INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $4p$

SKRIPSI

OLEH
DWI HAMEDIA WATI
NIM. 16610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA
PADA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $4p$

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dwi Hamedia Wati
NIM. 16610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA
PADA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT
MODULO $4p$

SKRIPSI

Oleh
Dwi Hamedia Wati
NIM. 16610016

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Juni 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	Dewi Ismiarti, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006	NIDT. 19870505 2016081 2 058

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

INDEKS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF PEMBAGI NOL TOTAL DARI RING BILANGAN BULAT MODULO 4p

SKRIPSI

Oleh
Dwi Hamedia Wati
NIM. 16610016

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 Juni 2020

Penguji Utama	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	……………………..
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	……………………..
Sekretaris Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	……………………..
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	……………………..

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Dwi Hamedia Wati
NIM	: 16610016
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripisi	: Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo 4*p*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagi hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 15 Juni 2020
Yang membuat pernyataan,

Dwi Hamedia Wati
NIM. 16610016

MOTTO

Selalu bersyukur atas apa yang telah dicapai dan jangan cepat puas

Terus semangat menjadi lebih baik dan bermanfaat bagi sekitar

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Munadi dan ibunda Sumiyati serta kakak tercinta Abdul Haris yang senantiasa iklas mendoakan dan sabar dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis hingga mengantar sampai pendidikan sarjana.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya dan telah memberikan banyak kesempatan, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari sepenuhnya bahwa selesainya skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, semangat, serta bimbingan dari berbagai pihak, baik bersifat moril maupun materil. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang memfasilitasi dengan kebijakan-kebijakannya.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang memberikan pengaruh positif terhadap perkembangan program studi dan mahasiswa khususnya.

4. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan yang terbaik selama penyelesaian skripsi ini.
5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan ilmu, nasihat, dan arahan kepada penulis selama penyelesaian skripsi ini.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah iklas dan sabar dalam mendidik, memberikan ilmu dan bimbinganya.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman jurusan matematika angakatan 2016, terimakasih atas pengalaman berharga selama menjadi mahasiswa matematika.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca serta dapat menambah ilmu pengetahuan bagi penulis.

Wassalamu,alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 15 Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Wati, Dwi Hamedia. 2020. **Indeks Zagreb Pertama dan Kedua Pada Graf Pembagi Nol Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $4p$.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Kata kunci: Indeks Zagreb pertama, indeks Zagreb kedua, graf pembagi nol total, ring bilang bulat modulo $4p$

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol dari R. Graf pembagi nol total dari R yang dilambangkan dengan $\mathrm{ZT(R)}$ adalah graf dengan titik-titiknya pembagi nol tak nol dari R dan untuk dua titik yang berbeda x, y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 0$ dan $x + y \in Z(R)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ untuk p bilangan prima. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menggunakan beberapa buku dan jurnal sebagai bahan rujukan. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan p bilangan prima $p \geq 3$ adalah suatu graf dengan:
   a. Himpunan titik $V\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \{np, 2k | n = 1,3,\ k = 1,2,3, \dots, 2p - 1\}$.
   b. $\{2p, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ jika dan hanya jika $u = 2k, k = 1,2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, 2p - 1$. Sehingga derajat titik $2p$ pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah $2p - 2$.
   c. $\{2k, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, 2p - 1$ jika dan hanya jika $u = 2p$. Sehingga derajat titik $2k$ pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah 1.
   d. p dan $3p$ adalah titik terisolasi.
2. Indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p - 2)(2p - 1)$$
$$M_2\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p - 2)^2.$$

ABSTRACT

Wati, Dwi Hamedia. 2020. **On The First and Second Zagreb Indices of Total Zero-Divisor Graph of The Ring of Integers Modulo 4p.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II) Dewi Ismiarti, M.Si.

Keywords: First Zagreb index, second Zagreb index, total zero-divisor graph, ring integers modulo 4p.

Let R be a commutative ring with unity and $\mathrm{Z}(R)$ be its set of zero-divisor. The total zero divisor graph of R is a graph with the vertices is the nonzero zero-divisors of R and two distinct vertices x, y are adjacent if and only if $xy = 0$ and $x + y \in \mathrm{Z}(R)$. The purpose of this research is to determine the formula of first and second Zagreb indices of total zero-divisor graph of the ring of integers modulo $4p$ for p prime. The research method used is a literature study.The results of this research are the following:

1. The total zero-divisor graph of the ring of integers modulo $4p$ where p are primes $p \geq 3$ is:
   a. The vertices $V\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right) = \{np, 2k | n = 1,3,\ k = 1,2,3, \dots, 2p - 1\}$.
   b. $\{2p, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ if only if $u = 2k, k = 1,2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, 2p - 1$. Then the vertex $2p$ of $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ is $2p - 2$.
   c. $\{2k, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ for every $k = 1,2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, 2p - 1$ if only if $u = 2p$. Then the vertex $2k$ of $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ is 1.
   d. p and $3p$ are isolated vertices.
2. The first and second Zagreb indices of total zero-divisor graph of ring $\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}}$ where p are primes and $p \geq 3$:

$$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p - 2)(2p - 1)$$

$$M_2\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p - 2)^2.$$

الملخّص

واتي, دوي هاميديا. 2020. **الأوّل و الثّاني في موضع تقسيم الصفر Zagreb Indices الكامل عن طوق العدد الصحيح Modulo 4p**. البحث العلمي. قسم الرياضيّات. كليّة العلوم و التكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الاسلاميّة الحكومية مالانج. المشرف : 1. الدكتور الحاجّ ترمذي الماجستير 2. ديوي أسميارتي الماجستير.

الكلمات المرشدة : Zagreb Indices الأوّل و الثّاني, موضع تقسيم الصفر الكامل, طوق العدد الصحيح Modulo 4p

المثال : R طوق العدد الصحيح Modulo 4p و Z(R) هي مجموعة تقسيم الصفر. الموضع $ZT(R)$ هو الموضع بنواحيها فهي مجموعة تقسيم الصفر و ليس صفرا من R لناحيتيها المختلفتين. و x, y كانت موصولة مباشرة إذا كان xy يساوي 0 و x زائد y∈ $Z(R)$. أمّا الهدف من هذا البحث تعيين الصيغة Zagreb Indices الأوّل و الثّاني في موضع تقسيم الصفر الكامل من طوق العدد الصحيح Modulo 4p لأجل p الأولي. و طريقة البحث المستخدمة لهذا البحث هي الدراسة الكتابية باستخدام عدد من الكتب و الصحيفات كالمراجع. والنتيجة من هذا البحث هي كما ستأتي :

1. موضع تقسيم الصفر الكامل عن طوق العدد الصحيح Modulo 4p هي الأعداد الأولية هو:
   a. هو رؤوس الرسم البيانيالإجمال= $Z(\mathbb{Z}_{4p})^* = \{np, 2k | n = 1,3,\ k = 1,2.3, \dots, 2p-1\}$.
   b. $\{2p, u\} \in E\left(ZT(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ إذا كان $u = 2k, k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ ثم $2p \in V\left(ZT(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ هو $2p-2$
   c. $\{2k, u\} \in E\left(ZT(\mathbb{Z}_{4p})\right), k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ ا إذا كان $u = 2$ ثم $\in V\left(ZT(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ هو 1
   d. 3p و p نقطتان منفصلتان.
2. الأوّل و الثّاني في موضع تقسيم الصفر الكامل على الموضع المقسم للصفر الكامل من أطواق $\mathbb{Z}_{4p}$ هو

$$M_1\left(ZT(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p-2)(2p-1)$$
$$M_2\left(ZT(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p-2)^2.$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dalam Al-Qur'an, Sebagaimana telah disebutkan dalam Q.S An-Nisa' ayat 36 yang artinya:

"Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. Dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapak, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri"

Pencipta (Allah Swt.) dan hamba-hambanya dapat dipresentasikan oleh tititk-titik dari suatu graf sedangkang sisi-sisinya merupakan representasi dari hubungan antara pencipta dengan hamba-hamba-Nya dan hubungan antara sesama hamba yang terjalin. Pada ayat di atas, menjelaskan tentang perintah Allah Swt untuk menyembah-Nya, kepada-Nya saja dan mengarahkan segala bentuk ibadah kepada-Nya. Selain itu, Allah Swt memerintah untuk selalu berbuat baik dalah hal ucapan maupun dalam hal perbuatan kepada kedua orang tua, baik kerabat dekat maupun jauh, anak yatim, orang miskin, tetangga dan lain-lain.

