KELAS ELEMEN *NIL – CLEAN* YANG *EXCHANGE*

SKRIPSI

OLEH
AKHMAD HAIDAR A'FWANDI
NIM. 16610091

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

KELAS ELEMEN *NIL – CLEAN* YANG *EXCHANGE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Akhmad Haidar A'fwandi
NIM. 16610091

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

KELAS ELEMEN *NIL – CLEAN* YANG *EXCHANGE*

SKRIPSI

Oleh
Akhmad Haidar A'fwandi
NIM. 16610091

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 3 Desember 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II
Dewi Ismiarti, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si.,
NIDT. 19870218 20160801 1 058	NIPT. 1990051120 160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

KELAS ELEMEN *NIL – CLEAN* YANG *EXCHANGE*

SKRIPSI

Oleh
Akhmad Haidar A'fwandi
NIM. 16610091

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 3 Desember 2020

Penguji Utama	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	: Juhari, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504142003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Akhmad Haidar A'fwandi
NIM	: 16610091
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: KELAS ELEMEN *NIL-CLEAN* YANG *EXCHANGE*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 4 Desember 2020
Yang membuat pernyataan,

Akhmad Haidar A'fwandi
NIM 16610091

MOTO

"Dimanapun kau berada jadilah pelayan kebaikan disekitarmu"

قُلۡ إِنَّ صَلَاتِي وَنُسُكِي وَمَحۡيَايَ وَمَمَاتِي لِلَّهِ رَبِّ ٱلۡعَٰلَمِينَ ١٦٢

Katakanlah: sesungguhnya sembahyangku, ibadatku, hidupku dan matiku hanyalah untuk Allah, Tuhan semesta alam. (Q.S. Al-An'am ayat 162)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Mama tercinta Sumiati, papa tercinta Achmad As'ari, ibu tersayang Faridah, ayah tercinta Achmad Soejono Harief dan kakak-kakaku tersayang Bayu Eka Permana dan Ayu Wulandari, adik-adikku tersayang Izzudin Ramadhan Ash dan Iftahimaghfiru Ash, dan untuk mudir MSAA KH. Akhmad Muzakki, yang selalu menjadi motivasi dan semangat bagi penulis dalam menuntut ilmu, mengabdi, dan berjuang di tanah rantau.

KATA PENGANTAR

Assalmu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT, yang telah memberi rahmat, hidayah serta inayah-Nya kepada kita, khususnya kepada penulis sehingga mampu menyelesaikan skripsi dengan judul **KELAS ELEMEN *NIL-CLEAN* YANG *EXCHANGE*.** Shalawat dan salam kepada baginda Nabi Besar Muhammad SAW, yang semoga kita semua senantiasa diberikan keberkahan dan syafaat-Nya hingga hari akhir nanti. Penyusunan skripsi ini ditujukkan sebagai salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program Sarjana Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta sebagai partisipasi penulis untuk menerapkan ilmu yang telah diperoleh ketika penulis masih menimba ilmu di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung, oleh karena itu perkenankan penulis berterimakasih kepada:

1. Ibu Dewi Ismiarti, M.Si, dan bapak Muhammad Khudzaifah M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah membimbing serta mengarahkan penulis dalam menyusun skripsi.
2. Bapak Dr. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen penguji utama dalam skripsi.
3. Bapak Juhari, M.Si selaku dosen ketua penguji dalam skripsi.

4. Segenap Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Kedua orang tua penulis, Ibu Sumiati dan Bapak Achmad As'ary yang selalu memberi semangat, masukan, dan keteladanan baik secara moral maupun riil sejak penulis menjalani perkuliahan hingga menapaki tugas akhir
6. Teman-teman jurusan Matematika 2016 yang telah memberikan semangat dan dukungan dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Mahad Sunan Ampel Al-Aly Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan pelajaran berharga tentang pengabdian, keikhlasan, dan arti bermasyarakat yang sesungguhnya.
8. Dan kepada semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah tulus membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Dan akhirnya skripsi ini telah rampung, namun masih jauh dari kata sempurna. Karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari semua belah pihak, demi kesempurnaan dan perbaikan karya ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya serta bagi pengembangan keilmuan di bidang matematika khususnya matematika aljabar di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dengan Mengharap Ridho dari Allah SWT penulis panjatkan do'a dan harapan mudah-mudahan segala amal baik semua pihak mendapatkan balasan dan semoga taufik dan hidayah senantiasa disampaikan.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 04 Desember 2020

Akhmad Haidar A'fwandi

NIM. 16610091

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

A'fwandi, Akhmad Haidar. 2020. **Kelas Elemen *Nil-Clean* yang *Exchange***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: elemen *exchange*, elemen *nil-clean*, ring.

Misalkan R ring dan $x \in R$. Elemen x dikatakan elemen *nil clean* jika $x = e + t$ untuk e idempoten di R dan t nilpoten di R. Jika x adalah elemen *nil clean* dan terdapat et dan t komutatif maka elemen x dikatakan elemen *nil clean* medium kiri . Elemen x adalah *exchange* jika terdapat e idempoten di R sehingga $1 - e \in R(1 - x)$. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui karakteristik elemen *exchange* dan menunjukkan syarat elemen *nil clean* merupakan elemen *exchange*. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Karakteristik elemen x yang *exchange* di ring yaitu:
   a. Ada $e^2 = e \in R$ sehingga $e - x \in R(x - x^2)$.
   b. Ada $e^2 = e \in Rx$ dan c $\in R$ sedemikian sehingga $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.
   c. Ada $e^2 = e \in Rx$ sedemikian sehingga $R = Re + R(1 - x)$.
2. Syarat cukup bagi elemen *nil clean* merupakan elemen *exchange* adalah medium kiri.

ABSTRACT

A’fwandi, Akhmad Haidar. 2020. **A Class of *Nil-Clean* Elements Which are *Exchange***. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: exchange element, nil clean element, ring.

