SUBMODUL DAN MODUL HASIL BAGI DARI MODUL NOETHERIAN

SKRIPSI

OLEH
A'YUNINA FAIDATUL NUZULA
NIM. 16610105

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SUBMODUL DAN MODUL HASIL BAGI DARI MODUL NOETHERIAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematila (S.Mat)

Oleh
A'YUNINA FAIDATUL NUZULA
NIM.16610105

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SUBMODUL DAN MODUL HASIL BAGI DARI MODUL NOETHERIAN

SKRIPSI

Oleh

A'yunina Faidatul Nuzula
NIM. 16610105

Telah Diperiksa dan Disetujui
Tanggal 4 Desember 2020

Pembimbing I	Pembimbing II
Dewi Ismiarti, M.Si	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19870505201608012 058	NIP. 19870218201608011 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414200312 1 001

SUBMODUL DAN MODUL HASIL BAGI DARI MODUL NOETHERIAN

SKRIPSI

Oleh

A'YUNINA FAIDATUL NUZULA
NIM. 16610105

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 4 Desember 2020

Penguji Utama	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Ketua penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Anggota Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: A'yunina Faidatul Nuzula
NIM	: 16610105
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Submodul dan Modul Hasil Bagi dari Modul Noetherian

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 4 Desember 2020
Yang membuat pernyataan,

A'yunina Faidatul Nuzula
NIM. 16610105

HALAMAN MOTTO

If Allah is making you wait,

then be prepared to receive more than what you asked for

(Jika Allah membuatmu menunggu,

percayalah dan bersiaplah untuk menerima lebih dari apa yang kamu minta)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah dan ibu tercinta Ahmad Marmujito dan Sulistianah yang telah merawat dan membimbing penulis sejak kecil hingga dapat menempuh jenjang pendidikan di perguruan tinggi, serta adikku tersayang Muhammad Rizqi Alfadholi yang selalu memberikan semangat untuk penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai syarat untk memperoleh gelar sarjana di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat arahan dan bimbingan dari berbagai pihak. Maka dari itu ucapan terima kasih yang sebesar- besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
4. Dewi Ismiarti M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi I, yang telah menyisihkan waktu untuk memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis,
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi II dan selaku dosen pembimbing akademik penulis selama menempuh pendidikan di

jurusan matematika yang telah banyak memberikan arahan dan nasihat selama penulisan skripsi ini,

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen Jurusan Matematika, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya,
7. Kedua orang tua penulis, yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi kepada penulis,
8. Pengasuh Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah, yang senantiasa dengan sabar dan ikhlas memberi ilmu, serta bimbingan kepada penulis,
9. Teman-teman jurusan Matematika Angkatan 2016, yang telah bersama-sama berjuang menyelesaikan kuliah di Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
10. Teman-temanku santriwati Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah, khususnya Atika Masrihanah, dan Fatichatul Burhaniyah yang selalu memberikan nasehat dan motivasi kepada penulis selama ini, dan
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu terima kasih atas keikhlasan bantuan moral, material dan spiritual yang sudah diberikan kepada penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 4 Desember 2020

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Nuzula, A'yunina Faidatul. 2020. **Submodul dan Modul Hasil Bagi dari Modul Noetherian.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dewi Ismiarti, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: modul, modul hasil bagi, modul Noetherian, submodul

Modul merupakan struktur aljabar yang dibentuk dari grup Abelian dan ring sebagai skalar. Modul atas suatu ring adalah grup Abelian yang dilengkapi perkalian dengan skalar dari ring sehingga memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Himpunan bagian dari modul yang juga membentuk modul disebut dengan submodul. Selanjutnya dari submodul dapat dibentuk modul hasil bagi. Setiap modul memiliki keterkaitan dengan submodul dan modul hasil baginya. Hal tersebut juga berlaku pada modul Noetherian. Suatu modul dikatakan sebagai modul Noetherian apabila modul tersebut memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) atas submodul-submodulnya.

Pada penelitian ini akan ditunjukkan bagaimana keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil baginya. Selanjutnya, berdasarkan pembahasan, didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

Misalkan R adalah ring komutatif dan M adalah suatu R-modul. Misalkan N adalah submodul dari M, berlaku

1. M adalah modul Noetherian jika dan hanya jika setiap submodulnya dibangun secara hingga.
2. M adalah modul Noetherian jika dan hanya jika N dan ${}^{M}/_{N}$ adalah modul Noetherian.

.

ABSTRACT

Nuzula, A'yunina Faidatul. 2020. **Submodules and Quotient modules of Noetherian Modules**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors:
(I) Dewi Ismiarti, M.Si (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Keywords: Modules, quotient modules, Noetherian module, submodule

A Module over a ring is an Abelian group with multiplication by scalar on ring that satisfy some axioms. A subset of module satisfying the axioms of modules is called submodule. Furthermore we can form a quotient module from a submodule. Every modules have relation with their submodules and their quotient modules. It is also applied on Noetherian modules. A module is said to be Noetherian if that module satisfies ascending chain condition on submodules.

This research discuss some relation of Noetherian modules, its submodules and the quotient modules. The result of this research are the following
Let R be a commutative ring and M is an R-module. Let N be a submodule of M, then

1. M is a Noetherian module if and only if every submodule of M is finitely generated.
2. M is a Noetherian module if and only if N and M/N are Noetherian modules.

الملخص

نزولى,اعيننا فائدةل.٢٠٢٠.**اقسام فضاءالخلقي وفضاءالخلقي ناتج القسمة من فضاءالخلقي *Noetherian*** .البحث العلمي.شعبة الرياضيات,كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك ابراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) دوي إسميرتي الماجستير, المشرف: (٢) مُحَمَّد نافع جوهري الماجستير

الكلمات الرئيسية: قضاء خلقي, قضاء خلقي ناتج القسمة, فضاء خلقي*Noetherian*, اقسام فضاء خلقي

فضاءالخلقي هو بنيةجبرية هيكل من زمرة أبيلية و حلقة مثل كميةقياسية. فضاءالخلقي على حلقة هو زمرة أبيلية مع الضرب بالعددي التى ترضي البديهيات من فضاءالخلقي. المجموعةجزئية من فضاءالخلقي كما تفي بالبديهيات من فضاءالخلقي اتصل اقسام فضاءخلقي. ثم اقسام فضاءالخلقي يمكن تشكيلها فضاءالخلي ناتج القسمة. كل فضاءالخلقي لها علاقة مع اقسام فضاءالخلقي و فضاءالخلقي ناتج القسمة. تلك العلاقةالمطبقة ايضا في فضاءالخلقي *Noetherian*. فضاءالخلقي يسمى فضاءالخلقي *Noetherian* اذا هذا فضاءالخلقي رضا *ascending chain condition*.