Kajian graf yang dibangun dari ring merupakan salah satu permasalahan yang banyak diteliti. Menurut Wicaksono (2013) ring adalah suatu himpunan dengan operasi penjumlahan dan perkalian biner dengan syarat memiliki sifat grup abelian terhadap penjumlahan, assosiatif terhadap perkalian, dan distributif perkalian terhadap penjumlahan. Apabila operasi perkalian ring tersebut bersifat komutatif maka ring tersebut dikatakan ring komutatif. Apabila ring tersebut memiliki identitas perkalian maka ring tersebut dikatakan ring dengan unsur kesatuan.

Ring yang digunakan dalam penelitian ini adalah ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan p bilangan prima. Menurut Buchmann (2004) jika m adalah bilangan bulat dengan $m > 1$, maka $(\mathbb{Z}_{m,} +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan $1 \in \mathbb{Z}_m$.

Menurut definisinya, graf adalah sebuah diagram yang terdiri dari titik dan sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik yang lain. Suatu graf G terdiri dari gabungan himpunan tak kosong titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang menghubungkan titik-titik pada G.

Pada penelitian ini suatu unsur a dari ring komutatif dengan unsur kesatuan R disebut pembagi nol apabila terdapat unsur tak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $\mathrm{Z}(R)$ (Joshi, K.D., 1989). Pembagi nol tak nol dilambangkan dengan $\mathrm{Z}(R)^*$.

Menurut Wicaksono (2013) graf pembagi nol dari suatu ring komutatif didefinisikan sebagai graf sederhana dengan titik-titiknya adalah pembagi nol tak nol dari ring. Dua titik berbeda dikatakan terhubung jika dan hanya jika $xy = 0$. Menurut Riyanti (2018) graf total didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya merupakan semua anggota dari ring dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in \mathrm{Z}(R)$.

Penelitian terkait graf pembagi nol total telah dilakukan oleh Alen Duric (2018) dengan judul *The Total Zero Divisor of commutative ring* yang menjelaskan keterhubungan graf pembagi nol dengan graf total dari suatu ring. Graf pembagi nol total dari ring komutatif dinotasikan dengan $\mathrm{ZT}(R)$ yang memiliki himpunan titik pembagi nol tak nol dan dua titik berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $uv = 0$ dan $u + v \in \mathrm{Z}(R)$.

Penelitian ini berkaitan dengan Indeks Zagreb pertama yang telah diperkenalkan lebih dari empat puluh tahun yang lalu dan didefinisikan sebagai jumlah kuadrat dari titik pada graf. Penelitian terkait indeks Zagreb pertama telah dilakukan oleh Gutman, dkk (2015) yang berjudul *On Zagreb Indices and Coindices* yang membahas tentang suatu himpunan yang dibagun oleh indeks Zagreb dan coindeks dari graf beserta komplemennya.

Selanjutnya indeks Zagreb kedua didefinisikan sebagai jumlah dari derajat pasangan titik yang terhubung langsung pada graf. Penelitian terkait indeks Zagreb kedua yaitu *The Zagreb Indices of Graph Based on New Operation Related to the Join of Graph* oleh Prosanta Sakar, dkk (2017) dan penelitian *Multiplicative Hyper Zagreb Indices and Coindices of Graph* Oleh V.R.Kulli (2016).

Berdasarkan uraian di atas, sampai saat ini belum ada penelitian terkait indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring komutatif. Oleh karena itu penulis tertarik untuk meneliti tentang indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan yang dalam hal ini dikhususkan pada bilangan bulat modulo $4p$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$?
2. Bagaimana rumus indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$?

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengetahui graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.
2. Mengatahui rumus indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikanmanfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.
2. Dapat dijadikan rujukan untuk penelitian beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya $p \geq 3$ dengan p bilangan prima.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mempelajari berbagai literatur dan mengkaitkannya. Dari studi literatur tersebut diharapkan dapat ditemukan teori baru dari teori-teori lama. Adapun prosedur kerja dari penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menentukan pembagi nol dari ring $\mathbb{Z}_{12,}$ $\mathbb{Z}_{20,}\mathbb{Z}_{28}$ dengan menggunakan tabel perkalian untuk dijadikan titik pada graf pembagi nol total.
2. Menentukan titik-titik yang terhubung langsung pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12,}$ $\mathbb{Z}_{20,}\mathbb{Z}_{28}$.
3. Menggambar graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12,}$ $\mathbb{Z}_{20,}\mathbb{Z}_{28}$.
4. Menentukan derajat setiap titik pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12,}$ $\mathbb{Z}_{20,}\mathbb{Z}_{28}$.
5. Membuat dugaan (konjektur) derajat titik yang terbentuk dari graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{4p}$ dengan p bilangan prima.
6. Membuat lemma terkait graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan p bilangan prima, meliputi:
   a. Himpunan titik dari graf pembagi nol total
   b. Keterhubungan titik pada graf pembagi nol total
   c. Derajat titik pada graf pembagi nol total
7. Menentukan indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring $\mathbb{Z}_{12,}$ $\mathbb{Z}_{20,}\mathbb{Z}_{28}$
8. Merumuskan indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.
9. Membuktikan rumus indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan berikut:

Bab I Pendahuluan, meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka, berisi tentang teori yang berhubungan dengan penelitian ini meliputi grup, ring, relasi ekuivalensi, kongruensi, ring bilangan bulat modulo n, graf, derajat titik, graf pembagi nol total pada ring komutatif, indeks Zagreb pertama dan kedua.

Bab III Pembahasan, berisi tentang penjelasan penulis tentang indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat $4p$ dengan p prima.

Bab IV Penutup, berisi tentang kesimpulan dari pembahasan serta saran-saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan beberapa studi pustaka yang digunakan sebagai dasar teori dalam penelitian. Selain itu, bab ini juga membahas tentang penelitian sebelumnya yang terkait dengan penelitian yang akan dilakukan.

2.1 Grup

Menurut Sukirman (2005) grup merupakan salah satu struktur aljabar yang berkenaan dengan suatu himpunan yang tidak kosong dan suatu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma. Misalkan G adalah himpunan yang tak kosong dan operasi $+$ pada G adalah suatu operasi biner. Jika $(G, +)$ suatu monoid yang setiap unsurnya mempunyai invers dalam G, maka $(G, +)$ disebut grup.

Definisi 2.1.1

(1) Himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $+$ atau ditulis $(G, +)$ adalah suatu grup, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ yaitu $+$ bersifat asosiatif.

(ii) G memuat identitas, misal e.

Terdapat $e \in G$ sehingga $a + e = e + a = a$, untuk semua $a \in G$.

(iii) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, a^{-1} adalah invers dari a, sedemikian sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$.

(2) Jika $(G,+)$ suatu grup yang memenuhi sifat komutatif, yaitu untuk $a,b \in G$ berlaku $a+b=b+a$, maka $(G,+)$ disebut grup komutatif atau *grup abelian.*

Contoh 2.1.1

$(\mathbb{Z},+)$ merupakan grup, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ adalah operasi penjumlahan. Karena $(\mathbb{Z},+)$ memenuhi:

(i) Ambil $a,b,c \in \mathbb{Z}$, maka $(a+b)+c=a+(b+c)$.
Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

(ii) Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a+0=0+a=a, \forall a \in \mathbb{Z}$.
Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

(iii) Untuk $a \in \mathbb{Z}$ ada$(-a) \in \mathbb{Z}$, sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$
Jadi invers dari a adalah $-a$.

Jadi $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup.

