EKUIVALENSI INTEGRAL DARBOUX DAN INTEGRAL DENJOY-PERRON

SKRIPSI

OLEH
DIMAS ADI PRATAMA
NIM. 15610059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

EKUIVALENSI INTEGRAL DARBOUX DAN INTEGRAL DENJOY-PERRON

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dimas Adi Pratama
NIM. 15610059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

EKUIVALENSI INTEGRAL DARBOUX DAN INTEGRAL DENJOY-PERRON

SKRIPSI

Oleh
Dimas Adi Pratama
NIM. 15610059

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 Desember 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Elly Susanti, M.Sc.	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 197411292000122005	NIDT. 19870218201608011056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

EKUIVALENSI INTEGRAL DARBOUX DAN INTEGRAL DENJOY-PERRON

SKRIPSI

Oleh
Dimas Adi Pratama
NIM. 15610059

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 08 Desember 2020

Penguji Utama	: Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504142003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Dimas Adi Pratama

NIM : 15610059

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ekuivalensi Integral Darboux dan Integral Denjoy-Perron.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Desember 2020
Yang membuat pernyataan

Dimas Adi Pratama
NIM. 15610059

MOTO

"Sesungguhnya Allah Tidak Akan Merubah Suatu Kaum Sehingga Mereka Merubah Keadaan Yang Ada Pada Diri Mereka Sendiri"

QS. Ar. Ra'd ayat 11

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahi Robbil'alamin, dengan mengucap syukur kepada Allah Swt., Penulis mempersembahkan skripsi ini untuk kedua orang tua, Irwan Adi Triwibowo dan Netty Wulandari yang selalu memberikan doa, dukungan dan lain sebagainya yang mungkin tidak bisa penulis balas dengan apapun, serta teman-teman seperjuangan yang selalu memberikan motivasi kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT. atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari beberapa pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi dan berbagi pengalaman yang berharga bagi penulis.
5. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Seluruh dosen Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen di Jurusan Matematika yang telah memberi banyak pengalaman dan ilmu kepada penulis.
7. Bapak dan ibu serta saudara-saudara tercinta yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman – teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 (LATTICE) terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan yang terukir rapi dan abadi.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah SWT. Melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Aamiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 08 Desember 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUANHALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

ABSTRAK xii

ABSTRACT xiii

ملخص xiv

BAB I PENDAHULUAN 1

1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 2
1.3. Tujuan Penelitian 2
1.4. Manfaat Penelitian 2
1.5. Batasan Masalah 3
1.6. Metode Penelitian 3
1.7. Sistematika Penulisan 4

BAB II KAJIAN TEORI 5

2.1. Integral Darboux 5
2.1.1. Jumlah Darboux atas dan jumlah Darboux bawah 5
2.1.2. Integral Darboux atas dan Integral Darboux bawah 8
2.1.3. Sifat 10
2.2 Integral Perron 14
2.2.1. Fungsi Minor dan Fungsi Mayor 14
2.2.2. Sifat Integral Perron 17
2.3 Ekuivalensi Integral Perron dan Integral Denjoy 26
2.4 Ekuivalensi Menurut Al-Qur’an 27

BAB III PEMBAHASAN 29

3.1 Ekuivalensi integral Darboux dengan integral Perron 29

BAB IV PENUTUP 33

4.1 Kesimpulan 33

4.2 Saran 33

DAFTAR PUSTAKA.. 34

RIWAYAT HIDUP

ABSTRAK

Pratama, Dimas Adi. 2020. **Ekuivalensi Integral Darboux dan Integral Denjoy-Perron.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II). Muhammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Anti-Derivatif, Ekuivalensi, Integral, Integral Darboux, Integral Denjoy-Perron.

Integral Darboux adalah pengembangan dari integral Riemann yang menggunakan konsep anti-derivatif. Integral Darboux dibangun menggunakan penjumlahan Darboux dan merupakan salah satu definisi dari integral suatu fungsi. Integral Perron adalah pengembangan dari integral Lebesgue, sehingga dengan menggunakan definisi integral Perron suatu fungsi yang tak terintegralkan Lebesgue dapat terintegralkan Perron. Selain integral Perron, integral Denjoy juga merupakan pengembangan dari integral Lebesgue, hanya saja pendefinisian yang dilakukan oleh Denjoy berbeda dengan Perron. Akan tetapi integral Denjoy dan integral Perron ekuivalen. Integral Denjoy-Perron menggunakan konsep anti-derivatif juga seperti integral Darboux. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji hubungan antara integral Darboux dan integral Denjoy-Perron.

ABSTRACT

Pratama, Dimas Adi. 2020. **Equivalence of Darboux Integral and Denjoy-Perron Integral** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II). Muhammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Anti Derivative, Equivalent, Integral, Darboux Integral, Denjoy-Perron Integral.

Darboux integral is an extension of the Riemann integral which uses the concept of anti-derivatives. Darboux integrals are constructed using Darboux additions and are one of the possible definitions of the integral of a function. Perron integral is the development of the Lebesgue integral, so that by using the definition of the Perron integral a function that is not Lebesgue integral can be integrated with the Perron. Apart from the Perron integral, Denjoy integral is also a development of the Lebesgue integral, it is just that Denjoy definition is different from Perron. However, Denjoy integral and Perron integral are equivalent. The Denjoy-Perron integral uses an anti-derivative concept as well as the Darboux integral. Therefore, this research will study the relationship between the Darboux integral and the Denjoy-Perron integral.

ملخص

فراتاما، ديماس أدي. 2020. ما يعادل *Darboux Integral* و Denjoy-*Perron* Integral. بحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) إيلي سوسانتي، ماجستير، (٢) محمد نافع الجوهري، ماجستير.

الكلمات المفتاحية: : عكسي، ما يعادل، *Integral, Darboux Integral, Denjoy-Perron Integral.*

Darboux Integral هو امتداد لـ *Riemann Integral* الذي يستخدم مفهوم مضادات المشتقات، يتم إنشاء *Darboux integrals* باستخدام إضافات *Darboux* وهي واحدة من التعريفات المحتملة للوظيفة *integral*. *Perron integral* هو تطوير *Lebesgue integral*, بحيث باستخدام تعريف *Perron integral* ، يمكن دمج دالة ليست *Lebesgue integral* مع *Perron*. بصرف النظر عن *Perron integral* ، فإن *Denjoy integral* هو أيضًا تطور لـ *Lebesgue integral* ، إنه مجرد تعريف *Denjoy* يختلف عن *Perron*. ومع ذلك ، فإن *Denjoy integral* و *Perron integral* متكافئان. يستخدم *Denjoy-Perron integral* مفهومًا مضادًا للاشتقاق بالإضافة إلى *Darboux integral*. لذلك ، سوف يدرس هذا البحث العلاقة بين *Darboux integral* و *Denjoy-Perron integral*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori integral merupakan salah satu konsep terpenting dalam analisis. Terdapat banyak jenis integral yang berkembang dalam analisis. Salah satu jenis integral yang sering digunakan dalam bidang matematika adalah Integral Riemann. Integral Riemann tidak hanya digunakan dalam bidang matematika saja, tetapi digunakan juga dalam bidang lainnya yaitu fisika dan ilmu teknik.

