

**PEMODELAN SISTEM PEGAS  
DENGAN DUA BEBAN MASSA**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ARINA FITRI ROZANNI  
NIM. 16610076**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**PEMODELAN SISTEM PEGAS  
DENGAN DUA BEBAN MASSA**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH  
ARINA FITRI ROZANNI  
NIM.16610076**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**PEMODELAN SISTEM PEGAS  
DENGAN DUA BEBAN MASSA**

**SKRIPSI**

Oleh  
**ARINA FITRI ROZANNI**  
NIM. 16610076

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 1 Mei 2020

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si.  
NIP. 19810502 200501 1 004

Dr. Hairur Rahman, M.Si.  
NIP. 19800429 200604 1 003

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.  
NIP. 19650414 200312 1 001

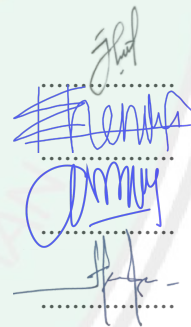
**PEMODELAN SISTEM PEGAS  
DENGAN DUA BEBAN MASSA**

**SKRIPSI**

Oleh  
**ARINA FITRI ROZANNI**  
NIM. 16610076

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal 13 Mei 2020

Penguji Utama : Juhari, M.Si.  
Ketua Penguji : Heni Widayani, M.Si.  
Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si.  
Anggota Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si.



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Arina Fitri Rozanni

NIM : 16610076

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Pemodelan Sistem Pegas dengan Dua Beban Massa,

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas tindakan tersebut.

Malang,

Yang membuat pernyataan,



Arina Fitri Rozanni  
NIM. 16610076

## MOTO

“Tidak ada rasa bersalah yang dapat mengubah masa lalu dan tidak ada kekhawatiran yang dapat mengubah masa depan” (Umar bin Khattab).



## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Keluarga, yang selalu mendukung dan memberikan semangat yang sangat  
berharga bagi penulis



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh*

Segala puji dan syukur kehadirat Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayahNya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pada proses penyelesaian skripsi ini, penulis memperoleh berbagai bimbingan, arahan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, ucapan terimakasih sebesar - besarnya dan penghargaan yang sangat tinggi penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan dan nasihat serta ilmu yang sangat berharga kepada penulis.
5. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan nasihat serta ilmu yang sangat berharga kepada penulis.

6. Juhari,.Si M selaku penguji utama yang telah memberikan bimbingan, arahan dan nasihat serta ilmu yang sangat berharga kepada penulis.
7. Heni Widayani, M.Si selaku ketua penguji yang telah memberikan bimbingan, arahan dan nasihat serta ilmu yang sangat berharga kepada penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat baik bagi penulis maupun pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh*

Malang,

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xv</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xvii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xviii</b>
<b>المخلص</b> .....	<b>xix</b>
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
 <b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Hukum Newton II .....	8
2.2 Hukum Hooke .....	9
2.3 Persamaan Pegas dengan Gaya Redam .....	10
2.4 Persamaan Diferensial Biasa Orde Tinggi.....	11
2.4.1 Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen .....	11
2.4.2 Solusi Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen dengan Koefisien Konstan .....	12
2.4.2 Solusi PDB dengan Akar – Akar Persamaan Karakteristiknya Imajiner.....	13
2.5 Sistem Persamaan Diferensial Biasa.....	14
2.6 Penelitian Terdahulu Sistem Pegas dengan Dua Beban .....	19

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Model Matematika Sistem Pegas .....	20
3.2 Solusi Model.....	25
3.3 Simulasi Model .....	30

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan.....	36
4.2 Saran.....	37

### **DAFTAR PUSTAKA LAMPIRAN**



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. 1	Sistem pegas yang dimodelkan Sharma dan Stephen .....	3
Gambar 1. 2	Sistem pegas yang akan dimodelkan.....	4
Gambar 2. 1	Kurva gaya pegas .....	9
Gambar 2. 2	Hukum Hooke .....	10
Gambar 3. 1	Pemodelan Sistem Pegas dengan Satu Beban .....	20
Gambar 3. 2	Sistem Pegas dengan Dua Beban Massa .....	21
Gambar 3. 3	Plot sistem pegas dengan $k_A = 6$ dan $k_B = 4$ .....	31
Gambar 3. 4	Plot sistem pegas dengan $k_A = 0,4$ dan $k_B = 1,808$ .....	32
Gambar 3. 5	Plot sistem pegas dengan gaya redam .....	33
Gambar 3. 6	Plot model nonlinier pada kasus pertama.....	34
Gambar 3. 7	Plot model nonlinier pada kasus kedua.....	35
Gambar 4. 1	Plot model linier kasus pertama .....	37
Gambar 4. 2	Plot model linier kasus kedua .....	37
Gambar 4. 3	Plot model linier dengan gaya redam.....	37

**DAFTAR SIMBOL**

- $A$  : Nama beban yang menggantung paling dekat dengan langit – langit.
- $a_A$  : Percepatan beban  $A$  ( $m/s^2$ ).
- $a_B$  : Percepatan beban  $B$  ( $m/s^2$ ).
- $B$  : Nama beban yang menggantung paling bawah.
- $c$  : Koefisien redam.
- $\delta_A$  : Koefisien redam beban  $A$ .
- $\delta_B$  : Koefisien redam beban  $B$ .
- $F$  : Gaya (Newton).
- $f$  : Fungsi kontinu di  $x$ .
- $I$  : Matriks Identitas.
- $k_A$  : Koefisien pegas  $A$ .
- $k_B$  : Koefisien pegas  $B$ .
- $\lambda$  : Nilai eigen.
- $m_A$  : Massa beban  $A$  (kilogram).
- $m_B$  : Massa beban  $B$  (kilogram).
- $\mu_A$  : Koefisien gaya pemulih pegas  $A$ .
- $\mu_B$  : Koefisien gaya pemulih pegas  $B$ .
- $M$  : Matriks persamaan sistem pegas.
- $Q$  : Fungsi komtinu di  $x$ .
- $t$  : Waktu (sekon).

$v$  : Kecepatan ( $m/s$ ).

$V$  : Vektor eigen.

$y_A$  : Posisi beban  $A$  (meter).

$y_B$  : Posisi beban  $B$  (meter).

$Y_A$  : Turunan pertama  $y_A$  terhadap  $t$ .

$Y_B$  : Turunan pertama  $y_B$  terhadap  $t$ .



## ABSTRAK

Rozanni, Arina Fitri. 2020. **Sistem Pegas dengan Dua Beban Massa**. Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Hairur Rahman, M.Si.

**Kata kunci:** hukum Newton, gaya gravitasi, gaya pegas, persamaan diferensial biasa, sistem pegas

Pegas merupakan komponen yang sering digunakan pada mesin serta memiliki beragam rancangan. Dalam perancangan rangkaian pegas, diperlukan rancangan model yang tepat untuk memperoleh osilasi yang diinginkan. Sebelumnya, telah dilakukan beberapa penelitian terkait rangkaian model pegas, salah satunya yaitu pada penelitian model sistem pegas dengan dua beban yang digantungkan dan memiliki rangkaian yang sama yang disusun secara vertikal. Namun pada penelitian tersebut tidak dijelaskan secara rinci mengenai langkah-langkahnya. Sehingga pada penelitian ini, penulis akan menjelaskan kembali langkah-langkah diperolehnya model tersebut beserta solusi analitiknya, hingga simulasi dan animasi dari gerakan sistem pegas yang telah dimodelkan pada kasus linear. Dalam memperoleh modelnya, peneliti menggunakan hukum hooke dan hukum newton II lalu menyelesaikan persamaan model yang diperoleh sebelumnya hingga didapatkan solusi analitiknya. Setelah diperoleh solusi analitiknya peneliti menyimulasikan solusi model dengan beberapa kondisi tertentu dengan bantuan aplikasi *Python*, *Octave* dan *Maple*. Pada model dengan kondisi tanpa gaya redam diperoleh plot yang menunjukkan bahwa sistem pegas yang berosilasi secara periodik terus menerus sedangkan pada model yang disertai dengan gaya redam diperoleh plot yang menunjukkan bahwa semakin lama pegas berosilasi, maka posisi masing-masing beban mendekati kondisi equilibrium masing-masing.

## ABSTRACT

Rozanni, Arina Fitri. 2020. **Two Mass Spring System**. Thesis. Mathematics Department Sains and Technology Faculty, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Hairur Rahman, M.Si.

**Keyword** : Newton's law, gravity force, spring force, ordinary differential equation, spring system

Spring is a common component machine which has various design. We must have feasible model to get desired spring oscillation. There were some authors that has discussed about spring mass system, one of those had discussed about spring mass system which has two masses suspended vertically, but it didn't explain the process in detail. Hence, in this research the author discussed again about the procedures to obtain the models in detail with their analytical solutions and animated plot from the spring motion in linear case. In modeling this spring system, the author used hooke's and newton's II laws and found the analytical solution, then simulated the solution with current condition by using Python, Octave and Maple. For the result, the simulation plot of the model without damping force showed that the model of the spring system is periodically continuously oscillated, while the model with damping force showed that the moved of the spring system would be closer to their equilibrium position.