Selanjutnya $(\mathbb{Z},+)$ merupakan grup komutatif, karena $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup. Misal $x,y \in \mathbb{Z}$, maka $x+y=y+x$. Jadi $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup komutatif.

2.2 Ring

Ring merupakan suatu struktur aljabar pengembangan dari grup yaitu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner. Menurut Dewi (2011) sebuah ring adalah himpunan dengan operasi penjumlahan dan perkalian biner yang didefinisikan pada R dengan memenuhi beberapa aksioma.

Definisi 2.2.1

(1) Suatu Ring $(R,+,\times)$ adalah suatu himpunan R bersama dengan operasi biner $'+'$ dan $'\times'$, yang disebut sebagai penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan pada R sedemikian sehingga aksioma berikut dipenuhi:

1. $(R,+)$ merupakan suatu grup abelian.
2. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, untuk semua $a, b, c \in R$ yaitu $\times$ bersifat asosiatif.
3. Untuk semua $a, b, c \in R$, hukum distributif kiri $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan hukum distributif kanan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ dipenuhi.

(2) Suatu Ring yang bersifat komutatif terhadap operasi perkalian disebut ring komutatif. Ring dikatakan komutatif jika untuk semua a, $b \in R$ maka $ab = ba$.

(3) Suatu Ring R dengan suatu identitas perkalian 1 sedemikian sehingga $1 \times x = x \times 1 = x$ untuk semua $x \in R$, disebut ring dengan kesatuan.

(4) Jika n adalah bilangan bulat dengan $n > 1$, maka $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan $1 \in \mathbb{Z}_n$ (Buchmann, 2004).

Contoh 2.2.1

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan ring, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, $+$ adalah operasi penjumlahan,dan $\times$ adalah operasi perkalian. Karena $(\mathbb{Z}, +, \times)$ memenuhi:

(i) $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian karena sudah dibuktikan pada contoh sebelumnya.

(ii) Operasi $\times$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(iii) Operasi $\times$ bersifat distributive terhadap $+$.

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$(a \times b) + c = (a \times c) + (b \times c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Jadi, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring.

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \times b = b \times a$, yang berarti operasi kedua $(\times)$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$. Jadi, $(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan, karena ada $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $a \times 1 = 1 \times a = a$, yang berarti terdapat unsur identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap oeprasi kedua $(\times)$. Jadi $(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan.

2.3 Relasi Ekuivalen dan Kongruensi

2.3.1 Relasi Ekuivalen

Definisi 2.3.1.1

Suatu relasi $\mathcal{R}$ dalam suatu himpunan tak kosong A disebut relasi ekuivalensi jika memenuhi sifat berikut ini:

a) Refleksif, jika untuk setiap $a \in A$, berlaku $a\mathcal{R}a$,

b) Simetris, jika untuk setiap $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ mengakibatkan $b\mathcal{R}a$,

c) Transitif, jika untuk setiap $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ dan $b\mathcal{R}c$ mengakibatkan $a\mathcal{R}c$.

(Abdurrahman, 2019)

Contoh 2.3.1.1

Diberikan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan

$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,3),(3,2)\}$, maka $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalensi pada A.

Definisi 2.3.1.2

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A dan $x \in A$. Kelas yang memuat x adalah subhimpunan-subhimpunan yang dinyatakan dengan

$$[x] = \{y \in A | y\mathcal{R}x\}.$$

Himpunan $[x]$ disebut kelas ekuivalensi (berkaitan dengan $\mathcal{R}$) dari unsur x (Abdurrahman, 2019).

2.3.2 Kongruensi Modulo n

Definisi 2.3.2.1

Misalkan n bilangan bulat positif, $n > 1$, dan a, b bilangan bulat. Jika n membagi $a - b$, maka dikatakan a kongruen dengan b modulo n atau ditulis $a \equiv b(mod\ n)$. Jika n tidak membagi $a - b$, maka dikatakan a tidak kongruen dengan b modulo n atau ditulis $a \not\equiv b(mod\ n)$. Misalkan $0 \leq r < n$ maka $a \equiv r(mod\ n)$ dapat dituliskan $r = a\ mod\ n$ (Hengky,2014).

Contoh 2.3.2.1

$27 \equiv 2\ (mod\ 5)$ karena $(27 - 2)$ terbagi oleh 5.

$35 \not\equiv 6(mod 7)$ karena $(35 - 6)$ tidak terbagi oleh 7.

Teorema 2.3.2.1

Relasi kongruensi modulo n adalah relasi ekuivalensi di $\mathbb{Z}$

Bukti :

Misalkan $n > 1$, dan $x, y, z\ \in \mathbb{Z}$

1. Refleksif : $x - x = (n)(0)$ maka $x \equiv x(mod\ n)$.
2. Simetris : $x \equiv y(mod\ n) \Rightarrow\ x - y = nq$ untuk $q \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow\ y - x = n(-q)$ dan $-q \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow\ y \equiv x(\ mod\ n)$.
3. Transitif : $x \equiv y(mod\ n)$ dan $y \equiv z(mod\ n)$

   $\Rightarrow\ x - y = nq$ dan $y - z = nk$ dan $q, k \in \mathbb{Z}$

   $\Rightarrow\ x - z = x - y + y - z$

   $= n(q + k)$

$$\Rightarrow \; x \equiv z(\,mod\; n).$$

Jadi relasi kongruensi adalah suatu relasi ekuivalen.

Misalkan $n > 1$ dan $n \in \mathbb{Z}$, berdasarkan definisi 2.3.1.2 untuk $a \in \mathbb{Z}$ diperoleh kelas ekuivalen

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a(mod\; n)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = nk, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x = a + nk, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{a + nk | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dua kelas ekuivalen $[a]$ dan $[b]$ sama jika dan hanya jika $a \equiv b\; (mod\; n)$.

Terdapat n kelas ekuivalen berbeda pada $\mathbb{Z}$, sebagai berikut:

$$[0] = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2n + 1, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -2 + 2, -n + 2, 2, n + 2, 2n + 2, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$[n - 1] = \{\dots, -n - 1, -1, n - 1, 2n - 1, 3n - 1, \dots\}.$$

(Gilbert L dan Gilbert J, 2015)

Kelas ekuivalen tersebut disebut dengan kelas kongruensi. Selanjutnya $[a]$ akan disimbolkan dengan $\bar{a}$. Himpunan semua kelas kongruensi modulo n pada $\mathbb{Z}$ dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_n$sebagai berikut

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n - 1}\}.$$

2.3.3 Ring Bilangan Bulat Modulo n

Misalkan n bilangan bulat positif dan $n > 1$.

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_n$ sebagai berikut:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$$

untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_n$ merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan.

(i) Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{a + b} + \bar{c}\\ &= \overline{(a + b) + c}\\ &= \overline{a + (b + c)}\\ &= \bar{a} + \overline{b + c}\\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).\end{aligned}$$

(ii) Terdapat $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} = \bar{a} + \bar{0}$.

Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, berlaku

$\bar{0} + \bar{a} = \overline{0 + a} = \bar{a}$ dan $\bar{a} + \bar{0} = \overline{0 + a} = \bar{a}$.

(iii) Untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, jelas bahwa $\overline{-a} \in \mathbb{Z}_n$ dan berlaku

$\bar{a} + \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}$ dan $\overline{-a} + \bar{a} = \overline{(-a) + a} = \bar{0}$.

(iv) Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= \overline{a + b}\\ &= \overline{b + a}\end{aligned}$$

$$= \bar{b} + \bar{a}.$$

(v) Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= \overline{a \times b} \times \bar{c} \\ &= \overline{(a \times b) \times c} \\ &= \overline{a \times (b \times c)} \\ &= \bar{a} \times \overline{b \times c} \\ &= \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}).\end{aligned}$$

(vi) Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c})$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} &= \overline{(a + b) \times c} \\ &= \overline{a \times c} + \overline{b \times c} \\ &= (\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c}).\end{aligned}$$

(vii) Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{a}$.

Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= \overline{a \times b} \\ &= \overline{b \times a} \\ &= \bar{b} \times \bar{a}.\end{aligned}$$

(viii) Terdapat $\bar{1} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $\bar{1} \times \bar{a} = \bar{a} = \bar{a} \times \bar{1}$.

Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, berlaku

$\bar{1} \times \bar{a} = \overline{1 \times a} = \bar{a}$ dan $\bar{a} \times \bar{1} = \overline{1 \times a} = \bar{a}$.

Berdasarkan uaraian di atas ring $\mathbb{Z}_n$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ seperti ini dapat dikatakan ring bilangan bulat modulo n. Selanjutnya operasi pada ring $\mathbb{Z}_n$ dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{(a+b) mod\ n}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \overline{(a \times b) mod\ n}$$

2.4 Graf

Menurut Abdusakir, dkk (2009) nama "graf" diberikan karena graf dapat disajikan secara grafik atau gambar, dan dengan bentuk gambar inilah sifat-sifat graf dapat dikenali dengan detail. Titik disajikan dalam bentuk noktah atau lingkaran kecil dan sisi disajikan dalam bentuk garis atau kurva yang memasangkan dua titik.

Definisi 2.4.1

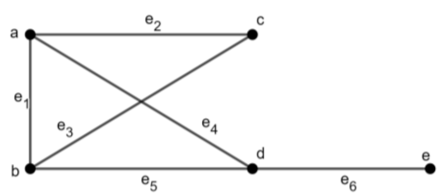
Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi.

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ sebagai berikut.

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b. c), (d, e)\}$$

Graf G tersebut secara lebih jelas dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 2.4 Graf G

Graf G di atas dapat juga ditulis dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*. Berdasarkan gambar di atas titik a dan b terhubung langsung, demikian juga dengan a dan c, a dan d, serta d dan e. Sedangkan titik a dan e tidak terhubung langsung, demikian juga dengan titik b dan e serta titik c dan e.

Titik v dan sisi e serta titik u dan sisi e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Berdasarkan gambar di atas sisi e_1 terkait langsung dengan titik a dan b. Sisi e_2 terkait langsung dengan titik a dan c. Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan titik c dan d.

Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Berdasarkan gambar di atas sisi e_1 dan e_2 terhubung langsung karena terkait langsung pada stu titik yang sama, yaitu titik a. Sisi e_1 dan e_6 tidak terhubung langsung karena tidak terkait langsung pada titik yang sama (abdusakir, dkk, 2009).

2.4.1 Derajat Titik

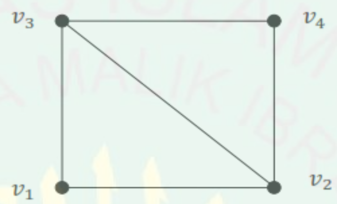
Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Jika hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

$$\deg(v) = |N(v)|$$

Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh 2.4.1:

Perhatikan graf A yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ berikut ini:



Gambar 2.5 Graf A

Dari Gambar 2.5 tersebut diperoleh:

$deg(v_1) = 2$ $\qquad$ $deg(v_3) = 3$

$deg(v_2) = 3$ $\qquad$ $deg(v_4) = 2$

2.4.2 Graf Pembagi Nol Total Pada Ring Komutatif

Definisi 2.4.2.1

Suatu unsur a dari ring komutatif dengan unsur kesatuan R disebut pembagi nol apabila terdapat unsur tak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $\mathrm{Z}(R)$ (Joshi, K.D., 1989). Lebih lanjut himpunan pembagi nol tak nol akan dilambangkan dengan $\mathrm{Z}(R)^*$.

Unsur nol merupakan pembagi nol, karena terdapat unsur tak nol c dari ring komutatif dengan unsur kesatuan R sedemikian sehingga $0c = 0$.

Definisi 2.4.2.2

Graf pembagi-nol total dari ring komutatif dengan unsur kesatuan R yang dinotasikan $\mathrm{ZT}(R)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $V\left(\mathrm{ZT}(R)\right)$ dan himpunan sisi $E\left(\mathrm{ZT}(R)\right)$ sebagai berikut:

(i) $V\left(\mathrm{ZT}(R)\right) = \mathrm{Z}(R)^*$

(ii) $uv \in E\left(\mathrm{ZT}(R)\right) \leftrightarrow uv = 0$ dan $u + v \in \mathrm{Z}(R)$

dengan $u, v \in V\left(\mathrm{ZT}(R)\right), u \neq v$ (Duric, 2018).

Contoh 2.4.2.1:

Ring bilangan bulat modulo 8 dengan anggotanya adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$ memiliki pembagi nol yaitu $\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$. Sedangkan yang akan menjadi titik pada graf pembagi nol total adalah $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}$. Selanjutnya titik $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung, berlaku pula pada titik $\bar{4}$ dan $\bar{6}$ karena hasil penjumlahannya adalah pembagi nol dan hasil kalinya adalah nol, kecuali titik $\bar{2}$ dan $\bar{6}$ tidak terhubung langsung karena $\bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{4} \neq \bar{0}$.

2.5 Indeks Zagreb Pertama dan Kedua

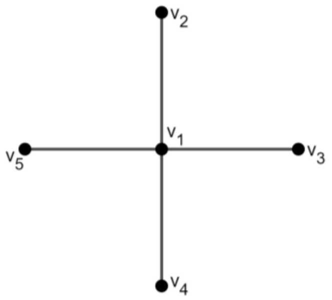
Misalkan graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Menurut Ivan (2015) indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

$$M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)^2$$

$$M_2(G) = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

Contoh 2.5.1:

Perhatikan graf H yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ seperti berikut:



Gambar 2.6 Graf H

Dari Gambar 2.6 diperoleh:

$deg(v_1) = 4$ $\quad$ $deg(v_4) = 1$

$deg(v_2) = 1$ $\quad$ $deg(v_5) = 1$

$deg(v_3) = 1.$

Selanjutnya dihitung nilai indeks Zagreb pertama dan kedua dari graf tersebut, sehingga diperoleh:

$$M_1 = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)^2$$

$$= deg(v_1)^2 + deg(v_2)^2 + deg(v_3)^2 + deg(v_4)^2 + deg(v_5)^2$$

$$= 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$$= 20$$

Kemudian dihitung nilai indeks Zagreb kedua sebagi berikut:

$$M_2 = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} deg(v_1) \cdot deg(v_2)$$

$$= \big(deg(v_1) \cdot deg(v_2)\big) + \big(deg(v_1) \cdot deg(v_3)\big) + \big(deg(v_1) \cdot deg(v_4)\big)$$

$$+ \big(deg(v_1) \cdot deg(v_5)\big)$$

$$= (4 \cdot 1) + (4 \cdot 1) + (4 \cdot 1) + (4 \cdot 1)$$

$$= 16$$

2.6 Kajian Islam

Salah satu kesitimewaan Al-Qur'an yang paling utama adalah hubungannya dengan ilmu pengetahuan, salah satu ilmu pengatahuan yang dapat diintegrasikan dari Al-Qur'an dalah matematika. Cabang-cabang matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, pemodelan matematika, struktur aljabar, logika, teori graf, dan lain-lain.

Topik yang diambil pada penelitian ini adalah teori graf. Graf menurut definisinya merupakan suatu himpunan tak kosong yang memuat objek-objek yang disebut titik dan suatu pasangan tak berurutan dari titik-titk berbeda yang disebut sisi.

Dalam Al-Qur'an, titik merepresentasikan pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi adalah yang menghubungkan titik-titik tersebut. Hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba Allah. Berikut adalah ayat yang menjelaskan bahwa hamba yang beriman itu bersaudara Surat Al-Hujuraat ayat 10.

artinya : "Orang-orang yang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat."(QS.Al-Hujurat:10)

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang mukmin itu bersaudara dalam agama Allah Swt. Apabila terjadi perselisihan, maka orang-orang mukmin harus mendamaikan, disertai ketakwaan pada Allah Swt dengan melaksanakan perintahNya dan menjauhi laranganNya. Sehingga barang siapa yang melakukan hal itu niscaya Allah Swt memberi rahmat kepadanya. Ayat tersebut termasuk dalam hubungan sesama hamba Allah.