في هذا البحث سيظهر كيفية العلاقة بين الفضاءالخلقي *Noetherian* مع اقسام فضاءالخلقي *Noetherian* وفضاءالخلقي ناتج القسمة من فضاءخلقي *Noetherian* . ثم مرتكز على نقاش حصلوا على بعض الاستنتاج, ذالك:

افترض R يكون حلقة تبادلية و M يكون فضاءالخلقي علىR. ثم افترض N يكون اقسام فضاءالخلقي من M. ينطبق:

١. M يكون فضاءالخلقي *Noetherian* فقط اذاكان كل اقسام فضاءالخلقي *is finitely generated*.

٢. M يكون فضاءالخلقي *Noeherian* فقط اذاكان N و M/N فضاءالخلقي ايضا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan mukjizat terbesar dari Allah Swt. yang memiliki banyak sekali keajaiban di dalamnya. Al-Quran juga menjadi sumber ilmu pengetahuan sekaligus sumber ajaran agama Islam. Salah satu ilmu yang dikaji dalam Al-Quran adalah mengenai matematika. Al-Quran tidak mengangkat metode atau teknik baru dalam penyelesaian suatu masalah, melainkan telah menunjukkan adanya eksistensi suatu fenomena yang ada dibalik alam semesta dengan cara yang sama yang ia tunjukkan mengenai eksistensi alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992: 15).

Manusia merupakan makhluk ciptaan Allah yang diberi kelebihan akal, serta memiliki peran penting dalam menggali dan memanfaatkan segala bentuk ciptaan Allah. Dengan segala kelebihan tersebut, manusia memiliki peran mengembangkan ilmu pengetahuan. Sehingga manusia diharuskan mampu memahami kebenaran Al-Quran melalui aktifitas studi dan penelitian. Hal tersebut dijelaskan dalam firman Allah SWT yang artinya

"Apakah ada salah seorang di antara kamu yang ingin mempunyai kebun kurma dan anggur yang mengalir di bawahnya sungai-sungai, dia mempunyai dalam kebun itu segala macam buah-buahan, kemudian datanglah masa tua pada orang itu sedang dia mempunyai keturunan yang masih kecil-kecil. Maka kebun itu ditiup angin keras yang mengandung api, lalu terbakarlah. Demikian Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu agar kamu memikirkannya."(QS. Al-Baqarah/2:266).

Ayat tersebut memerintahkan pada umat islam untuk melakukan studi dan penelitian serta memerintahkan untuk berfikir. Allah SWT telah memberikan manusia keistimewaan akal dan juga petunjuk yang jelas. "*Demikian Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu agar kamu memikirkannya*". Tafsir Ibnu

Katsir menjelaskan bahwa penggalan ayat tersebut bermakna agar kita dapat mengambil pelajaran dan memahami beberapa perumpamaan yang diberikan serta mampu memahami makna-makna tersirat dengan benar agar sesuai dengan makna yang dimaksud sebenarnya. Mempelajari ilmu merupakan suatu kewajiban bagi setiap muslim. Di antara ilmu tersebut, matematika termasuk ilmu yang juga penting untuk dipelajari.

Matematika merupakan ilmu yang mempunyai peran serta sangat besar terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (IPTEK). Hal ini dikarenakan matematika merupakan ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain dan dapat menjadi solusi berbagai fenomena yang semakin kompleks, serta matematika sebagai bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu kemanfaatan.

Dewasa ini aljabar menjadi cabang ilmu matematika yang banyak dikembangkan. Dalam aljabar terdapat salah satu cabang yakni aljabar abstrak. Aljabar abstrak merupakan bidang matematika yang mempelajari mengenai struktur aljabar. Beberapa hal yang dipelajari dalam struktur aljabar antara lain grup, ring, dan modul. Setiap struktur aljabar tersebut memenuhi sifat-sifat atau aksioma-aksioma tertentu.

Modul merupakan struktur aljabar yang dibentuk dari grup Abelian dan ring. Modul atas suatu ring adalah grup Abelian yang dilengkapi perkalian skalar dari ring sehingga memenuhi sifat-sifat tertentu. Selanjutnya ring tersebut disebut sebagai ring tumpuan. Apabila ring tumpuan dari modul adalah lapangan maka modul tersebut adalah ruang vektor.

Dalam struktur aljabar modul dikenal struktur submodul dan modul hasil bagi. Submodul adalah himpunan bagian dari modul yang juga membentuk modul. Selanjutnya dari submodul dapat dibentuk modul hasil bagi. Sifat modul tidak selalu diwariskan pada submodul dan modul hasil baginya. Sebagai contoh modul bebas yakni modul yang memiliki basis, submodul dan modul hasil baginya belum tentu bebas (Roman, 2008: 142).

Suatu modul dikatakan sebagai modul Noetherian apabila modul tersebut memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) atas submodul-submodulnya, yaitu rantai naik submodul-submodulnya pada akhirnya akan konstan. Konsep mengenai modul Noetherian sendiri dikemukakan oleh Emmy Noether yang mengenalkan mengenai kondisi maksimal dan minimal yang dapat diformulasikan ke dalam suatu kondisi rantai. Selanjutnya penulis termotivasi untuk melakukan penelitian mengenai keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil baginya.

Skripsi ini merupakan kajian dari beberapa sumber pustaka. Rujukan utama dari pembahasan skripsi ini adalah buku yang berjudul “Rings and Their Modules” yang ditulis oleh Paul E. Bland. Namun demikian, dalam skripsi ini alur penulisan, langkah-langkah pembuktian serta penyajian hasil disesuaikan dengan tujuan penulisan skripsi dan cara pandang penulis sehingga menjadikan skripsi ini tulisan yang utuh.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul-submodulnya?
2. Bagaimana keterkaitan antara modul Noetherian dengan modul hasil baginya?
3. Bagaimana keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan pembahasan skripsi ini adalah

1. Mengetahui keterkaitan modul Noetherian dengan submodulnya.
2. Mengetahui keterkaitan antara modul Noetherian dengan modul hasil baginya.
3. Mengetahui keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah untuk memberikan informasi mengenai keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodulnya, keterkaitan modul Noetherian dengan modul hasil baginya, serta keterkaitan modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian.

1.5 Metode penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*). Berikut merupakan langkah-langkah yang akan digunakan dalam menyelesaikan masalah penelitian skripsi ini:

1. Menunjukkan adanya keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul-submodulnya, dengan langkah-langkah
   a. Membentuk sebarang rantai naik submodul-submodul dari submodul.
   b. Membuktikan rantai naik submodul-submodul tersebut akan konstan.
2. Menunjukkan adanya keterkaitan modul Noetherian dengan modul hasil baginya, dengan langkah-langkah
   a. Membentuk sebarang rantai naik submodul-submodul dari modul hasil bagi,
   b. Membuktikan rantai naik submodul-submodul tersebut akan konstan.
3. Menunjukkan adanya keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian, dengan langkah-langkah
   a. Menentukan himpunan pembangun dari submodul-submodul.
   b. Membuktikan setiap submodul dari modul dibangun secara hingga.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar skripsi ini mudah ditelaah dan dipahami pembahasannya, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Bagian ini mencakup konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut diantaranya pemetaan, operasi biner, grup dan subgrup, koset, subgrup normal, grup hasil bagi (grup faktor), ring, ideal, modul dan submodul, homomorfisme modul, modul hasil bagi, himpunan pembangun modul, dan modul Noetherian.