## المخلص

رازاني، أرينا فطري. 2020. نظام النابض بكتلتين. البحث العلمي. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. تحت إشراف (1) محمد جامهوري الماجستير و(2) الدكتور خير الرحمن الماجستير

**الكلمات المفتاحية:** قانون نيوتن، جاذبية الأرض، النابض، المعدلات التفاضلية، العادلة.

المخمد هو عنصر الذي يكثر استخدامه في الماكينة ولها التصميمات المتنوعة. والأمور المحتاجة في تصميم سلسلة النابض هي تصميم النموذج الصحيح للحصول على التذبذب المرجو. لقد قيمت البحوث العلمية حول تصميم نموذج النابض، منها البحث حول نظام المخمد بالحملين المتعلقين ويمكن التصميمات المتشابهة المنظمة بشكل عمودي، ولكن هذا البحث لا يشرح خطوات النابض بشكل دقيق. فيشرح الباحث في هذا البحث خطوات حصول على نموذج المخمد وحلها التعليلي حتى محركاتها والصورها المتحركة من حركة نظام النابض المنمذجة في الحالة الخطية. وللحصول على نتائج البحث، يستخدم الباحث قانون هوك وقانون نيوتن الثاني وإكمال تشابه النموذج المحصول حتى يمكن الحصول على حل تحليله. بعد الحصول على حل تحليله، يستنتج الباحث حل النموذج ببعض الحالات المتعينة بتطبيق Python و Octave و Maple. والنتيجة المحسولة في النموذج بدون الكبت هي الخريطة التي تدل على أن نظام النابض الذي يتذبذب بانتظام مستمرا وأما النتيجة المحسولة في النموذج بالكبت فهي الخريطة التي تدل على أن النابض الذي يتذبذب في وقت طويل ستقرب مكان حمله إلى حالات توازنهما.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pemodelan merupakan salah satu aktivitas kognitif menganalisis dan merancang model dalam mendeskripsikan suatu perangkat atau objek dalam berperilaku. Terdapat beberapa cara untuk mendeskripsikan perilaku suatu objek, yaitu menggunakan kalimat, sketsa, program komputer atau rumus matematika (Dym, 2004). Pemodelan secara umum erat kaitannya dengan matematika, sehingga tak jarang dikenal dengan sebutan pemodelan matematika, yakni suatu pengaplikasian matematika yang digunakan untuk mendeskripsikan suatu masalah di dunia nyata serta mengamati berbagai pertanyaan penting yang muncul dari pemodelan tersebut. Hasil yang akan diperoleh dari pemodelan ini, tentunya berupa suatu model matematika yang akan mendeskripsikan situasi kehidupan nyata. Sehingga model matematika tersebut nantinya dapat merefleksikan perilaku suatu situasi kehidupan nyata serta memberikan pemahaman yang lebih baik dengan analisis yang sesuai dengan model (Banerjee, 2014).

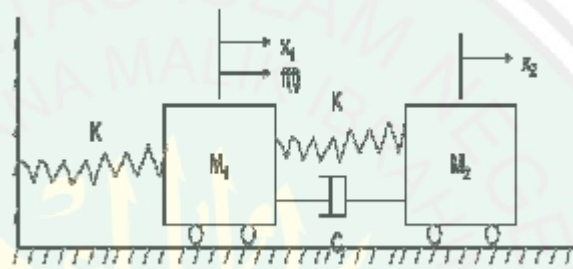
Atribut fisik yang digunakan untuk memodelkan suatu objek atau sistem akan merepresentasikan suatu konsep, seperti waktu, panjang, dan massa, yang mana perlu juga untuk mencantumkan nilai numerik atau ukurannya. Maksud dari kata dimensi pada suatu pemodelan adalah banyaknya ruang variabel bebas pada suatu fungsi. Jika massa, panjang, dan waktu menjadi atribut utama, maka dimensi dari luas adalah  $(\text{panjang})^2$ , lalu dimensi dari kepadatan adalah  $\text{massa}/(\text{panjang})^3$ , dan dimensi dari gaya adalah  $(\text{massa} \times \text{panjang})/(\text{waktu})^2$ .

Berdasarkan paparan tersebut dapat dikatakan banyaknya satuan besaran merupakan suatu aspek numerik dari jumlah dimensi yang ditunjukkan pada standar fisik (Dym, 2004).

Hampir seluruh fenomena pada disiplin ilmu fisika menggunakan model matematika untuk mempermudah pengamatan perilaku suatu objek. Salah satu topik yang dibahas adalah getaran. Getaran merupakan gerak osilasi dari suatu sistem yang dapat berupa gerakan beraturan dan berulang secara kontinyu atau dapat juga berupa gerakan tidak beraturan atau acak. Setiap gerak yang terjadi secara berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik. Gerak periodik yang terjadi secara teratur disebut gerak harmonis (Susilo, 2012). Salah satu contoh dari gerak harmonis adalah gerak yang terjadi pada pegas saat diberi gaya.

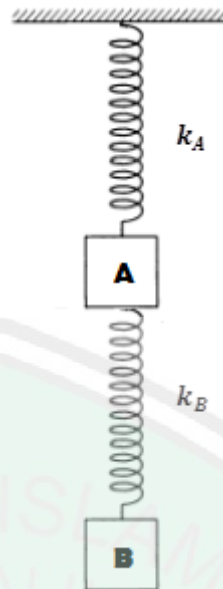
Pegas merupakan komponen yang digunakan dalam industri otomotif, transportasi, dan industri lainnya. Pegas juga digunakan untuk sistem suspensi, peralatan, perabotan, dan lainnya. Pegas dapat diartikan sebagai benda elastis yang digunakan untuk menyimpan energi mekanis. Penggunaan pegas banyak ditemukan di kehidupan sehari – hari dengan berbagai macam modifikasi rangkaiannya. Sistem pegas massa merupakan suatu sistem yang tersusun dari benda yang memiliki massa dan terhubung dengan pegas yang dapat dirangkai secara seri dan paralel sesuai dengan tujuan desain pegas yang diharapkan. Pada penyusunan rangkaian pegas seri dapat memberikan kinerja yang berbeda dengan penyusunan rangkaian pegas paralel. Dengan demikian, dalam perancangan rangkaian pegas diperlukan rancangan model yang sesuai dengan tujuan rancangan rangkaian pegas tersebut.

Sharma (2014) memodelkan rangkaian sistem pegas dengan susunan pegas secara horizontal dengan dua derajat kebebasan dan menyimulasikan pemodelannya dengan software MATLAB, kemudian dengan rancangan pegas yang sama Stephen (2017) menyimulasikan modelnya dengan menggunakan software ANSYS APDL dan membandingkan hasil simulasinya dengan perhitungan teoritis.



Gambar 1. 1 Sistem pegas yang dimodelkan Sharma dan Stephen

Sharma dan Stephen hanya memodelkan sistem pegas yang dirangkai dan dimodelkan gerakannya secara horizontal, sedangkan Temple H. Fay dan Sarah Duncan Graham di jurnalnya yang berjudul *Coupled Spring Equation* memodelkan dan menyimulasikan sistem pegas dengan dua beban yang digantungkan dan memiliki rangkaian yang sama yang disusun secara vertikal. Pada jurnal milik Temple dan Sarah tidak dijelaskan secara mendetail bagaimana langkah – langkah untuk memperoleh model persamaannya serta solusi analitik dari model tersebut, sehingga pada penelitian ini akan dicantumkan bagaimana detail langkah – langkah diperolehnya model dan solusi analitiknya yang disertai dengan simulasinya serta animasi dari gerakan sistem pegas yang dimodelkan pada kasus linear.



Gambar 1. 2 Sistem pegas yang akan dimodelkan

Keinginan peneliti dalam mengembangkan model pegas tersebut sejalan dengan era globalisasi yang terus mengalami kemajuan. Hal tersebut tentu tak terlepas dari kuasa Allah atas ilmu – ilmu Nya di dunia ini. Sebagaimana yang telah Allah Swt firmankan pada surat Al-Furqan ayat 2 :

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

*Artinya: “Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(-Nya), dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat.”*

Ayat di atas menjelaskan bahwa seluruh dunia dan seisinya adalah kuasa Allah dan Allah Maha Kuasa atas ciptaan Nya. Oleh karena itu perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi tidak terlepas dari kuasa Allah atas ilmu Nya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan latar belakang sebelumnya maka dapat ditarik suatu rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika dari sistem pegas dengan dua beban massa yang digantungkan secara vertikal?
2. Bagaimana solusi analitik dari model sistem pegas yang diperoleh?
3. Bagaimana simulasi dari model sistem pegas yang diperoleh?

### **1.3 Tujuan**

Tujuan penelitian skripsi ini yaitu :

1. Mengetahui model matematika dari sistem pegas dengan dua beban massa yang digantungkan secara vertikal
2. Mengetahui solusi analitik dari model sistem pegas yang diperoleh.
3. Mengetahui simulasi dari model sistem pegas yang diperoleh.

### **1.4 Batasan Masalah**

Penelitian ini membahas gerakan sistem pegas bergandeng yang digantung dan bergerak secara vertikal, yang mana untuk bagian paling atas menempel pada dinding dan bagian paling bawah tidak melekat pada apapun.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yakni sebagai tambahan bahan kajian literatur bagi peneliti selanjutnya mengenai pemodelan matematika pada sistem pegas dua derajat kebebasan yang disusun secara vertikal.

### **1.6 Metode Penelitian**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (library research). Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan

rujukan dari buku, jurnal dan sumber lainnya yang berkaitan dengan persamaan diferensial biasa sebagai landasan teori. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan persamaan diferensial sistem pegas dengan dua beban yang dirangkai secara vertikal dengan menggunakan hukum hooke dan hukum newton II hingga diperoleh sistem PDB orde dua.
2. Menurunkan sistem PDB yang diperoleh dan mengeliminasi serta mensubstitusi variabelnya untuk memperoleh solusi implisitnya.
3. Mensubstitusikan solusi implisitnya dengan kondisi awal tertentu hingga diperoleh solusi eksplisitnya.
4. Mensimulasikan solusi eksplisitnya.
5. Menyimpulkan dan menginterpretasikan hasil simulasi.

### **1.7 Sistematika Penulisan**

Dalam penelitian ini, sistematika penulisan yang digunakan, yaitu :

#### **Bab I Pendahuluan**

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

#### **Bab II Kajian Pustaka**

Kajian pustaka terdiri dari teori – teori yang menunjang topik penelitian skripsi. Pada bagian ini terdiri dari penjelasan tentang hukum newton kedua, hukum hooke, persamaan diferensial biasa, dan kajian al-Qur'an yang berkaitan dengan penelitian ini.

### Bab III Pembahasan

Pada pembahasan akan diuraikan tentang penurunan persamaan dalam membentuk model sistem pegas dua derajat kebebasan, sesuai dengan tahapan yang dipaparkan pada metode penelitian.

