INDEKS SCHULTZ DAN INDEKS GUTMAN PADA GRAF ANNIHILATOR DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$

SKRIPSI

OLEH
ELOK IZZATUL MARDHIYAH
NIM. 16610022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

INDEKS SCHULTZ DAN INDEKS GUTMAN PADA GRAF ANNIHILATOR DARI RING RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH
ELOK IZZATUL MARDHIYAH
NIM. 16610022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

INDEKS SCHULTZ DAN INDEKS GUTMAN PADA GRAF ANNIHILATOR DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$

SKRIPSI

OLEH
ELOK IZZATUL MARDHIYAH
NIM. 16610022

Telah Dipersiapkan dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Juni 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Dewi Ismiarti, M.Si
NIPT. 19870218 20160801 1 056	NIPT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 100312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

INDEKS SCHULTZ DAN INDEKS GUTMAN PADA GRAF ANNIHILATOR DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $2p$

SKRIPSI

OLEH
ELOK IZZATUL MARDHIYAH
NIM. 16610022

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima
sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana
Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 Juni 2020

Penguji Utama	: Intan Nisfulaila, M.Si	.....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	.....
Sekertaris Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	.....
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Elok Izzatul Mardhiyah

NIM : 16610022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Schultz dan Indeks Gutman pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$.

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila kemudian terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2020
Yang membuat pernyataan

Elok Izzatul Mardhiyah
NIM. 16610022

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

"Adab dan Akhlaq Sebelum Ilmu"

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Abdul Kholiq dan Ibunda Rosyidah yang dengan ikhlas selalu mendo'akan, memberi dukungan fisik dan psikis untuk keberhasilan anak keduanya ini. Pengorbanan keduanya yang tak ternilai dengan apapun. Serta kepada kakak Muhammad Charis Muhyiddin dan seluruh keluarga besar yang selalu mendukung.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Indeks Schultz dan Indeks Gutman pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan gelap gulita menuju jalan terang benderang yaitu agama Islam.

Pada penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan, ilmu, dan motivasi kepada penulis.
6. Segenap dosen jurusan matematika yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
7. Ibu, ayah, serta kakak tersayang yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Ibu Nyai H. Siti Nurul Aminah, selaku Pengasuh Pondok Pesantren Darul Ulum Alfadholi yang senantiasa memberikan do'a, serta teman-teman pondok yang selalu memberikan semangat dan motivasinya.
9. Seluruh keluarga dan teman-teman yang selalu mendukung kuliah penulis sampai selesai.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016, khususnya yaitu Dwi, Fira, Saidah, Maknun, This, Kiki, Qoqo, Rohamah yang selalu memberikan semangat dan motivasi untuk terus bangkit pantang menyerah untuk menggapai cita-cita.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 Juni 2020

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR ..... **viii**

DAFTAR ISI ..... **x**

DAFTAR GAMBAR ..... **xii**

DAFTAR TABEL ..... **xiii**

ABSTRAK ..... **xiv**

ABSTRACT ..... **xv**

مخلص ..... **xvi**

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan 4
1.4 Manfaat 5
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup 8
2.2 Ring 9
2.2.1 Ring Komutatif dengan Elemen Kesatuan 9
2.2.2 Ring dengan Pembagi Nol 10
2.3 Relasi Ekivalen 10
2.4 Kongruensi 11
2.5 Ring Bilangan Bulat Modulo *n* 13
2.6 Graf 15
2.6.1 *Adjacent* dan *Incident* 16
2.6.2 Derajat 17
2.6.3 Jarak 18
2.7 Graf Annihilator 18

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.8 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ 19
2.8.1 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 4 20
2.8.2 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 6 21
2.8.3 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 10 22
2.8.4 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 14 23
2.8.5 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 22 26
2.9 Indeks Schultz dan Indeks Gutman 31
2.10 Pentingnya Silaturrahmi dalam Al-Qur'an 34

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Indeks Schultz pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ 38
3.2 Indeks Gutman pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ 39

BAB IV PENUTUP
4.1 Indeks Schultz pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ 41
4.2 Indeks Schultz pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ 41

DAFTAR PUSTKA **42**

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Contoh Graf	16
Gambar 2.2	Graf Berderajat	17
Gambar 2.3	Graf Annihilator $\mathbb{Z}_6$	21
Gambar 2.4	Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{10}$	22
Gambar 2.5	Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{14}$	24
Gambar 2.6	Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{22}$	31

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_4$ 19

Tabel 2.2 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_6$ 20

Tabel 2.3 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_{10}$ 21

Tabel 2.4 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_{14}$ 23

Tabel 2.5 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_{22}$ 26

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Mardhiyah, Elok Izzatul. 2020. **Indeks Schultz dan Indeks Gutman pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si (II) Dewi Ismiarti, M. Si.

Kata kunci: Graf Annihilator, Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$, Indeks Schultz, Indeks Gutman

Misalkan G adalah graf terhubung. Himpunan simpul dan sisi pada G dilambangkan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Indeks Schultz dari G didefinisikan sebagai

$$Schultz(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) + deg(v)\big)\, d(u,v)$$

dimana $deg(u)$ adalah derajat dari u dan $d(u,v)$ adalah jarak dari u dan v. Sedangkan indeks Gutman dari G didefinisikan sebagai

$$Gutman(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) \cdot deg(v)\big)\, d(u,v).$$

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus indeks Schultz dan indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima untuk $p > 2$. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Indeks Schultz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima untuk $p > 2$ adalah
$$Schultz\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 3p^2 - 7p + 4.$$
2. Indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima untuk $p > 2$ adalah
$$Gutman\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 2p^2 - 5p + 3.$$

Pembahasan mengenai graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima untuk $p > 2$ ini masih terbuka bagi peneliti untuk mengadakan penelitian yang sejenis dengan menggunakan indeks yang berbeda, misal indeks Randic, indeks Zagreb, dan lain sebagainya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Mardhiyah, Elok Izzatul. 2020. **On The Schultz and Gutman Indices of Annihilator Graph of The Ring of Integers Modulo $2p$**. Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: Annihilator Graph, The Ring of Integers Modulo $2p$, Schultz Index, Gutman Index.

Let G be a connected graph. The set of vertices and edges of G is denoted by $V(G)$ and $E(G)$. The Schultz index of G is defined as

$$Schultz(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) + deg(v)\big)\, d(u,v)$$

where $deg(u)$ is the degree and of u and $d(u,v)$ is the distance from u to v. While Gutman index of G is defined as

$$Gutman(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) \cdot deg(v)\big)\, d(u,v).$$

This study aims to determine the Schultz and Gutman indices of annihilator graphs of the ring of integer modulo $2p$, for any prime p for $p > 2$. The results of this study are as follows:

1. The Schultz index of annihilator graphs of the ring of integer modulo $2p$ with p prime for $p > 2$ is
$$Schultz\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 3p^2 - 7p + 4.$$
2. The Gutman index of annihilator graphs of the ring of integer modulo $2p$ with p prime for $p > 2$ is
$$Gutman\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 2p^2 - 5p + 3.$$

The discussion of annihilator graphs of the ring of integer modulo $2p$ with p prime for $p > 2$ still open for researchers to conduct similar studies using different indices, for example Randic index, Zagreb index, and other indices.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

مخلص

المرضية، ايلؤ عزة. ٢٠٢٠. Schultz index و Gutman index على مخطط مبيد الأركان من الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$.البحث العلمي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجية، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: ١) محمد نا فع جوهاري الماجستير. ٢) دوي إسميرتي الماجستير.

الكالمات الرئيسية: مخطط مبيد الأركان، الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$، Schultz index، Gutman index.

مثل G رسم بيان متصل. يشار الى مجموعة النقاط والجوانب على G بالرمز $V(G)$ و $E(G)$. Schultz index من G يعرف بأنه

$$Schultz(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) + deg(v)\big)\, d(u,v)$$

مع $deg(u)$ درجة من نقطة u على الرسم البيانى و $d(u,v)$ أقصر من u و v. بينما Gutman index من G يعرف بأنه

$$Gutman(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) \cdot deg(v)\big)\, d(u,v).$$

. تهدف هذه الدراسة لمعرفة العلاقة بين مخطط مبيد الأركان من الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$ مع مخطط النجوم S_{p-1} وتحديد Schultz index و Gutman index على مخطط مبيد الأركان من الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$ مع p الأعداد الأولية. نتائج هذه الدراسة هي كما ياي:

١. على سبيل الميثال Schultz index على مخطط مبيد الأركان من الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$ مع p الأعداد الأولية، ثم

$$Schultz\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 3p^2 - 7p + 4.$$

٢. على سبيل الميثال Gutman index على مخطط مبيد الأركان من الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$ مع p الأعداد الأولية، ثم

$$Gutman\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 2p^2 - 5p + 3.$$

مناقشة على مخطط مبيد الأركان من الساحة أعداد صحيحة modulo $2p$، مفتوحا للباحثين لإجرأ دراسات مما ثلة بإستخدام العديد من index، على سبيل الميثال Randic index, Zagreb index وهكذادواليك.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat berbagai bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus, serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007). Allah berfirman dalam Al Qur'an surat Al Qamar / 54 ayat 49 yang artinya

"*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*"(Q.S. Al-Qamar / 54: 49).