BAB III Pembahasan

Pada bab ini dilakukan pengkajian tentang pembahasan yang berisi pembuktian teorema-teorema keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodulnya, keterkaitan modul Noetherian dengan modul hasil baginya, serta keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian.

BAB IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan memberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan definisi-definisi dan teorema-teorema pendukung untuk pokok pembahasan pada bab selanjutnya.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Definisi 2.1.1

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Subhimpunan f dari $A \times B$ disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap $a \in A$ terdapat tepat satu elemen $b \in B$ sehingga $(a, b) \in f$. Jika f adalah pemetaan dan pasangan terurut (a, b) ada di f, maka dapat ditulis $b = f(a)$ dan b disebut peta dari a oleh f.

(Gilbert dan Gilbert, 2009: 13).

Dalam hal ini himpunan A disebut domain dari f dan himpunan B disebut kodomain dari f.

Untuk membuktikan apakah suatu pengaitan f dari $A \times B$ merupakan suatu pemetaan, asumsikan bahwa $a_1 = a_2$ dan dibuktikan bahwa $f(a_1) = f(a_2)$.

Misalkan f merupakan pemetaan dari A ke B, maka

a. Pemetaan f dikatakan onto, atau surjektif, jika setiap elemen dari B adalah peta dari paling sedikit satu elemen di A.
b. Pemetaan f disebut satu-satu, atau injektif, jika elemen-elemen yang berbeda pada A selalu memiliki peta yang berbeda pada B.
c. Pemetaan f dikatakan korespondensi satu-satu, atau bijektif, jika f merupakan pemetaan yang surjektif sekaligus injektif.

Operasi biner pada suatu himpunan merupakan proses mengombinasikan dua elemen pada himpunan tersebut untuk mendapatkan suatu elemen tunggal yang juga merupakan elemen dari himpunan tersebut. Berikut akan diberikan definisi operasi biner pada suatu himpunan.

Definisi 2.1.2

Suatu operasi biner pada himpunan tak kosong A adalah suatu pemetaan f dari $A \times A$ ke A (Gilbert dan Gilbert, 2009: 30).

Sifat yang berlaku pada suatu struktur aljabar ditentukan berdasarkan sifat-sifat operasi pada struktur aljabar tersebut. Berikut akan diuraikan jenis-jenis sifat pada operasi biner.

Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong A,

a. Misalkan $B \subseteq A$, operasi $*$ dikatakan tertutup di B apabila untuk setiap $a, b \in B$ berlaku $a * b \in B$

b. Operasi $*$ dikatakan komutatif, apabila $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in A$.

c. Operasi $*$ dikatakan asosiatif, jika $x * (y * z) = (x * y) * z$ untuk setiap $x, y, z \in A$.

d. Himpunan A dikatakan memuat elemen identitas terhadap operasi $*$, apabila terdapat $e \in A$ sehingga berlaku $x * e = x = e * x$ untuk setiap $x \in A$. Selanjutnya e disebut elemen identitas dari A terhadap operasi $*$.

e. Misalkan e adalah elemen identitas, $x \in A$ dikatakan elemen yang memiliki invers terhadap operasi $*$ apabila terdapat elemen $x^{-1} \in A$ sedemikian sehingga $x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$. Selanjutnya x^{-1} disebut sebagai invers dari x terhadap operasi $*$.

Selanjutnya, apabila pada himpunan A terdapat satu lagi operasi biner #, maka operasi $*$ dikatakan bersifat distributif terhadap # apabila memenuhi

f. Distributif kiri $x * (y \# z) = (x * y) \# (x * x)$

g. Distributif kanan $(y \# z) * x = (y * x) \# (z * x)$.

2.2 Grup

2.2. 1 Grup dan Subgrup

Grup adalah struktur aljabar yang sangat mendasar. Grup menjadi dasar terbentuknya struktur aljabar yang lain. Definisi grup dinyatakan sebagai berikut

Definisi 2.2.1

Grup adalah pasangan terurut $(G,*)$ dengan G adalah himpunan dan $*$ adalah suatu operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) Operasi $*$ bersifat asosiatif di G,

(ii) G memuat identitas terhadap operasi $*$,

(iii) G memuat invers setiap unsurnya terhadap operasi $*$.

Grup $(G,*)$ disebut Abelian (atau komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$. (Dummit dan Foote, 2004: 17).

Berikut diberikan teorema tentang beberapa sifat yang berlaku pada elemen-elemen dari suatu grup.

Teorema 2.2.2

Misalkan G adalah grup dengan operasi biner yang dituliskan sebagai operasi perkalian, berlaku sifat-sifat sebagai berikut

1. Untuk setiap $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$
2. Untuk sebarang a dan $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ (Gilbert dan Gilbert, 2009: 146).

Bukti:

1. Misalkan e adalah elemen identitas pada grup G, maka berlaku

$$aa^{-1} = e$$

$$(aa^{-1})(a^{-1})^{-1} = e(a^{-1})^{-1}$$

$$a(a^{-1}(a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$$

$$ae = (a^{-1})^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

   Jadi, terbukti bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. Karena $(ab)(ab)^{-1} = e$, dengan e adalah elemen identitas di G. Selanjutnya $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$. Dari sini terbukti bahwa $(ab)(ab)^{-1} = e = (ab)(b^{-1}a^{-1})$. Jadi terbukti bahwa $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Contoh 2.2.3

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup Abelian. Hal ini merupakan akibat langsung dari aksioma penjumlahan pada bilangan bulat.

Definisi 2.2.4

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup. Suatu subhimpunan H dari G disebut subgrup dari G jika H membentuk grup bersama operasi biner $*$ yang terdefinisi di G (Gilbert dan Gilbert, 2009: 152).

Notasi dari H subgrup G adalah $H \leq G$.

Teorema 2.2.5 (Uji Subgrup)

Misalkan G adalah grup. Subhimpunan tak kosong H dari G adalah subgrup dari G apabila memenuhi $\mathrm{ab}^{-1} \in \mathrm{H}$ untuk setiap $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{H}$ (Gallian, 2013: 62).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa H membentuk suatu grup. Pertama, karena operasi yang berlaku pada H sama dengan operasi pada grup G, maka operasi tersebut bersifat asosiatif di H. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa H memuat elemen identitas e. Karena H merupakan himpunan tak kosong maka ambil $x \in H$, kemudian misalkan $a = x$ dan $b = x$ maka berlaku $e = xx^{-1} = ab^{-1} \in H$. Berikutnya akan ditunjukkan untuk sebarang $a \in H$, H memuat a^{-1}. Karena $e, a \in H$ berakibat $a^{-1} = ea^{-1} \in H$. Jadi, terbukti H merupakan grup bersama operasi yang berlaku di G. Dengan demikian H adalah subgrup dari G.

2.2. 2 Koset dan Subgrup Normal

Definisi 2.2.6

Misalkan G adalah grup dan H adalah subhimpunan tak kosong dari G. Untuk sebarang $a \in G$, himpunan $\{ah \mid h \in H\}$ dilambangkan dengan aH. Demikian juga, $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ dan $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$. Ketika H merupakan subgrup dari G, himpunan aH disebut sebagai koset kiri dari H pada grup G yang memuat a, dan Ha disebut sebagai koset kanan dari H pada grup G yang memuat a. Pada kasus ini a disebut sebagai wakil koset dari aH (atau Ha)

(Gallian, 2013: 144).