### Bab IV Penutup

Pada bagian penutup ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran untuk penelitian selanjutnya.



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Hukum Newton II

Hukum Newton II mendeskripsikan bagaimana suatu partikel bereaksi pada gaya. Hukum Newton II dideskripsikan dengan persamaan berikut :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (2.1)$$

Dimana  $\vec{F}$  adalah jumlah vektor dari total gaya yang diberikan pada massa (m). Gaya  $\vec{F}$  sama dengan laju perubahan momentum (mv) dimana v adalah kecepatan massa dan x adalah posisi massa tersebut.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.2)$$

Jika diasumsikan massa adalah suatu konstanta maka :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2.3)$$

Dimana  $\vec{a}$  adalah vektor percepatan massa

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (2.4)$$

Sehingga persamaan (2.2) dapat dibentuk menjadi

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (2.5)$$

Jika tidak ada gaya  $\vec{F}$ , massa hanya bisa bergerak dengan kecepatan konstan. Dengan demikian variabilitas yang diamati dari kecepatan harus disebabkan oleh kekuatan yang mungkin diberikan oleh pegas.

## 2.2 Hukum Hooke

Menurut Haberman ada beberapa posisi massa dapat ditempatkan dan tidak akan bergerak; disana pegas tidak memberikan kekuatan pada massa. Tempat dimana kita memusatkan sumbu koordinat kita. Jika  $x = 0$  maka posisi tersebut disebut sebagai posisi keseimbangan atau pegas yang tidak terentang. Jarak  $x$  ini kemudian disebut sebagai perpindahan dari kesetimbangan atau jumlah peregangan pegas. Jika kita merentangkan pegas (yaitu  $x < 0$ ), maka pegas memberikan gaya yang menarik massa kembali ke posisi kesetimbangan (yaitu  $\vec{F} > 0$ ). Gaya seperti itu disebut gaya pemulihan. Lebih jauh lagi, kita akan mengamati bahwa ketika kita meningkatkan peregangan pegas, gaya yang diberikan oleh pegas akan meningkat. Dengan demikian kita dapat memperoleh hasil yang ditunjukkan pada Gambar 1, di mana kurva digambar dengan mulus menghubungkan titik data eksperimental yang ditandai dengan "x" :



Gambar 2. 1 Kurva gaya pegas

Diasumsikan bahwa gaya hanya bergantung pada jumlah peregangan pegas; gaya tidak tergantung pada jumlah lain. Jadi, misalnya, gaya diasumsikan sama tidak peduli berapapun kecepatan massa bergerak. Pemeriksaan yang cermat

terhadap data eksperimen menunjukkan bahwa gaya bergantung, secara kompleks, pada peregangan. Namun, untuk peregangan pegas yang tidak terlalu besar (sesuai dengan paling banyak gaya moderat), Gambar 2.1 menunjukkan bahwa kurva ini dapat diperkirakan dengan garis lurus :



Gambar 2. 2 Hukum Hooke

Dapat ditulis persamaannya sebagai berikut :

$$\vec{F} = -kx \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) adalah perkiraan yang baik untuk gaya pegas asalkan massa tidak terlalu jauh dari posisi setimbangnya.  $k$  disebut konstanta pegas yang berkaitan dengan elastisitas pegas. Hubungan linear antara gaya dan posisi massa ini ditemukan oleh ahli fisika Hooke abad ketujuh belas sehingga dikenal sebagai hukum Hooke.

### 2.3 Persamaan Pegas dengan Gaya Redam

Gaya redam memiliki arah yang berlawanan dengan gerak pegas saat itu dan gaya ini dianggap sebanding dengan kecepatan  $x' = \frac{dx}{dt}$  dari beban tersebut, sehingga persamaan gaya redamnya adalah

$$\overrightarrow{F_{redam}} = -c \frac{dx}{dt} \quad (2.7)$$

dengan  $c$  adalah koefisien redam positif, sehingga menurut hukum kedua Newton persamaan umum pegas yang dipengaruhi oleh gaya redam sebagai berikut :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt}$$

kemudian dibentuk kembali menjadi PDB orde dua homogen seperti berikut :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.8)$$

(Kreyszig, 1993).

## 2.4 Persamaan Diferensial Biasa Orde Tinggi

Menurut Tenenbaum (1985) persamaan diferensial biasa orde ke  $n$  adalah persamaan yang dapat ditulis dengan bentuk

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = Q(x) \quad (2.9)$$

dimana  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$  dan  $Q(x)$  masing – masing adalah fungsi kontinu di  $x$  yang didefinisikan pada suatu interval  $I$  dan  $f_n(x) \neq 0$  di  $I$ .

### 2.4.1 Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen

Jika  $Q(t) \neq 0$  di  $I$ , maka persamaan (2.9) disebut persamaan linier nonhomogen orde ke  $-n$ . Jika  $Q(t) = 0$  di  $I$  maka persamaan (2.9) menghasilkan persamaan baru

$$f_n(t)y^{(n)} + f_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + f_1(t)y' + f_0(t)y = 0 \quad (2.10)$$

yang disebut sebagai persamaan diferensial linier homogen dengan orde ke  $-n$ .

## 2.4.2 Solusi Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Jika koefisien pada persamaan (2.10) konstan, maka solusi dari fungsi dasarnya (atau  $y(t)$ ) dapat diperoleh dengan mudah, misalkan persamaan (2.10) ditulis kembali dengan persamaan berikut

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2.11)$$

dimana  $a_0, a_1, \dots, a_n$  konstan dan  $a_n \neq 0$ .

Misalkan persamaan (2.11) memiliki kemungkinan solusi dengan bentuk sebagai berikut

$$y(t) = e^{mt} \quad (2.12)$$

Persamaan (2.11) dapat ditulis kembali dengan bentuk berikut

$$a_n \frac{d^n}{dx^n} e^{mt} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{mt} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} e^{mt} + a_0 e^{mt} = 0 \quad (2.13)$$

karena turunan ke  $-k$  dari  $e^{mt} = m^k e^{mt}$ , maka persamaan (2.13) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$a_n m^n e^{mt} + a_{n-1} m^{n-1} e^{mt} + \dots + a_1 m e^{mt} + a_0 e^{mt} = 0 \quad (2.14)$$

karena  $e^{mt} \neq 0$  untuk seluruh  $m$  dan  $t$  maka persamaan (2.14) dibagi  $e^{mt}$  pada kedua ruas hingga diperoleh

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0 \quad (2.15)$$

Berdasarkan Teorema 2.1, persamaan (2.15) setidaknya memiliki satu akar dan tidak lebih dari  $n$  akar yang berbeda, dimisalkan akar – akar tersebut adalah  $m_1, m_2, \dots, m_n$  dimana  $m$  tidak harus berbeda, maka solusi dari persamaan (2.11) adalah

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \quad y_2(t) = e^{m_2 t}, \quad \dots, \quad y_n(t) = e^{m_n t} \quad (2.16)$$

**Definisi 2.1.** Persamaan (2.15) disebut sebagai persamaan karakteristik dari persamaan (2.11).

Dalam penyelesaian persamaan karakteristik (2.15), kemungkinan akar – akar yang diperoleh adalah berikut :

1. Semua akarnya riil berbeda
2. Semua akarnya riil tapi kembar
3. Semua akarnya imajiner

#### 2.4.2 Solusi PDB dengan Akar – Akar Persamaan Karakteristiknya Imajiner.

Dimisalkan bahwa  $\alpha + i\beta$  dan  $\alpha - i\beta$  adalah dua akar imajiner dari persamaan karakteristik dari PDB orde dua, maka solusi umumnya adalah

$$\begin{aligned} y_c &= c'_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c'_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= c'_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c'_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} (c'_1 e^{i\beta x} + c'_2 e^{-i\beta x}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

karena  $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$  dan  $e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i \sin(\beta x)$  maka persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai berikut

$$y_c = e^{\alpha x} [(c'_1 + c'_2) \cos(\beta x) + i(c'_1 - c'_2) \sin(\beta x)] \quad (2.18)$$

dengan memisalkan  $c'_1 + c'_2 = c_1$  dan  $i(c'_1 - c'_2) = c_2$ , maka diperoleh solusi umum dari persamaan (2.17) sebagai berikut

$$y_c = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)) \quad (2.19)$$



Transpos adalah operasi penulisan matriks baru yang berasal dari penukaran indeks elemen pada suatu matriks, yang mana elemen pada baris matriks lama menjadi elemen kolom pada matriks baru dan elemen kolom pada matriks lama menjadi elemen baris pada matriks baru. Operasi transpos ini sering dinotasikan dengan  $T$ . Jika  $A$  adalah matriks ukuran  $2 \times 2$  dengan elemen sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 13 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Lalu dioperasikan dengan operasi  $T$ , maka diperoleh persamaan baru sebagai berikut :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Jika suatu vektor kolom dengan elemen berikut

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

kemudian dioperasikan dengan operasi  $T$ , maka akan menghasilkan vektor baru yaitu vektor baris seperti berikut

$$v^T = [v_1 \quad v_2] \quad (2.25)$$

Jika diberikan matriks  $A$  dan  $B$  dengan ukuran  $n \times n$  sedemikian hingga  $AB = BA = I$ , maka matriks  $A$  disebut matriks nonsingular dan matriks  $B$  disebut invers dari  $A$  yang dinotasikan dengan  $A^{-1}$ , yang mana invers dari matriks  $A$  dapat diperoleh dengan rumus berikut

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

dengan  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$ .

Misalkan  $A = [a_{jk}]$  dengan ukuran  $n \times n$ , maka persamaan

$$Ax = \lambda x \quad (2.27)$$

dimana  $\lambda$  adalah skalar (bilangan riil atau kompleks) dan  $x$  adalah vektor yang dicari. Untuk setiap  $\lambda$  dengan solusi  $x = 0$  sedemikian hingga  $\lambda$  memenuhi suatu vektor  $x \neq 0$  yang disebut sebagai nilai eigen, dan bentuk vektornya disebut sebagai vektor eigen.