Berdasarkan bahasa yang digunakan pada terjemahan tersebut, kata ukuran dapat berarti kadar atau acuan dalam menetapkan sesuatu. Ayat tersebut membahas tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa atau ketentuan Allah dalam menetapkan segala sesuatu. Misalnya manusia, telah ada kadar yang ditetapkan Allah baginya. Jodoh, maut, dan segala sesuatu yang pasti akan dialami oleh semua manusia.

Cabang dari ilmu matematika yang banyak dikembangkan untuk dipelajari adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konisberg, Rusia dalam sekali waktu. Masalah jembatan Konisberg tersebut dapat dinyatakan dalam graf yang menentukan keempat daerah tersebut sebagai simpul, dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sesuai (Eka & Rahadjeng).

Teori graf sangat bermanfaat untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata, yaitu dengan merepresentasikannya dalam bentuk graf. Beberapa contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat direpresentasikan dalam bentuk graf adalah masalah penjadwalan, penggambaran struktur organisasi, dan penggambaran struktur kimia (Permana & Darmaji, 2012).

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan $V(G)$ dan $E(G)$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut simpul, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari simpul-simpul berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir dkk, 2009). Sisi yang hanya terhubung langsung dengan satu simpul ujung disebut *loop*. Dua sisi berbeda yang menghubungkan simpul yang sama disebut sisi pararel. Dua simpul dikatakan terhubung langsung (*adjacent*) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya. Simpul yang tidak mempunyai sisi yang terhubung dengannya disebut simpul terasing. Graf yang tidak mempunyai simpul disebut graf kosong (Siang, 2002).

Teori graf memiliki keterkaitan dengan indeks topologi dalam bidang kimia. Indeks topologi adalah nilai numerik yang terkait dengan ikatan dalam kimia yang menyatakan korelasi struktur kimia dengan berbagai sifat fisik, reaktivitas kimia, atau aktivitas biologis. Basis numerik untuk indeks topologi disediakan (tergantung pada bagaimana graf molekul dikonversi menjadi nilai numerik) oleh matriks jarak topologi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jarak topologi antara dua simpul yang berbeda adalah banyaknya sisi dari jarak terpendek antara kedua simpul (F. Hassani dkk, 2013). Misalkan G adalah sebuah graf dimana himpunan simpul dan sisi pada G dilambangkan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Derajat dari simpul $u \in V(G)$ adalah banyaknya simpul yang terhubung langsung dengan u. Jarak merupakan konsep penting dalam teori graf dan memiliki aplikasi untuk ilmu komputer, kimia, dan berbagai bidang lainnya.

Indeks topologi molekuler (Indeks Schultz) diperkenalkan oleh Harry Schultz pada tahun 1989. Indeks Schultz didefinisikan sebagai berikut:

$$Schultz(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \big(deg(u) + deg(v)\big)\, d(u,v).$$

Klavzar dan Gutman (1997) mendefinisikan indeks Schultz yang telah diubah menjadi bentuk kedua sebagai berikut:

$$Gutman(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \big(deg(u) \cdot deg(v)\big)\, d(u,v).$$

Kajian struktur aljabar dalam bentuk graf menjadi salah satu alternatif yang ditawarkan untuk mempermudah pemahaman struktur aljabar yang sebelumnya dipandang sebagai kajian teoritis. Berdasarkan perkembangannya, graf sebagai sebuah diagram yang terdiri dari himpunan simpul dan sisi serta semigrup yang merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner dan memenuhi sifat tertutup dan asosiatif, dapat dikaji sebagai suatu kesatuan.

Berawal dari konsep ring komutatif yang diaplikasikan dalam graf, Beck dalam jurnalnya *"Coloring of commutative ring"* pada tahun 1988 memperkenalkan ranah ring komutatif dalam bentuk graf pembagi nol. Graf pembagi nol $\Gamma(R)$ sebagai graf sederhana yang himpunan simpulnya berasal dari

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

elemen dalam ring komutatif R dan untuk setiap simpul yang berbeda misalnya x dan y terhubung langsung oleh suatu sisi atau bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ (Patty, 2016).

Badawi (2014) mendefinisikan terkait graf pembagi nol dari suatu ring komutatif, salah satunya adalah graf annihilator dari ring R yang dinotasikan dengan $AG(R)$. Himpunan simpul pada graf ini adalah $Z(R)$ dan dua simpul berbeda x dan y bertetangga (terhubung langsung) jika dan hanya jika

$$ann(x) \cup ann(y) \neq ann(xy).$$

Wicaksono (2013) dalam tulisannya menjelaskan tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari ring komutatif dengan elemen kesatuan. Hasil dari penelitiannya hanya berupa konstruksi graf dari himpunan pembagi nol pada ring komutatif dengan elemen kesatuan.

Berkaitan dengan penelitian yang dilakukan sebelumnya, penulis akan melakukan penelitian yang berjudul "Indeks Schultz dan indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana rumus indeks Schultz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$?
2. Bagaimana rumus indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$?

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui rumus indeks Schultz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$.
2. Untuk mengetahui rumus indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

1.4 Manfaat

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi mengenai graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$. Setelah itu, dapat dicari rumus indeks Schultz dan indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah penulis hanya menggunakan $p > 2$ dimana p bilangan prima.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan teori serta informasi yang berhubungan dengan penelitian yang berupa buku dan artikel ilmiah.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan semua elemen dari ring $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$ menggunakan tabel perkalian.
2. Menentukan annihilator dari setiap elemen himpunan ring $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Menentukan simpul yang terhubung langsung pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.
4. Menggambar graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.
5. Menentukan derajat setiap simpul pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.
6. Menentukan jarak antara dua simpul yang berbeda pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}$.
7. Membuat lemma terkait graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dimana p prima, meliputi:
   a. Himpunan simpul dari graf annihilator.
   b. Keterhubungan simpul pada graf annihilator.
   c. Derajat simpul pada graf annihilator.
8. Membuat rumus indeks Schultz dan indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dimana p prima.
9. Membuktikan rumus indeks Schultz dan indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dimana p prima.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini mudah dipahami secara keseluruhan, maka digunakan sistematika penulisan yang dibagi menjadi empat bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang kajian teori yang digunakan dalam penelitian, yaitu meliputi kajian teori graf dalam Al-qur'an, konsep dasar terkait grup, ring, ring komutatif, ring komutatif dengan elemen kesatuan, ring dengan pembagi nol, definisi graf, graf annihilator, indeks Schultz, dan indeks Gutman.

BAB III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan hasil penelitian tentang indeks Schultz dan Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

BAB IV Penutup

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran untuk pembaca.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup

Grup merupakan struktur dasar dalam mempelajari aljabar abstrak yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan satu operasi biner.

Definisi 2.1.1

Misalkan $(G, *)$ adalah grup maka harus memenuhi empat aksioma yaitu tertutup, memenuhi hukum asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemnnya mempunyai invers (Raisinghania, 1980)

Contoh 2.1.1

Misalkan $(Z,*)$ adalah grup, maka harus memenuhi aksioma berikut:

a. Tertutup, untuk setiap $a, b \in Z$ berlaku $a * b \in Z$.

b. Asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in Z$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.

c. Identitas, terdapat suatu elemen $e \in Z$ sedemikian sehingga untuk semua $a \in Z$ berlaku $a * e = a = e * a$. Elemen e dinamakan unsur identitas di Z.

d. Invers, untuk setiap $a \in Z$ terdapat elemen $a^{-1} \in Z$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Elemen a^{-1} dinamakan invers dari unsur a

Definisi 2.1.2

Suatu grup G dengan operasi $*$ dinamakan grup abelian atau komutatif bila untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Subiono, 2016).

Contoh 2.1.2

Grup $(Z,*)$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan $a * b = a + b - 3$, untuk setiap $a, b \in Z$ adalah grup abelian atau komutatif karena operasi $*$ bersifat komutatif di Z

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a * b = a + b - 3$$
$$= b + a - 3$$
$$= b * a.$$

2.2 Ring

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mengetahui tentang grup yaitu suatu struktur aljabar yang terdiri atas himpunan tak kosong dengan satu operasi biner. Pada pembahasan kali ini akan dikenalkan suatu struktur aljabar dari pengembangan grup yaitu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner atau yang dikenal dengan nama ring.

Definisi 2.2.1

Ring $(R, +, \bullet)$ adalah himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner serta memenuhi aksioma berikut:

1. $(R, +)$ merupakan grup abelian
2. $(R, \bullet)$ memenuhi sifat asosiatif
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

   $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$ (distributif kiri).

   $(b + c) \bullet a = (b \bullet a) + (c \bullet a)$ (distributif kanan) (Fraleigh, 1989).