Lemma 2.2.7 Sifat-Sifat dari Koset

Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G. Misalkan $a, b \in G$, maka berlaku

1. $a \in aH$
2. $aH = H$ jika dan hanya jika $a \in H$

3. $(ab)H = a(bH)$ dan $H(ab) = (Ha)b$
4. $aH = bH$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$

(Gallian, 2013: 145).

Bukti

1. $a = ae \in aH$, karena $e \in H$
2. $(\Rightarrow)$ Misalkan $aH = H$, maka $a = ae \in aH = H$.

   $(\Leftarrow)$ Asumsikan $a \in H$ akan ditunjukkan $aH \subseteq H$ dan $H \subseteq aH$. Jelas bahwa $aH \subseteq H$, karena sifat ketertutupan dari H. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $H \subseteq aH$, misalkan $h \in H$. Karena $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$ dan karena $h \in H$ maka $a^{-1}h \in H$. Oleh karena itu, $h = eh = (aa^{-1})h = a(a^{-1}h) \in aH$.
3. Hal ini sebagai akibat langsung dari $(ab)h = a(bh)$ dan $h(ab) = (ha)b$.
4. $(\Rightarrow)$ Karena $aH = bH$ maka $b = b.e \in aH$. Misalkan $b = ak$, untuk suatu $k \in H$, berakibat $a^{-1}b = a^{-1}(ak) = (a^{-1}a)k = ek = k \in H$.

   $(\Leftarrow)$ $a^{-1}b \in H$ berakibat $b^{-1}a = b^{-1}(a^{-1})^{-1} = (a^{-1}b)^{-1} \in H$. Misalkan $h \in H$, maka $ah = e(ah) = (bb^{-1})(ah) = b\big((b^{-1}a)h\big) \in bH$. Jadi $aH \subseteq bH$.

   Selanjutnya, $a^{-1}b = a^{-1}(b^{-1})^{-1} = (b^{-1}a)^{-1} \in H$. Misalkan $h \in H$ maka $bh = e(bh) = (aa^{-1})(bh) = a\big((a^{-1}b)h\big) \in aH$. Jadi $bH \subseteq aH$.

   Karena $aH \subseteq bH$ dan $bH \subseteq aH$ maka $aH = bH$.

Definisi 2.2.8 (Subgrup Normal)

Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G. Maka H dikatakan sebagai subgrup normal atau invarian dari G jika $xH = Hx$ untuk setiap

$x \in G$ (Gilbert dan Gilbert, 2009: 233). H adalah subgrup normal dari G dinotasikan sebagai $H \trianglelefteq G$.

Contoh 2.2.9

Misalkan G adalah grup Abelian. Setiap subgrup dari G adalah subgrup normal.

2.2. 3 Grup Hasil bagi atau Grup Faktor

Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup normal dari G, maka himpunan koset-koset dari H di G adalah suatu grup yang disebut dengan grup faktor dari G oleh H atau grup hasil bagi dari G oleh H.

Teorema 2.2.10

Misalkan G adalah grup dan misalkan H adalah subgrup normal dari G. Himpunan ${}^{G}/_{H} = \{aH \mid a \in G\}$ adalah grup dengan operasi $(aH)(bH) = abH$

(Gallian, 201: 187).

Bukti:

Langkah pertama adalah buktikan bahwa perkalian $(aH)(bH) = abH$ adalah operasi yang berlaku pada ${}^{G}/_{H}$, yaitu dengan menunjukkan bahwa pengaitan ${}^{G}/_{H} \times {}^{G}/_{H} \longrightarrow {}^{G}/_{H}$ dengan $(aH, bH) \longmapsto abH$ adalah suatu pemetaan.

Misalkan $a, a', b, b' \in G$, dengan $aH = a'H$ dan $bH = b'H$ akan dibuktikan bahwa $aHbH = a'Hb'H$ dengan membuktikan bahwa $abH = a'b'H$.

Dari $aH = a'H$ dan $bH = b'H$ diperoleh $a' = ah_1$ dan $b' = bh_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$. Oleh karena itu $a'b'H = ah_1bh_2H = ah_1bH = ah_1Hb = aHb = abH$. Jadi, terbukti bahwa pengaitan tersebut adalah pemetaan.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $G/_H$ adalah grup, yaitu $G/_H$ memiliki elemen identitas yaitu $eH = H$, kemudian $a^{-1}H$ adalah invers dari $aH \in G/_H$. Dan $(aHbH)cH = (ab)HcH = (ab)cH = (abc)H = aH(bc)H = aH(bHcH)$, artinya operasi pada $G/_H$ bersifat asosiatif. Jadi, terbukti bahwa $G/_H$ adalah grup.

Definisi 2.2.11

Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup normal dari G. Suatu grup $G/_H$ yang memuat koset-koset dari H di G disebut grup hasil bagi atau grup faktor dari G oleh H (Gilbert dan Gilbert, 2009: 230).

2.3 Ring

Ring merupakan salah satu konsep struktur aljabar di mana di dalamnya berlaku dua operasi biner, yang disebut dengan penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$. Konsep mengenai ring dikenalkan oleh Abraham Fraenkel pada tahun 1914 yang memberikan definisi untuk ring sebagai berikut.

Definisi 2.3.1

Ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner pada R, yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$, di mana berlaku

1. Operasi $+$ pada R bersifat komutatif,
2. Operasi $+$ pada R bersifat asosiatif,
3. R memuat elemen identitas terhadap operasi $+$,

4. R memuat invers setiap unsurnya terhadap operasi $+$,
5. Operasi $\times$ pada R bersifat asosiatif, dan
6. Sifat distributif kiri dan distributif kanan operasi $\times$ terhadap $+$.

(Gallian, 2013: 245).

Berdasarkan definisi tersebut dapat dikatakan R bersama operasi penjumlahan $(R, +)$ membentuk grup Abelian, serta operasi perkaliannya bersifat asosiatif dan berlaku sifat distributif kiri dan distributif kanan operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Selanjutnya, himpunan tak kosong R yang membentuk ring bersama dua operasi biner $+$ dan $\times$ dilambangkan dengan $(R, +, \times)$.

Suatu Ring R dikatakan sebagai ring komutatif apabila operasi perkaliannya bersifat komutatif. Selanjutnya apabila suatu ring R memuat unsur identitas terhadap opersi perkalian maka ring R disebut sebagai ring dengan elemen kesatuan *(unity)*. Apabila elemen tak nol pada ring R memiliki invers maka elemen tersebut disebut dengan *unit* dari ring R. Pengurangan pada ring didefinisikan sebagai penjumlahan dengan invers yakni $a - b = a + (-b)$.

Contoh 2.3.2

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan ring bersama operasi penjumlahan $+$ dan operasi perkalian $\times$ berdasarkan aksioma bilangan bulat.

Definisi 2.3.3

Suatu subhimpunan S dari ring R adalah subring dari R jika S merupakan ring terhadap operasi yang sama di R (Gallian, 2013: 248).