Sebelum adanya integral Riemann, Newton menyusun salah satu teori integral berdasarkan kalkulus yang menggunakan anti derivatif. Setelah itu barulah Riemann, pada tahun 1854, menyusun teori integral dengan cara lain, yaitu menggunakan partisi dan jumlah Riemann. Pada tahun 1875, integral Riemann dimodifikasi dan dikembangkan oleh Darboux dengan menggunakan jumlah atas dan jumlah bawah.

Kemudian muncul pengembangan dari integral Riemann oleh Lebesgue. Definisi integral Lebesgue menggunakan teori ukuran, sehingga fungsi yang tidak teintegralkan Riemann terintegralkan oleh Lebesgue. Namun integral Lebesgue masih mempunyai kekurangan, yaitu mengharuskan F sebagai fungsi yang kontinu mutlak, agar F' terintegralkan Lebesgue, sehingga integral Lebesgue dari suatu interval tidak secara lengkap menyelesaikan masalah rekonstruksi fungsi primitif dari turunannya.

Integral Lebesgue dikembangkan oleh Perron yang dalam pendefinisannya melibatkan fungsi mayor dan fungsi minor. Selain itu, Denjoy melakukan pengembangan dari integral Lebesgue dengan mensyaratkan adanya suatu anti turunan dari suatu fungsi yang merupakan fungsi yang kontinu mutlak diperumum agar fungsi tersebut terintegralkan Denjoy, sehingga terdapat terkaitan dan telah dibuktikan bahwa integral Denjoy dan integral Perron ekuivalen.

Dalam penelitian ini penulis mengambil batasan yang sederhana, di mana dijelaskan dalam QS. Al-Baqarah ayat 185 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا , إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan". (QS. Al-Insyirah: 5-6)

Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan membahas bagaimana pendekatan integral Darboux dan integral Denjoy-Perron dan ekuivalensi integral Darboux dan integral Denjoy-Perron.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dalam pembahasan ini akan diberikan rumusan masalah bagaimana integral Darboux dengan integral Denjoy-Perron ekuivalen?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah intuk membuktikan integral Darboux dengan integral Denjoy-Perron ekuivalen.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian untuk skripsi ini antara lain:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai kaitan integral Darboux dan integral Denjoy-Perron.

2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya bidang analisis.

1.5. Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, permasalahan hanya dibatasi pada Integral Darboux dan Integral Denjoy-Perron pada fungsi kontinu interval $[a, b]$.

1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan oleh penulis dalam menyusun skripsi ini yaitu metode kajian pustaka, yaitu deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan untuk menunjang penelitian.

Adapun langkah-langkah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Merumuskan maslah. Sebelum penulis memulai kegiatannya, penulis membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. mengumpulkan data dan informasi dengan cara membaca dan memahami beberapa literatur yang berkaitan dengan integral baik itu *Darboux* maupun *Denjoy-Perron*. Diantara buku yang digunakan penulis adalah Pengantar Analisis Riil, *Real Analysis*, dan *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock* serta buku lain yang menunjang penulisan skripsi ini.
3. Setelah memperoleh data-data dan informasi mengenai integral Darboux dan Denjoy-Perron, langkah selanjutnya adalah membuktikan partisi, lower, upper, supermum, dan infimum dari integral Darboux ke integral Denjoy-

Perron. Setelah itu kita menentukan apakah integral Darboux dan integral Denjoy-Perron ekuivalen.

4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan gambaran langkah dari pembahasan atas apa yang sedang ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.

1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan merupakan rangkaian urutan dari beberapa uraian penjelasan dalam suatu karya ilmiah. Dalam kaitannya dengan penulisan skripsi ini, kami menyusun sistematika pembahasan sebagai berikut.

Pada bab pertama dipaparkan bagaimana latar belakang terjadinya ekuivalensi antara *Integral Darboux* dan *Integral Denjoy-Perron*, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian serta metode penelitian yang dipakai oleh penulis.

Pada bab kedua dipaparkan berbagai teori yang dipakai untuk menunjang pembahasan dalam bab kedua juga memaparkan integrasi antara ekuivalensi integral Darboux dan integral Denjoy-Perron. Pada bab ketiga dipaparkan hasil penelitian penulis bagaimana proses terjadinya ekuivalensi antara integral Darboux dan integral Denjoy-Perron.

Pada bab terakhir yaitu bab keempat, dipaparkan seimpulan dari penelitian yang dilakukan oleh penulis.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1. Integral Darboux

2.1.1. Jumlah Darboux atas dan jumlah Darboux bawah

Diberikan interval tertutup $[a, b] \subseteq R$, dan $f: [a, b] \to R$ fungsi bernilai real yang terbatas pada $[a, b]$, jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sembarang partisi pada $[a, b]$ maka didefinisikan

$$M = \sup\{f(\xi_i): \xi_i \in [a, b]\}\ dan\ m = \inf\{f(\xi_i): \xi_i \in [a, b]\}$$

Keterbatasan fungsi f dapat menjamin eksistensi dua bilangan M dan m tersebut.

Selanjutnya untuk $i = 1,2, \dots, n$ didefinisikan

$$M_i = \sup\{f(\xi_i): \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i = \inf\{f(\xi_i): \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Dapat dipahami bahwa $m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.

Selanjutnya Jumlah Darboux atas fungsi f terkait dengan partisi P, dinyatakan dengan $U(P; f)$, didefinisikan sebagai

$$U(P; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

dan Jumlah Darboux bawah fungsi f terkait dengan partisi P, dinyatakan dengan $L(P; f)$, didefinisikan sebagai

$$L(P; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

(Thobirin, 2015)

Lemma 1

Diberikan $[a,b] \subseteq R$, jika $f:[a,b] \to R$ fungsi yang terbatas pada $[a,b]$ dan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sembarang partisi pada $[a,b]$, maka berlaku

$$L(P;f) \le U(P;f)$$

Bukti.

Diberikan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sembarang partisi pada $[a,b]$, berdasarkan definisi supermum dan infemum suatu himpunan maka diperoleh $m_1 \le M_1$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.

Oleh karenanya diperoleh

$$L(P;f) = \sum_{i=1}^{n} m_1(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U(P;f)$$

(Bartle & Sherbert, 2000)

Lemma 2

Diberikan $[a,b] \subseteq R$, dan $f:[a,b] \to R$ fungsi yang terbatas pada $[a,b]$, Jika P_1 dan P_2 sembarang dua partisi pada $[a,b]$, dengan $P_1 \subseteq P_2$ maka berlaku

$$L(P_1;f) \le L(P_2;f)\ dan\ U(P_2;f) \le U(P_1;f)$$

Bukti.