2.2.1 Ring Komutatif dengan Elemen Kesatuan

Definisi 2.2.1.1

Suatu ring yang bersifat komutatif terhadap operasi perkalian disebut ring komutatif. Suatu ring R dengan suatu identitas perkalian 1 sedemikian sehingga $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ untuk semua $x \in R$, disebut ring dengan elemen kesatuan (Fraleigh, 1993).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.2.1.1

Jika R adalah suatu ring dengan elemen kesatuan, maka elemen kesatuan 1 merupakan satu-satunya identitas perkalian (Fraleigh, 1993).

Bukti:

Diberikan 1 dan $1'$ keduanya merupakan identitas perkalian didalam gelanggang R. Dengan mengambil 1 sebagai identitas diperoleh:

$$(1)\ (1') = 1'.$$

Demikian pula dengan mengambil $1'$ sebagai identitas diperoleh:

$$(1)\ (1') = 1.$$

Sehingga diperoleh $1 = 1'$.

2.2.2 Pembagi Nol

Definisi 2.2.2.1

Suatu elemen x dari ring R disebut pembagi nol jika terdapat $y \in R, y \neq 0$ sedemikian sehingga

$$xy = 0 \text{ atau } yx = 0.$$

Elemen 0 merupakan pembagi nol dari suatu ring. Misalnya pada ring bilangan bulat, tidak ada pembagi nol kecuali 0 itu sendiri. Himpunan pembagi nol dari ring komutatif R dinotasikan dengan $Z(R)$ (Joshi, 1989).

2.3 Relasi Ekivalen

Terdapat berbagai simbol yang digunakan untuk mendefinisikan relasi ekivalen, diantaranya $\cong, \equiv, \approx, \asymp, \simeq, \sim$ dan sebagainya. Simbol yang akan digunakan terkait relasi ekivalen secara umum kali ini adalah $\equiv$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.3.1

Relasi ekivalen $\equiv$ pada himpunan S adalah relasi yang memenuhi

Reflektif, untuk setiap $x \in S$, berlaku $x \equiv x$

Simetris, untuk setiap $x, y \in S$, berlaku $x \equiv y$ mengakibatkan $y \equiv x$

Transitif, untuk setiap $x, y, z \in S$, berlaku $x \equiv y$ dan $y \equiv z$ mengakibatkan $x \equiv z$ (Joyce, 2017).

Definisi 2.3.2

(Kelas ekivalen). Diberikan relasi ekivalen pada suatu himpunan S, kelas ekivalen yang memuat elemen $x \in S$ dilambangkan dengan $[x]$, adalah himpunan semua elemen yang berelasi dengan x,

$$[x] = \{y \in S | y \equiv x\}.$$

2.4 Kongruensi

Definisi 2.4.1

Misalkan a, b bilangan bulat dan m suatu bilangan positif, maka a kongruen dengan b modulo m, ditulis $a \equiv b(mod\ m)$ bila m membagi $(a - b)$. Jika m tidak membagi $(a - b)$ maka dikatakan a tidak kongruen dengan b modulo m, atau $a \not\equiv b(mod\ m)$ (Muhsetyo, 1997). Misalkan $0 \leq r < m$ maka $a \equiv r(mod\ m)$ dapat dituliskan $r = a\ mod\ m$.

Contoh 2.4.1

$18 \equiv 2(mod\ 4)$ karena 4 membagi habis $18 - 2$.

$19 \not\equiv 5(mod\ 6)$ karena 6 tidak membagi habis $19 - 5$.

Teorema 2.4.1

Kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ m)$ dimana $a, b, m \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ dan $m > 1$ dapat diselesaikan hanya jika $d = (a, m)$ membagi b, dan pada kasus ini memiliki d

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

selesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi memiliki satu selesaian (Irawan dkk, 2014).

Teorema 2.4.2

Relasi kongruensi modulo $m > 1$ adalah relasi ekivalen di $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Misalkan $m > 1$, dan x, y, z di $\mathbb{Z}$.

1. Reflektif: $x - x = (m)(0)$ maka $x \equiv x(mod\ n)$.
2. Simetris: $x \equiv y(mod\ n) \Rightarrow x - x = mq$ untuk $q \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow x - x = m(-q)$ dan $-q \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow y \equiv x(mod\ n)$.
3. Transitif: $x \equiv y(mod\ n)$ dan $y \equiv z(mod\ n)$

   $\Rightarrow x - y = mq$ dan $y - z = mk$ dan $q, k \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow x - z = x - y + y - z$

   $= m(q + k)$

   $\Rightarrow x \equiv z(mod\ n)$.

Jadi, relasi kongruensi adalah relasi ekivalen (Joyce, 2017).

Misalkan $m \in \mathbb{Z}, m > 1$ berdasarkan Definisi 2.4.1 untuk $a \in \mathbb{Z}$ diperoleh kelas ekivalen

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a\ mod\ n\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = mk, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x = a + mk, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{a + mk | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dua kelas ekivalen $[a]$ dan $[b]$ sama jika dan hanya jika $a \equiv b\ mod\ m$. Terdapat m kelas ekivalen berbeda pada $\mathbb{Z}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$[0] = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$.

$[1] = \{\dots, 1-2m, 1-m, 1, 1+m, 1+2m, \dots\}$.

$\vdots \quad = \quad \vdots$

$[m-1] = \{\dots, -m-1, -1, m-1, 2m-1, 2m, \dots\}$.

Kelas ekivalen tersebut disebut dengan kelas kongruensi. Selanjutnya $[a]$ akan disimbolkan dengan $\bar{a}$ himpunan semua kelas kongruensi modulo m pada $\mathbb{Z}$ dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}.$$

2.5 Ring Bilangan Bulat Modulo m

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dimana $m > 1$. Himpunan bilangan bulat modulo m dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_m$ adalah himpunan kelas-kelas ekivalen dari kongruensi modulo m atau $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ (Menezes, 1996).

Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}, \qquad \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}.$$

(Paulin, 2018).

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_m$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan

1. $(\mathbb{Z}_m, +)$ adalah grup abelian, yaitu:

   (i) Tertutup terhadap operasi penjumlahan.

   Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) \in \mathbb{Z}_m$.

   (ii) Asosiatis terhadap operasi penjumlahan.

   Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b} + \bar{c}$$

$$= \overline{(a + b) + c}$$

$$= \overline{a + (b + c)}$$

$$= \bar{a} + \overline{(b + c)}$$

(iii) Terdapat elemen identitas (e) terhadap operasi "$+$" yaitu $\bar{0}$ (nol) sehingga untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$.

(iv) Terdapat elemen invers $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ sehingga berlaku

$\bar{a} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{a} = \bar{0}$

(v) Komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$

$= \overline{b + a}$

$= \bar{b} + \bar{a}$.

2. Tertutup terhadap operasi perkalian

Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} \times \bar{b}) \in \mathbb{Z}_m$.

3. Asosiatif terhadap operasi perkalian

Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \overline{a \times b} \times \bar{c}$

$= \overline{(a \times b) \times c}$

$= \overline{a \times (b \times c)}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \bar{a} \times \overline{(b \times c)}$$

$$= \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}).$$

4. Distributif terhadap operasi perkalian.

   Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \times c) + (\bar{b} \times \bar{c})$.

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

   $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \overline{(a + b) \times c}$

   $= \overline{a \times c} + \overline{b \times c}$

   $= (\bar{a} \times c) + (\bar{b} \times \bar{c})$.

5. Terdapat $\bar{1} \in \mathbb{Z}_m$ sehingga untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{1} \times \bar{a} = \bar{a} = \bar{a} \times \bar{1}$.

   Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

   $\bar{1} \times \bar{a} = \overline{1 \times a} = \bar{a}$ dan $\bar{a} \times \bar{1} = \overline{1 \times a} = \bar{a}$.

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_m, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Operasi pada ring $\mathbb{Z}_m$ dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b \bmod m}$$

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab \bmod m}.$$

2.6 Graf

Definisi 2.6.1

Graf G yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$ berisikan dua himpunan, yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut simpul dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah suatu pasangan tak berurutan dari simpul- simpul di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan simpul dari graf G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari graf G (Budayasa, 2007).

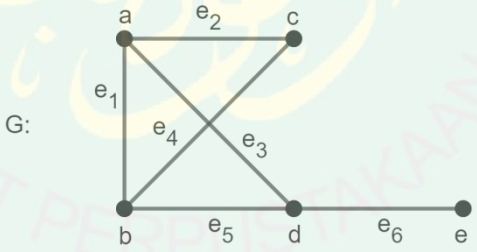
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf sederhana ditentukan oleh himpunan simpul dan himpunan sisi, yaitu pasangan terurut dari simpul, ditulis $e = (a, b)$ untuk sisi e dan simpul ujung a dan b. Jika a dan b adalah sebuah simpul ujung dari suatu sisi, maka ab bertetangga. Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap pasangan dua simpul yang berbeda a, b terdapat sisi yang menghubungkan simpul a ke simpul b. (Soleha dkk, 2015).