Teorema 2.3.4 (Uji Subring)

Subhimpunan tak kosong S dari ring R adalah subring dari R jika S tertutup terhadap operasi pengurangan dan operasi perkalian, yaitu jika a dan b keduanya ada di S maka $a - b$ dan ab ada di S (Gallian, 2013: 248).

Bukti:

Operasi penjumlahan pada R bersifat komutatif, dan S tertutup terhadap operasi pengurangan, berdasarkan teorema uji subgrup maka S adalah grup Abelian terhadap opersi penjumlahan.

Selanjutnya kerena operasi perkalian pada R bersifat asosiatif serta distributif terhadap penjumlahan, maka hal tersebut juga berlaku pada S. Sehingga terbukti bahwa S adalah subring dari R.

Selanjutnya konsep mengenai ideal merupakan analogi dari konsep subgrup normal. Definisi dari ideal dinyatakan sebagai berikut

Definisi 2.3.5 (Ideal)

Misalkan R adalah ring dan A adalah subring dari R. Subring A dikatakan suatu ideal dari R jika untuk setiap $r \in R$ dan $a \in A$ berlaku ra dan ar keduanya ada di A (Gallian, 2013: 267).

Teorema 2.3.6 (Uji Ideal)

Subhimpunan tak kosong A dari ring R adalah ideal dari R *jika*

1. $a - b \in A$ untuk setiap $a, b \in A$
2. ra dan ar keduanya ada di A ketika $a \in A$ dan $r \in R$.

2.4 Modul

2.4.1 Modul dan Submodul

Modul merupakan perumuman dari ruang vektor. Skalar pada ruang vektor yang merupakan elemen dari lapangan diperumum dari sebarang ring. Berikut definisi dari suatu modul

Definisi 2.4.1

Misalkan $(R,+,\times)$ adalah ring komutatif dengan kesatuan, yang mana elemen-elemennya disebut sebagai skalar. R-modul (atau suatu modul atas R) adalah himpunan tak kosong M yang memenuhi:

i. $(M,+)$ adalah grup Abelian

ii. Terdapat pemetaan $R \times M \to M$, yaitu $(x,a) \mapsto xa$, sehingga untuk setiap $x,y \in M$ dan $a,b \in R$ memenuhi:

(1) $a(x+y) = ax + ay$

(2) $(a+b)x = ax + bx$

(3) $a(xy) = (ax)y$

(4) $1x = x$

(Bland, 2010: 26).

Definisi 2.4.2

Misalkan M adalah R-modul. Himpunan N disebut sebagai R-submodul jika

1. N adalah subgrup dari M
2. $r \cdot n \in N$ untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$ (Bland, 2010: 26).

2.4.2 Homomorfisme Modul

Misalkan M dan N adalah suatu R-modul. Suatu pemetaan φ dari M ke N yang mengawetkan kedua operasi yang ada dalam modul dinamakan homomorfisme modul. Definisi homomorfisme modul adalah sebagai berikut

Definisi 2.4.3

Misalkan R adalah ring dan misalkan M dan N adalah R-modul. Pemetaan $\varphi: M \longrightarrow N$ disebut homomorfisme modul jika memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, untuk setiap $x, y \in M$
2. $\varphi(ax) = a\varphi(x)$, untuk setiap $a \in R$ dan $x \in M$

(Dummit & Foote, 1991: 322).

Misalkan R suatu ring dan misalkan M dan N adalah R-modul, dengan $\varphi: M \rightarrow N$ merupakan suatu homomorfisme modul. Jika φ bersifat injektif (satu-satu) maka φ disebut monomorfisme modul. Selanjutnya jika φ bersifat surjektif (pada) maka φ disebut epimorfisme modul. Jika φ bersifat satu-satu dan pada (bijektif) maka φ disebut isomorfisme modul.

2.4.3 Modul Hasil Bagi

Konsep tentang modul hasil bagi dapat dianalogikan dengan definisi dari grup hasil bagi. Pengkontruksian modul hasil bagi ditunjukkan pada teorema berikut

Teorema 2.4.4

Misalkan M adalah R-modul dan N adalah submodul dari M. Himpunan koset-koset

$$M/_N = \{v + N \mid v \in M\}$$

bersama operasi penjumlahan

$$(u + N) + (v + N) = (u + v) + N$$

dan perkalian skalar

$$r \cdot (u + N) = (r \cdot u) + N$$

untuk setiap $r \in R$ dan $u + N, v + N \in M/_N$ adalah R-modul (Roman, 2008:119).

Bukti:

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan, M adalah R-modul dan N adalah submodul dari M. Untuk membuktikan bahwa $M/_N$ adalah R-modul, akan ditunjukkan bahwa: 1) $(M/_N, +)$ adalah grup abelian dan 2) operasi perkalian skalar dari R pada $M/_N$ memenuhi aksioma perkalian skalar pada modul.

1) Pandang himpunan $(M/_N, +)$ sebagai grup faktor sehingga berakibat $(M/_N, +)$ merupakan grup abelian.

2) Akan ditunjukkan bahwa perkalian skalar $R \times M/_N \longrightarrow M/_N$ dengan aturan untuk setiap $r \in R$ dan $u \in M$ berlaku $r(u + N) = ru + N$ adalah pemetaan.

   Misalkan $u + N = u' + N$ dengan $u, u' \in M$ dan $r, r' \in R$ dengan $r = r'$, akan dibuktikan $ru + N = r'u' + N$.

   $u + N = u' + N$ maka $u - u' \in N$, sehingga berlaku

   $r(u - u') \in N \Rightarrow ru - ru' \in N \Rightarrow ru + N = r'u' + N$, karena $r = r'$.

   Jadi, terbukti perkalian skalar pada $M/_N$ adalah pemetaan.

Selanjutnya, misalkan $u+N, v+N \in {}^{M}/_{N}$ dan $r,s \in R$. Perhatikan bahwa

a) $(r+s)\cdot(u+N) = \big((r+s)\cdot u\big)+N$

$= (r\cdot u + s\cdot u)+N$

$= \big((r\cdot u)+N\big)+\big((s\cdot u)+N\big)$

$= \big(r\cdot(u+N)\big)+\big(s\cdot(u+N)\big)$

b) $(r\times s)\cdot(u+N) = \big((r\times s)\cdot u\big)+N$

$= \big(r\cdot(s\cdot u)\big)+N$

$= r\cdot\big((s\cdot u)+N\big)$

c) $r\cdot\big((u+N)+(v+N)\big) = r\cdot\big((u+v)+N\big)$

$= \big(r\cdot(u+v)\big)+N$

$= (r\cdot u + r\cdot v)+N$

$= \big((r\cdot u)+N\big)+\big((r\cdot v)+N\big)$

$= \big(r\cdot(u+N)\big)+\big(r\cdot(v+N)\big)$

d) $1\cdot(u+S) = (1\cdot u)+S$

$= u+S$

Berdasarkan a), b), c), d), maka operasi perkalian dari R pada ${}^{M}/_{N}$ memenuhi aksioma perkalian skalar pada modul.