Diberikan $P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sembarang partisi pada $[a,b]$ dan P_2 sembarang partisi pada $[a,b]$ dengan $P_1 \subseteq P_2$, maka dapat dimengerti bahwa setiap sub interval $[x_{i-1}, x_i]$ dalam P_1 pasti memuat titik dari partisi P_2, minimal x_{i-1} dan x_i itu sendiri. Namakan titik-titik tambahannya tersebut

$$x_{i-1} = t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ip_i} = x_i$$

Dengan sifat

$$x_{i-1} = t_{i0} < t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{ip_i} = x_i$$

Sehingga diperoleh

$$M_{ij} = \sup\{f(\xi_{ij}): \xi_{ij} \in [t_{i(j-1)}, t_{ij}]\},$$

Dan

$$m_{ij} = \inf\{f(\xi_{ij}): \xi_{ij} \in [t_{i(j-1)}, t_{ij}]\},$$

Selanjutnya untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,p_i$ diperoleh

$$m_i \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M_i$$

Untuk suku ke i di dalam $L(P_1: f)$ berlaku

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i \sum_{j=1}^{p_i} (t_{ij} - t_{i(j-1)}) = \sum_{j=1}^{p_i} m_i(t_{ij} - t_{i(j-1)})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p_i} m_{ij}(t_{ij} - t_{i(j-1)})$$

Jika hasil tersebut di atas dijumlahkan untuk semua indeks i, maka diperoleh:

$$L(P_1; f) = \sum_{i=1}^{n} m_1(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{P_1} m_{ij}(t_{ij} - t_{i(j-1)}) = L(P_2; f)$$

Terbukti $L(P_1; f) \leq L(P_2; f)$.

Selanjutnya untuk suku ke i di dalam $U(P_1; f)$ berlaku

$$M_1(x_i - x_{i-1}) = M_i \sum_{j=1}^{p_i} (t_{ij} - t_{i(j-1)}) = \sum_{j=1}^{p_i} M_i(t_{ij} - t_{i(j-1)})$$

$$\geq \sum_{j=1}^{p_i} M_{ij}(t_{ij} - t_{i(j-1)}).$$

Jika hasil tersebut di atas dijumlahkan untuk semua indeks i, maka diperoleh :

$$U(P_1;f)=\sum_{i=1}^{n}M_1(x_i-x_{i-1})\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{P_1}M_{ij}\left(t_{ij}-t_{i(j-1)}\right)=U(P_2;f)$$

Terbukti $U(P_2;f)\leq U(P_1;f)$. (Bartle & Sherbert, 2000)

Teorema 1

Diberikan $[a,b]\subseteq R$, dan $f:[a,b]\rightarrow R$ fungsi yang terbatas pada $[a,b]$. Jika P_1 dan P_2 sembarang dua partisi pada $[a,b]$, maka berlaku

$$L(P_1;f)\leq U(P_2;f)$$

Bukti.

Dibentuk $P=P_1\cup P_2$, maka $P_1\subseteq P$ dan $P_2\subseteq P$, sehingga berdasarkan Lemma 1.4.2 diperoleh $L(P_1;f)\leq L(P;f)$ dan $U(P;f)\leq U(P_2;f)$. Berdasarkan Lemma 1.4.1 diperoleh $L(P;f)\leq U(P;f)$. Akibatnya diperoleh $L(P_1;f)\leq U(P_2;f)$. (Bartle & Sherbert, 2000)

2.1.2. Integral Darboux atas dan Integral Darboux bawah

Integral Darboux atas fungsi f pada interval $[a,b]$, dinotasikan dengan $U(f)$ atau $D\int_a^{\bar{b}}f(x)dx$ didefinisikan sebagai

$$U(f)=D\int_a^{\bar{b}}f(x)dx=\inf\{U(P;f):P\in\forall[a,b]\}$$

Integral Darboux bawah fungsi f pada interval $[a,b]$, dinotasikan dengan $L(f)$ atau $D\int_{\bar{a}}^{b}f(x)dx$ didefinisikan sebagai

$$L(f)=D\int_{\bar{a}}^{b}f(x)dx=\sup\{L(P;f):P\in\forall[a,b]\}$$

(Thobirin, 2015)

Teorema 2

Diberikan $[a,b] \subseteq R$, dan $f:[a,b] \to R$ fungsi yang terbatas pada $[a,b]$. Jika fungsi f terintegralkan Darboux atas dan terintegralkan Darboux bawah pada interval $[a,b]$, maka

$$L(f) \le U(f)$$

Bukti.

Diketahui fungsi f terintegral Darboux atas dan terintegral Darboux bawah, artinya dapat dipilih sembarang partisi $P_1 \in \forall[a,b]$ dan $P_2 \in \forall[a,b]$. Dipilih $P = P_1 \cup P_2$, maka berdasarkan Lemma 1.4.2 dan Teorema 1.4.3 berlaku

$$L(P_1;f) \le L(P;f) \le U(P;f) \le U(P_2;f).$$

Jadi bilangan real $U(P_2;f)$ merupakan suatu batas atas dari $\{L(P;f): P \in \forall[a,b]\}$. Akibatnya

$$L(f) = \sup\{L(P;f): P \in \forall[a,b]\} \le U(P_2;f)$$

Demikian pula, $L(f)$ merupakan batas bawah dari $\{U(P;f): P \in \forall[a,b]\}$, sehingga

$$L(f) \le \inf\{U(P_2;f): P \in \forall[a,b]\} = U(f).$$

Terbukti

$$L(f) \le U(f).$$

(Thobirin, 2015)

Dari uraian di atas, selanjutnya diberikan definisi integral Darboux sebagai berikut.

2.1.3. Sifat

Definisi 1

Fungsi bernilai real dan terbatas $f: [a, b] \to R$ dikatakan terintegral Darboux pada $[a, b]$, jika

$$L(f) = U(f)$$

Atau

$$D\int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx = D\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx = D\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

(Thobirin, 2015)

Teorema 3

Fungsi bernilai real dan terbatas $f: [a, b] \to R$ terintegral Darboux pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat partisi Riemann P_ε pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap partisi Riemann P pada interval $[a, b]$ dengan sifat $P_\varepsilon \subseteq P$, berlaku

$$U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$$

Bukti.

Syarat perlu:

Diketahui fungsi $f: [a, b] \to R$ terintegralkan Darbou pada $[a, b]$, berarti $L(f) = U(f)$. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, berdasarkan definisi $U(f)$ maka terdapat partisi Riemann P_1 pada $[a, b]$ sehingga

$$U(f) \leq U(P_1: f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $L(f) = U(f)$ maka berlaku

$$L(f) \leq U(P_1; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Selanjutnya, untuk bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut, berdasarkan definisi $L(f)$ maka terdapat partisi Riemann P_2 pada $[a,b]$ sehingga

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2; f) \leq L(f).$$

Berdasarkan Teorema 2.1.3, berlaku $L(P_2; f) \leq U(P_1; f)$.