Let a be ring R and $a \in R$. An element a is called nil clean if $a = e + t$ for idempotent e in R and nilpotent t in R. This nil clean element a is called left medium nil clean if et and t commutative . An element a is called exchange if there is an idempotent $e \in Ra$ such that $R = Re + R(1 - a)$. This research aim to discuss some characteristics of the exchange element and sufficient condition for nil clean element to be exchange. The results of this study are as following:

1. Let x be an element of R. Element x is an exchange element will be equivalent to any following conditions.
   a. There exists $e^2 = e \in R$ with $e - x \in R(x - x^2)$.
   b. There exists $e^2 = e \in Rx$ and $c \in R$ such that $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.
   c. There exists $e^2 = e \in Rx$ such that $R = Re + R(1 - x)$.
2. A sufficient condition for nil clean element to be exchange is left medium.

مستخلص البحث

عفواندي، أحمد هيدر. ٢٠٢٠. **فئة عنصر محو الصفري التبادل**. بحث جامعي. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة الأولى: ديوي إسميارتي، الماجستير. المشرف الثاني: محمد حذيفة، الماجستير.

الكلمات المفاتح: الحلقة، وعنصر محو الصفري، وعنصر التبادل.

في التمثيل R هي الحلقة و$\alpha \in R$. فيقال عنصر α عنصر محو الصفري إذا كان $\alpha = e + t$ بقصد e هو عاطل في R و tهو لاقوة في R.اذاكان a عنصر محو الصفري مع et وكان t تبادليا،فسيتم ترك عنصر متوسط نظيف.العنصر a التبادل اذكان هناك $e \in Ra$ متماثل مثل $R = Re + R(1-a)$ تهدف هذا البحث لمعرفة سيمات وعنصر التبادل وإظهار شرط عنصر محو الصفري وهو عنصر التبادل.

فاستخدم منهج في هذا البحث دراسة وصفية بمراجع من بعض الكتب والمقالات. ونتائج هذه الدراسة كالتالي:

1. سيمات عنصر التبادل فيالحلقة يعني:
   أ. كان $e^2 = e \in R$ لهذا السبب $e - x \in R\ (x - x^2)$
   ب. كان $e^2 = e \in Rx$ و $c \in R$ بحيث $(1-e) - c(1-x) \in J(R)$
   ج. كان $e^2 = e \in Rx$ بحيث $R = Re + R(1-x)$.
2. الشرط لعنصر محو الصفري من عنصر التبادل هو متوسط اليسار

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Elemen-elemen di ring dapat dikategorikan berdasarkan dekomposisinya sebagai penjumlahan dua unsur di ring yaitu elemen *nil clean*, *strongly nil clean* dan *clean*. Suatu elemen di ring dikatakan *nil clean* jika dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari suatu idempoten dengan nilpoten. Elemen *nil clean* yang elemen idempoten dan nilpotennya komutatif terhadap operasi perkalian untuk dikatakan elemen *strongly nil clean*. Sedangkan elemen *clean* yaitu jika elemen tersebut hasil penjumlahan dari elemen idempoten dan unit.

Suatu elemen a di ring R dikatakan *exchange* kiri jika terdapat elemen idempoten $e \in Ra$ sehingga $(1 - e) \in R(1 - a)$. Pada tahun 2013, Alexander J. Diesel melakukan penilitian tentang spesifikasi kelas baru dari elemen *clean*. Kajian tersebut berfokus pada elemen *nil clean*. Adapun pada tahun 2019 Grigore melakukan penelitian tentang kelas baru elemen *nil clean* yang *exchange*.

Dalam Al-qur'an surat an-Nisa' ayat 38 yang artinya "*Dan orang yang menafkahkan harta mereka semata-mata karena ingin dilihat (dipuji) orang*". Ayat tersebut menjelaskan tentang orang yang menafkahkan hartanya semata-mata untuk dipuji orang lain, perbuatan seperti itu termasuk *riya*. Perbuatan *riya* meskipun dikerjakan sebanyak mungkin tidak mendapatkan pahala dari Allah.

Berdasakan latar belakang tersebut penelitian dalam skripsi ini yaitu untuk membahas karakterisasi dari elemen *exchange* di ring dari penelitian sebelumnya dan elemen *nil clean* yang *exchange*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya maka rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah

1. Bagaimana karakterisasi elemen *exchange* pada ring?
2. Bagaimana syarat cukup bagi elemen *nil clean* merupakan elemen *exchange*?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang sudah dijelaskan, tujuan yang dibahas pada skripsi ini sebagai berikut.

1. Mengetahui karekterisasi elemen *exchange* pada ring.
2. Mengetahui syarat cukup bagi elemen *nil clean* merupakan elemen *exchange*.

1.4 Manfaat penelitian

Diantara manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Peneliti

   Sebagai sarana untuk mengembangkan ilmu yang telah didapat selama perkuliahan, khususnya bidang aljabar abstrak yang mengenai elemen-elemen *nil-clean* yang *exchange*.

2. Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan pustaka untuk mempelajari aljabar abtrak khusunya elemen-elemen khusus dalam ring.

3. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan rujukan di perpustakaan dalam bidang aljabar abstrak.

1.5 Metode Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif dengan memakai bentuk kajian literature. Adapun langkah penelitian yang ditempuh adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui definisi elemen *exchange* di ring.
2. Mengkaji sifat-sifat elemen *exchange* melalui Proposisi dari Nicholson.
3. Mengecek kondisi yang harus dipenuhi oleh elemen *nil clean* dengan elemen nilpoten berderajat 2 terhadap elemen *exchange*.
4. Menentukan kondisi umum yang harus dipenuhi oleh elemen *Nil Clean* yang *exchange*.

1.6 Sitematika Penulisan

Agar skripsi ini mudah ditelaah dan dipahami pembahasannya, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

BAB II : Kajian Pustaka

Bagian oni mencakup konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut diantaranya operasi biner, grup, ring, subring, ideal, elemen idempoten, elemen nilpoten, elemen unit, elemen *clean* dan *ring clean*, elemen *strongly clean*, dan elemen *nil clean*.

BAB III : Pembahasan

Pada bab ini dilakukan pengkajian tentang pembahasan yang berisi definisi elemen *exchange* pada ring, pembuktian proposisi Nicholson, pembuktian teorema-teorema elemen nil clean dengan elemen nilpoten yang berindeks 2 yaitu elemen *exchange*, dan untuk semua elemen *nil clean* yaitu *elemen exchange*.

BAB IV : Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan memberikan saran untuk penelitian selanjutnya .