Karena 1) dan 2) terpenuhi, maka diperoleh bahwa ${}^{M}/_{N}$ adalah R-modul.

Definisi 2.4.5

Misalkan M adalah R-modul dan N adalah submodul dari M. Himpunan koset-koset $M/_N$ disebut modul hasil bagi dari M oleh N (Roman, 2008:119).

2.4.4 Himpunan Pembangun Modul

Definisi 2.4.6

Misalkan M adalah R-modul dan N adalah subhimpunan dari M. Subhimpunan N disebut himpunan pembangun dari M jika M adalah himpunan semua kombinasi linier unsur-unsur di N

$$\langle N \rangle = \{r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n \mid r_i \in R, v_i \in N, n \geq 1\}.$$

Subhimpunan N dikatakan membangun M jika $M = \langle N \rangle$ (Roman, 2008: 112).

Definisi 2.4.7

R-modul M dikatakan dibangun secara hingga jika memuat secara hingga himpunan yang membangun M (Roman, 2008: 113).

2.4.5 Modul Noetherian

Dalam skripsi ini modul Noetherian didefinisikan sebagai modul yang memenuhi kondisi rantai naik atas submodul-submodulnya. Sebelum dijelaskan pengertian dari modul Noetherian terlebih dahulu akan ditunjukkan definisi dari kondisi rantai pada suatu modul.

Definisi 2.4.8

Misalkan M adalah suatu R-modul. Suatu barisan $\{M_i\}$ dengan M_i adalah submodul dari M disebut membentuk rantai naik jika $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ (Atiyah, 1969: 76).

Contoh 2.4.9

Pandang ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas dirinya sendiri. Secara umum untuk sebarang $k \in \mathbb{Z}$ dan $k > 1$ didapatkan submodul dari $\mathbb{Z}$ adalah

$$k\mathbb{Z} = \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Selanjutnya setiap submodul dari $\mathbb{Z}$ dapat membentuk barisan rantai naik, misalnya $\{0\} \subseteq \cdots \subseteq 16\mathbb{Z} \subseteq 8\mathbb{Z} \subseteq \cdots$.

Selanjutnya definisi dari modul Noetherian dijelaskan sebagai berikut

Definisi 2.4.10

R-modul M dikatakan memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*), disingkat a.c.c, atas submodul jika untuk setiap barisan naik dari submodul-submodulnya di M,

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$$

pada suatu saat akan konstan (*eventually constant*), yaitu terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = \cdots$. Modul yang memenuhi a.c.c atas submodul disebut sebagai modul Noetherian (Roman, 2008: 133).

Contoh 2.4.11

Berikut beberapa contoh dari modul Noetherian

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas dirinya sendiri merupakan modul Noetherian.
2. Misalkan $\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah suatu $\mathbb{Z}$-modul dengan $\mathbb{Z}$ adalah ring bilangan bulat. $\mathbb{Z}^2$ adalah $\mathbb{Z}$-modul Noetherian.

2.5 Kajian Keislaman tentang Keterkailan Islam dengan Ilmu

Al-Quran merupakan kalam Allah Swt. yang di dalamnya terkandung berbagai ilmu. Untuk memahami ilmu-ilmu tersebut, perlu dilakukan pengkajian secara mendalam. Diantara ilmu-ilmu yang ada dalam Al-Quran dijelaskan konsep tentang keterkaitan modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil baginya dalam QS. Al-Anfal ayat 2 yang artinya

"Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakal"(QS. Al-Anfal/8:2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang beriman adalah mereka yang memiliki tiga sifat, yaitu sifat pertama adalah mereka yang apabila ingat kepada Allah, mengakui kebenaran-Nya, serta mengingat janji dan ancaman-Nya, maka akan timbul rasa ketakutan dalam dirinya.

Sifat kedua yaitu mereka yang apabila dibacakan atau membaca Al-Quran, maka bertambah imannya, kemudian sempurnalah keyakinannya, dan semakin meningkat kesungguhannya dalam beramal.

Ketiga, yaitu mereka yang sepenuhnya menyerahkan diri kepada Allah, tidak kepada sesuatu selain Allah. Mereka dikatakan bertawakal dan beramal dengan sesungguh hati, disamping dirinya juga beribadah kepada Allah. Sifat-sifat tersebut merupakan sifat yang berkaitan dengan hati.

Mempelajari matematika yang seesuai dengan paradigma takwa tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata. Namun, perlu didukung pula dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis yang diterapkan dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta adanya pengembangan pendekatan rasional empiris dan logis.

Dewasa ini sering dijumpai pandangan dalam masyarakat umum mengenai konsep agama dan matematika, di mana keduanya dipandang tidak memiliki relasi yang setara. Agama diekspresikan sebagai sesuatu yang cenderung terfokus pada kegiatan suci dan *ukhrawi*, sedangkan matematika dipandang sebagai suatu hal yang dinilai sebagai asumsi-asumsi abstrak yang berkembang dari pemikiran dan penalaran manusia. Namun, dalam sejarah dapat dicermati bahwa agama memiliki peran penting dalam membangunkan umatnya untuk mengkaji lebih mendalam ilmu matematika.

Seperti halnya matematika, kajian mengenai modul dan modul Noetherian juga perlu diperdalam. Konsep submodul dan modul hasil bagi pada modul juga berlaku pada modul Noetherian. Setiap submodul dan modul hasil bagi dari modul Noetherian, artinya submodul dan modul hasil bagi dari modul Noetherian adalah suatu modul yang dibangun secara hingga.

Apabila dikaitkan dengan ayat Al-Quran di atas bahwasanya manusia yang memiliki karakter orang beriman mempunyai sifat khusus yang dapat membangunnya menjadi seorang yang beriman. Sehingga, kedepannya dapat membuahkan kemuliaan dan menambahkan kekuatan dalam menjalankan dan menjaga keimanannya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas keterkaitan modul Noetherian dengan submodulnya serta keterkaitan modul Noetherian dengan modul hasil baginya.

3.1 Keterkaitan Modul Noetherian dengan Submodulnya

Sebelum membahas keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodulnya akan terlebih dahulu ditunjukkan kaitan antara suatu modul dengan submodulnya. Misalkan R adalah suatu ring komutatif dan misalkan M adalah R-modul. Berdasarkan Definisi 2.4.2 submodul dari M adalah suatu subhimpunan dari M dimana bersama operasi yang berlaku pada R-modul M membentuk suatu R-modul. Artinya setiap submodul dari suatu R-modul adalah R-modul.

Selanjutnya pada pembahasan ini akan ditunjukkan keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodulnya. Setiap submodul dari modul Noetherian adalah modul Noetherian. Hal ini dinyatakan pada Teorema 3.1.1 berikut

Teorema 3.1.1

Misalkan R adalah ring komutatif. Jika M adalah R-modul Noetherian maka setiap submodul dari M adalah modul Noetherian.

