}$	7	
		$\bar{2}$	7	
		$\bar{3}$	7	
		$\vdots$	$\vdots$	
		$\overline{11}$	7	
5	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{8},\overline{10},\overline{12},$ $\overline{14},\overline{15},\overline{16},\overline{18}\}$ $=\{1\cdot\bar{5},,3\cdot\bar{5},\bar{2}\cdot 2\cdot\bar{0},$ $2\cdot\bar{1},2\cdot\bar{2},2\cdot\bar{3},2\cdot\bar{4},$ $2\cdot\bar{5},2\cdot\bar{6},2\cdot\bar{7},2\cdot\bar{8},$ $2\cdot\bar{9}\}$	$\bar{0}$	11	$20\cdot 11^3$ $=4\cdot 5\cdot(2\cdot 5+1)^3$
		$\bar{1}$	11	
		$\bar{2}$	11	
		$\bar{3}$	11	
		$\vdots$	$\vdots$	
		$\overline{19}$	11	
7	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\overline{10},\overline{12},\overline{14},$ $\overline{16},\overline{18},\overline{20},\overline{21},\overline{22},\overline{24},\overline{26}\}$ $=\{1\cdot\bar{7},3\cdot\bar{7},2\cdot\bar{0},2\cdot\bar{1},$ $2\cdot\bar{2},2\cdot\bar{3},2\cdot\bar{4},2\cdot\bar{5},$ $2\cdot\bar{6},2\cdot\bar{7},2\cdot\bar{8},2\cdot\bar{9}$ $,2\cdot\overline{10},2\cdot\overline{11},2\cdot\overline{12},$ $2\cdot\overline{13}\}$	$\bar{0}$	15	$28\cdot 15^3$ $=4\cdot 7\cdot(2\cdot 7+1)^3$
		$\bar{1}$	15	
		$\bar{2}$	15	
		$\bar{3}$	15	
		$\vdots$	$\vdots$	
		$\overline{27}$	15	
11	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{14},$ $\overline{16},\overline{18},\overline{20},\overline{22},\overline{24},\overline{26},\overline{28},$ $\overline{30},\overline{32},\overline{33},\overline{34},\overline{36},\overline{38},\overline{40},$ $\overline{42}\}$ $=\{1\cdot\overline{11},3\cdot\overline{11},$ $2\cdot\bar{0},2\cdot\bar{1},$ $2\cdot\bar{2},2\cdot\bar{3},2\cdot\bar{4},2\cdot\bar{5},$ $2\cdot\bar{6},2\cdot\bar{7},2\cdot\bar{8},2\cdot\bar{9}$ $,2\cdot\overline{10},2\cdot\overline{11},2\cdot\overline{12},$ $2\cdot\overline{13},2\cdot\overline{14},2\cdot\overline{15},$	$\bar{0}$	23	$44\cdot 23^3$ $=4\cdot 11\cdot(2\cdot 11+1)^3$
		$\bar{1}$	23	
		$\bar{2}$	23	
		$\bar{3}$	23	
		$\vdots$	$\vdots$	
		$\overline{43}$	22	

	$2\cdot\overline{16}, 2\cdot\overline{17}, 2\cdot\overline{18},$ $2\cdot\overline{19}, 2\cdot\overline{20}, 2\cdot\overline{21}\}$			

Dari beberapa perhitungan yang telah dilakukan, untuk p bilangan prima, $p \geq 3$ diperoleh $F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right) = 4p(2p+1)^3$ dengan himpunan pembagi nolnya adalah $\{np, 2k | n = 1,3, k = 0,1,2, \dots, (2p-1)\}$.

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, penulis menyusun teorema untuk mendukung pembuktian rumus umum *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

Suatu unsur a adalah pembagi nol pada ring bilangan bulat modulo $4p$ jika dan hanya jika $ax \equiv 0\ (mod\ 4p)$ memiliki solusi tak nol. Sehingga kongruensi tersebut memiliki lebih dari satu selesaian jika dan hanya jika $(a, 4p) > 1$.

Proposisi 3.2.1

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. Himpunan pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $4p$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{np, 2k | n = 1,3, k = 0,1,2, \dots, (2p-1)\}$$

Bukti :

Jelas bahwa $0 \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$.

Misalkan $u \in \mathbb{Z}_{4p}, u \neq 0$.

$u \in Z(\mathbb{Z}_{4p}) \Leftrightarrow ux \equiv 0(mod\ 4p)$ memiliki solusi tak nol

$\Leftrightarrow (u, 4p) > 1$

$\Leftrightarrow (u, 4p) = 2$ atau $(u, 4p) = p$ atau $(u, 4p) = 4$ atau $(u, 4p) = 2p$

$\Leftrightarrow 2|u$ atau $p|u$ atau $4|u$ atau $2p|u$

Jadi $Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{np, 2k | n = 1,3, k = 0,1,2, \dots, (2p-1)\}$.

Lemma 3.2.1

Misalkan p bilangan prima dan $p \geq 3$, maka $\deg(u) = 2p + 1$, untuk setiap $u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right)$.

Bukti :

Ambil $u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right)$.

Misalkan $v \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right), v \neq u$.