Penelitian ini juga membahas mengenai Ring. Himpunan tak kosong dengan dua operasi biner (Ring) yang salah satu sifatnya adalah tertutup. Suatu operasi dikatakan tertutup pada suatu himpunan jika hasil operasi anggota-anggota himpunan tersebut merupakan anggota himpunan itu juga.

Sifat tertutup dapat dikaitkan dengan hukum alam yang berlaku yaitu semua perbuatan (perbuatan baik dan perbuatan buruk) yang dilakukan oleh seseorang, maka akan kembali kepada dirinya sendiri sesuai dengan perbuatan yang dilakukannya. Allah berfirman dalam Surat Al-Isra' ayat 7.

artinya : "Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik untuk dirimu sendiri. Dan jika kamu berbuat jahat, maka (kerugian kejahatan) itu untuk dirimu sendiri."(QS.Al-Isra':7)

Ring didefinisikan pada *R* dengan memenuhi beberapa aksioma. Dalam konsep islam ring dapat direpresentasikan yakni bagi kaum mukminin yang akan terjun ke medan perang mereka harus mengikuti aturan aturan atau strategi dalam peperangan. Hal itu terdapat dalam Alquran Qs.Al Baqarah ayat 190.

Artinya:"Dan peranglah di jalan Allah orang-orang yang memerangi kamu tetatpi janganlah melampaui batas, karena Allah tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas."(QS.Al Baqarah:190)

Makna yang terdapat dari kandungan ayat di atas yakni menjelaskan bahwasanya kaum mukminin harus berjuang untuk mendapatkan kemenangan dalam kehidupannya, akan tetapi cara mereka untuk meraih kemenangan tersebut dengan memeatuhi aturan aturan atau strategi dalam peperangan.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang rumus indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan p prima. Dalam pencarian rumus tersebut, terlebih dahulu ditentukan derajat titik pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dan menunjukkan nilai indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol total dari ring komutatif bilangan bulat modulo $4p$.

3.1 Graf Pembagi Nol Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $4p$

Graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dapat diketahui dengan mencari bentuk graf pembagi nol total dari $\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{20}, \mathbb{Z}_{28}$ sebagai berikut.

3.1.1 Graf Pembagi Nol Total dari Ring $\mathbb{Z}_{12}$

Anggota $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}$. Selanjutnya akan dicari anggota $Z(\mathbb{Z}_{12})$ dengan membuat tabel perkalian, tabel dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 3.1 Tabel Perkalian dari ring $\mathbb{Z}_{12}$

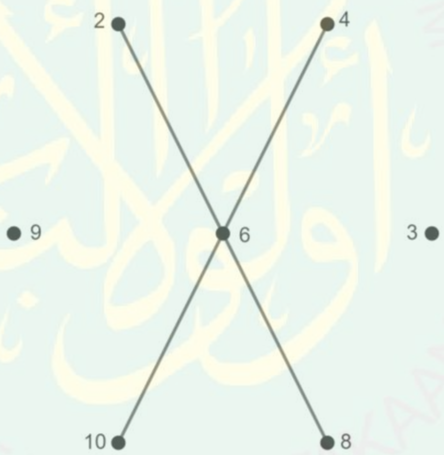
$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	10	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 3.1 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$ dan $V\big(Z(\mathbb{Z}_{12})\big) = Z(\mathbb{Z}_{12})^* = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}\}$. Dua titik berbeda akan terhubung langsung apabila dikalikan mengahasilkan $\bar{0}$ dan apabila dijumlahkan hasilnya ada di $Z(\mathbb{Z}_{12})$. Selanjutnya akan dilihat penjumlahan pasangan titik yang hasil kalinya nol sebagai berikut.

Tabel 3.2 Tabel Penjumlahan Pasangan Titik $Z(\mathbb{Z}_{12})^*$

u	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
v	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$
$u+v$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$

Dari Tabel 3.2 diperoleh pasangan titik yang terhubung langsung dan tidak terhubung langsung. Sehingga Graf $ZT(\mathbb{Z}_{12})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf $ZT(\mathbb{Z}_{12})$

Dari Gambar 3.1 diperoleh:

$deg(\bar{2}) = 1$ $\quad deg(\bar{3}) = 0$ $\quad deg(\bar{4}) = 1$ $\quad deg(\bar{6}) = 4$

$deg(\bar{8}) = 1$ $\quad deg(\bar{9}) = 0$ $\quad deg(\overline{10}) = 1.$

3.1.2 Graf Pembagi Nol Total dari Ring $\mathbb{Z}_{20}$

Anggota $\mathbb{Z}_{20}$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17},$

$\overline{18}, \overline{19}$. Selanjutnya akan dicari anggota $Z(\mathbb{Z}_{20})$ dengan membuat tabel perkalian, tabel dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 3.3 Tabel Perkalian dari ring $\mathbb{Z}_{20}$

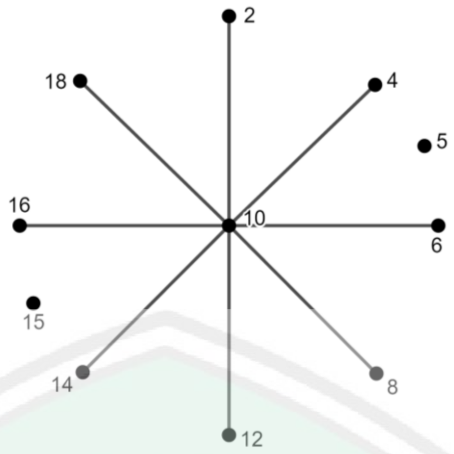
$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	16	18	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	15	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	13	$\overline{16}$	19	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	12	16	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	16	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	16	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	15	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	18	$\overline{4}$	$\overline{10}$	16	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	18	$\overline{4}$	$\overline{10}$	16	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	15	$\overline{2}$	$\overline{9}$	16	$\overline{3}$	$\overline{10}$	17	$\overline{4}$	$\overline{11}$	18	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	16	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	16	$\overline{4}$	12	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	18	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	19	$\overline{8}$	17	$\overline{6}$	15	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	15	$\overline{6}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	19	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	5	$\overline{16}$	$\overline{7}$	18	$\overline{9}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	12	$\overline{4}$	16	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	12	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	17	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	12	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	18	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	15	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	15	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	16	12	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	16	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	16	12	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	19	16	13	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	18	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	18	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dari Tabel 3.3 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{20}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}\}$ dan $V(ZT(\mathbb{Z}_{20})) = Z(\mathbb{Z}_{20})^* = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}\}$. Dua titik berbeda akan terhubung langsung apabila dikalikan mengahasilkan $\overline{0}$ dan apabila dijumlahkan hasilnya ada di $Z(\mathbb{Z}_{20})$. Selanjutnya akan dilihat penjumlahan pasangan titik yang hasil kalinya nol sebagai berikut.

Tabel 3.4 Tabel Penjumlahan Pasangan Titik $Z(\mathbb{Z}_{20})^*$

u	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$
v	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$
$u+v$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$

Dari Tabel 3.4 diperoleh pasangan titik yang terhubung langsung dan tidak terhubung langsung. Sehingga graf $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf ZT($\mathbb{Z}_{20}$)

Dari Gambar 3.2 di atas diperoleh:

$deg(\bar{2}) = 1$ $\quad deg(\bar{4}) = 1$ $\quad deg(\bar{5}) = 0$ $\quad deg(\bar{6}) = 1$

$deg(\bar{8}) = 1$ $\quad deg(\overline{10}) = 8$ $\quad deg(\overline{12}) = 1$ $\quad deg(\overline{14}) = 1$

$deg(\overline{15}) = 0$ $\quad deg(\overline{16}) = 1$ $\quad deg(\overline{18}) = 1.$

3.1.3 Graf Pembagi Nol Total dari Ring $\mathbb{Z}_{28}$

Anggota Z($\mathbb{Z}_{28}$) adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, , \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, , \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}$. Selanjutnya akan dicari anggota Z($\mathbb{Z}_{20}$) dengan membuat tabel perkalian, tabel dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 3.5 Tabel perkalian dari ring $\mathbb{Z}_{28}$