Bukti:

Misalkan M adalah R-modul Noetherian dan N adalah submodul dari M. Setiap rantai naik submodul-submodul dari N berbentuk

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots \qquad (3.1)$$

dengan S_i submodul dari N. Karena submodul-submodul dari N merupakan submodul dari M, maka rantai (3.1) adalah rantai naik submodul-submodul dari M. Oleh karena itu rantai (3.1) suatu saat pada akhirnya akan konstan, yaitu terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = \cdots$, artinya N merupakan modul Noetherian. Jadi terbukti bahwa setiap submodul dari modul Noetherian adalah modul Noetherian. □

Teorema 3.1.1 menjelaskan keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodulnya yaitu setiap submodul dari modul Noetherian adalah modul Noetherian. Selanjutnya akan dibahas keterkaitan yang lain antara modul Noetherian dengan submodulnya, yaitu suatu modul dikatakan sebagai modul Noetherian jika dan hanya jika setiap submodulnya dibangun secara hingga. Hal tersebut dijelaskan pada teorema berikut

Teorema 3.1.2

R-modul M adalah modul Noetherian jika dan hanya jika setiap submodul dari M dibangun secara hingga (Roman, 2008: 133).

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan jika setiap submodul dari M dibangun secara hingga maka M adalah modul Noetherian. Misalkan M memuat suatu rantai naik atas submodul-submodulnya,

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq \cdots \qquad (3.2).$$

Maka gabungan $N = \bigcup_j N_j$ adalah submodul dari M. Oleh karena itu N dibangun secara hingga. Misalkan $N = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$. Karena $u_i \in N$, terdapat indeks k_i sehingga $u_i \in N_{k_i}$. Oleh karena itu, jika $k = max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ diperoleh $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq N_k$. Sehingga $N = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle \subseteq N_k \subseteq N_{k+1} \subseteq N_{k+2} \subseteq \cdots \subseteq N$. Artinya $N = N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \cdots$. Jadi terbukti rantai (3.2) pada akhirnya akan konstan sehingga M adalah modul Noetherian.

Selanjutnya akan dibuktikan dari arah sebaliknya, yaitu jika M adalah modul Noetherian maka setiap submodulnya dibangun secara hingga. Misalkan N adalah submodul dari M. Ambil $u_1 \in N$. Misalkan $N_1 = \langle u_1 \rangle \subseteq N$ dibangun oleh u_1. Jika $N_1 = N$ maka N dibangun secara hingga. Jika $N_1 \neq N$ maka terdapat $u_2 \in N - N_1$. Misalkan $N_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$. Jika $N_2 = N$ maka N dibangun secara hingga. Jika $N_2 \neq N$ maka terdapat $u_3 \in N - N_2$. Misalkan submodul $N_3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Dari proses ini, diperoleh rantai naik sejati dari submodul-submodul N

$$\langle u_1 \rangle \subsetneq \langle u_1, u_2 \rangle \subsetneq \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq N.$$

Jika tidak ada dari submodul-submodul N_i yang sama dengan N, maka diperoleh rantai naik tak hingga dari submodul-submodul tersebut. Hal ini kontradiksi dengan fakta bahwa M adalah modul Noetherian. Oleh karena itu $N = \langle u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \rangle$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Sehingga terbukti N dibangun secara hingga.□

3.2 Keterkaitan Modul Noetherian dengan Modul Hasil Baginya

Pembahasan selanjutnya yaitu akan ditunjukkan keterkaitan antara modul Noetherian dengan modul hasil baginya. Setiap modul hasil bagi dari suatu modul Noetherian adalah modul Noetherian seperti ditunjukkan pada teorema berikut

Teorema 3.2.1

Misalkan R adalah ring komutatif. Jika M adalah R-modul Noetherian dan N adalah submodul dari M, maka setiap modul hasil bagi $M/_N$ adalah modul Noetherian.

Bukti:

Perhatikan bahwa setiap rantai naik submodul-submodul dari $M/_N$ berbentuk

$$M_1/_N \subseteq M_2/_N \subseteq \cdots M_k/_N \subseteq \cdots \quad (3.3)$$

dengan setiap M_i adalah submodul dari M yang memuat N dan $M_i \subseteq M_{i+1}$. Selanjutnya rantai naik

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k \subseteq \cdots \quad (3.4)$$

adalah rantai naik submodul-submodul dari M. Karena M adalah modul Noetherian maka rantai naik (3.4) pada akhirnya akan konstan, yaitu terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \cdots$. Selanjutnya $M_k = M_{k+1}$, artinya $M_k \subseteq M_{k+1}$ dan $M_{k+1} \subseteq M_k$

$$M_k \subseteq M_{k+1} \Rightarrow M_k/_N \subseteq M_{k+1}/_N \quad (3.5)$$

$$M_{k+1} \subseteq M_k \Rightarrow M_{k+1}/_N \subseteq M_k/_N \quad (3.6)$$

Dari pernyataan (3.5) dan (3.6) berakibat $M_k/_N = M_{k+1}/_N$. Dengan demikian maka rantai naik (3.3) akan pada akhirnya akan konstan, yaitu terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $M_k/_N = M_{k+1}/_N = M_{k+2}/_N = \cdots$.

Artinya $M/_N$ adalah modul Noetherian. Jadi, terbukti bahwa setiap modul hasil bagi dari modul Noetherian adalah modul Noetherian. □

Berdasarkan teorema di atas, terbukti bahwa modul hasil bagi $M/_N$ adalah modul Noetherian untuk setiap submodul N dari suatu R-modul Noetherian M.

3.3 Keterkaitan Antara Modul Noetherian dengan Submodul dan Modul Hasil Bagi Noetherian

Sebelum membahas mengenai keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil hasil bagi Noetherian, terlebih dahulu akan dibahas lemma berikut.

Lemma 3.3.1

Misalkan R adalah ring komutatif. Jika M adalah suatu R-modul dan N adalah submodul dari M.

Maka pemetaan

$$\pi : M \longrightarrow {}^{M}/_{N}$$

$$x \longmapsto x + N$$

adalah epimorfisme.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa π merupakan pemetaan yang epimorfisme. Ambil $x, y \in M$ dan $a \in R$, berlaku

1) $\pi(x + y) = (x + y) + N$

$= (x + N) + (y + N)$

$= \eth(x) + \pi(y)$

2) $\pi(ax) = (ax) + N$

$= a(x + N)$

$= a\pi(x)$

Dari 1) dan 2) terbukti bahwa π adalah homomorfisme. Selanjutnya untuk membuktikan π epimorfisme ambil $\bar{y} = y + N \in {}^{M}/_{N}$ untuk suatu $y \in M$.

Diperoleh $\pi(y) = y + N = \bar{y}$. Maka πterbukti merupakan pemetaan yang surjektif. Jadi, π adalah epimorfisme. □

Selanjutnya pembahasan mengenai keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian, dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.3.2

Misalkan R adalah ring komutatif. Misalkan M adalah R-modul dan N adalah submodul dari M. Modul M adalah modul Noetherian jika dan hanya jika N dan $M/_N$ adalah modul Noetherian (Bland, 2011: 111).

Bukti:

Pembuktian akan dilakukan dengan dua arah. Pertama, akan ditunjukkan jika M adalah modul Noetherian maka N dan $M/_N$ adalah modul Noetherian. Berdasarkan Teorema 3.1.1 dan Teorema 3.2.1 maka pernyataan tersebut benar.