Dari persamaan (2.27) diperoleh  $Ax - \lambda x = 0$  maka dapat dikelompokkan menjadi

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.28)$$

Pada persamaan ini untuk mendapatkan solusi  $x \neq 0$  maka matriks  $A - \lambda I$  harus sama dengan 0, maka persamaan (2.28) adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

sehingga dapat dijabarkan seperti berikut

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

karena matriks  $A - \lambda I$  singular jika dan hanya jika determinan dari  $\det(A - \lambda I)$  adalah 0 dan disebut sebagai determinan karakteristik dari  $A$ . Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Persamaan kuadrat pada  $\lambda$  ini disebut persamaan karakteristik dari  $A$  yang solusinya adalah nilai eigen dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  dari  $A$ . Pertama – tama tentukan dahulu persamaan karakteristiknya seperti pada persamaan (2.31), kemudian gunakan persamaan (2.30) untuk menentukan vektor eigen  $x^{(1)}$  dari  $A$  yang berkorespondensi dengan  $\lambda_1$  dengan  $\lambda = \lambda_1$ , lalu gunakan persamaan (2.30) lagi untuk menentukan vektor eigen  $x^{(2)}$  dari  $A$  yang berkorespondensi dengan  $\lambda_2$  dengan  $\lambda = \lambda_1$ . Catat bahwa  $x$  adalah vektor eigen dari  $A$ , dengan  $kx$  untuk setiap  $k \neq 0$ .

Untuk memperjelas ilustrasi tahapan yang dipaparkan diatas, maka akan dicantumkan contoh model dari gerak bebas pada pegas bermassa yang memiliki gaya redam dan menggantung secara vertikal. Maka diperoleh PDB dari sistem pegas yang teredam adalah sebagai berikut

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0 \quad (2.32)$$

dengan mengeliminasi kedua ruas dengan  $-cy'(t) - ky(t)$  dan membagi kedua ruas dengan  $m$  maka diperoleh

$$y''(t) = -\frac{c}{m}y'(t) - \frac{k}{m}y(t) \quad (2.33)$$

dengan sistem PDB sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

misalkan  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  maka dapat dibentuk matriksnya sebagai berikut

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

maka persamaan karakteristiknya adalah

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.36)$$

misalkan  $m = 1$ ,  $c = 2$ , dan  $k = 0,75$  maka

$$\lambda^2 + 2\lambda + 0,75 = (\lambda + 0,5)(\lambda + 1,5) = 0 \quad (2.37)$$

dari persamaan ini diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -0,5$  dan  $\lambda_2 = -1,5$ . Kemudian dengan persamaan  $A - \lambda I = 0$ , dengan  $-\lambda x_1 + x_2 = 0$ . Untuk  $\lambda_1$  diperoleh  $0,5x_1 + x_2 = 0$  dan vektor eigen sebagai berikut

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

untuk  $\lambda_2$  diperoleh  $1,5x_1 + x_2 = 0$  dan vektor eigen sebagai berikut

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,5 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

sehingga dapat diperoleh vektor solusi analitiknya

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0,5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1,5 \end{bmatrix} e^{-1,5t} \quad (2.40)$$

dengan komponen pertama yaitu

$$y = y_1 = 2c_1 e^{-0,5t} + c_2 e^{-1,5t} \quad (2.41)$$

dan komponen kedua yaitu

$$y_2 = y_1' = y' = -c_1 e^{-0,5t} - 1,5c_2 e^{-1,5t} \quad (2.42)$$

(Kreyszig, 2011).

## 2.6 Penelitian Terdahulu Sistem Pegas dengan Dua Beban

Stephen dan Rajkumar menyimulasikan dan memodelkan rangkaian sistem pegas yang disusun seperti pada Gambar 1.1. Stephen menyimulasikan dan memodelkan rangkaian pegas tersebut dengan menggunakan aplikasi *ANSYS APDL*. Ia membuat simulasi animasi gerak sistem pegas dan membandingkan nilai frekuensi dari solusi eksak dengan nilai frekuensi dari perhitungan *ANSYS*. Stephen dkk menyimpulkan bahwa nilai yang diperoleh dari solusi eksak selalu lebih tinggi dibandingkan dengan nilai yang diperoleh dari perhitungan *ANSYS*. Hal ini disebabkan oleh banyaknya asumsi dan pendekatan pada solusi eksaknya. Namun hasil perhitungan dari *ANSYS* sangat mendekati nilai yang diperoleh dari solusi eksak dengan *error* yang sangat kecil, sehingga simulasi dengan menggunakan *ANSYS* layak dan valid untuk digunakan sebagai prediksi dari frekuensi natural dan respons eksitasi dari struktur dan sistem dinamik.

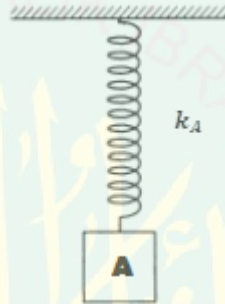
Rajkumar dkk memodelkan dan menyimulasikan sistem pegas dengan rangkaian yang sama. Mereka memodelkan dengan pemodelan persamaan dan pemodelan *state space* dengan menggunakan *Simulink*. Mereka menyimpulkan bahwa hasil simulasi dari kedua metode tersebut memiliki hasil yang sama, hal ini membuktikan bahwa suatu pemodelan dapat memiliki akurasi yang baik dengan memahami sistem dinamik yang bekerja pada sistem tersebut.

Temple dan Sarah memodelkan dan menyimulasikan sistem pegas dengan rangkaian yang sama seperti pada Gambar 1.2. Mereka meneliti sistem pegas pada Gambar 1.2 dengan kondisi linear dan tak linier. Mereka juga meneliti sistem pegas tersebut dengan gerakan bebas, gerakan teredam, dengan disertai contoh - contohnya.

## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Model Matematika Sistem Pegas

Sebelum memodelkan sistem pegas dengan dua beban, pemodelan pada penelitian skripsi ini diawali dengan pemodelan pegas dengan satu beban yang digantung secara vertikal.



Gambar 3. 1 Pemodelan Sistem Pegas dengan Satu Beban

Pada Gambar 3.1 terdapat pegas dengan konstanta pegas  $k_A$  yang digantung secara vertikal dan diberi satu beban dengan massa  $m_A$ . Pada ilustrasi sistem pegas diatas dapat dimodelkan gaya pegas yang bekerja pada beban tersebut dengan kaidah hukum hooke seperti berikut

$$F = -k_A y_A(t) \quad (3.1)$$

Setiap benda yang berada di permukaan bumi dipengaruhi oleh gaya berat, baik diberikan gaya tambahan atau tidak. Sehingga berdasarkan hukum newton II gaya yang bekerja pada massa  $A$  dapat dituliskan sebagai berikut

$$F = m_A a_A(t) \quad (3.2)$$

dengan  $a_A(t)$  adalah percepatan dari beban  $A$ . Karena  $a_A(t)$  juga merupakan turunan kedua dari  $y_A(t)$  serta beban  $A$  digantung secara vertikal, maka persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai berikut

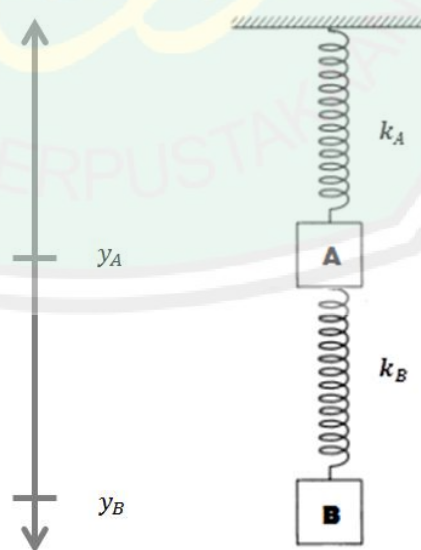
$$F = m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} \quad (3.3)$$

Jika pegas tersebut dalam kondisi diam atau equilibrium, maka resultan gaya yang bekerja adalah 0, baik dari gaya berat maupun dari gaya pegas yang mempengaruhi beban  $A$  saling menghilangkan satu sama lain, sehingga diperoleh resultan gayanya 0. Maka persamaan (3.1) dan (3.3) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = -k_A y_A(t) \quad (3.4)$$

Kemudian persamaan (3.4) dihomogenkan sehingga diperoleh persamaan dari model pegas pada Gambar 3.1 sebagai berikut

$$m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} + k_A y_A(t) = 0 \quad (3.5)$$



Gambar 3. 2 Sistem Pegas dengan Dua Beban Massa

Kemudian pada Gambar 3.2 diilustrasikan bahwa beban  $A$  yang memiliki massa sebesar  $m_A$  digantungkan pegas  $B$  dengan koefisien sebesar  $k_B$  dan pegas  $B$  menghubungkan antara beban  $A$  dan beban  $B$  yang memiliki massa sebesar  $m_B$ . Masing – masing beban  $A$  dan beban  $B$  berada pada posisi  $y_A$  dan  $y_B$ . Untuk mempermudah pemodelan maka gaya yang bekerja pada model pegas tersebut dibagi menjadi dua, yaitu gaya yang bekerja pada  $m_A$  dan  $m_B$ .

Gaya yang bekerja pada beban  $A$  dan beban  $B$  adalah gaya pegas dan gaya berat. Pada beban  $A$  gaya berat yang bekerja adalah

$$F_{berat_A} = m_A a_A(t) \quad (3.6)$$

kemudian persamaan (3.6) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$F_{berat_A} = m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} \quad (3.7)$$

dengan  $y_A(t)$  adalah posisi dari beban  $A$  yang bergantung dengan waktu yang ditempuh oleh beban  $A$ .