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2	5	8	11	14	17	20	23	26	1	4	7	10	13	16	19	22	25
4	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24	0	4	8	12	16	20	24
5	0	5	10	15	20	25	2	7	12	17	22	27	4	9	14	19	24	1	6	11	16	21	26	3	8	13	18	23
6	0	6	12	18	24	2	8	14	20	26	4	10	16	22	0	6	12	18	24	2	8	14	20	26	4	10	16	22
7	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21	0	7	14	21
8	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20	0	8	16	24	4	12	20
9	0	9	18	27	8	17	26	7	16	25	6	15	24	5	14	23	4	13	22	3	12	21	2	11	20	1	10	19
10	0	10	20	2	12	22	4	14	24	6	16	26	8	18	0	10	20	2	12	22	4	14	24	6	16	26	8	18
11	0	11	22	5	16	27	10	21	4	15	26	9	20	3	14	25	8	19	2	13	24	7	18	1	12	23	6	17
12	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16	0	12	24	8	20	4	16
13	0	13	26	11	24	9	22	7	20	5	18	3	16	1	14	27	12	25	10	23	8	21	6	19	4	17	2	15
14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14	0	14
15	0	15	2	17	4	19	6	21	8	23	10	25	12	27	14	1	16	3	18	5	20	7	22	9	24	11	26	13
16	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12	0	16	4	20	8	24	12
17	0	17	6	23	12	1	18	7	24	13	2	19	8	25	14	3	20	9	26	15	4	21	10	27	16	5	22	11
18	0	18	8	26	16	6	24	14	4	22	12	2	20	10	0	18	8	26	16	6	24	14	4	22	12	2	20	10
19	0	19	10	1	20	11	2	21	12	3	22	13	4	23	14	5	24	15	6	25	16	7	26	17	8	27	18	9
20	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8	0	20	12	4	24	16	8
21	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7	0	21	14	7
22	0	22	16	10	4	26	20	14	8	2	24	18	12	6	0	22	16	10	4	26	20	14	8	2	24	18	12	6
23	0	23	18	13	8	3	26	21	16	11	6	1	24	19	14	9	4	27	22	17	12	7	2	25	20	15	10	5
24	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4	0	24	20	16	12	8	4
25	0	25	22	19	16	13	10	7	4	1	26	23	20	17	14	11	8	5	2	27	24	21	18	15	12	9	6	3
26	0	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	0	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Dari Tabel 3.5 diperoleh

$Z(\mathbb{Z}_{28}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$ dan

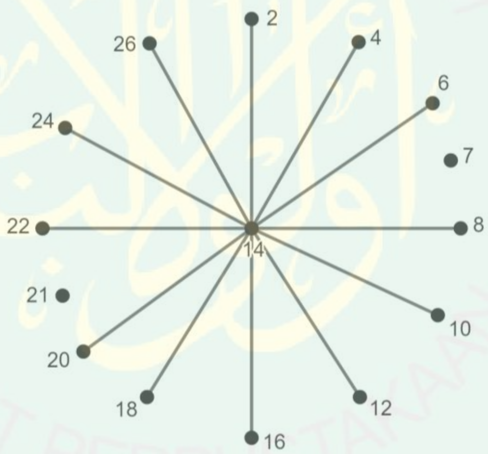
$V(Z(\mathbb{Z}_{28})) = Z(\mathbb{Z}_{28})^* = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}\}$.

Dua titik yang berbeda akan terhubung langsung apabila dikalikan mengahasilkan $\overline{0}$ dan apabila dijumlahkan hasilnya ada di $Z(\mathbb{Z}_{28})$. Selanjutnya akan dilihat penjumlahan pasangan titik yang hasil kalinya nol sebagai berikut.

Tabel 3.6 Tabel Penjumlahan Pasangan Titik $Z(\mathbb{Z}_{28})^*$

u	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{24}$	$\overline{26}$
v	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$
$u+v$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{26}$	$\overline{23}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{6}$	$\overline{25}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$

Dari tabel 3.6 diperoleh titik yanga terhubung langsung dan tidak terhubung langsung. Sehingga graf $ZT(\mathbb{Z}_{28})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf $ZT(\mathbb{Z}_{28})$

Dari Gambar 3.3 diperoleh:

$deg(\overline{2}) = 1$ $\quad deg(\overline{4}) = 1$ $\quad deg(\overline{6}) = 1$ $\quad deg(\overline{7}) = 0$

$deg(\overline{8}) = 1$ $\quad deg(\overline{10}) = 1$ $\quad deg(\overline{12}) = 1$ $\quad deg(\overline{14}) = 12$

$deg(\overline{16}) = 1$ $\quad deg(\overline{18}) = 1$ $\quad deg(\overline{20}) = 1$ $\quad deg(\overline{21}) = 0$

$deg(\overline{22}) = 1$ $\quad deg(\overline{24}) = 1$ $\quad deg(\overline{26}) = 1$.

Berdasarkan percobaan yang telah dilakukan, keterhubungan antar titik di $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ dapat dinyatakan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.7 Keterhubungan antar titik di $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$

p	$u \in Z\left(\mathbb{Z}_{4p}\right)^*$	Titik yang terhubung langsung dengan u	$deg(u)$
	$\overline{2}$	$\overline{6}$	1
	$\overline{3}$	-	0
	$\overline{4}$	$\overline{6}$	1
3	$\overline{6}$	$\overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{10}$	4
	$\overline{8}$	$\overline{6}$	1
	$\overline{9}$	-	0
	$\overline{10}$	$\overline{6}$	1
	$\overline{2}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{4}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{5}$	-	0
	$\overline{6}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{8}$	$\overline{10}$	1
5	$\overline{10}$	$\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}$	8
	$\overline{12}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{14}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{15}$	-	0
	$\overline{16}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{18}$	$\overline{10}$	1
	$\overline{2}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{4}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{6}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{7}$	-	0
	$\overline{8}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{10}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{12}$	$\overline{14}$	1
7	$\overline{14}$	$\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}$	12
	$\overline{16}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{18}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{20}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{21}$	-	0
	$\overline{22}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{24}$	$\overline{14}$	1
	$\overline{26}$	$\overline{14}$	1

Berdasarkan Tabel 3.7 graf $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ dengan p bilangan prima, $p \geq 3$ membentuk suatu pola yaitu titik $2p$ memiliki derajat $2p - 2$ dan titik $2k$ untuk setiap $k = 1,2.3, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ memiliki derajat 1, sedangkan titik $p, 3p$ memiliki derajat 0. Dari dugaan tersebut selanjutnya dibuat lemma.

Misalkan $a \in \mathbb{Z}_{4p}, a \neq 0$, maka a adalah pembagi nol tak nol jika dan hanya jika $ax \equiv 0 (mod\ 4p)$ memiliki solusi tak nol. Jadi a adalah pembagi nol jika dan hanya jika $(a, 4p) > 1$.

Lemma 3.1.1

Misalkan p bilangan prima. Himpunan pembagi nol tak nol dari ring bilangan bulat modulo $4p$ adalah

$$\mathrm{Z}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})^* = \{np, 2k | n = 1,3 \ \ k = 1,2.3, \dots, 2p-1\}.$$

Bukti :

Misalkan $u \in \mathbb{Z}_{4p}, u \neq 0$

$u \in \mathrm{Z}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})^* \leftrightarrow ux \equiv 0 (mod\ 4p)$ memiliki solusi tak nol

$\leftrightarrow (u, 4p) > 1$

$\leftrightarrow 2|u$ atau $p|u$

Jadi $\mathrm{Z}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})^* = \{np, 2k | n = 1,3, \ k = 1,2.3, \dots, 2p-1\}$.

Lemma 3.1.2

Misalkan p bilangan prima $p \geq 3$ dan $u \in V\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$, maka $\{2p, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ jika dan hanya jika $u = 2k, k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$.

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.1.1 yang menjadi himpunan titik pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})$ adalah $\{np, 2k | n = 1,3, \ k = 1,2,3, \dots, 2p-1\}$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $2k \in \mathrm{Z}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})^*$, berlaku $2k \cdot 2p = 4kp \equiv 0 (mod\ 4p)$ dan $(2k + 2p, 4p) \geq 2$.