Oleh karena itu, diperoleh

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2; f) \leq U(P_1; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, maka $P_1 \subseteq P_\varepsilon$ dan $P_2 \subseteq P_\varepsilon$, sehingga berdasarkan Lemma 1.4.2 diperoleh

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2; f) \leq L(P_\varepsilon; f) \leq U(P_\varepsilon; f) \leq U(P_1; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Akibatnya

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_\varepsilon; f) \leq U(P_\varepsilon; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Selanjutnya jika diambil sembarang partisi Riemann P pada interval $[a,b]$ dengan sifat $P_\varepsilon \subseteq P$, berlaku

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_\varepsilon; f) \leq L(P; f) \leq U(P; f) \leq U(P_\varepsilon; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Maka didapat

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P; f) \leq U(P; f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Akhirnya diperoleh

$$U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon.$$

<u>Syarat cukup</u>:

Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi Riemann P_ε pada $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi Riemann P pada interval $[a,b]$ dengan sifat $P_\varepsilon \subseteq P$, berlaku

$$U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon.$$

Ini ekuivalen dengan $U(P; f) < L(P; f) + \varepsilon$.

Berdasarkan definisi $L(f)$ dan $U(f)$, maka untuk setiap partisi Riemann P pada $[a, b]$ berlaku $U(f) \leq U(P; f)$ dan $L(P; f) \leq L(f)$, sehingga diperoleh

$$U(f) \leq U(P; f) < L(P; f) + \varepsilon \leq L(f) + \varepsilon$$

Diperoleh

$$U(f) < L(f) + \varepsilon$$

Karena bilangan $\varepsilon > 0$ diambil sembarang maka didapatkan

$$U(f) \leq L(f)$$

Berdasarkan hasil ini dan Teorema 2.1.4 diperoleh $L(f) = U(f)$. Terbukti f terintegral Darboux. (Bartle & Sherbert, 2000)

Akibat 1 Diberikan fungsi bernilai real dan terbatas $f: [a, b] \to R$, jika (P_n) barisan partisi Riemann pada interval $[a, b]$ dengan $\lim\big(U(P_n; f) - L(P_n; f)\big) = 0$, maka terintegral Darboux pada $[a, b]$ dan

$$\lim\big(U(P_n; f)\big) = D\int_a^b f(x)\,dx = \lim(L(P_n; f))$$

(Bartle & Sherbert, 2000)

Teorema 4

Diberikan $f: [a, b] \to R$ suatu dungsi bernilai real dan terbatas, f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika f terintegral Darboux pada $[a, b]$.

Bukti.

<u>Syarat perlu</u>:

Diketahui fungsi $f: [a, b] \to R$ terintegral Riemann pada $[a, b]$, berarti terdapat bilangan $A = R\int_a^b f(x)\,dx$, artinya untuk sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil sembarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2, \dots, n$, berdasarkan definisi m_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ demikian sehingga

$$m_i \leq f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Sehingga

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$L(P; f) \leq S(P; f) < L(P; f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Demikian pula untuk sembarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2, \dots, n$, berdasarkan definisi M_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ demikian sehingga

$$M_i - \frac{\epsilon}{2(b-a)} < f(\xi_i) \leq M_i$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$U(P; f) - \frac{\epsilon}{2} < S(P; f) \leq U(P; f)$$

Diperoleh

$$U(P;f) - \frac{\epsilon}{2} < L(P;f) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(P;f) - L(P;f) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(Thobirin, 2015)

2.2 Integral Perron

2.2.1. Fungsi Minor dan Fungsi Mayor

Definisi 2

Diketahui $F: [a,b] \to \mathbb{R}$. Turunan kanan atas dan turunan kanan bawah dari F pada $x \in [a,b)$ didefinisikan oleh :

$$D^+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

$$D_+F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

dan, turunan kiri atas dan turunan kiri bawah dari F pada $x \in (a,b]$ didefinisikan oleh:

$$D^-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

$$D_-F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

Fungsi F dapat diturunkan pada $x \in (a,b)$ jika keempat turunannya hingga dan bernilai sama. Turunan atas dan turunan bawah dari F pada $x \in [a,b]$ didefinisikan oleh :

$$\overline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y)-F(x)}{y-x} : 0 < |y - x| < \delta \right\} = \max\{D^+F(x), D^-F(x)\}$$

$$\underline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y)-F(x)}{y-x} : 0 < |y - x| < \delta \right\} = \min\{D_+F(x), D_-F(x)\}$$

(Gordon, 1994)

Definisi 3

Diketahui $E \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan E adalah *perfect* jika E tutup dan setiap titik dari E adalah titik limit dari E.

Suatu *perfect portion* dari P adalah himpunan $P \cap [c, d]$ dimana $P \cap (c, d) \neq \emptyset, c, d \in P$, dan$P \cap [c, d]$ adalah *perfect set*. (Gordon, 1994)

Definisi 4

Diketahui $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $E \subseteq [a, b]$.

$$\omega(F, [c, d]) = \sup\{|F(y) - F(x)|: c \leq x < y \leq d\}.$$

a. Variasi lemah dari F pada E dan variasi kuat dari F pada E didefinisikan sebagai ;

$$V(F, E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)|\right\}$$

$$V_*(F, E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \omega(F, [c_i, d_i])\right\}$$

Dengan supermum keduanya diambil atas semua koleksi hingga $\{[c_i, d_i]: 1 \leq i \leq n\}$ dari interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E.

b. Fungsi F merupakan variasi terbatas dari E jika $V(F, E)$ berhingga. Fungsi F adalah variasi terbatas dalam arti sempit pada E jika $V_*(F, E)$ berhingga.

c. Fungsi F merupakan variasi terbatas secara umum pada E, jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah BV pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah variasi terbatas yang digeneralisasi dalam arti sempit pada E jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah variasi terbatas pada setiap setiap himpunan tersebut.

d. Fungsi F merupakan kontinu mutlak pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n}|F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon$ ketika $\{[c_i, d_i], 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$. Fungsi F adalah kontinu mutlak dalam arti sempit pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n} \omega(F, [c_i, d_i]) < \varepsilon$ ketika $\{[c_i, d_i], 1 \leq i \leq n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{k=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$.

e. Fungsi F merupakan kontinu mutlak secara umum pada E jika $F|_E$ (F dibatasi pada E) kontinu pada E, dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah kontinu mutlak pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah kontinu mutlak yang digeneraliasasi dalam arti sempit pada E jika $F|_E$ kontinu pada E dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah AC_* pada setiap himpunan tersebut. (Gordon, 1994)

Definisi 5

Misalkan fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$.