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi, teorema, lemma, serta contoh yang mempermudah pembahasan mengenai elemen *nil clean*, dan elemen *exchange* dalam skripsi ini.

2.1 Operasi Biner

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner. Sebelum dibahas mengenai struktur aljabar perlu dikaji dulu tentang operasi biner.

2.1.1 Operasi Biner

Definisi 2.1.1.1

Misalkan S suatu himpunan tak kosong dan $a, b \in$ S. Suatu operasi biner "·" pada himpunan S merupakan pemetaan dari $S\ x\ S \rightarrow S$. (Ayres dan Jaisingh, 2004).

Contoh 2.1.1.2

Operasi perkalian " · " pada $\mathbb{Z}$ adalah suatu operasi biner yang tertutup di $\mathbb{Z}$.

2.2 Grup

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut akan diberikan definisi tentang semigrup, grup, grup komutatif yang dikutip dari Andari (2015).

2.2.1 Semigrup

Definisi 2.2.1.1

Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi satu operasi biner " $*$ ". Pasangan $(S,*)$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma berikut

1. Operasi biner " $*$ " tertutup di S, yaitu untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$
2. Operasi biner " $*$ " bersifat assosiatif di S, yaitu untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Contoh 2.2.1.2

Diberikan himpunan matriks ordo 2 x 2 dengan entri bilangan bulat atau ditulis

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

Yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan " $+$ ". Akan ditunjukkan $(M_2(\mathbb{Z}), +)$ adalah semigrup.

Bukti

Ambil sebarang $H, K, J \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan $H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}$ dan $J = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$

1. Tertutup

$$H + K = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+m & b+n \\ c+o & d+p \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

2. Assiosiatif

$$(H + K) + J = \begin{bmatrix} a+m & b+n \\ c+o & d+p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+m)+s & (b+n)+t \\ (c+o)+u & (d+p)+v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(m+s) & b+(n+t) \\ c+(o+u) & d+(p+v) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+s & n+t \\ o+u & p+v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \right)$$

$$= H + (K + J)$$

Dari 1 dan 2, terbukti $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan semigrup.

2.2.2 Definisi Grup

Definisi 2.2.2.1

Misalkan H adalah suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner " $*$ " ditulis sebagai $(H,*)$ disebut Grup, jika memenuhi kondisi berikut: (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:31).

a. Operasi biner " $*$ " tertutup di H.
b. Operasi biner " $*$ " bersifat assiosiatif di H yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in H$.
c. Terdapat elemen identitas I di H sehingga $* I = I * a = a$, untuk setiap $a \in H$.
d. Setiap anggota H memiliki invers di H yaitu untuk setiap a $\in H$, ada $a^{-1} \in H$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$.

Contoh 2.2.2.2

Diberikan himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah grup. Sebagai akibat langsung dari aksioma pada bilangan bulat yang menyatakan bahwa terdapat operasi biner di $\mathbb{Z}$ yang dilambangkan dengan $+$, dan memenuhi sifat-sifat berikut:

a. Operasi penjumlahan tertutup di $\mathbb{Z}$.

b. Operasi penjumlahan bersifat asiosiatif di $\mathbb{Z}$.

c. Himpunan bilangan bulat memuat suatu elemen 0 yang merupakan elemen identitas untuk penjumlahan.

d. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$, tedapat invers penjumlahan dari $x \in \mathbb{Z}$, dinotasikan dengan $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

(Gilbert, 2009:66)

Berdasarkan Definisi 2.2.2.1, jelas bahwa pasangan $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.2.3 Grup Komutatif

Definisi 2.2.3.1

Suatu grup $(H,*)$ disebut grup komutatif atau grup *abelian*, jika pada oprasi biner " $*$ " berlaku sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in H$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:31).

Contoh 2.2.3.2

Grup $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif (Gilbert, 2009:66).

2.3 Ring

Ring adalah suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner serta memenuhi aksioma aksioma tertentu. Berikut diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan ring sebagai pengantar dasar teori selanjutnya yang dikutip berdasarkan Andari (2014).

2.3.1 Definisi ring

Definisi 2.3.1.1

Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner, " $+$ " dan " $\cdot$ ". Suatu $(R, +, \cdot)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut:

1. Himpunan R dengan operasi penjumalahan adalah grup komutatif.
2. Himpunan R dengan operasi perkalian adalah semigrup.
3. Memenuhi hukum distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Himpunan R disebut ring komutatif jika memenuhi sifat komutatif terhadap operasi kedua, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$.

Contoh 2.3.1.2

Himpunana bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian adalah ring. Berdasarkan aksioma bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi sifat sifat berikut.

1. Himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan adalah grup komutatif berdasarkan Contoh 2.2.3.2.
2. Operasi perkalian tertutup di $\mathbb{Z}$.
3. Operasi perkalian bersifat asiosiatif di $\mathbb{Z}$.
4. Operasi perkalihan bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}$.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

(Gilbert, 2009:66)

2.3.2 Subring

Definisi 2.3.2.1

Misalkan (R, $+$, $\cdot$) merupakan suatu ring dan S merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari R. Maka S disebut subring dari R jika (S, $+$, $\cdot$) merupakan suatu ring.

Definisi 2.3.2.3

Misalkan $(R, +,\cdot)$ adalah ring. Suatu $(R, +,\cdot)$ disebut ring komutatif jika R memenuhi hukum komutatif terhadap operasi perkalian. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$. Kemudian $(R, +,\cdot)$ disebut ring dengan elemen kesatuan, jika terdapat $e \in R$ untuk setiap $a \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot e = e \cdot a = a$.

2.3.3 Ideal

Definisi 2.3.3.1

Misalkan R adalah suatu ring dan I adalah subset dari R. I disebut ideal jika memenuhi aksioma berikut.

1. Untuk setiap $a, b \in I$, berlaku $a - b \in I$.
2. Untuk setiap a $\in I$ dan r $\in$ R, berlaku ar dan ra di I.

Definisi 2.3.3.3

Misalkan R adalah suatu ring dan I adalah suatu ideal dari R. Ideal I disebut ideal maksimal jika I tidak termuat dalam sembarang ideal lainnya selain I sendiri dan R.