Jadi $\{2p, 2k\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ untuk setiap $k = \{1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1\}$.

Selanjutnya, karena $p \cdot 2p \not\equiv 0 (mod\ 4p)$ dan $3p \cdot 2p \not\equiv 0 (mod\ 4p)$ maka $\{2p, p\}, \{2p, 3p\} \notin \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$.

Dengan demikian terbukti $\{2p, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ jika dan hanya jika $u = 2k$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$.

Akibat 3.1.2

Misalkan p bilangan prima $p \geq 3$, maka derajat $2p$ pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah

$$deg(2p) = 2p - 2$$

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.1.2,

$$deg(2p) = |\{1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1\}| = 2p - 2$$

Jadi $deg(2p) = 2p - 2$.

Lemma 3.1.3

Misalkan p bilangan prima $p \geq 3$ dan $u \in V\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$, maka $\{2k, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ jika dan hanya jika $u = 2p$

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.1.2, titik $2k$ terhubung langsung dengan titik $2p$ maka $\{2k, 2p\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$. Selanjutnya karena $2k \cdot 2l \not\equiv 0 (mod\ 4p)$ untuk setiap $k \neq l, k, l = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ dan karena $p \cdot 2k \not\equiv 0 (mod\ 4p)$, $3p \cdot 2k \not\equiv 0 (mod\ 4p)$ maka $\{2k, 2l\}, \{2k, p\}, \{2k, 3p\} \notin \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$.

Dengan demikian terbukti $\{2k, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ jika dan hanya jika $u = 2p$.

Akibat 3.1.3

Misalkan p bilangan prima dan $p \geq 3$, maka derajat $2k$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah

$$deg(2k) = 1$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.1.3,

$$deg(2k) = 1$$

Akibat 3.1.4

Misalkan p bilangan prima $p \geq 3$ dan $w \in \{p, 3p\}$, maka dearajat w pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah

$$deg(w) = 0$$

Bukti :

Perhatikan bahwa $p \cdot 3p \not\equiv 0 (mod\ 4p)$ maka $\{p, 3p\} \notin \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{\mathbf{4p}})\right)$. Selanjutnya berdasarkan Lemma 3.1.2 dan Lemma 3.1.3, w tidak terhubung langsung dengan $2l$ untuk setiap $l = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$.

Jadi $deg(w) = 0$.

3.2 Indeks Zagreb Pertama dan Indeks Zagreb Kedua pada Graf Pembagi Nol Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo 4p

Rumus umum indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ dapat diperoleh dengan mengetahui hasil pada beberapa kasus khusus berikut:

3.2.1 Indeks Zagreb Pertama dan Indeks Zagreb Kedua pada ZT$(\mathbb{Z}_{12})$

Dari graf ZT$(\mathbb{Z}_{12})$ diperoleh $deg(\bar{2}) = 1$, $deg(\bar{3}) = 0, deg(\bar{4}) = 1$, $deg(\bar{6}) = 4, deg(\bar{8}) = 1, deg(\bar{9}) = 0$, $deg(\overline{10}) = 1$ maka dapat dihitung indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf ZT$(\mathbb{Z}_{12})$ yaitu:

$$M_1(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{12})) = \sum_{u \in V(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{12}))} deg(u)^2$$

$$=((deg(\bar{2}))^2 + (deg(\bar{3}))^2 + (deg(\bar{4}))^2 + (deg(\bar{6}))^2 + (deg(\bar{8}))^2 + (deg(\bar{9}))^2 + (deg(\overline{10}))^2)$$

$$=1^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 = 1 + 0 + 1 + 16 + 1 + 0 + 1 = 20$$

$$M_2(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{12})) = \sum_{\{u,v\} \in E(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{12}))} deg(u) \cdot deg(v)$$

$$= (deg(\bar{2}) \cdot deg(\bar{6})) + (deg(\bar{4}) \cdot deg(\bar{6})) + (deg(\bar{4}) \cdot deg(\bar{6})) + (deg(\overline{10}) \cdot deg(\bar{6}))$$

$$= (1.4) + (1.4) + (1.4) + (1.4) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

3.2.2 Indeks Zagreb Pertama dan Indeks Zagreb Kedua pada ZT$(\mathbb{Z}_{20})$

Dari graf ZT$(\mathbb{Z}_{20})$ diperoleh $deg(\bar{2}) = 1, deg(\bar{4}) = 1, deg(\bar{5}) = 0$, $deg(\bar{6}) = 1, deg(\bar{8}) = 1\,, deg(\overline{10}) = 8, deg(\overline{12}) = 1, deg(\overline{14}) = 1$, $deg(\overline{15}) = 0, deg(\overline{16}) = 1, deg(\overline{18}) = 1$, maka dapat dihitung indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf ZT$(\mathbb{Z}_{20})$ yaitu:

$$M_1(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{20})) = \sum_{u \in V(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{20}))} deg(u)^2$$

$=\left(\left(deg(\bar{2})\right)^2+\left(deg(\bar{4})\right)^2+\left(deg(\bar{5})\right)^2+\left(deg(\bar{6})\right)^2+\right.$

$\left(deg(\bar{8})\right)^2+\left(deg(\overline{10})\right)^2+\left(deg(\overline{12})\right)^2+\left(deg(\overline{14})\right)^2+$

$\left.\left(deg(\overline{15})\right)^2+\left(deg(\overline{16})\right)^2+\left(deg(\overline{18})\right)^2\right)$

$= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 8^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2$

$= 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 64 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 72$

$$M_2(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{20})) = \sum_{\{u,v\}\in E(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{20}))} deg(u)\cdot deg(v)$$

$= \left(deg(\bar{2})\cdot deg(\overline{10})\right) + \left(deg(\bar{4})\cdot deg(\overline{10})\right) + \left(deg(\bar{6})\cdot\right.$

$\left.deg(\overline{10})\right) + \left(deg(\bar{8})\cdot deg(\overline{10})\right) + \left(deg(\overline{12})\cdot deg(\overline{10})\right) +$

$\left(deg(\overline{12})\cdot deg(\overline{10})\right) + \left(deg(\overline{16})\cdot deg(\overline{10})\right) + \left(deg(\overline{18})\cdot\right.$

$\left.deg(\overline{10})\right)$

$= (1\cdot 8) + (1\cdot 8) + (1\cdot 8) + (1\cdot 8) + (1\cdot 8) + (1\cdot 8) +$

$(1\cdot 8) + 1\cdot 8)$

$= 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64$

3.2.3 Indeks Zagreb Pertama dan Indeks Zagreb Kedua pada ZT($\mathbb{Z}_{28}$)

Dari graf ZT($\mathbb{Z}_{28}$) diperoleh $deg(\bar{2}) = 1, deg(\bar{4}) = 1, deg(\bar{6}) = 1,$ $deg(\bar{7}) = 0, deg(\bar{8}) = 1, deg(\overline{10}) = 1, deg(\overline{12}) = 1, deg(\overline{14}) = 12,$ $deg(\overline{16}) = 1, deg(\overline{18}) = 1, deg(\overline{20}) = 1, deg(\overline{21}) = 0, deg(\overline{22}) = 1,$ $deg(\overline{24}) = 1, deg(\overline{26}) = 1,$ maka dapat dihitung indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf ZT($\mathbb{Z}_{28}$) yaitu:

$$M_1(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{28})) = \sum_{u\in V(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{28}))} deg(u)^2$$

$$= \left(\left(deg(\bar{2})\right)^2 + \left(deg(\bar{4})\right)^2 + \left(deg(\bar{6})\right)^2 + \left(deg(\bar{7})\right)^2 + \left(deg(\bar{8})\right)^2 + \left(deg(\overline{10})\right)^2 + \left(deg(\overline{12})\right)^2 + \left(deg(\overline{14})\right)^2 + \left(deg(16)\right)^2 + \left(deg(\overline{18})\right)^2 + \left(deg(\overline{20})\right)^2 + \left(deg(\overline{21})\right)^2 + \left(deg(\overline{22})\right)^2 + \left(deg(\overline{24})\right)^2 + \left(deg(\overline{26})\right)^2 \right)$$

$$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 12^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 144 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1$$

$$= 156$$

$$M_2(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{28})) = \sum_{\{u,v\} \in E(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{28}))} deg(u) \cdot deg(v)$$

$$= \left(deg(\bar{2}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\bar{4}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\bar{6}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\bar{8}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{10}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{12}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{16}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{18}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{20}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{22}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{24}) \cdot deg(\overline{14})\right) + \left(deg(\overline{26}) \cdot deg(\overline{14})\right)$$

$$= (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12) + (1 \cdot 12)$$

$$= 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12$$

$$= 144$$

Berdasarkan perhitungan indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ akan dibuat dalam bentuk tabel untuk memudahkan dalam mencari pola.