a. Suatu fungsi $U: [a, b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi mayor dari f pada interval [a,b] jika $\underline{D}\,U(x) > -\infty$ dan $\underline{D}\,U(x) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

b. Suatu fungsi $V: [a, b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi minor dari f pada interval $[a, b]$ jika $\overline{D}V(x) < +\infty$ dan $\overline{D}V(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

(Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

2.2.2. Sifat Integral Perron

Definisi 6

Suatu fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ jika f mempunyai setidaknya satu fungsi mayor U dan fungsi minor V pada $[a, b]$ dan berlaku

$$\inf\{U_a^b : U \ fungsi\ mayor\ dari\ f\ pada\ [a, b]\}$$
$$= \sup\{V_a^b : V\ fungsi\ minor\ dari\ f\ pada\ [a, b]\}$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dinotasikan dengan $f \in P[a, b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P) \int_a^b f$ dan didefinisikan $(P) \int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$ (Gordon, 1994)

Definisi 7

Suatu fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan P_c pada $[a, b]$ jika f mempunyai setidaknya satu fungsi mayor kontinu U dan satu fungsi minor kontinu V pada $[a, b]$ dan berlaku

$$\inf\{U_a^b : U\ fungsi\ mayor\ kontinu\ dari\ f\ pada\ [a, b]\}$$
$$= \sup\{V_a^b : V\ fungsi\ \ minor\ kontinu\ dari\ f\ pada\ [a, b]\}$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan P_c pada $[a, b]$ dinotasikan dengan $f \in P_c[a, b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P_c) \int_a^b f$ dan didefinisikan $(P_c) \int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$. (Kurtz & Swartz, 2004)

Teorema 5

Suatu fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu fungsi mayor U dan suatu fungsi minor V dari f pada $[a, b]$ sehingga $U_a^b - V_a^b < \varepsilon$.

Bukti.

Misalkan f terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $\varepsilon > 0$. Sesuai dengan $\frac{\varepsilon}{2}$, pilih u dan v pada teorema di ruang fungsi baire kelas satu. Fungsi $U(x) = \int_a^x u$ dan $V(x) = \int_a^x v$ terbukti kontinu di $[a, b]$. Pada teorema di fungsi ruang baire kelas satu, persamaan $\underline{D}\, U(x) \geq u(x)$ dan $\overline{D}V(x) \leq v(x)$ terbukti untuk setiap $x \in [a, b]$ dan seperti berikut

$$\underline{D}\, U(x) > -\infty, \underline{D}\, U(x) \geq f(x) \text{ dan } \overline{D}V(x) \leq +\infty, \overline{D}V(x) \leq f(x)$$

Untuk setiap $x \in [a, b]$. Karenanya, U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor dari f di $[a, b]$. Akhirnya,

$$U_a^b - V_a^b = \int_a^b u - \int_a^b f + \int_a^b f - \int_a^b v < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(Gordon, 1994)

Teorema 6

Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ dan missal $c \in (a, b)$.

a. Jika f terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka f terintegralkan Perron pada setiap sub interval dari $[a, b]$.

b. Jika f terintegralkan Perron pada setiap interval $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka f terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P)\int_a^b f = (P)\int_a^c f + (P)\int_c^b f$.

Bukti.

Misalkan U dan V merupakan fungsi mayor dan fungsi minor pada f di $[a,b]$. Jelas bahwa U dan V merupakan fungsi mayor dan fungsi minor pada f untuk setiap subinterval di $[a,b]$ juga.

Pembuktian b. misalkan $\epsilon > 0$. Pilih salah satu fungsi mayor ${}_1U$ dan fungsi minor ${}_1V$ di f pada $[a,c]$ sedemikian hingga ${}_1U_a^c - {}_1V_a^c < \epsilon$, dan pilih salah satu fungsi mayor ${}_2U$ dan fungsi minor ${}_2V$ pada f di $[c,b]$ sedimikian hingga ${}_2U(c) = {}_1U(c)$, ${}_2V(c) = {}_1V(c)$, dan ${}_2U_c^b - {}_2V_c^b < \epsilon$. Sehingga

$$U(x)\begin{cases} {}_1U(x), if\ a \le x \le c; \\ {}_2U(x), if\ c \le x \le b; \end{cases} \quad \text{dan} \quad V(x)\begin{cases} {}_1V(x), if\ a \le x \le c; \\ {}_2V(x), if\ c \le x \le b. \end{cases}$$

Kemudian U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor pada f di $[a,b]$ dan

$$U_a^b - V_a^b = \left({}_2U_c^b - {}_2V_c^b\right) + \left({}_1U_a^c - {}_1V_a^c\right) < 2\epsilon.$$

Oleh karena itu, fungsi f terintegralkan perron di $[a,b]$ berdasarkan teorema sebelumnya. Dengan notasi yang sama, kita memperoleh

$$\int_a^b f < V_a^b + 2\epsilon = {}_1V_a^c + {}_2V_c^b + 2\epsilon \le \int_a^c f + \int_c^b f + 4\epsilon;$$

$$\int_a^b f > U_a^b - 2\epsilon = {}_1U_a^c + {}_2U_c^b - 2\epsilon \ge \int_a^c f + \int_c^b f - 4\epsilon.$$

Sehingga $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. (Gordon, 1994)

Teorema 7

Misal $f: [a,b] \to \mathbb{R}_e$ dan missal $c \in (a,b)$.

a. jika f terintegralkan P_c pada $[a,b]$, maka f teritegralkan P_c pada setiap sub interval dari $[a,b]$.

b. Jika f terintegralkan P_c pada setiap interval $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka f terintegralkan P_c pada $[a, b]$ dan $(P_c) \int_a^b f = (P_c) \int_a^c f = (P_c) \int_c^b f$.

(Kurtz & Swartz, 2004)

Teorema 8

Jika $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka f bernilai hingga *almost everywhere* pada $[a, b]$.

Bukti.

Misalkan $C = \{x \in [a, b]: |f(x)| = +\infty\}$. U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor pada f di $[a, b]$ dan didefinisikan $W = U - V$. Fungsi W tidak mengalami penurunan di $[a, b]$ sehingga himpunan $D = \{x \in [a, b]: \underline{D}W(x) = +\infty\}$ memiliki ukuran nol. Kita akan membuktikan $C \subseteq D$. Misalkan $c \in C$ dan $f(c) = +\infty$. Menurut sifat dari fungsi mayor dan fungsi minor, $\underline{D}U(c) = +\infty$ dan $\overline{D}V(c) = +\infty$, sedemikian hingga

$$\underline{D}W(c) \geq \underline{D}U(c) - \overline{D}V(c) = +\infty$$

Kemudian $\underline{D}U(c) = -\infty$ dan $\overline{D}V(c) = -\infty$ dan $\underline{D}W(x) = +\infty$. Sedemikian hingga $c \in D$. (Gordon, 1994)

Teorema 9

Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$. Jika $f = g$ *almost everywhere* pada $[a, b]$, maka g terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P) \int_a^b f = (P) \int_a^b g$.