Contoh 2.3.3.4

Diberikan ring bilangan bulat modulo 12 dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $I_2 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$, $I_1 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, $I_3 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $I_4 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$, $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}_{12}$.

Akan ditunjukkan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Berdasarkan Definisi 2.3.3.3, diperoleh $I_1 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ dan $I_4 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ adalah ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{12}$. Karena I_1 dan I_4 tidak termuat dalam ideal lainnya selain dirinya sendiri dan $\mathbb{Z}_{12}$. Sedangkan I_2 dan I_3 bukan ideal maksimal karena I_2 trmuat di dalam I_1 dan I_3 termuat di dalam I_4.

Definisi 2.3.3.7

Misalkan R adalah suatu ring. Jacobson Radikal dari R adalah irisan dari semua ideal maksimal dalam R. Secara simbolis dapat ditulis sebagai $J(R)$.

Contoh 2.3.3.8

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Akan ditentukan $J(\mathbb{Z}_{12})$.

Telah diketahui pada Contoh 2.3.3.4, bahwa ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah I_1 dan I_4. Oleh sebab itu berdasarkan Definisi 2.3.3.5 diperoleh $I_1 \cap I_4 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} \cap \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$.

Jadi $J(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{6}\}$.

2.4 Jenis-jenis Elemen dalam Ring

Pada skripsi ini dibahas mengenai elemen-elemen nil clean yang exchange, di dalamnya berkaitan dengan elemen elemen khusus pada ring yaitu elemen yang memiliki sifat khusus, antara lain elemen idempoten, nilpoten dll. Berikut ini diberikan definisi elemen khusus dalam ring yang diambil dari George (1995) Puguh, dkk. (2014), dan Danchev (2015)

2.4.1 Elemen Idempoten

Definisi 2.4.1.1

Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$, r disebut elemen idempoten pada R jika memenuhi $r^2 = r$. Himpunan semua elemen idempoten di R dinotasikan sebagai $Id(R)$.

Contoh 2.4.1.2

Akan ditentukan elemen-elemen idempoten yang termuat di dalam $\mathbb{Z}_8$.

Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$, $Id(\mathbb{Z}_8)$

Tabel 2.4.1.1 Hasil Kuadrat Elemen di $\mathbb{Z}_8$

a	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
a^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 2.4.1.1 diketahui elemen idempoten yang termuat dalam $\mathbb{Z}_8$ adalah $\bar{0}$ dan $\bar{1}$, karena $\bar{0}^2 = \bar{0}$ dan $\bar{1}^2 = \bar{1}$.

Jadi $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

2.4.2 Elemen Nilpoten

Definisi 2.4.2.1

Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. Elemen r disebut nilpoten pada R jika terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga hasil dari r berderajat n sama dengan 0 dengan kata lain $r^n = 0$. Himpunan semua elemen nilpoten di R dinotasikan dengan $N(R)$. Suatu elemen u adalah unipoten jika $u - 1$ adalah nilpoten, ekuivalen dengan jika $u = 1 + b$, maka b adalah elemen nilpoten.

Contoh 2.4.2.2

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Himpunan $N(\mathbb{Z}_8)$ adalah himpunan semua elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$.

Akan ditentukan elemen-elemen nilpoten di $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$.

Berdasarkan Definisi 2.4.2, elemen nilpoten di $\mathbb{Z}_8$ sebagai berikut

$\bar{0}$ adalah nilpoten karena untuk setiap n $\in \mathbb{N}$ berlaku $\bar{0}^n = \bar{0}$,

$\bar{2}$ adalah nilpoten karena terdapat n = 3 $\in \mathbb{N}$ berlaku $\bar{2}^3 = \bar{0}$,

$\bar{4}$ adalah nilpoten karena terdapat n = 2 $\in \mathbb{N}$ berlaku$\bar{4}^2 = \bar{0}$,

$\bar{6}$ adalah nilpoten karena terdapat n = 3 $\in \mathbb{N}$ berlaku $\bar{6}^3 = \bar{0}$,

$\bar{1}$ bukan nilpoten karena tidak ada n $\in \mathbb{N}$ berlaku$\bar{1}^n \neq \bar{0}$

$\bar{3}$ bukan nilpoten karena tidak ada n $\in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\bar{3}^n \neq \bar{0}$

$\bar{7}$ bukan nilpoten karena tidak ada n $\in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\bar{7}^n \neq \bar{0}$

Jadi $N(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.

2.4.3 Elemen Unit

Definisi 2.4.3.1

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu ring dengan elemen kesatuan 1_R. Suatu elemen $u \in R$ disebut unit di R, jika u memiliki invers terhadap operasi perkalian " · ", yaitu terdapat $v \in R$ sedemikian sehingga $uv = vu = 1_R$. Himpunan semua elemen unit di R dinotasikan $U(R)$.

Contoh 2.4.3.2

Diberikan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring dengan elemen kesatuan. Akan ditentukan $\mathbb{Z}_8$ memiliki himpunan elemen unit.

Elemen satuan di $\mathbb{Z}_8$ terhadap operasi pergandaan $(\cdot)$ adalah $\bar{1}$, sehingga didapatkan $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$, karena $(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1}$, $(\bar{3})(\bar{3}) = \bar{1}$, $(\bar{5})(\bar{5}) = \bar{1}$ dan $(\bar{7})(\bar{7}) = \bar{1}$. Berdasarkan Tabel 2.3.1.1 suatu $a, b \in \mathbb{Z}_8 - \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$, maka $ab = ba \neq \bar{1}$. Jadi $U(\mathbb{Z}_8)$ adalah $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$.

2.5 Elemen *Clean* pada Ring

Pada skripsi ini dibahas *nil clean*. Definisi *nil clean* merupakan perngembangan dari sifat *clean*. Berikut dibahas ring yang memiliki sifat sifat tersebut yang dikutip dari Diesl (2013) dan Kosan, dkk (2016).

2.5.1 Elemen *Clean*

Definisi 2.5.1.1

Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. Elemen r disebut *clean* jika r dapat dinyatakan sebagai $r = u + d$ dengan $u \in U(\mathrm{R})$ dan $d \in Id(R)$.