$u + v \in Z(\mathbb{Z}_{4p}) \Leftrightarrow u + v = x$, untuk suatu $x \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$

$\Leftrightarrow v = x - u$, untuk suatu $x \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$

Perhatikan bahwa $u = v \Leftrightarrow u = x - u$

$\Leftrightarrow x = 2u$

Oleh karena itu $N_G(u) = \left\{v \in u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right) | v = x - u,\right.$ untuk suatu $x \in Z(\mathbb{Z}_{4p}),\ \left. x \neq 2u\right\}$

Dengan demikian, $\deg(u) = |Z(\mathbb{Z}_{4p})| - 1$

$= (2p + 2) - 1$

$= 2p + 1$

Teorema 3.2.1

Misal p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$.

F-index pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ adalah

$$F\left(T(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p}))\right) = 4p(2p + 1)^3$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.2.1 diperoleh $\deg(u) = 2p + 1$ untuk setiap $u \in V\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right)$, maka diperoleh *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan $p \geq 3$ dan p prima adalah

$$F\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right) = \sum_{u\in\left(T\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{4p})\right)\right)} \deg(u)^3$$

$$= 4p(2p+1)^3.$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini diperoleh rumus *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dan $4p$ untuk $p \geq 3$ dan p bilangan prima sebagai berikut:

1. *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $2p$ adalah
$$F\left(T\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right)\right) = 2p^4$$
2. *F-index* pada graf total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ adalah
$$F\left(T\left(\Gamma\left(\mathbb{Z}_{4p}\right)\right)\right) = 4p(2p+1)^3$$

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan *F-index* pada graf yang lain atau graf pada ring lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, Saman. 2019. *Seri buku Ajar Bidang Aljabar Pengantar Teori Grup*. Sidoarjo: Zifatama Jawara.

Abdussakir. 2007. *Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Maliki Press.

Abdussakir, Azizah, N.N. & Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN Maliki Press.

Akbari, S., dkk. 2009. The Total Graph and regular graph of a commutative ring. *Journal of Pure and Applied Algebra*.

Anderson, David F. dan Badawi, Ayman. 2008. The Total Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra*, 2706-2719.

Buchmann, J.A. 2004. *Introduction to Cryptography, 2nd Edition*. Springer, New York.

Chartrand, G. & Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. Florida:CRC Press.

Chartrand, G., Lesniak, L. & Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs, 6th Edition*. Florida: CRC Press.

Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Teory*. New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra, third Edition*. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc.

Furtula, Boris & Gutman, Ivan. 2015. A Forgotten Topological Index. *Journal Mathematics Chemisty*.

Gao, Wei, dkk. 2016.Forgotten Topological Index of Chemical Structure in Drug. *Saudi Pharmaceutical Journal*, 258-264.

Ghobadi, Sirous & Ghorbaninejad, Mobina. 2016. The Forgotten Topological Index of Four Operations on Some Special Graphs. *Bulletin of Mathematics Science and Aplications*. Vol.16.

Gilbert, L. & J. G. 2009. *Element of Modern Algebra, seventh Edition*. Belmont:Brooks.

Joshi, K.D. *Foundations of Discrete Mathematics*. New Delhi: New Age International (P) Limited.

Khaksari, Ahmad & Ghorbani, Modjtaba. 2017. On The Forgotten Topological Index. *Iranian Journal of Mathematics Chemistry*, 327-338.

Quthb, Sayyid. 2004. Tafsir Fi Zhilalil Qur'an di bawah naungan Al-Qur'aan jilid 10. Jakarta: Gema Insani Press.

Riyanti, Beti.dkk. 2018. Graf 3 dan Graf Total pada Kode Genetik. *Jurnal Ilmiah Math*. Vol.07, No.04.

RIWAYAT HIDUP

Kiki Rizkiyatul Fajriyah, lahir di kabupaten Sidoarjo pada tanggal 14 Maret 1999, dan bisa dipanggil Kiki, tinggal di Jl. Braja Laut Utara RT. 10 RW. 03 Klurak, Kecamatan Candi, Kabupaten Sidoarjo. Anak pertama dari 2 bersaudara dari Abdul Hamid dan Muasih, serta merupakan kakak dari M. Rifqi Dwi Rahmatullah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Roudhlotul Huda Wedoroklurak dan lulus pada tahun 2010, setelah itu melanjutkan ke SMP di MTs Negeri Sidoarjo dan lulus pada tahun 2013, kemudian melanjutkan ke SMA di MAN Sidoarjo dan lulus pada tahun 2016, lalu melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil jurusan Matematika. Selama menempuh pendidikan di di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dia menjadi anggota Mathematics English Club (MEC) dan Mathematics.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Kiki Rizkiyatul Fajriyah
NIM	:	16610106
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	*F-index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ dan $4p$
Pembimbing I	:	Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
Pembimbing II	:	Dewi Ismiarti, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	14 Januari 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	17 Januari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan, Bab I, Bab II		2.
3	23 Maret 2020	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.	
4	28 Maret 2020	Revisi Bab I, dan Bab II		4.
5	29 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal Pembimbing 1	5.	
6	31 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal Pembimbing 2		6.
7	21 April 2020	Revisi Bab I	7.	
8	12 Mei 2020	Revisi Bab II		8.
9	16 Juni 2020	Revisi Bab III	9.	
10	7 September 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan		10.
11	13 Oktober 2020	Revisi Bab III	11.	
12	16 November 2020	Revisi Kajian Keagamaan		12.
13	31 Agustus 2020	ACC untuk disidangkan Pembimbing 1	13.	
14	18 November	ACC untuk disidangkan Pembimbing 2		14.

Malang, 29 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001