Gaya pegas yang bekerja pada beban  $A$  dipengaruhi oleh pegas  $A$  dan pegas  $B$ . Jika  $y_A(t)$  positif atau dapat diartikan beban  $A$  mengalami kenaikan posisi, maka pegas  $A$  akan mengalami pemendekan pegas yang mana hal ini menyebabkan pegas  $A$  cenderung mendorong beban  $A$  ke arah sebaliknya atau negatif. Hal ini menyebabkan  $k_A(t)$  bernilai negatif sehingga persamaan gaya pegas  $A$  yang terjadi pada beban  $A$  dapat ditulis persamaannya sebagai berikut

$$F_{pegas_A} = -k_A y_A(t). \quad (3.8)$$

Selain itu gaya yang bekerja pada beban  $A$  juga dipengaruhi oleh gaya pegas  $B$ , dimana arah gerak dari pegas  $B$  juga dipengaruhi arah gerak beban  $A$  dan arah gerak beban  $B$ . Jika beban  $A$  mengalami kenaikan posisi atau memiliki arah gerak positif, maka pegas  $B$  akan menarik beban  $A$  ke arah sebaliknya atau

memiliki arah negatif terhadap beban  $A$ . Hal ini menyebabkan nilai  $k_B$  negatif. Jika beban  $B$  mengalami kenaikan posisi atau memiliki arah gerak positif, maka pegas  $B$  akan cenderung mendorong beban  $A$  keatas, sehingga mengakibatkan pegas  $B$  memiliki arah positif terhadap beban  $A$ . Berdasarkan pemaparan gaya yang bekerja pada beban  $A$ , maka dapat ditulis resultan gaya pegas  $B$  sebagai berikut,

$$F_{pegas_B} = -k_B y_A(t) + k_B y_B(t). \quad (3.9)$$

Persamaan (3.8) dan (3.9) telah memodelkan persamaan gaya pegas  $A$  dan  $B$  terhadap beban  $A$ , sehingga dapat diperoleh resultan gayanya sebagai berikut

$$F_{pegas_1} = F_{pegas_A} + F_{pegas_B} \quad (3.10)$$

Persamaan (3.10) dapat dijabarkan seperti berikut

$$F_{pegas_1} = -k_A y_A(t) - k_B y_A(t) + k_B y_B(t) \quad (3.11)$$

dengan  $F_{pegas_1}$  adalah resultan gaya pegas  $A$  dan  $B$  terhadap beban  $A$ .

Jika pegas tersebut dalam kondisi diam atau equilibrium, maka gaya yang bekerja adalah 0, baik dari gaya berat maupun dari gaya pegas terhadap beban  $A$ . Maka persamaan (3.7) dan (3.11) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = -k_A y_A(t) - k_B y_A(t) + k_B y_B(t). \quad (3.12)$$

Gaya yang mempengaruhi beban  $B$  adalah gaya berat dari beban  $B$  dan gaya pegas dari pegas  $B$  yang dipengaruhi oleh posisi beban  $B$  ( $y_B(t)$ ) dan posisi beban  $A$  ( $y_A(t)$ ). Gaya berat yang bekerja pada beban  $B$  dapat ditulis persamaannya sebagai berikut

$$F_{berat_B} = m_B a_B(t) \quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) dapat ditulis kembali menjadi

$$F_{berat_B} = m_B \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} \quad (3.14)$$

dengan  $y_B(t)$  adalah posisi dari beban  $B$  yang bergantung dengan waktu yang ditempuh oleh beban  $B$ .

Pergerakan pegas  $B$  dipengaruhi oleh  $y_A(t)$  dan  $y_B(t)$ , hal ini disebabkan karena pegas  $B$  menghubungkan antara beban  $B$  dan beban  $A$ . Jika  $y_B(t)$  bergerak ke arah positif maka koefisien pegas  $B$  ( $k_B$ ) bernilai negatif, karena pegas  $B$  cenderung mendorong beban  $B$  ke arah sebaliknya dari  $y_B(t)$  yaitu negatif. Jika  $y_A(t)$  bergerak ke arah positif maka pegas  $B$  cenderung menarik beban  $B$  ke arah positif, sehingga menyebabkan  $k_B$  bernilai positif. Berdasarkan pernyataan tersebut dapat diperoleh persamaannya sebagai berikut

$$F_{pegas_B} = -k_B y_B(t) + k_B y_A(t). \quad (3.15)$$

Pada saat kondisi pegas equilibrium, maka persamaan (3.14) dan (3.15) dapat ditulis kembali seperti berikut

$$m_B \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = -k_B y_B(t) + k_B y_A(t). \quad (3.16)$$

Persamaan (3.12) dan (3.16) adalah persamaan model dari sistem pegas tanpa gaya redam yang dirancang seperti pada Gambar 3.2. Kedua persamaan tersebut merupakan sistem persamaan diferensial biasa (PDB) linier orde dua.

Kemudian untuk kasus yang lebih menarik dan sesuai dengan kondisi riil, peneliti menambahkan gaya redam untuk setiap beban pada model sistem pegas yang digunakan. Gaya yang bekerja pada beban  $A$  dapat ditulis persamaannya sebagai berikut

$$m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = -\delta_A \frac{dy_A(t)}{dt} - k_A y_A(t) - k_B (y_A(t) - y_B(t)) \quad (3.17)$$

dengan  $\delta_A$  sebagai koefisien redam pegas  $A$ , kemudian gaya yang bekerja pada beban  $B$  dapat ditulis persamaannya sebagai berikut

$$m_B \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = -\delta_B \frac{dy_B(t)}{dt} - k_B(y_B(t) - y_A(t)) \quad (3.18)$$

dengan  $\delta_B$  sebagai koefisien redam pegas  $B$ .

Jika diasumsikan gaya pemulih tiap pegas adalah nonlinier dengan memiliki bentuk  $\mu x^3$  maka persamaan model pada beban  $A$  diperoleh seperti berikut :

$$m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = -\delta_A \frac{dy_A(t)}{dt} - k_A y_A(t) + \mu_A y_A^3(t) - k_B(y_A(t) - y_B(t)) + \mu_B(y_A(t) - y_B(t))^3 \quad (3.19)$$

sedangkan persamaan model pada beban  $B$  diperoleh sebagai berikut :

$$m_B \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = -\delta_B \frac{dy_B(t)}{dt} - k_B(y_B(t) - y_A(t)) + \mu_B(y_B(t) - y_A(t))^3 \quad (3.20)$$

### 3.2 Solusi Model

Persamaan (3.12) dan (3.16) adalah persamaan model sistem pegas tanpa gaya redam, dari persamaan (3.12) dapat diperoleh persamaan baru berikut

$$\frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = \frac{-k_A - k_B}{m_A} y_A(t) + \frac{k_B}{m_A} y_B(t) \quad (3.21)$$

Kemudian dari persamaan (3.16) dapat diperoleh persamaan baru berikut

$$\frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = -\frac{k_B}{m_B} y_B(t) + \frac{k_B}{m_B} y_A(t) \quad (3.22)$$

Persamaan (3.21) dapat ditransformasi menjadi PDB orde satu dengan pemisalan berikut

$$\begin{aligned}\frac{dy_A(t)}{dt} &= Y_A(t) \\ \frac{dY_A(t)}{dt} &= \frac{-k_A - k_B}{m_A} y_A(t) + \frac{k_B}{m_A} y_B(t)\end{aligned}\tag{3.23}$$

Begitu pula dengan persamaan (3.22) dapat ditransformasi menjadi PDB orde satu dengan pemisalan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dy_B(t)}{dt} &= Y_B(t) \\ \frac{dY_B(t)}{dt} &= -\frac{k_B}{m_B} y_B(t) + \frac{k_B}{m_B} y_A(t)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Dari persamaan (3.23) dan (3.24) dapat dibentuk matriksnya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_A(t)}{dt} \\ \frac{dY_A(t)}{dt} \\ \frac{dy_B(t)}{dt} \\ \frac{dY_B(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_A - k_B}{m_A} & 0 & \frac{k_B}{m_A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_B}{m_B} & 0 & -\frac{k_B}{m_B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A(t) \\ Y_A(t) \\ y_B(t) \\ Y_B(t) \end{bmatrix}\tag{3.25}$$

Matriks pada (3.25) dapat dimisalkan sebagai  $\frac{d}{dt}Y = MY$ . Matriks  $M$  dapat diolah dengan bantuan *Maple* sehingga diperoleh nilai eigen dan vektor eigennya. Untuk mempersingkat penulisan nilai eigennya dimisalkan dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$ . Sedangkan vektor eigennya dimisalkan dengan vektor  $V_1, V_2, V_3$  dan  $V_4$ .

Kasus PDB  $\frac{d}{dt}Y = MY$  dapat diselesaikan dengan menggunakan faktor integrasi, sehingga diperoleh solusinya berikut

$$Y = e^{Mt}Y_0 \quad (3.26)$$

dengan  $Y_0$  adalah kondisi awal  $Y(0)$ . Namun permasalahannya disini adalah bagaimana mendefinisikan eksponen yang berpangkat matriks ?. Jika matriks  $M$  adalah matriks diagonal maka bentuk  $e^{Mt}$  dapat diekspansi dengan deret Taylor, sehingga diperoleh deret berikut

$$e^{Mt} = I + (Mt) + \frac{1}{2!}(Mt)^2 + \frac{1}{3!}(Mt)^3 + \dots \quad (3.27)$$

Karena pada kasus yang diteliti disini bentuk matriksnya perlu didiagonalkan, maka diasumsikan bahwa matriks  $M$  dapat didiagonalkan sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$M = S\Lambda S^{-1} \quad (3.28)$$

sehingga

$$Mt = (S\Lambda S^{-1})t = S(t\Lambda)S^{-1} \quad (3.29)$$

dengan  $t$  adalah besaran skalar. Kemudian dari persamaan (3.27) kita dapat mengekspansi bentuk  $e^{Mt}$  menjadi persamaan berikut

$$e^{Mt} = I + (S(t\Lambda)S^{-1}) + \frac{1}{2!}(S(t\Lambda)S^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(S(t\Lambda)S^{-1})^3 + \dots \quad (3.30)$$

Suku dari persamaan (3.30) dapat ditulis menjadi

$$e^{Mt} = \frac{1}{k!}(S(t\Lambda)S^{-1})^k \quad (3.31)$$

Karena  $S^{-1}$  merupakan annihilator dari  $S$  maka persamaan (3.31) dapat ditulis seperti berikut

$$e^{Mt} = \frac{1}{k!}(S(t\Lambda)^k S^{-1}) \quad (3.32)$$

kemudian persamaan (3.32) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned}
 e^{Mt} &= SIS^{-1} + (S(t\Lambda)S^{-1}) + \frac{1}{2!}(S(t\Lambda)^2S^{-1}) + \frac{1}{3!}(S(t\Lambda)^3S^{-1}) + \dots \\
 &= S\left(I + (\Lambda t) + \frac{1}{2!}(\Lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\Lambda t)^3 + \dots\right)S^{-1} \\
 &= Se^{\Lambda t}S^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Sehingga diperoleh

$$Y = Se^{\Lambda t}S^{-1}Y_0 \tag{3.34}$$

yang dapat dijabarkan seperti berikut

$$\begin{bmatrix} y_A(t) \\ Y_A(t) \\ y_B(t) \\ Y_B(t) \end{bmatrix} = Se^{\Lambda t}S^{-1} \begin{bmatrix} y_A(0) \\ Y_A(0) \\ y_B(0) \\ Y_B(0) \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

dimana  $\Lambda$  adalah matriks diagonal dari nilai eigen matriks  $M$  dan kolom dari  $S$  adalah vektor eigen dari  $M$ .