2.6.1 *Adjacent* dan *Incident*

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan simpul u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), serta simpul u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu simpul yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdusakir, 2009).

Perhatikan graf G berikut



Gambar 2.1 Contoh Gaf

Berdasarkan Gambar 2.1, maka simpul a dan b terhubung langsung, demikian juga dengan a dan c, a dan d, serta d dan e. Simpul a dan e tidak terhubung langsung, demikian juga dengan simpul b dan e serta c dan e. Sisi e_1 terkait langsung dengan simpul a dan b. Sisi e_2 terkait langsung dengan simpul a dan c. Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan simpul c dan d. Perlu diperhatikan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua simpul berbeda. Hal ini terjadi karena satu sisi hanya menghubungkan dua simpul berbeda. Sisi e_1 dan e_2 terhubung langsung karena terkait langsung pada satu simpul yang sama, yaitu a. Sisi e_1 dan e_6 tidak terhubung langsung karena tidak terkait langsung pada simpul yang sama (Abdusakir, 2009).

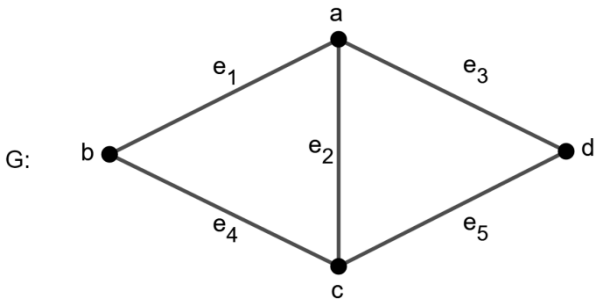
2.6.2 Derajat

Jika v adalah simpul pada graf G, maka himpunan semua simpul di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari simpul v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat simpul v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi

$$deg(v) = |N(v)|.$$

Simpul yang berderajat 0 disebut simpul terasing atau simpul terisolasi. Simpul yang berderajat 1 disebut simpul ujung atau simpul akhir. Simpul yang berderajat genap disebut simpul genap dan simpul yang berderajat ganjil disebut simpul ganjil. Derajat maksimum simpul di G dilambangkan dengan $D(G)$ dan derajat minimum simpul di G dilambangkan dengan $d(G)$ (Abdusakir, 2009). Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan simpul $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.2 Graf Berderajat

Berdasarkan Gambar 2.2, diperoleh bahwa $N(a) = \{b, c, d\}$, $N(b) = \{a, c\}$, $N(c) = \{a, b, d\}$, dan $N(d) = \{a, c\}$. Selanjutnya didapatkan $deg(a) = 3$, $deg(b) = 2$, $deg(c) = 3$, dan $deg(d) = 2$. Maka, derajat maksimum di G adalah $D(G) = 3$ dan derajat minimum di G adalah $d(G) = 2$. Simpul b dan d adalah simpul genap, simpul c dan d adalah simpul ganjil. Karena tidak ada yang berderajat 0 atau 1, maka G tidak mempunyai simpul terisolasi dan simpul ujung. Hubungan antara jumlah derajat pada semua simpul dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{V=G} deg(v) = 2q.$$

2.6.3 Jarak

Misalkan G adalah graf terhubung dengan u dan v adalah simpul di G. Jarak dari u ke v di G dinotasikan dengan $d(u, v)$, adalah sisi yang menghubungkan simpul $u - v$ di G. Untuk setiap simpul u, v dan w di G, maka berlaku

a. $d(u, v) \geq 0$ dan $d(u, v) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$.

b. $d(u, v) = d(v, u)$.

c. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (Abdussakir, 2009).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Diameter dari suatu graf G dinotasikan dengan $diam(G)$ adalah jarak terpanjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan setiap simpul pada graf tersebut.

2.7 Graf Annihilator

Graf annihilator dari suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan R dinotasikan dengan $AG(R)$. Misalkan $a \in Z(R)$ dan $ann(a) = \{r \in R | ra = 0\}$. Graf annihilator dari R adalah graf dengan himpunan simpul $Z(R)^*$, dimana $Z(R)^* = Z(R)\backslash\{0\}$ dan dua simpul yang berbeda x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika

$$ann(x) \cup ann(y) \neq ann(xy).$$

Graf ini pertama kali diteliti dan diperkenalkan oleh Badawi (2014). Banyak sifat menarik dari graf annihilator untuk dipelajari. Badawi (2014) juga mempelajari beberapa hubungan antara dua graf yaitu $AG(R)$ dan $\Gamma(R)$.

2.8 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$

Pada subbab ini akan dijelaskan bagaimana cara menentukan graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ berdasarkan bilangan prima p yang telah ditentukan.

2.8.1 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 4

Elemen dari $\mathbb{Z}_4$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ dan $\bar{3}$. Apabila elemen-elemen tersebut dioperasikan dengan perkalian maka diperoleh tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut.

Tabel 2.1 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_4$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan Tabel 2.1 didapatkan $Z(\mathbb{Z}_4)^* = \{\bar{2}\}$. Graf annihilator dari $\mathbb{Z}_4$ atau $AG(\mathbb{Z}_4)$ simpul-simpulnya adalah elemen-elemen di $Z(\mathbb{Z}_4)^*$. Karena pada $Z(\mathbb{Z}_4)^*$ hanya terdapat satu elemen saja, maka tidak dapat membentuk suatu keterhubungan pada graf annihilator. Untuk membentuk suatu keterhubungan pada suatu graf, dibutuhkan minimal dua elemen pada $Z(\mathbb{Z}_4)^*$. Oleh karena itu, graf annihilator dari $\mathbb{Z}_4$ atau $AG(\mathbb{Z}_4)$ hanya akan berupa simpul terasing atau simpul terisolasi karena berdiri sendiri dan memiliki derajat 0.

2.8.2 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 6

Elemen dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dan $\bar{5}$. Apabila elemen-elemen tersebut dioperasikan dengan perkalian maka diperoleh tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut.

Tabel 2.2 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.2 didapatkan $Z(\mathbb{Z}_6)^* = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Selanjutnya akan dibentuk graf annihilator dari $\mathbb{Z}_6$ atau $AG(\mathbb{Z}_6)$ yang simpul-simpulnya adalah elemen-elemen di $Z(\mathbb{Z}_6)^*$. Untuk menentukan keterhubungan simpul-simpul pada $AG(\mathbb{Z}_6)$ dibutuhkan annihilator dari masing-masing elemen di $Z(\mathbb{Z}_6)^*$ sebagai berikut:

$$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}, ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \text{ dan } ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}.$$

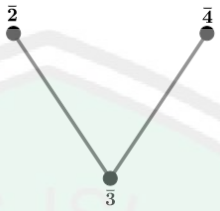
Dua simpul u dan v di $AG(\mathbb{Z}_6)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Diperoleh keterhubungan sebagai berikut:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{3}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \neq \mathbb{Z}_6 = ann(\bar{0})$ $= ann(\bar{2} \cdot 3)$. Sehingga 2 dan 3 terhubung langsung.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\} \cup \{\bar{0}, \bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{4}) = \{0,2,4\} \cup \{\bar{0}, \bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \neq \mathbb{Z}_6 = ann(0)$ $= ann(\bar{3} \cdot \bar{4})$. Sehingga $\bar{3}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung.

Berdasarkan uraian di atas, graf $AG(\mathbb{Z}_6)$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_6$

Derajat dari setiap simpul di $AG(\mathbb{Z}_6)$ adalah

$$deg(\bar{2}) = 1, deg(\bar{3}) = 2 \text{ dan } deg(\bar{4}) = 1.$$

Sedangkan jarak dari setiap dua simpul di $AG(\mathbb{Z}_6)$ adalah

$$d(\bar{2}, \bar{3}) = 1, d(\bar{2}, \bar{4}) = 2 \text{ dan } d(\bar{3}, \bar{4}) = 1.$$

2.8.3 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 10

Elemen dari $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}$ dan $\bar{9}$. Apabila elemen tersebut di operasikan dengan perkalian maka diperoleh tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{10}$ sebagai berikut.

Tabel 2.3 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_{10}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.3 didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{10})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Selanjutnya akan dibentuk graf annihilator dari $\mathbb{Z}_{10}$ atau $AG(\mathbb{Z}_{10})$ yang simpul-simpulnya adalah elemen-elemen di $Z(\mathbb{Z}_{10})^*$. Untuk menentukan keterhubungan simpul-simpul

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pada $AG(\mathbb{Z}_{10})$ dibutuhkan annihilator dari masing-masing elemen di $Z(\mathbb{Z}_{10})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$, $ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$, dan

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$, $ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$.