Tabel 3.8 Indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$

p	$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)$	M_1	$M_2\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)$	M_2
3	$1+0+1+16+1+0+1$	20	$(4\cdot 1)+(4\cdot 1)+(4\cdot 1)+(4\cdot 1)$	16
5	$1+1+0+1+1+64+1+1+0+1+1$	72	$(8\cdot 1)+(8\cdot 1)+(8\cdot 1)+(8\cdot 1)+(8\cdot 1)+(8\cdot 1)+(8\cdot 1)+(8\cdot 1)$	64
7	$1+1+1+0+1+1+1+1+144+1+1+0+1+1+1$	156	$(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)+(12\cdot 1)$	144

Berdasarkan uaraian di atas, selanjutnya dibuat lemma berikut.

Lemma 3.2.1

Misalkan p biangan Prima dan $p \geq 3$, indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ berturut-turut adalah

$$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p-2)(2p-1)$$

$$M_2\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p-2)^2$$

Bukti:

indeks Zagreb pertama pada graf $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah

$$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \sum_{u\in V\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)} deg(u)^2$$

Misalkan $A = \{2k|k = 1,2,\ldots,p-1,p+1,\ldots,2p-1\}$ dan $B = \{p,3p\}$.

Berdasarkan Akibat 3.1.3 maka $deg(a) = 1$, untuk setiap $a \in A$ dan berdasarkan Akibat 3.1.4 maka $deg(b) = 0$, untuk setiap $b \in B$.

Sehingga diperoleh

$$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \left(deg(2p)\right)^2 + \sum_{a\in A}\left(deg(a)\right)^2 + \sum_{b\in B}\left(\deg(b)\right)^2$$

$$= (2p-2)^2 + (2p-2) \cdot 1^2 + 0$$

$$= (2p-2)^2 + (2p-2)$$

$$= (2p-2)(2p-1).$$

Berdasarkan Lemma 3.1.2, Lemma 3.1.3, dan Akibat 3.1.4 diperoleh

$$E\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \{\{2p, 2k\} | k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1\}.$$

Sehingga indeks Zagreb kedua pada graf $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah

$$M_2\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \sum_{\{u,v\} \in E\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)} deg(u) \cdot deg(v)$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{2p-1} deg(2p) \cdot deg(2k)$$

$$= (2p-2)(2p-2)$$

$$= (2p-2)^2.$$

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan p bilangan prima $p \geq 3$ adalah suatu graf dengan:
   a. Himpunan titik $V\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = \{np, 2k | n = 1,3,\ k = 1,2,3, \dots, 2p-1\}$.
   b. $\{2p, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ jika dan hanya jika $u = 2k, k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$. Sehingga derajat titik $2p$ pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah $2p-2$.
   c. $\{2k, u\} \in \mathrm{E}\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right)$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1$ jika dan hanya jika $u = 2p$. Sehingga derajat titik $2k$ pada $\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})$ adalah 1.
   d. p dan $3p$ adalah titik terisolasi.
2. Rumus indeks Zagreb pertama dan indeks Zagreb kedua pada graf pembagi nol total dari ring bilangan bulat modulo $4p$ dengan p bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah:

$$M_1\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p-2)(2p-1)$$

$$M_2\left(\mathrm{ZT}(\mathbb{Z}_{4p})\right) = (2p-2)^2$$

4.2 Saran

Penelitian ini, penulis hanya meneliti tentang indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo $4p$. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf yang lainnya atau pada graf dari ring lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, Saman. 2019. *Seri Buku Ajar Bidang Aljabar Pengantar Teori Grup*. Sidoarjo: Zifatama Jawara.

Abdussakir, Azizah, Nilna N. & Nofandika, Fifi F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Buchmann, J.A. 2004. *Introduction to Cryptography, 2nd Edition*. Springel, New York.

Dewi, Novi Rustiana, 2011. *Analisis Struktur Daerah Integral dari Himpunan Polinomial Berdasarkan Struktur Polinomial Gelanggang.* Jurnal Penelitian Sains. Vol. 14, No. 4(A).

Duric, Alen.dkk. 2018. *The Total Zero-divisor Graph of Commuative Rings.* Journal of Algebra and Its Applications.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2015. *Element of Modern Algebra 8th Edition*. Boston. Louisiana

Gutman, Ivan.dkk. 2015. *On Zagreb Indices and Coindices*. Match Commun.

Henky, Wahyu Irawan. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN-Malang Press.

Joshi, K.D. 1989. *Foundations of Discrete Mathematic.*Wiley, New York

Riyanti, Beti.dkk. 2018. *Graf Pembagi Nol dan Graf Total pada Koede Genetik.* Jurnal Ilmiah Math. Vol.07, No.04.

Sakar, Prosanta. 2017. *The Zagreb Indices of Graph Based on New Operation Related to the Join of Graph.*Jurnal of the international mathematical virtual institute. Vol.7.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar abstrak.* Malang:UM Pres.

Wicaksono, Satrio Adi & Soleha. 2013. *Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Kesatuan.* Jurnal Sains dan Seni Pomits. Vol. 2, No. 1.

V.R.Kulli. 2016. *Multiplicative Hyper Zagreb Indices and Coindices of Graph.*International Reseach Journal of Pure Algebra.

RIWAYAT HIDUP

Dwi Hamedia Wati, lahir di Kabupaten Banyuwangi pada tanggal 30 Juni 1997 dan biasa dipanggil Dwi atau Hamed. Tinggal di Dusun Treblasala RT/RW 01/07 Desa Karangharjo Kecamatan Glenmore Kabupaten Banyuwangi. Anak kedua dari pasangan bapak Munadi dan ibu Sumiyati. Adik dari Abdul Haris.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 4 Karangharjo dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMPN 1 Glenmore dan lulus pada tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Glenmore dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa rutinitas sebagai mahasiswa dilakukan dengan tekun, selain menjadi mahasiswa dengan tugas pada umumnya, juga pernah menjadi asisten praktikum untuk mengisi waktu luang. Selain itu juga sering mengikuti kegiatan yang diadakan HMJ Integral Matematika seperti MEC dan MAC. Selain aktif dibidang akademik juga mengikuti kegiatan UKM KOPMA PADANG BULAN 2016-2017.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dwi Hamedia Wati
NIM : 16610016
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Indeks Zagreb Pertama dan Kedua Pada Graf Pembagi Nol Total Dari Ring Blangan Bulat Modulo 4*p*
Pembimbing I : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
Pembimbing II : Dewi Ismiarti, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Januari 2020	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	25 Januari 2020	Konsultasi Bab I, II, dan Kajian Keagamaan	2.
3.	17 Februari 2020	Konsultasi Bab I, II, & III	3.
4.	20 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal	4.
5.	20 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal	5.
6.	18 April 2020	Konsultasi Bab III dan Kajian Keagamaan	6.
7.	05 Mei 2020	Pembenahan Bab III dan Konsultasi Bab IV	7.
8.	21 Mei 2020	Pembenahan Bab I, II, III, dan Kajian Keagamaan	8.
9.	24 Juni 2020	ACC Keseluruhan	9.
10.	24 Juni 2020	ACC Kajian Keagamaan Keseluruhan	10.

Malang, 24 Juni 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001