Bukti.

Misalkan $E = \{x \in [a, b]: g(x) \neq f(x)\}$, kemudian didefinisikan fungsi m dan M di $[a, b]$ dengan $m(x) = 0 = M(x)$ untuk $x \notin E$, $m(x) = -\infty$, $M(x) =$

∞ untuk $x \in E$. Misalkan $\epsilon > 0$. Karena f terintegralkan perron do $[a, b]$, terdapat sebuah fungsi mayor ${}_1U$ pada f di $[a, b]$ sedemikian hingga $0 \leq {}_1U_a^b - \int_a^b f < \epsilon$. Karena M terintegralkan perron di $[a, b]$ dan memiliki nilai integral dari 0, terdapat fungsi mayor ${}_2U$ dari M di $[a, b]$ sedemikian hingga $0 \leq {}_2U_a^b < \epsilon$. Fungsi $U = {}_1U + {}_2U$ merupakan fungsi mayor pada g di $[a, b]$ dan $0 \leq U_a^b - \int_a^b f < 2\epsilon$. Demikian pula, terdapat fungsi minor V pada g di $[a, b]$ sedemikian hingga $-2\epsilon \leq V_a^b - \int_a^b f < 0$. Oleh karena itu, fungsi g terintegralkan perron pada $[a, b]$ dan $\int_a^b g = \int_a^b f$. (Gordon, 1994)

Teorema 10

Misalkan f terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka :

a. kf terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P)\int_a^b kf = k(P)\int_a^c f$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.

b. $f + g$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P)\int_a^b (f + g) = (P)\int_a^b f + (P)\int_a^b g$.

c. Jika $f \leq g$ *almost everywhere* pada $[a, b]$, maka $(P)\int_a^b f \leq (P)\int_a^b g$.

(Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Lemma 10

Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan missal $F(x) = (P)\int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika U adalah fungsi mayor dan V adalah fungsi minor dari f pada $[a, b]$, maka fungsi $U - F$ dan $F - V$ adalah tidak menurun pada $[a, b]$. (Kurtz & Swartz, 2004)

Teorema 11

Misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan missal $F(x) = (P) \int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka F fungsi kontinu pada $[a, b]$. (Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Teorema 12

Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan misal $F(x) = \int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka F dapat diturunkan *almost everywhere* pada $[a, b]$ dan $F' = f$ *almost everywhere* pada $[a, b]$. (Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Teorema 13

Misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan P_c, pada setiap subinterval $[c, d] \subseteq (a, b)$. Jika $(P_c) \int_c^d f$ konvergen ke suatu limit hingga saat $c \to a^+$dan $d \to b^-$, maka $f \in P_c[a, b]$ dan $(P_c) \int_a^b f = \lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} (P_c) \int_c^d f$.

Bukti.

Jika f terintegralkan P_c pada setiap interval $[a, c]$ untuk $c \in (a, b)$ dan jika $\int_a^c f$ menuju ke limit yang terbatas seperti $c \to b^-$, kemudian f terintegralkan P_c di $[a, b]$ dan $\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f$.

Misalkan $L = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f, a_0 = a$, dan $\{a_k\}$ menjadi barisan keatas di (a, b) yang menuju ke b. Misalkan $\epsilon > 0$. Untuk setiap $k \geq 0$, pilih sebuah fungsi mayor kontinu W_k pada f di $[a_k, a_{k+1}]$ sedemikian hingga

$W_k(a_k) = 0$ dan $0 \leq W_k(x) - \int_{a_k}^x f < \epsilon 2^{-k}$ untuk setiap $x \in [a_k, a_{k+1}]$.

Didefinisikan sebuah fungsi $W: [a, b] \to R$ dengan

$$W(x) = W_k(x) + \sum_{i=0}^{k=1} W_i(a_{i+1})$$

Untuk $x \in [a_k, a_{k+1})$ dan

$$W(b) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(a_{k+1})$$

W kontinu di $[a, b]$. Sekarang $\underline{D}W > -\infty$ dan $\underline{D}W \geq f$ di $[a, b)$, dan

$$W_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f + \sum_{k=0}^{\infty} \left(W_k(a_{k+1}) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right) < L + 2\epsilon.$$

Dengan lemma sebelumnya, terdapat fungsi mayor kontinu U pada f di $[a, b]$ sedemikian hingga $U_a^b < W_a^b + \epsilon < L + 3\epsilon$. Dengan demikian terdapat fungsi minor kontinu V pada f di $[a, b]$ sedemikian hingga $V_a^b > L - 3\epsilon$. Oleh karena itu, fungsi f yang teintegralkan P_c di $[a, b]$ dan $\int_a^b f = L$. (Gordon, 1994)

Teorema 14

Misal E suatu himpunan tertutup dan terbatas dengan batas a dan b dan $\{(a_k, b_k)\}$ suatu barisan dari *intervals contiguous* ke E didalam $[a, b]$. Misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan P_c pada E dan pada setiap interval $[a_k, b_k]$. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(\int_{a_k}^{x} f,\ [a_k, b_k])$ konvergen, maka $f \in P_c[a, b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$.

Bukti.

Untuk setiap k, misalkan $z_k = \omega\left(\int_{a_k}^{x} f, [a_k, b_k]\right) + 2^{-k}$. Misalkan $\epsilon > 0$ dan pilih salah satu bilangan bulat positif K sedemikian hingga $\sum_{k=K}^{\infty} z_k < \epsilon$. Misalkan f_1 merupakan fungsi yang sama dengan f di E dan pada setiap interval

$[a_k, b_k]$ untuk $1 \leq k < K$ dan sama dengan 0 di tempat lain. Sehingga f_1 terintegralkan P_c di $[a, b]$, terdapat fungsi mayor kontinu Y pada $[a, b]$ sedemikian hingga

$$0 \leq Y_a^b - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{K-1} \int_{a_k}^{b_k} f < \epsilon.$$

Selanjutnya kita bentuk fungsi mayor kontinu dari $f - f_1$ di $[a, b]$.