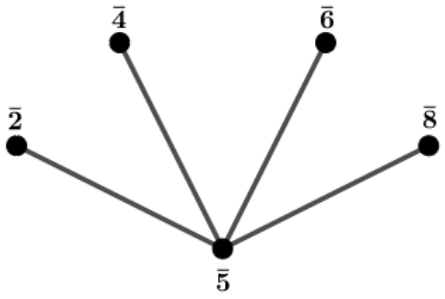
$ann(\bar{5}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$,

Dua simpul u dan v di $AG(\mathbb{Z}_{10})$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Diperoleh keterhubungan sebagai berikut:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{5}\} = ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{5}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} = \{0,2,4,5,6,8\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{5})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung.
3. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{5}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
4. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{5}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{5}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{5})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung.
6. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{5}\} = ann(\bar{4}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
7. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{5}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
8. $ann(\bar{5}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{5})$. Sehingga $\bar{5}$ dan $\bar{6}$ terhubung langsung.
9. $ann(\bar{5}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\} \neq \mathbb{Z}_{10} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{5}$ dan $\bar{8}$ terhubung langsung.
10. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\} \cup \{\bar{0}, \bar{5}\} = \{\bar{0}, \bar{5}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $(\bar{8})$ tidak terhubung langsung.

Berdasarkan uraian di atas, graf $AG(\mathbb{Z}_{10})$ dapat digambarkan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.4 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{10}$

Derajat dari setiap simpul di $AG(\mathbb{Z}_{10})$ adalah

$$deg(\bar{2}) = 1, deg(\bar{4}) = 1,\ deg(\bar{5}) = 4, deg(\bar{6}) = 1 \text{ dan } deg(\bar{8}) = 1.$$

Sedangkan jarak dari setiap dua simpul di $AG(\mathbb{Z}_{10})$ adalah

$$d(\bar{2},\bar{4}) = 2, d(\bar{2},\bar{5}) = 1, d(\bar{2},\bar{6}) = 2, d(\bar{2},\bar{8}) = 2, d(\bar{4},\bar{5}) = 1, d(\bar{4},\bar{6}) = 2,$$

$$d(\bar{4},\bar{8}) = 2,\ d(\bar{5},\bar{6}) = 1, d(\bar{5},\bar{8}) = 1 \text{ dan } d(\bar{6},\bar{8}) = 2.$$

2.8.4 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 14

Elemen dari $\mathbb{Z}_{14}$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}$ dan $\overline{13}$. Apabila elemen-elemen tersebut di oprasikan dengan perkalian maka diperoleh tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai berikut:

Tabel 2. 4 Tabel Perkalian dari $\mathbb{Z}_{14}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.4 didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{14})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$. Selanjutnya akan dibentuk graf annihilator dari $\mathbb{Z}_{14}$ atau $AG(\mathbb{Z}_{14})$ yang simpul-simpulnya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

adalah elemen-elemen di $Z(\mathbb{Z}_{14})^*$. Untuk menentukan keterhubungan simpul-simpul pada $AG(\mathbb{Z}_{14})$ dibutuhkan annihilator dari masing-masing elemen di $Z(\mathbb{Z}_{14})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$, $ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$,

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$, $ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$, dan

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$, $ann(12) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$.

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$,

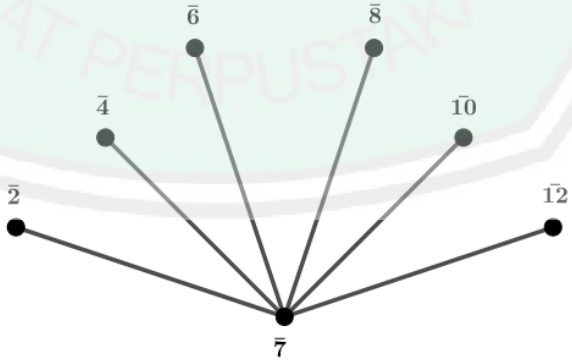
Dua simpul u dan v di $AG(\mathbb{Z}_{14})$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Diperoleh keterhubungan sebagai berikut:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{7}) =$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
4. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
6. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
7. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
8. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{7})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
9. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{4}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
10. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(12) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
11. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

12. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ $\neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{7})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\bar{7}$ terhubung langsung.
13. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
14. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{4}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
15. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
16. $ann(\bar{7}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ $\neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{7} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{7}$ dan $\bar{8}$ terhubung langsung.
17. $ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ $\neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{7} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{7}$ dan $\overline{10}$ terhubung langsung.
18. $ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ $\neq \mathbb{Z}_{14} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{7} \cdot \overline{12}) =$. Sehingga $\bar{7}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung.
19. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
20. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\overline{12}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
21. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\} \cup \{\bar{0}, \bar{7}\} = \{\bar{0}, \bar{7}\} = ann(\bar{6}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

Berdasarkan uraian di atas, graf $AG(\mathbb{Z}_{14})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{14}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Derajat dari setiap simpul di $AG(\mathbb{Z}_{14})$ adalah

$$deg(\bar{2}) = 1, deg(\bar{4}) = 1,\ deg(\bar{6}) = 1, \deg(\bar{7}) = 6, deg(\bar{8}) = 1, deg(\overline{10}) = 1$$

$$\text{dan } deg(\overline{12}) = 1.$$

Sedangkan jarak dari setiap dua simpul di $AG(\mathbb{Z}_{14})$ adalah

$$d(\bar{2},\bar{4}) = 2, d(\bar{2},\bar{6}) = 2, d(\bar{2},\bar{7}) = 1, d(\bar{2},\bar{8}) = 2, d(\bar{2},\overline{10}) = 2, d(\bar{2},12) = 2,$$

$$d(\bar{4},\bar{6}) = 2, d(\bar{4},\bar{7}) = 1, d(\bar{4},\bar{8}) = 2, d(\bar{4},\overline{10}) = 2, d(\bar{4},\overline{12}) = 2, d(\bar{6},\bar{7}) = 1,$$

$$d(\bar{6},\bar{8}) = 2, d(\bar{6},\overline{10}) = 2, d(\bar{6},\overline{12}) = 2, d(\bar{7},\bar{8}) = 1, d(\bar{7},\overline{10}) = 2, d(\bar{7},\overline{12}) = 2,$$

$$d(\bar{8},\overline{10}) = 2, d(\bar{8},\overline{12}) = 2 \text{ dan } d(\overline{10},\overline{12}) = 2.$$

2.8.5 Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo 22

Elemen dari $\mathbb{Z}_{22}$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}$ dan $\overline{21}$ Apabila elemen-elemen tersebut di oprasikan dengan perkalian maka diperoleh tabel perkalian dari $\mathbb{Z}_{22}$ sebagai berikut:

Tabel 2. 5 Tabel Cayley dari $\mathbb{Z}_{22}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	16	$\overline{21}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\bar{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\bar{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\overline{16}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{6}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{6}$	$\overline{14}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\overline{18}$	$\bar{5}$	$\overline{14}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\bar{6}$	$\overline{15}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\bar{7}$	$\overline{16}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\bar{8}$	$\overline{17}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\bar{8}$	$\overline{18}$	$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{14}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\bar{8}$	$\overline{18}$	$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{14}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\overline{14}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{18}$	$\bar{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\overline{14}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{18}$	$\bar{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{17}$	$\bar{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\overline{16}$	$\bar{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\overline{15}$	$\bar{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\overline{14}$	$\bar{5}$	$\overline{18}$	$\bar{9}$
$\overline{14}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\bar{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$
$\overline{15}$	$\bar{0}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{16}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\bar{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\bar{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\bar{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\bar{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$
$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	14	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\overline{17}$	$\bar{0}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	18	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{18}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{19}$	$\bar{0}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{20}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{21}$	$\bar{0}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 2.5 didapatkan$Z(\mathbb{Z}_{22})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya akan dibentuk graf annihilator dari $\mathbb{Z}_{22}$ atau $AG(\mathbb{Z}_{22})$ yang simpul-simpulnya adalah elemen-elemen di $Z(\mathbb{Z}_{22})^*$. Untuk menentukan keterhubungan simpul-simpul pada $AG(\mathbb{Z}_{22})$ dibutuhkan annihilator dari masing-masing elemen di $Z(\mathbb{Z}_{22})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$, $ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$,

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$, $ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$,

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$, $ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$,

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$, $ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$, dan

$ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$, $ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$.

$ann(\overline{11}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\}$,

Dua simpul u dan v di $AG(\mathbb{Z}_{22})$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(u) \cup ann(v) \neq ann(u \cdot v)$. Diperoleh keterhubungan sebagai berikut:

1. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ tidak terhubung langsung.
2. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
3. $ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
4. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}0) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
5. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{11}) = \{0,11\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\}$ $= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{11})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.
6. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
7. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{14})$. Sehingga $\bar{2}$ dan$\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
8. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
9. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

10. $ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\bar{2}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
11. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung.
12. $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{4} \cdot 8)$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
13. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
14. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{11}) = \{0,11\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\}$ $= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{11})$. Sehingga $\bar{4}$ dan$\overline{11}$ terhubung langsung.
15. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{4}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
16. $ann(\bar{4}) \cup ann(14) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{14})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
17. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
18. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
19. $ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\bar{4}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
20. $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{4}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\bar{8}$ tidak terhubung langsung.
21. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
22. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{11}) = \{0,11\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\}$ $= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{11})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.
23. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{6}$ dan$\overline{12}$ tidak terhubung langsung.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

24. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{14})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
25. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{8}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
26. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
27. $ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\bar{6}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
28. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{10})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{10}$ tidak terhubung langsung.
29. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{11}) = \{0,11\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\}$ $= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{11})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.
30. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{8}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
31. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{2}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{14})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
32. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
33. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
34. $ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\bar{8}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
35. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{11}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\}$ $= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\bar{0}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{11})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{11}$ terhubung langsung.
36. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10})$ $= ann(\overline{10} \cdot \overline{12})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{12}$ tidak terhubung langsung.
37. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{8})$ $= ann(\overline{10} \cdot \overline{14})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
38. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\} \cup \{\bar{0}, \overline{11}\} = \{\bar{0}, \overline{11}\} = ann(\bar{6})$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= ann(\overline{10} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.