Contoh 2.5.1.2

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$, telah diketahui pada Contoh 2.4.1.2, $Id(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan dari Contoh 2.4.2.2 diperoleh $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$. Akan ditentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *clean*.

Akan ditentukan $r \in \mathbb{Z}_8$ sedemikian sehingga r adalah *clean* dengan membuat penjumlahan antara idempoten dengan unit dari $\mathbb{Z}_8$.

Tabel 2.5.1.1 Elemen *Clean* di $\mathbb{Z}_8$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$+$</td><td colspan="4">$U(\mathbb{Z}_8)$</td></tr>
<tr><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{3}$</td><td>$\bar{5}$</td><td>$\bar{7}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Id(\mathbb{Z}_8)$</td><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{3}$</td><td>$\bar{5}$</td><td>$\bar{7}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{2}$</td><td>$\bar{4}$</td><td>$\bar{6}$</td><td>$\bar{0}$</td></tr>
</table>

Berdasarkan Tabel 2.5.1.1, dapat ditentukan elemen-elemen *clean* di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$.

2.5.2 Ring *Clean*

Definisi 2.5.2.1

Misalkan R adalah suatu ring. Suatu ring dikatakan *clean* jika setiap elemennya merupakan elemen *clean*.

Contoh 2.5.2.2

Ring bilangan bulat modulo 8 dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah ring *clean*.

Berdasarkan Tabel 2.5.1.1, dapat dilihat bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_8$ bersifat *clean* sehingga $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring *clean*.

2.5.3 Elemen *Strongly Clean*

Definisi 2.5.3.1

Misalkan R adalah suatu ring dan $r \in R$. Elemen r disebut *strongly clean*, jika r adalah elemen clean, yaitu $r = u + d$ dengan $u \in U(R)$ dan $d \in Id(R)$ dan memenuhi $u \cdot d = d \cdot u$.

Contoh 2.5.3.2

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Setiap elemen $\mathbb{Z}_8$ adalah *strongly clean*.

Berdasarkan Contoh 2.5.2.1 telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_8, +,\cdot)$ adalah ring *clean*. Karena $(\mathbb{Z}_8, +,\cdot)$ adalah ring komutatif, maka berlaku setiap elemen *clean* adalah *strongly clean*.

Jadi, elemen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$ merupakan elemen *strongly clean*.

2.5.4 Elemen *Nil Clean*

Definisi 2.5.4.1

Misalkan R adalah ring dan $r \in R$. Suatu elemen r disebut *nil clean* jika r dapat dinyatakan sebagai bentuk dekomposisi $r = n + d$ dengan $n \in N(R)$ dan $d \in Id(R)$.

Contoh 2.5.4.2

Diberikan ring bilangan bulat modulo 8 dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Suatu elemen r di $\mathbb{Z}_8$ adalah elemen *nil clean*.

Akan ditunjukkan bahwa r di $\mathbb{Z}_8$ adalah elemen *nil clean*.

Pertama, membuat tabel penjumlahan antara $Id(\mathbb{Z}_8)$ dan $N(\mathbb{Z}_8)$.

Tabel 2.5.4.1 Elemen *Nil Clean* di $\mathbb{Z}_8$.

$+$		$N(\mathbb{Z}_8)$			
		$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$Id(\mathbb{Z}_8)$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$

Berdasarkan Tabel 2.5.4.1 dapat ditentukan elemen-elemen *nil clean* di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$.

Definisi 2.5.4.3

Misalkan R adalah ring dan $r \in R$. Elemen r disebut *nil clean* medium kiri jika r elemen *nil clean* dari R sehinggan et dan t komutatif.

2.5.5 Ring *Nil Clean*

Definisi 2.5.5.1

Misalkan R adalah suatu ring. Ring R dikatakan ring *nil clean* jika setiap elemennya merupakan elemen *nil clean*.

Contoh 2.5.5.2

Diberikan ring bilangan bulat modulo 8 dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian merupakan ring *nil clean*.

Berdasarkan Contoh 2.5.4.1, untuk setiap $r \in \mathbb{Z}_8$ bersifat *nil clean* sehingga $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ adalah ring *nil clean*.

2.6 Kajian Integrasi Sains dan Islam

Godaan dan tipuan setan itu memang halus. Perasaan lebih dari yang lain, yang telah membuat setan terusir dari surga, ditularkan kepada kita dalam berbagai bentuk. Ada yang membanggakan amalannya. Ada yang terus mengungkit jasa dan kontribusinya. Ketika jasanya seolah tidak diakuinya atau dilupakan, ia akan terus menyebut-nyebut jasanya itu agar orang lain tidak lupa mengakui atau bahkan membalasnya. Tidak jarang ia akan marah kalua orang lain seakan-akan melupakan betapa berjasanya ia kepada mereka.

Q.S Al-Baqarah ayat 264 menyebutkan hal ini:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ لَا تُبۡطِلُواْ صَدَقَٰتِكُم بِٱلۡمَنِّ وَٱلۡأَذَىٰ كَٱلَّذِي يُنفِقُ مَالَهُۥ رِئَآءَ ٱلنَّاسِ وَلَا يُؤۡمِنُ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ فَمَثَلُهُۥ كَمَثَلِ صَفۡوَانٍ عَلَيۡهِ تُرَابٞ فَأَصَابَهُۥ وَابِلٞ فَتَرَكَهُۥ صَلۡدٗا لَّا يَقۡدِرُونَ عَلَىٰ شَيۡءٖ مِّمَّا كَسَبُواْ وَٱللَّهُ لَا يَهۡدِي ٱلۡقَوۡمَ ٱلۡكَٰفِرِينَ

Artinya:

> “Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu menghilangkan (pahala) sedekahmu dengan menyebut-nyebutnya dan menyakiti (perasaan si penerima), seperti orang yang menafkahkan hartanya karena riya kepada manusia dan dia tidak beriman kepada Allah dan hari kemudian. Maka perumpamaan orang itu seperti batu licin yang di atasnya ada tanah, kemudian batu itu ditimpa hujan lebat, lalu menjadilah dia bersih (tidak bertanah). Mereka tidak menguasai sesuatupun dari apa yang mereka usahakan; dan Allah tidak memberi petunjuk kepada orang-orang yang kafir”.