Untuk setiap $k \geq K$, misalkan W_k merupakan fungsi mayor kontinu pada f di $[a_k, b_k]$ sedemikian hingga $W_k(a_k) = 0$ dan $0 \leq W_k(x) - \int_{a_k}^{x} f < z_k$ untuk setiap $x \in [a_k, b_k]$. Sehingga

$$\int_{a_k}^{x} f \leq W_k(x) < \int_{a_k}^{x} f + z_k$$

Untuk setiap $x \in [a_k, b_k]$, kita dapatkan $\omega(W_k, [a_k, b_k]) \leq 2z_k$. Didefinisikan suatu fungsi G di $[a, b]$ yaitu

$$G(x) = W_k(x) + \omega(W_k, [a_k, x]) + \omega(W_k, [a_k, b_k]) - \omega(W_k, [x, b_k])$$

Untuk $x \in (a_k, b_k)$ dengan $k \geq K$ dan $G(x) = 0$ di tempat lain. Dengan menggabungkan syarat di definisi pada fungsi G tersebut, kita melihat bahwa G tidak negative di $[a, b]$. Fungsi G kontinu pada setiap $[a_k, b_k)$ dan

$$\omega(G, [a_k, b_k]) \leq 3\omega(W_k, [a_k, b_k]) \leq 6z_k.$$

Perhatikan juga bahwa $G(b_k -) = 0$ untuk $1 \leq k < K$ menunjukan $\lim\limits_{x \to b_k^-} G(x)$ dan untuk $k \geq K$

$$0 \leq G(b_k -) = W_k(b_k) + 2\omega(W_k, [a_k, b_k]) \leq 6z_k$$

Untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$Z(x) = G(x) + \sum_{b_k \leq x} G(b_k -)$$

Karena Z konstan pada setiap interval (a_k, b_k) untuk $1 \le k < K$, kita temukan bahwa $\underline{D}Z = 0 = f - f_1$ pada setiap interval tersebut. Fungsi $Z - G$ konstan pada setiap interval (a_k, b_k) untuk $k \ge K$ dan fungsi

$$\omega(W_k, [a_k, x]) - \omega(W_k, [x, b_k])$$

Tidak mengalami penurunan pada (a_k, b_k), sehingga $\underline{D}Z = \underline{D}G \ge \underline{D}W_k$ pada setiap interval tersebut. Sehingga $\underline{D}Z > -\infty$ dan $\underline{D}Z \ge f - f_1$ di (a_k, b_k) untuk $k \ge K$. Sekarang misalkan $x \in E$ dan mengandaikan $s \le x \le t$. Jika $s \notin E$, kemudia $s \in (a_i, b_i)$ untuk beberapa i dan

$$\begin{aligned} Z(t) - Z(s) &= G(t) - G(s) + \sum_{s<b_k\le t} G(b_k -) \\ &\ge G(t) + \big(G(b_i -) - G(s)\big) \\ &\ge 0 + W_i(b_i) - W_i(s) + \omega(W_i, [s, b_i]) \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

Jika $s \in E$, maka $Z(t) - Z(s) \ge 0$. Sehingga $\underline{D}Z \ge 0 = f - f_1$ pada himpunan E. Oleh karena itu, fungsi Z merupakan fungsi mayor kontinu pada $f - f_1$ di $[a, b]$. Sehingga $G(b_k -) = 0$ untuk $k < K$ dan $W_k(b_k) \le G(b_k -) \le 6z_k$ untuk $k \ge K$,

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{k=K}^{\infty} \left(W_k(b_k) - \int_{a_k}^{b_k} f \right) \\ &\le \sum_{k=K}^{\infty} G(b_k -) - \sum_{k=K}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f = Z_a^b - \sum_{k=K}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f \\ &\le \sum_{k=K}^{\infty} 6z_k + \sum_{k=K}^{\infty} z_k < 7\epsilon. \end{aligned}$$

Fungsi $U = Y + Z$ merupakan fungsi mayor kontinu pada f di $[a, b]$ dan

$$0 \leq U_a^b - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} f$$

$$= Y_a^b - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{K-1}\int_{a_k}^{b_k} f + Z_a^b - \sum_{k=K}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} f$$

$$< \epsilon + 7\epsilon = 8\epsilon$$

Demikian pula, terdapat fungsi minor kontinu V pada f di $[a,b]$ sedemikian hingga

$$0 \geq V(b) - V(a) - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} f > -8\epsilon$$

Oleh karena itu, fungsi f terintegralkan P_c di $[a,b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k} f$. (Saks, 1937)

2.3 Ekuivalensi Integral Perron dan Integral Denjoy

Definisi 8

Suatu fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ jika terdapat suatu fungsi ACG_* $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$ *almost everywhere* pada $[a.b]$.

Teorema 15

Misal $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$. Jika E adalah suatu himpunan sempurna di $[a,b]$, maka terdapat suatu *perfect portion* $E \cap [c,d]$ dari E sedemikian hingga f terintegralkan Lebesgue pada $E \cap [c,d]$. Selanjutnya, deret $\sum_{k=1}^{\infty}\omega(\int_{c_k}^{x} f,\ [c_k,d_k])$ konvergen dimana $[c,d] - E = \bigcup_{k=1}^{\infty}(c_k,d_k)$.

Teorema 16

Misalkan $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika f terintegralkan Perron pada $[a,b]$, maka f terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$.

Teorema 17

Misalkan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Jika f terintegralkan Demjoy pada $[a, b]$, maka f terintegralkan Perron pada $[a, b]$.

2.4 Ekuivalensi Menurut Al-Qur'an

Ekuivalensi mempunyai arti yang setara atau mempunyai nilai yang sama. Meski keduanya berbeda, akan tetapi memiliki nilai yang sama. Dalam Islam terutama pada Al-Qur'an banyak menjelaskan tentang kesetaraan atu sesuatu yang berbeda, tetapi pada akhirnya bernilai sama dihadapan Allah SWT.

Berdasarkan firman Allah SWT dalam surat Al Hujurat ayat 13 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ

"Hai manusia, sesungguhnya Kami ciptakan kamu dari seorang laki-laki seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah adalah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal." (QS. 49:13)

Dalam tafsirnya al-Mizan fi Tafsir al-Qur'an (Jilid VI, h. 134-135), maksud ayat tersebut yaitu menjelaskan bahwa dari segi hakikat penciptaan, antara manusia yang satu dan manusia lainnya tidak ada perbedaan. Mereka semua sama, dari asal kejadian yang sama, yaitu dari tanah, dari diri yang satu, yakni Adam yang diciptakan dari tanah. Karena itu, tidak ada kelebihan seorang individu atas individu lainnya. Karena asal-usul kejadian manusia seluruhnya adalah sama. Oleh karenanya tidak layak seseorang atau satu golongan menyombongkan diri terhadap yang lain atau menghina yang lain. (nurcholish, 2008)

Dari ayat tersebut, kita dapat memahami bahwa setiap laki-laki dan perempuan itu sama bahkan yang berbeda suku, ras, dan agama sekalipun. akan tetapi amalan shaleh dihadapan Allah SWT menjadi pembeda tiap manusia. Sehingga konsep ekuivalen yang dibahas dalam penelitian ini berkesinambungan dengan ayat di atas.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang bukti ekuivalensi integral Darboux dan integral Denjoy-Perron. Kemudian juga dijelaskan bukti partisi, *lower*, *upper*, serta supermum dan infimum pada integral Darboux dengan integral Denjoy-Perron.