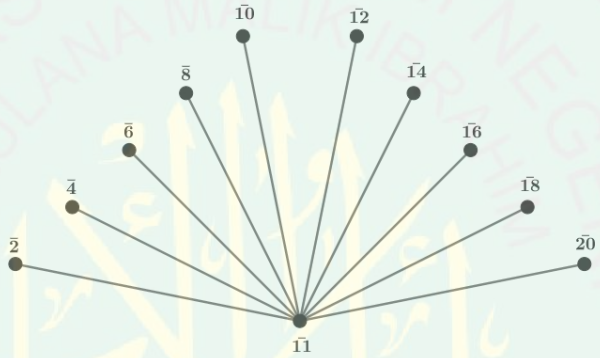
39. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{6})$
$= ann(\overline{10} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
40. $ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{4})$
$= ann(\overline{10} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\overline{10}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
41. $ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{12}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{12})$.
Sehingga $\overline{11}$ dan $\overline{12}$ terhubung langsung.
42. $ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{14}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann\overline{0} = ann(\overline{11} \cdot \overline{14})$.
Sehingga $\overline{11}$ dan $\overline{14}$ terhubung langsung.
43. $ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{16}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{16})$.
Sehingga $\overline{11}$ dan $\overline{16}$ terhubung langsung.
44. $ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{18})$.
Sehingga $\overline{11}$ dan $\overline{18}$ terhubung langsung.
45. $ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\}$
$= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20},\} \neq \mathbb{Z}_{22} = ann(\overline{0}) = ann(\overline{11} \cdot \overline{20})$.
Sehingga $\overline{11}$ dan $\overline{20}$ terhubung langsung.
46. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{14}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{14})$
$= ann(\overline{12} \cdot \overline{14})$. Sehingga $\overline{12}$ dan $\overline{14}$ tidak terhubung langsung.
47. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{16}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{16})$
$= ann(\overline{12} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\overline{12}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
48. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18})$
$= ann(\overline{12} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\overline{12}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
49. $ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{20})$
$= ann(\overline{12} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\overline{12}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
50. $ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{16}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{8})$
$= ann(\overline{14} \cdot \overline{16})$. Sehingga $\overline{14}$ dan $\overline{16}$ tidak terhubung langsung.
51. $ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{10})$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= ann(\overline{14} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\overline{14}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.

52. $ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{18})$
$= ann(\overline{14} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\overline{14}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
53. $ann(\overline{16}) \cup ann(\overline{18}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{2})$
$= ann(\overline{16} \cdot \overline{18})$. Sehingga $\overline{16}$ dan $\overline{18}$ tidak terhubung langsung.
54. $ann(\overline{16}) \cup ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{12})$
$= ann(\overline{16} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\overline{16}$dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.
55. $ann(\overline{18}) \cup ann(\overline{20}) = \{\overline{0}, \overline{11}\} \cup \{\overline{0}, \overline{11}\} = \{\overline{0}, \overline{11}\} = ann(\overline{6})$
$= ann(\overline{18} \cdot \overline{20})$. Sehingga $\overline{18}$ dan $\overline{20}$ tidak terhubung langsung.

Berdasarkan uraian di atas, graf $AG(\mathbb{Z}_{22})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf Annihilator $\mathbb{Z}_{22}$

Derajat dari setiap simpul di $AG(\mathbb{Z}_{22})$ adalah

$$deg(\overline{2}) = 1, deg(\overline{4}) = 1, deg(\overline{6}) = 1, deg(\overline{8}) = 1, deg(\overline{10}) = 1,$$
$$deg(\overline{11}) = 10, deg(\overline{12}) = 1, deg(\overline{14}) = 1, deg(\overline{16}) = 1, deg(\overline{18}) = 1, \text{dan}$$
$$deg(\overline{20}) = 1.$$

Sedangkan jarak dari setiap dua simpul di $AG(\mathbb{Z}_{22})$ adalah

$$d(\overline{2}, \overline{4}) = 2, d(\overline{2}, \overline{6}) = 2, d(\overline{2}, \overline{8}) = 2, d(\overline{2}, \overline{10}) = 2, d(\overline{2}, \overline{11}) = 1, d(\overline{2}, \overline{12}) = 2,$$
$$d(\overline{2}, \overline{14}) = 2, d(\overline{2}, \overline{16}) = 2, d(\overline{2}, \overline{18}) = 2, d(\overline{2}, \overline{20}) = 2, d(\overline{4}, \overline{6}) = 2, d(\overline{4}, \overline{8}) = 2,$$
$$d(\overline{4}, \overline{10}) = 2, d(\overline{4}, \overline{11}) = 1, d(\overline{4}, \overline{12}) = 2, d(\overline{4}, \overline{14}) = 2, d(\overline{4}, \overline{16}) = 2,$$
$$d(\overline{4}, \overline{18}) = 2, d(\overline{4}, \overline{20}) = 2, d(\overline{6}, \overline{8}) = 2, d(\overline{6}, \overline{10}) = 2, d(\overline{6}, \overline{11}) = 1,$$
$$d(\overline{6}, \overline{12}) = 2, d(\overline{6}, \overline{14}) = 2, d(\overline{6}, \overline{16}) = 2, d(\overline{6}, \overline{18}) = 2, d(\overline{6}, \overline{20}) = 2,$$
$$d(\overline{8}, \overline{10}) = 2, d(\overline{8}, \overline{11}) = 1, d(\overline{8}, \overline{12}) = 2, d(\overline{8}, \overline{14}) = 2, d(\overline{8}, \overline{16}) = 2,$$
$$d(\overline{8}, \overline{18}) = 2, d(\overline{8}, \overline{20}) = 2, d(\overline{10}, \overline{11}) = 1, d(\overline{10}, \overline{12}) = 2, d(\overline{10}, \overline{14}) = 2,$$
$$d(\overline{10}, \overline{16}) = 2, d(\overline{10}, \overline{18}) = 2, d(\overline{10}, \overline{20}) = 2, d(\overline{11}, \overline{12}) = 1, d(\overline{11}, \overline{14}) = 1,$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$d(\overline{11},\overline{16}) = 1, d(\overline{11},\overline{18}) = 1, d(\overline{11},\overline{20}) = 1, d(\overline{12},\overline{14}) = 2, d(\overline{12},\overline{16}) = 2,$$
$$d(\overline{12},\overline{18}) = 2, d(\overline{12},\overline{20}) = 2, d(\overline{14},\overline{16}) = 2, d(\overline{14},\overline{18}) = 2, d(\overline{14},\overline{20}) = 2,$$
$$d(\overline{16},\overline{18}) = 2, d(\overline{16},\overline{20}) = 2 \text{ dan } d(\overline{18},\overline{20}) = 2.$$

2.9 Indeks Schultz dan Indeks Gutman

Penggunaan indeks topologi kimia tertua dan paling teliti diperkenalkan oleh Wiener (1947) indeks topologi disebut indeks Wiener atau bilangan Wiener. Indeks Wiener dari graf G, sama dengan jumlah jarak antara semua pasangan simpul dari masing-masing graf dalam kimia, yaitu

$$W(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v).$$

Sehubungan dengan penelitian tertentu dalam kimia matematika, Schultz (1989) memperkenalkan deskripsi graf-teoretis untuk mengkarakterisasi alkana oleh integer, yaitu indeks Schultz yang didefinisikan sebagai berikut

$$Schultz(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) + deg(v)\big)\, d(u,v).$$

Indeks Gutman didefinisikan oleh I. Gutman (1994) merupakan indeks Schultz dari jenis kedua yang dimodifikasi sebagai berikut

$$Gutman(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \big(deg(u) \cdot deg(v)\big)\, d(u,v).$$

2.10 Pentingnya Silaturrahmi dalam Al-Qur'an

Teori graf telah dijelaskan dengan sangat baik dalam keilmuan matematika, begitu pula dengan Al-Qur'an. Jauh sebelum para ilmuan menemukan apa itu teori graf, Al-Qur'an telah lebih dahulu membahasnya. Matematika menjelaskan bahwa definisi dari graf adalah hubungan antara satu simpul dengan simpul lainnya, maka dalam Al-Qur'an menjelaskannya dalam Q.S. An-Nisa'/4:1, seperti berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu" (Q.S. An-Nisa'/4:1).