Selanjutnya pembuktian dari arah sebaliknya, yaitu jika N dan $M/_N$ adalah modul Noetherian maka M adalah modul Noetherian. Misalkan L adalah submodul dari M. Pemetaan

$$\pi : M \longrightarrow M/_N$$

$$x \longmapsto x + N$$

adalah epimorfisme.

Selanjutnya, karena π homomorfisme maka $\pi(L) \leq M/_N$ sehingga $\pi(L)$ dibangun secara hingga berdasarkan Teorema 3.1.2. Serta $L \cap N$ adalah submodul dari modul Noetherian N berakibat $L \cap N$ dibangun secara hingga.

Misalkan $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k\}$ adalah pembangun dari $\pi(L)$, perhatikan karena π surjektif maka untuk setiap $\bar{y}_i$ dengan $i = 1$ sampai dengan k, terdapat $y_i \in L$ sedemikian sehingga $\pi(y_i) = \bar{y}_i$. Selanjutnya, misalkan $z_1, \ldots, z_l$ adalah pembangun dari $L \cap N$.

Untuk sebarang $x \in L$, maka $x + N \in \pi(L)$. Sehingga diperoleh

$$x + N = \sum_{i=1}^{k} r_i(\bar{y}_i)$$

$$x + N = \sum_{i=1}^{k} r_i(y_i + N)$$

$$x + N = \sum_{i=1}^{k} (r_i y_i) + N$$

$$x + N = \left(\sum_{i=1}^{k} r_i y_i\right) + N$$

dengan $r_i \in R$. Akibatnya $x - \sum_{i=1}^{k} r_i y_i \in N$. Selanjutnya, karena $x \in L$ dan $y_i \in L$ berakibat $x - \sum_{i=1}^{k} r_i y_i \in L$. Lebih lanjut, hal ini mengakibatkan $x - \sum_{i=1}^{k} r_i y_i \in L \cap N$.

Karena $x - \sum_{i=1}^{k} r_i y_i \in L \cap N$, maka terdapat $s_1, \ldots, s_l \in R$ sehingga

$$x - \sum_{i=1}^{k} r_i y_i = \sum_{i=1}^{l} s_i z_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} r_i y_i + \sum_{i=1}^{l} s_i z_i$$

jadi diperoleh L dibangun oleh $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l$. Sehingga submodul L dibangun secara hingga. Jadi terbukti M adalah modul Noetherian. □

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka didapatkan kesimpulan sebagai berikut

Misalkan R adalah ring komutatif dan M adalah R-modul. Misalkan N adalah submodul dari M. Maka berlaku:

1. M adalah modul Noetherian jika dan hanya jika setiap submodulnya dibangun secara hingga.
2. M adalah modul Noetherian jika dan hanya jika N dan M/N adalah modul Noetherian.

4.2 Saran

Pada skripsi ini peneliti melakukan penelitian terhadap keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodulnya dan keterkaitan antara modul Noetherian dengan modul hasil baginya, serta diteliti pula keterkaitan antara modul Noetherian dengan submodul dan modul hasil bagi Noetherian. Selanjutnya peneliti menyarankan untuk penelitian selanjutnya dilakukan penelitian mengenai submodul dan modul hasil bagi pada struktur modul yang lain, misalnya modul Reguler.

DAFTAR PUSTAKA

Bland, Paul E. 2011. *Rings and Their Modules.* Berlin: De Gruyter.

Dummit, D.S dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra.* New York: Prentice-Hall International, Inc.

Gallian, J.A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra.* Boston: Nelson Education, Ltd.

Gilbert, L. Dan Gilbert, J. 2009, *Element of Modern Algebra.* Belmont: Nelson Education, Ltd.

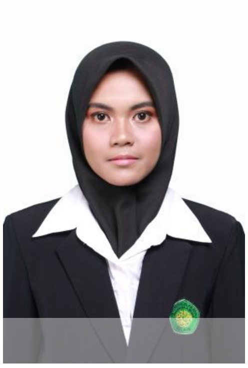
Katsir, I.I.. 2007. *Mukhtasor Tafsir Ibnu Katsir.* Libanon: Dar El-Marefah.

M. F. Athiyah dan I. G. Macdonald. 1969. *Introduction to Commutative Algebra.* London: Addison Wesley.

Rahman, A. 1992. *Al Quran Sumber Ilmu Pengetahuan.* Jakarta:Rineka Cipta.

Roman, S. 2008. *Advanced Linear Algebra.* New York: Springer.

Spindler, Karlheinz. 1994. *Abstract Algebra with Applications in Two Volumes: Volume I Vector Spaces and Groups.* Darmstast: Marcel Dekker, Inc.



RIWAYAT HIDUP

A'yunina Faidatul Nuzula, lahir di Kediri pada tanggal 27 Juli 1998 biasa dipanggil A'yun tinggal di Blitar. Putri sulung dari Bapak Ahmad Marmujito dan Ibu Sulistianah ini memiliki seorang adik bernana Muhammad Rizqi Al-Fadholi.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Temenggungan 2, Temenggungan Udanawu Blitar dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu ia melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Srengat, Blitar dan lulus pada tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 6 Kediri, Kota Kediri dan lulus pada tahun 2016. Selain itu ia juga menempuh pendidikan di Pondok Pesantren Al-Amin Ngasinan Kota Kediri pada tahun 2013-2016. Setelah itu ia melanjutkan pendidikan tingkat Strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang jurusan Matematika dan berdomisili Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah, Merjosari Lowokwaru Malang.

Selain kesibukannya menjadi mahasiswa, ia juga berperan aktif dalam Organisasi pondok yang ada di Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah yaitu di Lembaga Bimbingan Belajar Ahaf Institute PP. Al-Hikmah Al-Fathimiyah sebagai Divisi pemasaran (20117-2018) dan bendahara (2018-2019) serta berperan dalam Organisasi Pengurus Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah (2019-2020) sebagai Divisi Kesejahteraan Santri.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : A'yunina Faidatul Nuzula
NIM : 16610105
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Submodul dan Modul Hasil Bagi dari Modul Noetherian.
Pembimbing I : Dewi Ismiarti, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	03 Januari 2020	Konsultasi Bab I, II dan III	1.	
2.	28 Januari 2020	Perbaikan pembuktian teorema		2.
3.	04 Februari 2020	Perbaikan Bab I dan II	3.	
4.	05 Februari 2020	Konsultasi Integerasi		4.
5.	08 Maret 2020	Perbaikan Bab II	5.	
6.	31 Maret 2020	ACC untuk diseminarkan		6.
7.	28 April 2020	Konsultasi Bab III	7.	
8.	1 Mei 2020	ACC Integrasi		8.
9.	8 Mei 2020	Perbaikan penulisan pembuktian di Bab III	9.	
10.	8 Juni 2020	Konsultasi Bab I dan III		10.
11.	10 Agustus 2020	Perbaikan pembuktian	11.	
12.	15 November 2020	Perbaikan pembuktian		12.
13.	17 November 2020	Perbaikan pembuktian	13.	
14.	18 November2020	ACC untuk disidangkan		14.

Malang, 04 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504142003121001