Pada bab sebelumnya telah diterangkan bahwa integral Denjoy ekuivalen dengan integral Perron. Oleh sebab itu, penulis hanya membuktikan ekuivalen integral Darboux dengan integral Perron.

3.1 Ekuivalensi integral Darboux dengan integral Perron

Pada subbab ini akan dipaparkan tentang ekuivalensi integral Darboux dengan integral Perron.

Teorema 1 Diberikan fungsi $f: [a, b] \rightarrow R$ adalah terintegral Darboux jika dan hanya jika f terintegral Perron pada $[a, b]$ sehingga $D \int_a^b f \Leftrightarrow P \int_a^b f$.

Bukti

$D \int_a^b f \Rightarrow P \int_a^b f$

Diketahui fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Darboux pada $[a, b]$. Ambil sebarang$\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sebarang partisi di $[a, b]$ dengan sifat $||P|| < \delta$ berlaku

$$\left|(P) \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil sebarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,3, \dots n$. Berdasarkan definisi m_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$m_i \leq f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

sehingga

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \left(m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \left(m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$L(P;f) \le S(P;f)f < L(P;f) + \frac{\varepsilon}{2}$ ……………………….. (1)

Demikian pula untuk sebarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,3, \dots n$. Berdasarkan definisi M_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$M_i \le f(\xi_i) < M_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

sehingga

$$M_i(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(M_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$M_i(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < M_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

$U(P;f) - \frac{\epsilon}{2} < S(P;f) \le U(P;f)$ ……………………….. (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$U(P;f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P;f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P;f) - L(P;f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P;f) - L(P;f) < \varepsilon$$

Karena $L(P;f)$ adalah batas bawah dan $U(P;f)$ adalah batas atas. Maka fungsi f juga terintegral Perron, karena syarat dengan syarat perlu jika f mempunyai setidaknya satu batas bawah dan satu batas atas $\{V_a^b, U_a^b\}$, sehingga mempunyai bentuk

$$U_a^b - V_a^b < \varepsilon$$

Sehingga hal tersebut membuktikan $D\int_a^b f \Rightarrow P\int_a^b f$.

$P\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$

Diketahui definisi integral Perron

$$U_a^b = V_a^b$$

atau

$$\omega(F,[c_i,d_i]) = U_a^b - V_a^b < \varepsilon$$

Berdasarkan definisi jumlah Perron atas dan Perron bawah

$$U_a^b - V_a^b < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

Kita misalkan dengan

$$d_i = f(x_i) \text{ dan } c_i = f(x_{i-1})$$

Sehingga

$$U_a^b - V_a^b < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\{f(x_i) - f(x_{i-1})\}(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\{f(x_i) - f(x_{i-1})\}(b-a)}{n} < \epsilon$$

Karena

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2} = \Delta x,$$

maka

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i) - f(x_{i-1})\}$$

$$= \frac{b-a}{2}\{f(b) - f(a)\} < \epsilon$$

Bahwa untuk setiap bilangan $\delta > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga $||P|| < \delta$. Sehingga berlaku

$$\left|(P)\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - L\right| < \epsilon$$

Hasil di atas merupakan define dari Integral Darboux. Jadi $P\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan diatas maka diperoleh kesimpulan bahwa jika suatu fungsi terintegralkan Darboux maka fungsi terseut terintegralkan Perron, selain itu jika suatu fungsi terintegralkan Perron maka fungsi tersebut terintegralkan Darboux. Oleh karena itu, suatu fungsi terintegralkan Darboux jika dan hanya jika fungsi tersebut terintegralkan Perron. Akibatnya jika suatu fungsi terintegralkan Darboux ekuivalen dengan integral Denjoy-Perron.

4.2 Saran

Penulis menyarankan untuk para pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini dapat menggunakan pendeketan sifat-sifat dari kedua integral.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R., & Sherbert, D. (2000). *Introduction to Real Analysis (third Ed).* New York: John Wiley & Sons.

Gordon, R. (1994). *Theory of The Lebesgue,Denjoy, Perron, and Henstock Integral.* Rhode Island: AMS Publishing Company.

Kurtz, D. S., & Swartz, C. W. (2004). *THEORIES OF INTEGRATION.* New Jersey: World Scientific Publishing.

Nurandini, R. Y., Sumiaty, E., & Kustiawan, C. (2018). INTEGRAL PERRON DAN EKUIVALENSINYA DENGAN INTEGRAL DENJOY. *EurekaMatika*, 13.

Nurcholish, a. (2008, Agustus 26). Retrieved from https://ahmadnurcholish.wordpress.com/2008/08/26/prinsip-persamaan-antarmanusia-qs-al-hujarat4913/

Saks, S. (1937). *Theory of the Integral.* New York: Hafner Publishing Company.

Sinay, L. J., & Talakua, M. W. (2012). SIFAT-SIFAT DASAR INTEGRAL HENSTOCK. *Jurnal Barekeng*, 7-15.

Thobirin, H. (2015). *Analisis Real II.* Yogyakarta: Mata Padi Pressindo.

RIWAYAT HIDUP

Dimas Adi Pratama, lahir di Malang pada tanggal 24 Maret 1198 dan biasa dipanggil Dimas. Kakak dari Arvino Adi Ramadhani dan Putra Adi Wicaksono yang merupakan anak pertama dari 3 bersaudara pasangan Bapak Irwan Adi Triwibowo dan Ibu Netty Wulandari.

Pendidikan dasar ditempuh di SD Karya Iman Lippo Cikarang, Bekasi dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu, melanjutkan sekolah di SMP Karya Iman Lippo Cikarang, Bekasi dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Cikarang Pusat, Bekasi dan lulus tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika Murni.

Disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa, dia juga mengikuti organisasi intra yakni SEMATA (Serambi Matematika Aktif). Dalam organisasi luar bergabung dengan komunitas BERNAS (Berbagi Nasi Malang), 1000 Guru Malang, Turun Tangan Malang, dan Komunitas Sahabat Erdogan.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dimas Adi Pratama
NIM : 15610059
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
JudulSkripsi : Ekuivalensi Integral *Darboux* dan Integral *Denjoy-Perron*
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Agustus 2019	Pengajuan Judul	1.
2.	28 Agustus 2019	Konsultasi Jurnal Literasi	2.
3.	04 November 2019	Konsultasi Jurnal Literasi	3.
4.	06 September 2020	Konsultasi Bab I & II	4.
5.	16 September 2020	Konsultasi Bab I & II	5.
6.	06 Oktober 2020	Literasi Al-Qur’an	6.
7.	08 Oktober 2020	Konsultasi Bab III	7.
8.	15 November 2020	Konsultasi Bab III	8.
9.	16 November 2020	Konsultasi Bab III	9.
10.	23 Desember 2020	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	24 Desember 2020	Konsultasi Bab IV	11.
12.	26 Desember 2020	ACC Skripsi	12.

Malang, 27 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504142003121001