Allah Swt telah berfirman dalam surah an-Nisa' ayat 1 tersebut yang memerintahkan kepada manusia untuk menjalin hubungan *silaturrahim* (silaturrahmi). Menurut bahasa arab *silaturrahim* terdiri dari dua kata صِلَةُ yang berarti tali atau menyambung dan الرَّحِم yang berarti rahim, tempat janin sebelum dilahirkan. Silaturrahmi merupakan usaha menyambung tali persaudaraan dalam bingkai kasih sayang (Anna & Millah, 2012).

Interpretasi secara teori graf dari ayat tersebut adalah simpul-simpul yang ada pada suatu graf dapat direpresentasikan sebagai manusia. Allah menciptakan setiap manusia berbeda dengan kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Setiap manusia merupakan makhluk sosial, yang dimanapun dan kapanpun membutuhkan manusia lainnya untuk saling membantu, tolong menolong, dan mendukung antara satu dengan yang lainnya. Hubungan antara manusia satu dengan yang lainnya dapat terjalin dengan baik jika mereka menjalin silaturrahmi. Oleh karena itu, silaturrahmi dalam islam sangatlah penting. Kaitannya dengan teori graf adalah sisi dalam suatu graf bisa dibentuk jika terdapat minimal dua simpul yang berbeda, begitupun dengan silaturrahmi antara manusia yang satu dengan lainnya akan terbentuk jika terdapat sisi yang menghubungkan keduanya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sisi tersebut merupakan representasi dari hubungan silaturrahmi yang terjalin antara manusia satu dengan yang lainnya.

Sejatinya silaturrahmi dalam islam dimaknai sebagai menghubungkan tali pesaudaraan antara kerabat ataupun saudara. Ketahuilah bahwa tali persaudaraan adalah ikatan antara dua orang, seperti halnya ikatan pernikahan antara suami dan istri. Jika ikatan pernikahan itu seperti ikatan persaudaraan, maka ada kewajiban yang harus dipenuhi dalam hal harta, jiwa lisan, hati, do'a, keikhlasan, kesetiaan dan tidak membebani. Ada beberapa hadist yang menyebutkan keistimewaan suatu tali persaudaraan, diantaranya sabda Rasulullah saw, "Yang paling dicintai Allah swt diantara dua orang yang bersahabat adalah yang paling lembut kepada sahabatnya"(Al-Bakri, 2005).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai rumus dari indeks Schultz dan indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$. Sebelum menentukan rumus umum dari indeks yang telah ditentukan, terlebih dahulu dibuat lemma-lemma yang berkaitan dengan graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

Lemma 3.1

Misalkan p bilangan prima maka

$$Z(\mathbb{Z}_{2p})^* = \{\overline{2k}, \bar{p} | k = 1,2, \dots, p-1\}.$$

Bukti

Pertama, kita buktikan bahwa $\overline{2k} \in Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p-1$. Perhatikan bahwa $\overline{2k} \cdot p = \overline{2pk} \equiv \bar{0}(mod\ 2p)$ untuk $k = 1,2, \dots, p-1$. Jadi terbukti bahwa $\overline{2k} \in Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$. Kedua, akan dibuktikan bahwa $\bar{p} \in Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$. Perhatikan bahwa $\bar{p} \cdot 2 = \overline{2p} \equiv \bar{0}(mod\ 2p)$. Jadi terbukti bahwa $\bar{p} \in Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa elemen $\mathbb{Z}_{2p}$ ganjil, yaitu $\overline{2k-1}$ untuk $k = 1,2, \dots, p$ dan $k \neq \frac{p+1}{2}$ bukan elemen pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$.

Perhatikan kongruensi berikut

$$(\overline{2k-1}) \cdot x \equiv 0(mod\ 2p).$$

Jelas bahwa 0 adalah solusi dari kongruensi tersebut. Kemudian berdasarkan Teorema 2.4.1 karena $FPB(\overline{2k-1}, \overline{2p}) = 1$ untuk $k = 1,2, \dots, p-1$ dan $k \neq \frac{p+1}{2}$ maka x yang memenuhi hanya $\bar{0}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga $\overline{2k-1} \notin Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$ untuk $k = 1,2,\dots,p-1$ dan $k \neq \frac{p+1}{2}$.

Dengan demikian

$$Z(\mathbb{Z}_{2p})^* = \{\overline{2k}, \bar{p} | k = 1,2,\dots,p-1\}.$$

Lemma 3.2

Misalkan p bilangan prima dimana $p > 2$ untuk $\bar{a} \in Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$, berlaku

$$ann(\bar{a}) = \begin{cases} \{\bar{0}, \bar{p}\}, & \text{jika } \bar{a} \neq \bar{p}, \\ \{\bar{0}, \overline{2k} | k = 1,2,\dots,p-1\}, & \text{jika } \bar{a} = \bar{p}. \end{cases}$$

Bukti.

Untuk $\bar{a} \neq \bar{p}$, $FPB(\bar{a}, \overline{2p}) = 2$ dimana $p > 2$. Berdasarkan Teorema 2.4.1 $\bar{a} \cdot x \equiv \bar{0}(mod\ 2p)$ memiliki dua solusi. Kemudian solusi yang menenuhi adalah $\bar{0}$ dan $\bar{p}$. Sehingga

$$ann(\bar{a}) = \{\bar{0}, \bar{p}\}.$$

Sebaliknya untuk $\bar{a} = \bar{p}$, $FPB(\bar{p}, \overline{2p}) = p$ sehingga berlaku $\bar{p} \cdot x \equiv \bar{0}(mod\ 2p)$ memiliki sebanyak p solusi. Kemudian solusi yang memenuhi adalah $\bar{0}$ dan $\overline{2k}$ dimana $k = 1,2,\dots,p-1$. Sehingga

$$ann(\bar{p}) = \{\bar{0}, \overline{2k} | k = 1,2,\dots,p-1\}.$$

Lemma 3.3

Misalkan p bilangan prima dimana $p > 2$. Derajat $\bar{p}$ dan $\bar{x}$ pada graf annihilator atas $\mathbb{Z}_{2p}$ yang dilambangkan $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$deg(\bar{p}) = p - 1 \text{ dan } deg(\bar{x}) = 1.$$

Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa $deg(\bar{p}) = p - 1$.

   Misalkan $\bar{y} \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), \bar{y} \neq \bar{p}$ maka $\bar{y} = 2t, t = 1,2,\dots,p-1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Diperoleh

$$ann(\bar{p}) \cup ann(\bar{y}) = \{\bar{0}, \overline{2k} | k = 1, \dots, p-1\} \cup \{\bar{0}, \bar{p}\}$$

$$= \{\bar{0}, \overline{2k}, \bar{p} | k = 1, \dots, p-1\}$$

dan

$$ann(\bar{p} \cdot \bar{y}) = ann(\bar{p} \cdot \overline{2t})$$

$$= ann(\bar{0})$$

$$= \mathbb{Z}_{2p}.$$

Jadi $ann(\bar{p}) \cup ann(\bar{y}) \neq ann(\bar{p} \cdot \bar{y})$. Oleh karena itu, $\overline{py} \in E\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right)$.

Diperoleh derajat dari $\bar{p}$ adalah $\left|\left\{\bar{y} \in V\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) | \bar{y} \neq \bar{p}\right\}\right|$ atau

$$deg(\bar{p}) = p - 1.$$

2. Akan dibuktikan bahwa $deg(\bar{x}) = 1$ untuk setiap $\bar{x} \in V\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right), \bar{x} \neq \bar{p}$

   Misalkan $\bar{y} \in V\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right), \bar{y} \neq \bar{p}$ sehingga $\bar{p} = 2t, t = 1,2, \dots, p-1$.

   Diperoleh

$$ann(\bar{x}) \cup ann(\bar{y}) = \{\bar{0}, \bar{p}\} \cup \{\bar{0}, \bar{p}\}$$

$$= \{\bar{0}, \bar{p}\}$$

   dan

$$ann(\bar{x} \cdot \bar{y}) = ann(\bar{x} \cdot 2t)$$

$$= \{\bar{0}, \bar{p}\}.$$

   Jadi $ann(\bar{x}) \cup ann(\bar{y}) = ann(\bar{x} \cdot \bar{y})$. Oleh karena itu, $\overline{xy} \notin E\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right)$.

   Dengan demikian $\bar{x}$ hanya terhubung dengan $\bar{p}$, jadi

$$deg(\bar{x}) = 1.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1 Indeks Schultz pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$

Pembahasan selanjutnya adalah mengenai indeks Schultz yang akan di interpretasikan pada suatu graf. Graf yang digunakan adalah graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ yang telah dibahas sebelumnya. Sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

Teorema 3.1.1

Misalkan p bilangan prima untuk $p > 2$. Indeks Schultz atas $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$Schultz\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = 3p^2 - 7p + 4.$$

Bukti.