Merujuk pada tafsir Ibn Katsir menyebutkan sejumlah riwayat bahwa mereka yang beramal dengan menyebut-nyebut amalannya itu termasuk satu dari golongan yang Allah engan memandang mereka kelak di Hari Akhir. Orang seperti itu menyangka orang lain memandang amalannya seperti memandang tanah di atas batu. Padahal bagi Allah amalan *riya* tersebut hilang tak berbekas seperti ditimpa hujan lebat.

Suatu elemen r di himpunan R, dimana R adalah suatu ring. Elemen r disebut nilpoten yaitu ada bilangan bulat positif "n", sehingga $r^n = 0$. Dalam Q.S Al-Baqarah ayat 264 ada himpunan seluruh manusia dan amalan manusia sebagai pangkat dari elemen-elemen manusia. Dari uraian di atas bahwa ada suatu amalan *riya* yang bila dikerjakan maka tidak dapat pahala. Elemen manusia disebut nilpoten bila ada amalan yang bila dikerjakan manusia akan tidak dapat pahala atau nol, yaitu amalan *riya*.

BAB III
PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang bagaimana sifat-sifat elemen *exchange* pada ring dan menjelaskan syarat cukup bagi elemen *nil clean* yang *exchange* pada ring.

3.1 Elemen *Exchange* pada Ring.

Pada subbab ini akan dijelaskan elemen *exchange* pada ring, yang meliputi definisi, dan karakterisasinya . Untuk semua ring diasumsikan ring asosiatif dengan elemen identitas dan $J(R)$ adalah Jacobson Radical pada ring R.

Definisi 3.1.1

Misalkan R adalah ring dan $a \in R$. Elemen a dikatakan *exchange* jika terdapat idempoten $e \in Rx$ sehingga $1 - e \in R(1 - x)$.

Proposisi 3.1.2

Misalkan R adalah ring, kondisi berikut saling ekuivalen untuk elemen $x \in R$.

1. Ada $e^2 = e \in R$ sehingga $e - x \in R(x - x^2)$.
2. Ada $e^2 = e \in Rx$ dan c $\in R$ sehingga $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.
3. Ada $e^2 = e \in Rx$ sehingga $R = Re + R(1 - x)$.
4. x adalah elemen *exchange*.

Bukti

(1 $\Rightarrow$ 2) Diketahui terdapat $e^2 = e \in R$ sehingga $e - x \in R(x - x^2)$

Akan ditunjukkan terdapat $e^2 = e \in Rx$ dan c $\in R$ sehingga $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.

Dari $e - x \in R(x - x^2)$ dapat dipilih $r \in R$ sehingga:

$$e - x = r(x - x^2)$$

$$e = r(x - x^2) + x$$

$$e = rx - rx^2 + x$$

$$e = rx + (1 - rx)x$$

$$e = (r + (1 - rx))x$$

Jadi terdapat $e \in Rx$, berdasarkan yang diketahui $e^2 = e$ sehingga $e^2 = e \in Rx$.

Selanjutnya

$$\begin{aligned} e - x &= r(x - x^2) \\ \Leftrightarrow \quad e - x + 1 &= r(x - x^2) + 1 \\ \Leftrightarrow \quad 1 - e &= 1 - x - r(x - x^2) \\ \Leftrightarrow \quad 1 - e &= 1 - x - rx + rx^2 \\ \Leftrightarrow \quad 1 - e &= (1 - rx)(1 - x) \end{aligned}$$

Misalkan $c = 1 - rx$, maka diperoleh

$$1 - e - c(1 - x) = 0$$

Karena 0 anggota sebarang ideal dari maka $0 \in J(R)$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Diketahui terdapat $e^2 = e \in Rx$ dan $c \in R$ sehingga $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$. Akan ditunjukkan terdapat $e^2 = e \in Rx$ sedemikian sehingga $R = Re + R(1 - x)$.

Diketahui bahwa sifat dari $e^2 = e \in Rx$. Selanjutnya, $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$ maka

$$1-((1-e)-c(1-x)) = 1-1+e+c-cx$$
$$= e + c(1-x)$$

adalah unit. Karena $e \in Re$ dan $c(1-x) \in R(1-x)$ maka $e + c(1-x) \in Re + R(1-x)$, akibatnya $R = Re + R(1-x)$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Diketahui terdapat $e^2 = e \in Rx$ dan $R = Re + R(1-x)$, akan ditunjukkan terdapat $e^2 = e \in Rx$ sedemikian sehingga $1 - e \in R(1-x)$.

Selanjutnya, misalkan $1 = te + s(1-x)$ dan didefinisikan $f = e + (1-e)te$, untuk $t^2 = 0$ dan untuk $s \in R$. Pertama akan ditunjukkan bahwa f adalah elemen idempoten.

$$\begin{aligned}
f^2 &= (e + (1-e)te)^2 \\
&= (e + (1-e)te)(e + (1-e)te) \\
&= (e^2 + e(1-e)te + (1-e)te^2 + \left((1-e)te\right)^2 \\
&= e + (e - e^2)te + (1-e)te + (1-e)^2t^2e^2 \\
&= e + (e-e)te + (1-e)te + 0 \\
&= e + 0 + (1-e)te \\
&= e + (1-e)te \\
&= f
\end{aligned}$$

Jadi f adalah elemen idempoten. Selanjutnya akan ditunjukkan $1 - f \in R(1-x)$

$$\begin{aligned}
1 - f &= te + s(1-x) - (e + (1-e)te) \\
&= te + s(1-x) - e - \left((1-e)te\right) \\
&= te + s(1-x) - te - e + ete
\end{aligned}$$

$$= s(1-x) - \mathrm{e}(1-\mathrm{te})$$

$$= s(1-x) - e\Big(\big(te + s(1-x)\big) - te\Big)$$

$$= s(1-x) - \mathrm{es}(1-\mathrm{x})$$

$$= (1-e)s(1-x) \in R(1-x)$$

Jadi terdapat $f^2 = f \in Rx$ sehingga $1 - f \in R(1-x)$.

$(4 \Rightarrow 1)$ Diketahui terdapat $e^2 = e \in Rx$ dan $1 - e \in R(1-x)$. Akan ditunjukkan ada $e^2 = e \in R$ sedemikian sehingga $e - x \in R(x - x^2)$.

Karena $e \in Rx$ dan $1 - e \in R(1-x)$ maka terdapat $r, s \in R$ sehingga

$$e - x = e(1-x) - (1-e)x$$

$$= rx(1-x) - \big(s(1-x)\big)x$$

$$= r(x - x^2) - s(x - x^2)$$

$$= (r-s)(x-x^2)$$

Maka $e - x \in R(x - x^2)$. Jadi terbukti bahwa terdapat $e^2 = e \in Rx$ sehingga $e - x \in R(x - x^2)$.

3.2 Elemen *Nil Clean* yang *Exchange*

Setelah sifat elemen *exchange* selanjutnya akan diberikan teorema yang menjelaskan elemen *nil clean* yang memiliki sifat *exchange* yang dikutip dari Calugareanu (2019).

Teorema 3.2.1

Misalkan R adalah ring dan a adalah elemen *nil clean* di ring R. Jika $t^2 = 0$ maka a adalah elemen *exchange*.

Bukti

Diberikan $a = e + t$ dimana $e^2 = e$, $t^2 = 0$, $e \in Id(R)$ dan $t \in N(R)$.

Misalkan $f = e + et\bar{e}$ dan $\bar{e} = 1 - e$, pertama akan ditunjukkan bahwa f adalah elemen idempoten. Perhatikan

$$\begin{aligned}
f^2 &= (e + et\bar{e})^2 \\
&= (e + et\bar{e})(e + et\bar{e}) \\
&= e^2 + eet\bar{e} + et\bar{e}e + (et\bar{e})^2 \\
&= e^2 + et\bar{e} + et\bar{e}e + (e^2t^2\bar{e}^2) \\
&= e^2 + et\bar{e} + et\bar{e}e + 0 \\
&= e^2 + et\bar{e} + et(1 - e)e \\
&= e^2 + et\bar{e} + et(e - e^2) \\
&= e^2 + et\bar{e} + et(e - e) \\
&= e^2 + et\bar{e} + et(0) \\
&= e^2 + et\bar{e} \\
&= e + et\bar{e} \\
&= f
\end{aligned}$$

Selanjutnya setelah terbukti bahwa f adalah elemen idempoten. Akan ditunjukkan bawah $f \in Ra$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
f &= e + et\bar{e} \\
&= e + et(1 - e) \\
&= e + et - ete \\
&= e^2 + et - ete
\end{aligned}$$

$$= e(e+t) - et(a-t)$$

$$= ea - eta + ett$$

$$= ea - eta + 0$$

$$= ea - eta$$

$$= (e - et)a \in Ra$$

Karena sudah terbukti bahwa $f \in Ra$ selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $Rf + R(1-a) = R$. Perhatikan

$$e - f = e - (ea - eta)$$

$$= e - ea + eta$$

$$= e - e(e+t) + eta$$

$$= e - ee - et + eta$$

$$= e - e - et + eta$$

$$= -et + eta$$

$$= -et(1-a) \in R(1-a).$$

Diperoleh

$$1 - t - f = 1 - (a - e) - f$$

$$= (1-a) + (e-f) \in R(1-a).$$

Jadi $1 - t \in Rf + R(1-a)$. Karena $1 - t \in Rf + R(1-a)$ dan $f \in Ra$, jadi terbukti bahwa a adalah elemen yang *exchange*.

Teorema 3.2.1 menyatakan bahwa elemen *nil clean* dengan nilpoten berindeks 2 adalah elemen *exchange*. Tetapi hal ini tidak untuk elemen *nil clean* dengan indeks lebih dari 2. Selanjutnya akan dibahas suatu kelas elemen *nil clean* dengan sebarang nilpoten yang merupakan elemen *exchange*.

Teorema 3.2.2

Misalkan R adalah ring. Setiap elemen *nil clean medium* kiri dari R adalah *exchange*.

Bukti

Misalkan $a \in R$ adalah elemen *medium nil clean* kiri artinya $a = e + t$ dengan $e^2 = e$ dan $t^n = 0$,untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ dan et komutatif dengan t. Perhatikan $1 + t$ adalah unipoten, dan $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1}$.

Misalkan

$$f = e + e[1 - (1+t)^{-1}]\bar{e}$$
$$= e + e[1 - (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1})]\bar{e}$$
$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e}$$

untuk lebih mudahnya dimisalkan

$$x = e[t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1}] = e[-1 + t - (1+t)^{-1}]$$

Selanjutnya permisalan x tersebut disubstitusikan dengan persamaan $y = et - x$ sehingga didapatkan.

$$y = et - x$$
$$= et - e[t^2 - t^3 \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1}]$$
$$= e[t - t^2 - t^3 \ldots + (-1)^n t^{n-1}]$$

$$= e[1-(1+t)^{-1}]$$

Maka didapatkan $f = e + y\bar{e}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f adalah idempoten. Perhatikan

$$f^2 = (e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})^2$$

$$= (e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})(e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})$$

$$= e^2 + e^2[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e}e + (e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}](1-e)e + (e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}](e-e) + (e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0 + ([et - et^2 + et^3 - \cdots + e(-1)^n t^{n-1}]^2\bar{e})^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0 + ([te - t^2e + t^3e - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e})^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0 + ([t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\mathrm{e}\bar{e})^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0 + ([t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\mathrm{e}(1-e))^2$$

$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0$$
$$+ ([t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}](e - e^2))^2$$
$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0$$
$$+ ([t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}](e - e))^2$$
$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e} + 0 + 0$$
$$= e + e[t - t^2 + t^3 - \cdots + (-1)^n t^{n-1}]\bar{e}$$
$$= f$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $f \in Ra$

$$f = e + y\bar{e}$$
$$= e + y(1 - e)$$
$$= e + y - ye$$
$$= e + y - y(a - t)$$
$$= e + y - ya + yt$$
$$= e + y + yt - ya$$
$$= e + y(1 + t) - ya$$
$$= e + (e[1 - (1 + t)^{-1}](1 + t)) - ya$$
$$= e\left(1 + \left([1 - (1 + t)^{-1}](1 + t)\right)\right) - ya$$
$$= e(1 + 1 + t - 1) - ya$$
$$= e(1 + t) - ya$$
$$= (e + et) - ya$$
$$= e(e + t) - ya$$
$$= ea - ya$$
$$= (e - y)a \in Ra$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
-y(1-a) &= -y(1-(e+t) \\
&= -y(1-e-t) \\
&= -y+ye+yt \\
&= y(e+t)-y \\
&= ya-y \\
&= ya-(et-x) \\
&= ya-et+x \\
&= ya+e-e-et+x \\
&= ya+e-e(e+t)+x \\
&= ya+e-ea+x \\
&= ya+e(1-a)+x \\
&= (et-x)a+e(1-a)+x \\
&= eta-xa+e(1-a)+x \\
&= \ eta+x(1-a)+e(1-a) \\
&= e(a-e)a+x(1-a)+e(1-a) \\
&= -(-ea+e)a+x(1-a)+e(1-a) \\
&= -e(-a+1)a+x(1-a)+e(1-a) \\
&= -e(-a^2+a)+x(1-a)+e(1-a) \\
&= -ea(-a+1)+x(1-a)+e(1-a) \in R(1-a) \\
&= -ea(1-a)+x(1-a)+e(1-a) \in R(1-a)
\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$1 - t + x - f = 1 - (a - e) + x - f$$
$$= (1 - a) + (e + x - f) \in R(1 - a)$$

Jadi $1 - t + x \in Rf + R(1 - a)$

Selanjutnya karena et dan t komutatif maka $-t + x$ adalah nilpotent dan $1 - t + x$ adalah unit. Oleh karena itu $Rf + R(1 - a) = R$

Jadi setiap elemen *nil-clean* medium kiri adalah *exchange*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan:

1. Berikut ini merupakan beberapa karakteristik elemen x yang *exchange* di ring R yaitu:
   a. Ada $e^2 = e \in R$ sehingga $e - x \in R(x - x^2)$.
   b. Ada $e^2 = e \in Rx$ dan c $\in R$ sedemikian sehingga $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.
   c. Ada $e^2 = e \in Rx$ sedemikian sehingga $R = Re + R(1 - x)$.
2. Syarat cukup bagi elemen *nil clean* merupakan elemen yang *exchange* adalah medium kiri.

4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas tentang sifat-sifat elemen exchange dan elemen *nil clean* yang *exchange* tetapi penulis tidak membahas tentang elemen *strongly nil clean* yang *exchange*. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji elemen *strongly nil clean* yang *exchange*.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. 2014. *Ring Field dan Daerah Integral*. Universitas Brawijaya Press. Malang.

Andari, A. 2015. *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press. Malang

Ayres, Frank dan Jaisingh, Lloyd R. 2004. *Schaun's Outline of Theory and Problems of Abstract Algebra Second Edition*. New York: McGraw-Hill Companes, inc.

Bhattacharya, P.B., dkk. 1995. *Basic Abtract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Clark, W. Edwin. 1998. *Elementary Abstract Algebra*. Florida: University of Miami.

Corner, A.L.S.1973. On the Exchange Property in Additive Categories. Unpublished. Worchester College.

Danchev, P & Ster, J. 2014. Genaralizing π- Reguler Rings. Taiwanese Journal Of Mathematics.

Diesl, A.J. 2013 Nil Clean Rings. Journal Of Algebra. 383.197-211

Gilbert & Gilbert, 2009. Elements of Modern Algebra. United States of America

Grigore, C. 2019. A New Class of Nil-Clean Elements which are Exchange. Beitr Algebra Geom.

Kosan, T, dkk. 2016 Nil Clean and Strongly Nil Clean Rings. Journal of Pure and Applied Algebra.

Nicholson, W.K.: Lifting idempotents and exchange rings. Trans. Am. Math. Soc. 229, 269–278 (1977).

Nicholson, W.K & Zhou, Y. 2005. Clean General Rings. *Journal of Algebra*.

Pugu W. P., dkk. 2014. Dari Radikal Ring ke Radikal Modul Prosiding Seminar Nasional Matematika. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta, Indonesia.

Raisinghania dan Anggarwal. 1980. *Modern Algebra. Ram Nagar*, New Delhi: S. Chand and Company LTD.

RIWAYAT HIDUP

Akhmad Haidar A'fwandi lahir di Kota Pasuruan pada tanggal 22 Agustus 1997. Memiliki nama panggilan Haidar. Beralamat Jalan Sultan Agung II no. 21 RT/RW 06/05 Kel. Purutrejo Kec. Purworejo Kota Pasuruan. Merupakan anak ketiga dari Bapak Achmad As'ari dan Ibu Sumiati.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu TK Pertiwi IV lulus pada tahun 2004. Kemudian melanjutkan di SDN Krampyangan lulus pada tahun 2010. Selanjutnya menempuh pendidikan di SMPN 3 Kota Pasuruan lulus pada tahun 2013. Melanjutkan studinya ke SMAN 1 Kota Pasuruan lulus pada tahun 2016.

Pada tahun 2016 melanjutkan studi ke jenjang strata 1 di Universitas Islam Negeri Mualana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Selama di kampus turut aktif dalam HMJ Integral Metematika dan UKM UNIOR. Mengabdi di Ma'had Sunan Ampel Al-Aly sebagai musyrif selama 4 tahun. Prestasi yang pernah diraih selama di kampus yaitu juara 1 lomba bulutangkis setingkat fakultas Sains dan Teknologi pada tahun 2018

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAUALANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Akhmad Haidar A'fwandi
NIM : 16610091
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Kelas Elemen *Nil Clean* yang *Exchange*
Pembimbing I : Dewi Ismiarti, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	20 April 2020	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	1.
2	27 Mei 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan pada Bab I dan Bab II	2.
3	15 Juni 2020	Revisi Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	3.
4	1 Juli 2020	ACC Bab I, Bab II, Bab III dan Bab IV	4.
5	22 Agustus 2020	Konsultasi Bab I, Bab IV dan Bab V	5.
6	20 Oktober 2020	Revisi Bab I, Bab IV dan Bab V	6.
7	12 November 2020	ACC Bab I, Bab IV dan Bab V	7.
8	17 November 2020	Konsultasi Keseluruhan	8.
9	1 Desember 2020	Revisi Keseluruhan	9.
10	4 Desember 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 31 Desember 2020

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001