Pada kasus kedua yaitu sistem pegas dengan gaya redam diperoleh model persamaan (3.17) dan (3.18) dengan tahapan yang sama, sistem PDB tersebut dapat dibentuk matriksnya seperti berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_A(t)}{dt} \\ \frac{dY_A(t)}{dt} \\ \frac{dy_B(t)}{dt} \\ \frac{dY_B(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_A - k_B & -\delta_1 & k_B & 0 \\ m_A & m_1 & m_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_B & 0 & -k_B & -\delta_2 \\ m_B & 0 & m_B & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A(t) \\ Y_A(t) \\ y_B(t) \\ Y_B(t) \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Karena memiliki tahapan yang sama persis dengan kasus sebelumnya maka solusi dari sistem pegas dengan koefisien redam diperoleh bentuk matriks yang sama dengan persamaan (3.35).

Pada kasus persamaan model nonlinier solusinya akan sulit diperoleh dengan cara biasa, sehingga diperlukan metode numerik untuk memperoleh solusi pendekatannya. Pada kasus ini peneliti menggunakan fungsi *built-in* ode45 dari *Octave*. Pertama kedua ruas dari persamaan (3.19) dibagi dengan  $m_A$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = & -\frac{\delta_A}{m_A} \frac{dy_A(t)}{dt} - \frac{k_A}{m_A} y_A(t) + \frac{\mu_A}{m_A} y_A^3(t) \\ & - \frac{k_B}{m_A} (y_A(t) - y_B(t)) + \frac{\mu_B}{m_A} (y_A(t) - y_B(t))^3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Begitu pula dengan persamaan (3.20), kedua ruasnya dibagi dengan  $m_B$  sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = & -\frac{\delta_B}{m_B} \frac{dy_B(t)}{dt} - \frac{k_B}{m_B} (y_B(t) - y_A(t)) \\ & + \frac{\mu_B}{m_B} (y_B(t) - y_A(t))^3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Kemudian dibentuk vektor [  $S$  ] dengan elemen sebagai berikut :

$$[ S ] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A(t) \\ \frac{dy_A(t)}{dt} \\ y_B(t) \\ \frac{dy_B(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

dari vektor tersebut diperoleh turunan pertamanya sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{dS_1}{dt} \\ \frac{dS_2}{dt} \\ \frac{dS_3}{dt} \\ \frac{dS_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dy_A(t)}{dt} \\ \frac{d^2y_A(t)}{dt^2} \\ \frac{dy_B(t)}{dt} \\ \frac{d^2y_B(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

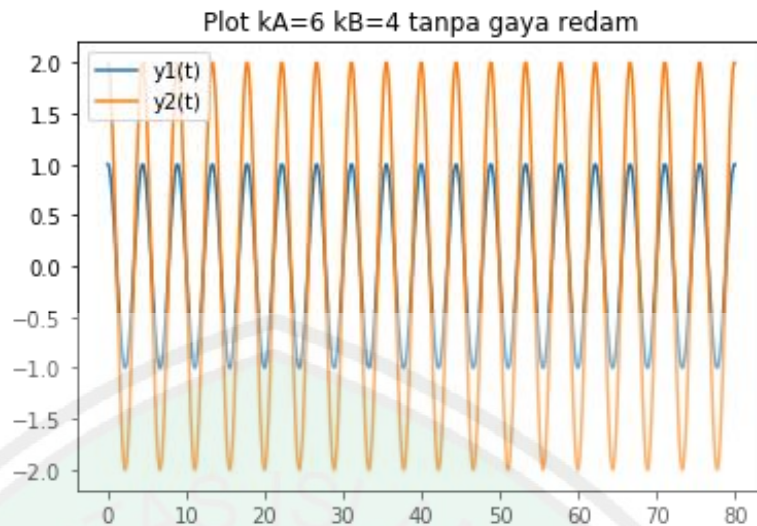
dengan mensubstitusikan persamaan (3.37) dan (3.38) serta pemisalan pada persamaan (3.39) ke persamaan (3.40) maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_A}{m_A} S_2 - \frac{k_A}{m_A} S_1 + \frac{\mu_A}{m_A} S_1^3 - \frac{k_B}{m_A} (S_1 - S_3) + \frac{\mu_B}{m_A} (S_1 - S_3)^3 \\ S_4 \\ -\frac{\delta_B}{m_B} S_4 - \frac{k_B}{m_B} (S_3 - S_1) + \frac{\mu_B}{m_B} (S_3 - S_1)^3 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Dari vektor baru pada persamaan (3.41) dengan mensubstitusikan beberapa kondisi dapat dioperasikan menggunakan fungsi *built-in* ode45 sehingga diperoleh pendekatan solusi numeriknya.

### 3.3 Simulasi Model

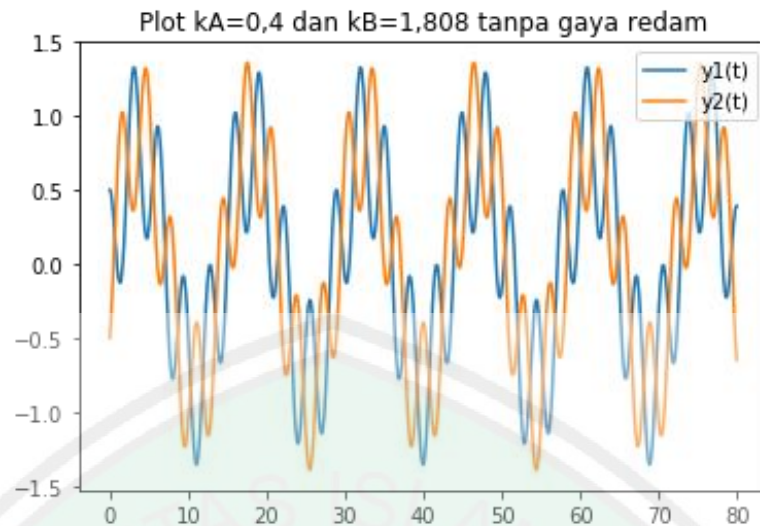
Dengan memisalkan koefisien  $k$  dan kondisi awal dari jurnal milik Sarah Duncan Graham yang berjudul *Coupled Spring Equation*, yaitu  $k_A = 6$ ,  $k_B = 4$  dengan kondisi awal  $\left\{y_A(0), \frac{dy_A(0)}{dt}, y_B(0), \frac{dy_B(0)}{dt}\right\} = \{1, 0, 2, 0\}$  maka dapat diperoleh simulasinya dengan *Python* seperti pada gambar berikut



Gambar 3. 3 Plot sistem pegas dengan  $k_A = 6$  dan  $k_B = 4$

Plot diatas adalah plot dari solusi khusus  $y_A(t)$  (3.49) dan  $y_B(t)$  (3.62) yang mana direpresentasikan dengan  $y1(t)$  dan  $y2(t)$  dengan waktu hingga  $t$  ke  $- 100$ . Dapat dilihat dari plot yang diperoleh, bahwa gerak beban  $A$  dan beban  $B$  bergerak secara harmonis dan tidak mengalami pengurangan jarak yang ditempuh masing – masing beban. Hal ini disebabkan karena pemodelan yang digunakan tidak diberi gaya redam, sehingga mempengaruhi hasil dari plot yang diperoleh.

Untuk memperoleh plot yang lebih bervariasi maka peneliti menguji persamaan yang diperoleh dengan menggunakan koefisien dan kondisi awal yang berbeda, yang mana koefisien dan kondisi awal yang digunakan masih merujuk pada jurnal Sarah Duncan Graham. Pada pengujian baru kali ini peneliti menggunakan  $k_A = 0,4$  dan  $k_B = 1,808$  dengan kondisi awal  $\left\{y_A(0), \frac{dy_A(0)}{dt}, y_B(0), \frac{dy_B(0)}{dt}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right\}$  sehingga diperoleh simulasinya seperti berikut



Gambar 3. 4 Plot sistem pegas dengan  $k_A = 0,4$  dan  $k_B = 1,808$

Pada plot diatas menunjukkan bahwa gerak beban  $A$  dan beban  $B$  masih bergerak secara harmonis, dengan perubahan posisi masing – masing beban yang cukup bervariasi namun tetap berulang – ulang.

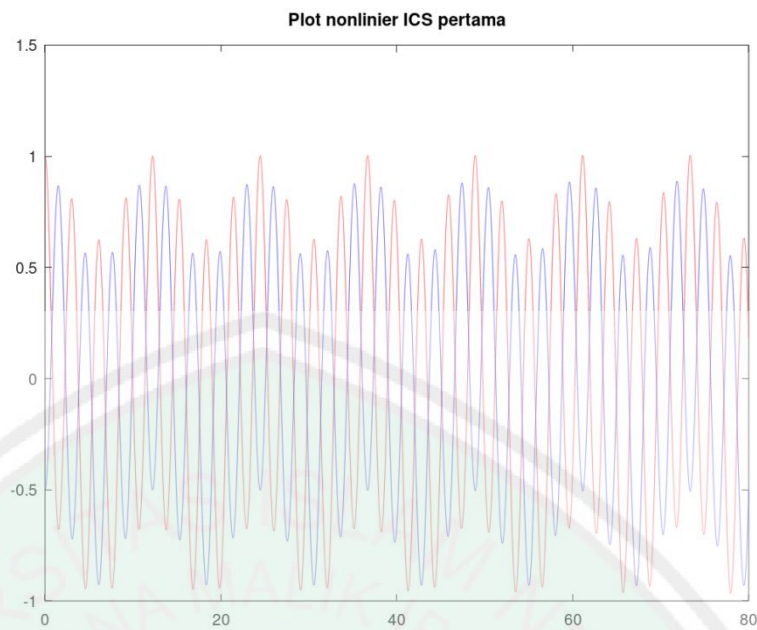
Pada kasus berikutnya yaitu sistem pegas dengan koefisien redam, misal diberikan  $m_A = m_B = 1$ ,  $\{k_A, k_B, \delta_A, \delta_B\} = \{0,4; 1,808; 0,1; 0,2\}$ , dan kondisi awal  $\{y_A(0), y_A^{(1)}(0), y_B(0), y_B^{(1)}(0)\} = \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\}$  maka diperoleh simulasinya seperti berikut :



Gambar 3. 5 Plot sistem pegas dengan gaya redam

Dari plot tersebut dapat dilihat bahwa makin lama kurva  $y_A(t)$  dan  $y_B(t)$  mendekati nol, hal ini disebabkan oleh gaya redam yang diberikan pada model sistem pegas tersebut, sehingga masing – masing pegas bergerak makin lama mendekati kondisi equilibrium masing – masing.

Pada kasus model nonlinier ini peneliti memisalkan dua keadaan untuk diteliti. Pertama dimisalkan beban  $m_A = m_B = 1$ , koefisien pegasnya  $k_A = 0,4$ ;  $k_B = 1,808$ , koefisien redamnya  $\delta_A = \delta_B = 0$ , dan koefisien nonliniernya  $\mu_A = -\frac{1}{6}$  dan  $\mu_B = -\frac{1}{10}$  dengan kondisi awal  $\left\{y_A(0), \frac{dy_A(0)}{dt}, y_B(0), \frac{dy_B(0)}{dt}\right\} = \left\{1, 0, -\frac{1}{2}, 0\right\}$  diperoleh plot seperti berikut

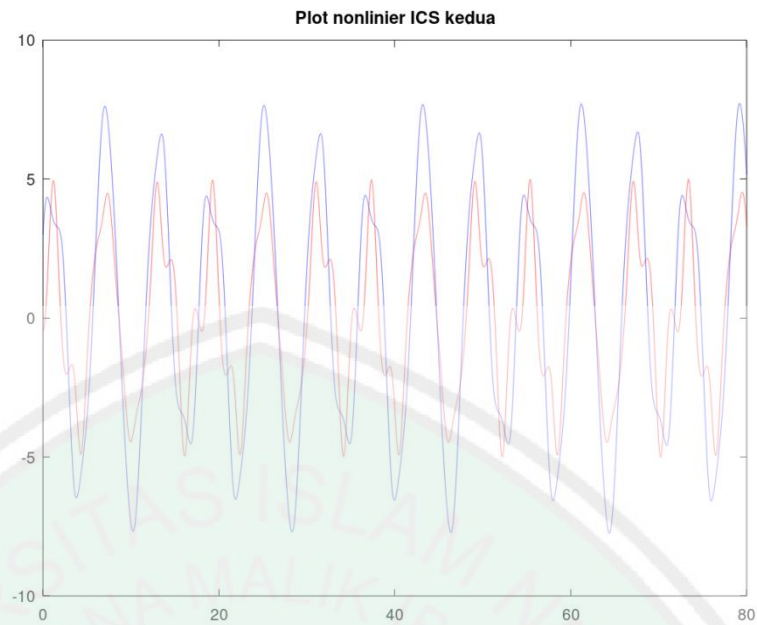


Gambar 3. 6 Plot model nonlinier pada kasus pertama

Kemudian pada kasus kedua dengan massa, koefisien pegas, koefisien redam, dan koefisien nonlinear yang sama namun dengan kondisi awal berikut

$$\left\{ y_A(0), \frac{dy_A(0)}{dt}, y_B(0), \frac{dy_B(0)}{dt} \right\} = \left\{ -0,5; \frac{1}{2}; 3,001; 5,9 \right\} \text{ diperoleh plot seperti}$$

berikut



Gambar 3. 7 Plot model nonlinier pada kasus kedua

Dari kedua plot tersebut terlihat bahwa gerak pegas pada model nonlinier bergerak secara periodik, hal ini disebabkan karena koefisien redam yang diberikan adalah nol sehingga sistem pegas tersebut tidak memiliki gaya redaman.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

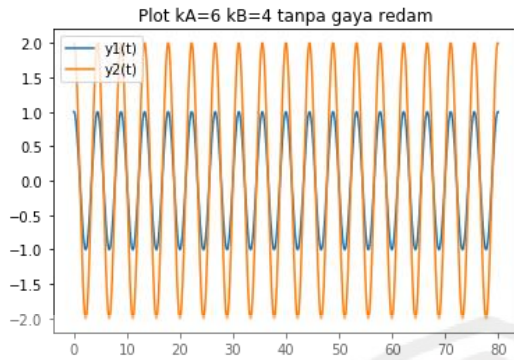
Berdasarkan hasil penelitian yang telah dibahas, maka pada penelitian ini peneliti dapat menyimpulkan yaitu :

1. Model matematika dari sistem pegas dengan dua beban massa dengan kondisi tanpa gaya redam yang bekerja pada beban  $A$  adalah  $m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = -k_A y_A(t) + (-k_B y_A(t)) + k_B y_B(t)$  dan yang bekerja pada beban  $B$  adalah  $m_B \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = -k_B y_B(t) + k_B y_A(t)$ . Sedangkan model pada sistem pegas yang sama dengan koefisien redam yang bekerja pada beban  $A$  adalah  $m_A \frac{d^2 y_A(t)}{dt^2} = -\delta_A \frac{dy_A(t)}{dt} - k_A y_A(t) - k_B (y_A(t) - y_B(t))$  dan yang bekerja pada beban  $B$  adalah  $m_B \frac{d^2 y_B(t)}{dt^2} = -\delta_B \frac{dy_B(t)}{dt} - k_B (y_B(t) - y_A(t))$ .
2. Solusi analitik yang diperoleh pada model persamaan sistem pegas tanpa gaya redam dan dengan gaya redam, solusi analitiknya memiliki bentuk yang sama yaitu

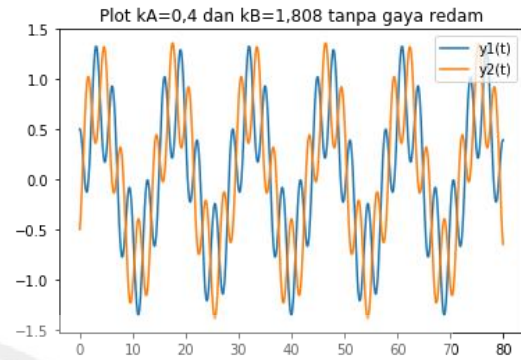
$$\begin{bmatrix} y_A(t) \\ y_B(t) \end{bmatrix} = S e^{\Lambda t} S^{-1} \begin{bmatrix} y_A(0) \\ y_B(0) \end{bmatrix}$$

dengan  $\Lambda$  adalah matriks diagonal dari nilai eigen matriks  $M$  dan kolom dari  $S$  adalah vektor eigen dari  $M$ .

3. Simulasi model pada sistem pegas tanpa gaya redam dengan koefisien tertentu diperoleh sebagai berikut



Gambar 4. 1 Plot model linier kasus pertama



Gambar 4. 2 Plot model linier kasus kedua

Sedangkan pada kasus sistem pegas dengan gaya redam diperoleh



Gambar 4. 3 Plot model linier dengan gaya redam.

#### 4.2 Saran

Sebagai saran untuk penelitian selanjutnya, peneliti dapat memodelkan sistem pegas yang sama dengan tambahan gaya luar kemudian mencari solusinya dengan metode numerik tertentu.

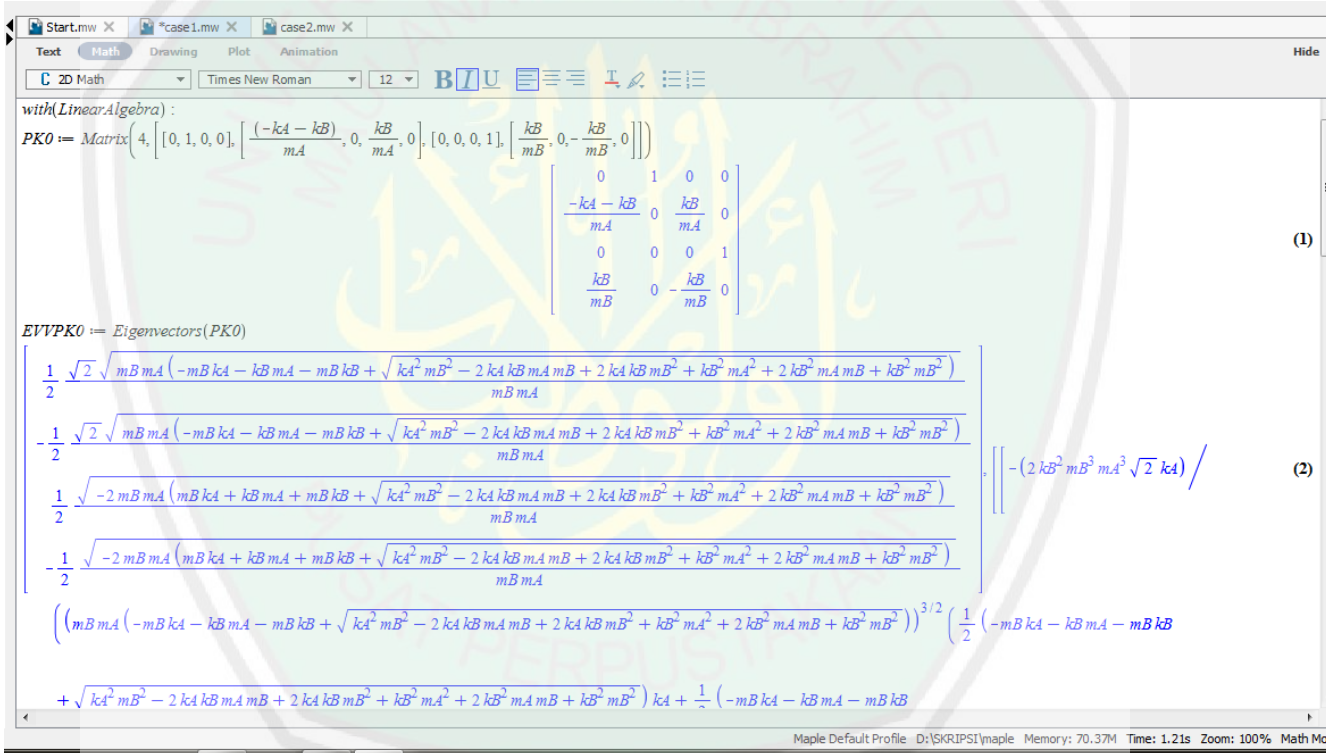
## DAFTAR PUSTAKA

- Banerjee, Sandip. 2014. *Mathematical Modelling: Models, Analysis and Application*. United State of America: CRC Press.
- Dym, Clive. 2004. *Principles of Mathematical Modelling*. United State of America: Academic Press.
- Fay, Temple H, dan Sarah Duncan Graham. 2003. Coupled Spring Equations, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 34 No. 1 hal. 65-79
- Haberman, Richard. 1977. *Mathematical Models Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. United State of America: Englewood Cliffs.
- Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Kreyszig, Erwin dkk. 2011. *Advanced Engineering Mathematics*. United State of America: Laurie Rosatone
- Sharma, Rajkumar dkk. 2014. Modeling & Simulation of Spring Mass Damper System in Simulink Environment. *XVIII Annual International Conference of the Society of Operations Management (SOM 2014)*. hal. 205.
- Stephen, Engr dkk. 2017. Modelling and Simulation of a 2-D Spring –Mass System Using Ansys Apdl. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*. Vol. 14 No. II hal. 67.
- Susilo, Anto dkk. 2012. Simulasi Gerak Harmonik Sederhana dan Osilasi Teredam pada Cassy-E 524000. *Indonesian Journal of Applied Physics*. Vol. 2 No. 2 hal. 124.
- Tenenbaum, Morris dan Pollard, Harry. 1985. *Differential Equations*. New York: Harper & Row.

## LAMPIRAN

Script penyelesaian vektor eigen pada model linier

Kasus pertama :



with(LinearAlgebra):

$$PK0 := \text{Matrix}\left(4, \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-kA - kB}{mA} & 0 & \frac{kB}{mA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{kB}{mB} & 0 & -\frac{kB}{mB} & 0 \end{array} \right] \right)$$

$$EVVPK0 := \text{Eigenvectors}(PK0)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{mB mA (-mB kA - kB mA - mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{mB mA (-mB kA - kB mA - mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \\ \frac{1}{2} \sqrt{-2 mB mA (mB kA + kB mA + mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \\ \frac{1}{2} \sqrt{-2 mB mA (mB kA + kB mA + mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{mB mA (-mB kA - kB mA - mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \right) \\ \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{mB mA (-mB kA - kB mA - mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \right) \\ \left( \frac{1}{2} \sqrt{-2 mB mA (mB kA + kB mA + mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \right) \\ \left( \frac{1}{2} \sqrt{-2 mB mA (mB kA + kB mA + mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \right) \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{mB mA (-mB kA - kB mA - mB kB + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2})} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{2} (-mB kA - kB mA - mB kB \right. \\ \left. + \sqrt{kA^2 mB^2 - 2 kA kB mA mB + 2 kA kB mB^2 + kB^2 mA^2 + 2 kB^2 mA mB + kB^2 mB^2}) \right) kA + \frac{1}{2} (-mB kA - kB mA - mB kB \end{array} \right]$$

Maple Default Profile D:\SKRIPSI\maple Memory: 70.37M Time: 1.21s Zoom: 100% Math Mode

Kasus kedua :

The screenshot shows the Maple software interface with the following content:

with(LinearAlgebra):

$$PKO := \text{Matrix}\left(4, \left[ \begin{array}{c} [0, 1, 0, 0], \\ \left[ \frac{-kA - kB}{mA}, -\frac{\delta A}{mA}, \frac{kB}{mA}, 0 \right], \\ [0, 0, 0, 1], \\ \left[ \frac{kB}{mB}, 0, -\frac{kB}{mB}, -\frac{\delta B}{mB} \right] \end{array} \right] \right)$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-kA - kB}{mA} & -\frac{\delta A}{mA} & \frac{kB}{mA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{kB}{mB} & 0 & -\frac{kB}{mB} & -\frac{\delta B}{mB} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$EVVPKO := \text{Matrix}([\text{Eigenvectors}(PKO)])$

[Length of output exceeds limit of 1000000] (2)

[

Maple Default Profile D:\SKRIPSI\maple Memory: 102.37M Time: 0.90s Zoom: 100% Math Mode

Script penyelesaian solusi model nonlinier

Kasus pertama :

```
eksekusi.m x eksekusi2.m x
1 function [time,x,xdot,y,ydot]=exec
2 %value
3 m=1;kx=0.4;ky=1.808;mux=-1/6;muy=-1/10;delA=0;delB=0;
4 x0=1;xdot0=0;y0=-1/2;ydot0=0;
5 t0=0;tf=80;df=0.001;
6
7 %time span
8 tspan=t0:df:tf;
9
10 %ics
11 IC=[x0,xdot0,y0,ydot0];
12
13 %sdot
14 sdot=@(t,s)[s(2);(-delA*s(2)-kx*s(1)+mux*s(1)^3-ky*(s(1)-s(3))+muy*(s(1)-s(3))^3)/m;s(4);(-delB*s(4)-ky*(s(3)-s(1))+muy*(s(3)-s(1))^3)/m];
15
16 %call ode45 solver
17 [time,state_values]=ode45(sdot,tspan,IC);
18
19 %extract value
20 x=state_values(:,1);
21 xdot=state_values(:,2);
22 y=state_values(:,3);
23 ydot=state_values(:,4);
24
25 %plot
26 clf
27 plot(time,x,'r')
28 hold on
29 plot(time,y,'b')
30 hold on
31 title("Plot nonlinier ICS pertama")
32
33 endfunction
34
```

line: 1 col: 1 encoding: SYSTEM eol: CRLF

Kasus kedua :

```
eksekusi.m x   eksekusi2.m x
1 function [time,x,xdot,y,ydot]=exec
2 %value
3 m=1;kx=0.4;ky=1.808;mux=-1/6;muy=-1/10;delA=0;delB=0;
4 x0=-0.5;xdot0=1/2;y0=3.001;ydot0=5.9;
5 t0=0;tf=80;df=0.001;
6
7 %time span
8 tspan=t0:df:tf;
9
10 %ics
11 IC=[x0,xdot0,y0,ydot0];
12
13 %sdot
14 sdot=@(t,s)[s(2);(-delA*s(2)-kx*s(1)+mux*s(1)^3-ky*(s(1)-s(3))+muy*(s(1)-s(3))^3)/m;s(4);(-delB*s(4)-ky*(s(3)-s(1))+muy*(s(3)-s(1))^3)/m];
15
16 %call ode45 solver
17 [time,state_values]=ode45(sdot,tspan,IC);
18
19 %extract value
20 x=state_values(:,1);
21 xdot=state_values(:,2);
22 y=state_values(:,3);
23 ydot=state_values(:,4);
24
25 %plot
26 clf
27 plot(time,x,'r')
28 hold on
29 plot(time,y,'b')
30 hold on
31 title("Plot nonlinier ICS kedua")
32
33 endfunction
34
line: 1 col: 1 encoding: SYSTEM eol: CRLF
```

## RIWAYAT HIDUP



Arina Fitri Rozanni, anak terakhir dari dua bersaudara lahir di kota Malang pada tanggal 9 Februari 1998, bertempat tinggal di Jalan Hamid Rusdi gang III no 255 Malang Jawa Timur.

Pendidikannya dimulai dari MI Khadijah Malang hingga tahun 2009. Kemudian setelah lulus sekolah dasar ia melanjutkan pendidikannya di SMPN 21 Malang dan lulus pada tahun 2013. Lalu ia melanjutkan pendidikannya di SMAN 4 Malang dan lulus pada tahun 2016. Kemudian ia melanjutkan kembali ke jenjang S1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil program studi matematika murni.





**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Arina Fitri Rozanni  
NIM : 16610076  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Pemodelan Sistem Pegas dengan Dua Beban Massa  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si.  
Pembimbing II : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	6 Februari 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II	
2	9 Februari 2020	Revisi Bab I, Bab II dan Konsultasi Bab III	
3	10 Februari 2020	Konsultasi Kajian Agama	
4	12 Februari 2020	Simulasi Seminar Proposal	
5	28 Februari 2020	Revisi Kajian Agama	
6	18 Maret 2020	Revisi Bab III	
7	25 April 2020	Revisi Simulasi Solusi	
8	30 April 2020	ACC Bab I dan Bab II	
9	30 April 2020	Revisi Bab III	
10	1 Mei 2020	ACC Bab III dan Kajian Agama	
11	6 Juni 2020	ACC Keseluruhan	

Malang, 5 Juli 2020  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.  
NIP. 1965414 200312 1 001