Berdasarkan definisi, persamaan indeks Schultz atas $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$Schultz\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{\substack{\bar{x}\neq\bar{y} \\ \{\bar{x},\bar{y}\}\subseteq V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)}} (deg(\bar{x}) + deg(\bar{y}))d(\bar{x},\bar{y}).$$

Berdasarkan lemma 3.3 $deg(\bar{p}) = p - 1$ dan $deg(\bar{x}) = 1$ sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$Schultz\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{\substack{\bar{p}\neq\bar{y} \\ \{\bar{p},\bar{y}\}\subseteq V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)}} (deg(\bar{p}) + deg(\bar{y}))d(\bar{p},\bar{y}) + \sum_{\substack{\bar{x}\neq\bar{p} \\ \bar{x}\neq\bar{y} \\ \{\bar{x},\bar{y}\}\subseteq V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)}} (deg(\bar{x}) + deg(\bar{y}))d(\bar{x},\bar{y})$$

$$= \Big(\big((p-1) + (1)\big)(1)\Big)(p-1) + \Big(\big((1) + (1)\big)(2)\Big)\left(\frac{p(p-1)}{2} - (p-1)\right)$$

$$= p(p-1) + 4\left(\frac{p(p-1)}{2} - (p-1)\right)$$

$$= 3p^2 - 7p + 4.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga diperoleh

$$Schultz\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = 3p^2 - 7p + 4.$$

3.2 Indeks Gutman pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$

Pembahasan selanjutnya adalah mengenai indeks Gutman atau indeks Schultz dari jenis kedua yang akan di interpretasikan pada suatu graf. Graf yang digunakan adalah graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ yang telah dibahas sebelumnya. Sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

Teorema 3.2.1

Misalkan p bilangan prima untuk $p > 2$. Indeks Gutman atas $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah

$$Gutman\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = 2p^2 - 5p + 3.$$

Bukti.

Akan dibuktikan $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ pada persamaan indeks Gutman sehingga diperoleh

$$Gut\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{\substack{\bar{x}\neq\bar{y} \\ \{\bar{x},\bar{y}\}\subseteq V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)}} deg(\bar{x})\, deg(\bar{y}) d(\bar{x},\bar{y}).$$

Berdasarkan lemma 3.3 $deg(\bar{p}) = p - 1$ dan $deg(\bar{x}) = 1$ sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$Gutman\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{\substack{\bar{p}\neq\bar{y} \\ \{\bar{p},\bar{y}\}\subseteq V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)}} deg(\bar{p})\, deg(\bar{y}) d(\bar{p},\bar{y}) + \sum_{\substack{\bar{x}\neq\bar{p} \\ \bar{x}\neq\bar{y} \\ \{\bar{x},\bar{y}\}\subseteq V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)}} deg(\bar{x})\, deg(\bar{y}) d(\bar{x},\bar{y}).$$

$$= \big((p-1)(1)(1)\big)(p-1) + \big((1)(1)(2)\big)\left(\frac{p(p-1)}{2} - (p-1)\right)$$

$$= (p-1)(p-1) + 2\left(\frac{p(p-1)}{2} - (p-1)\right)$$

$$= 2p^2 - 5p + 3.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga diperoleh

$$Gutman\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 2p^2 - 5p + 3.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Indeks Schultz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima untuk $p > 2$ adalah

$$Schultz\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 3p^2 - 7p + 4.$$

2. Indeks Gutman pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p prima untuk $p > 2$ adalah

$$Gutman\left(AG\left(\mathbb{Z}_{2p}\right)\right) = 2p^2 - 5p + 3.$$

4.2 Saran

Penelitian kali ini hanya dilakukan pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dimana p prima untuk $p > 2$. Mengenai indeks yang digunakan dalam penelitian ini yaitu indeks Schultz dan indeks Gutman, peneliti menyarankan pembaca untuk mengkaji terkait indeks yang berbeda, misal indeks Randic, indeks Zagreb, dan lain sebagainya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Nilna, Fifi. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Bakri, Ahmad Abdurraziq. 2005. *Ringkasan Ihya' 'Ulumuddin*. Kairo, Mesir: Dar as-Salam.

Anna Mariana, Millah Nurmilah. 2012. *Inilah Pesan diBalik Berkah dan Manfaat Silaturahmi*. Ruang Kata.

Badawi, Ayman. 2014. *On the annihilator graph of a commutative ring*, Comm. Algebra, 42 no. 1.

Budayasa, Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya : UNESA University Press Surabaya.

Eka, Septiana R. & Rahadjeng, Budi, S.Si, M.Si. *Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang dan Graf Biparti Komplit.*

F. Hassani, Ali Iranmnesh, Samaneh Mirzaie. 2013. *Schultz and Modified Schultz Polynomials of C_{100} Fullerence*. MATCH Communications in Mathematical and In Computer Chemistry.

Fraleigh, J.B. 1989. *A First Course In Abstract Algebra*. Fourth Edition. New York: Addison-wesley

Fraleigh, J.B., 1993. *A First Course In Abstract Algebra*. Fifth Edition. Addisonwesley Publishing Company, USA.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra*. Sixth Edition. Addision Wesley Publishing Company, Inc. Philippines.

H. P. Schultz. 1989. *Topological organic chemistry. 1. Graph theory and topological indices of alkanes*, J. Chem. Inf. Comput. Sci. 29. 239–257

H. Wiener. 1947. *Structural determination of paraffin boiling points*, J. Am. Chem. Soc. 69. 17–20.

I. Gutman. 1994. *Selected properties of the Schultz molecular topological index*, J. Chem. Inf. Comput. Sci. 34. 1087–1089.

Irawan, Wahyu Henky, dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki Press.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Joyce, David. 2017. *Introduction to Medern Algebra*. Clark University.

K. D Joshi. 1989. *Foundations of Discrete Mathematics*. India. KK. Gupta for New Age International.

Menezes, A., Oorschot. P. C. & Vanstone, S.A.1996. *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-dasar Teori Bilangan*. Malang: IKIP Malang.

Patty, Henry W. M. 2016. *Sifat-Sifat Semigrup Sebagai Graf Pembagi Nol.*

Paulin, Alexander. 2018. *Introduction to Abstract Algebra*. California: University of California.

Permana, Angga Budi & Darmaji. 2012. *Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu*. Surabaya: ITS. Vol. 1 No. 1.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: Ram Nagar.

Siang, Jok Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer.* Yogyakarta: Andi.

S. Klavzar, I. Gutman. 1997. Wiener Number of Vertex-Weighted Graphs and A Chemical Applicant, Discr. Appl. Math. 73-81.

Soleha., Setyowati, Dian W., Wicaksono, Satrio Adi. 2015. *Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-Nol dari Rig Komutatif dengan Elemen Satuan*.

Subiono. 2016. *Aljabar: Sebagai Suatu Pondasi Matematika.* Edisi ke-2. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Wicaksono, S. A. dan Soleha. 2013. *Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan*. Jurnal Sains dan Seni Pomits. Jurusan Matematika FMIPA ITS, Surabaya. Vol.2 No.1.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Elok Izzatul Mardhiyah, lahir di Malang pada 18 Januari 1998, biasa dipanggil Elok, tinggal di jalan Sekar Putih No. 71 Rt/Rw 01/03 kelurahan Wonokoyo Kecamatan Kedungkandang Kota Malang. Anak kedua dari dua bersaudara, dari pasangan bapak Abdul Kholiq dan ibu Rosyidah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Hidayatus Sibyan Kelurahan Wonokoyo Kecamatan Kedungkandang Kota Malang dan lulus tahun 2010. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMPN 23 Malang Kelurahan Tlogowaru Kecamatan Kedungkandang Kota Malang dan lulus tahun 2013. Setelah itu, menempuh pendidikan di MA Al-Ittihad dan Pondok Pesantren Putri Al-Ittihad Kelurahan Belung Kecamatan Poncokusumo Kabupaten Malang dan lulus tahun 2016. Pendidikan berikutnya melalui Jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) tahun 2016, menjadi mahasiswa di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan jurusan matematika.

Selama menjadi mahasiswa, juga mengikuti kegiatan yang diadakan HMJ Integral Matematika yaitu MEC dan MAC. Selain aktif dalam bidang akademik juga aktif dalam bidang keagamaan dengan menjadi santri di salah satu pondok pesantren mahasiswa yaitu PPDU. Al-Fadholi Kelurahan Merjosari Kecamatan Lowokwaru Kota Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Elok Izzatul Mardhiyah
NIM : 16610022
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Indeks Schultz dan Indeks Gutman pada Graf Annhilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II : Dewi Ismiarti, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	16 Maret 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II		
2.	18 Maret 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan, Bab I, dan Bab II		
3.	20 Maret 2020	Konsultasi Bab I, Bab II dan Bab III		
4.	31 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal		
5.	31 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal		
6.	16 April 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan dan Bab III		
7.	20 April 2020	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV		
8.	23 April 2020	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV		
9.	01 Mei 2020	ACC Keseluruhan		
10.	17 Juni 2020	ACC Kajian Kagamaan Keseluruhan		

Malang, 24 Juni 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG