***RANDIC INDEX* DAN *RECIPROCAL RANDIC INDEX* PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI

OLEH
ZAUHAROTUL MAKNUN
NIM. 16610014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

RANDIC INDEX DAN _RECIPROCAL RANDIC INDEX_ PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO BILANGAN PRIMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Zauharotul Maknun
NIM. 16610014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

RANDIC INDEX DAN _RECIPROCAL RANDIC INDEX_ PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO BILANGAN PRIMA

SKRIPSI

Oleh
Zauharotul Maknun
NIM. 16610014

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Juni 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Dewi Ismiarti, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056	NIDT. 19870505 20160801 2 058

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

***RANDIC INDEX* DAN *RECIPROCAL RANDIC INDEX* PADA GRAF UNIT DARI RING BILANGAN BULAT MODULO BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI

Oleh
Zauharotul Maknun
NIM. 16610014

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 24 Juni 2020

Penguji Utama	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Sekretaris Penguji	: M. Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zauharotul Maknun

NIM : 16610014

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : *Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan Prima

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 April 2020
Yang membuat pernyataan

Zauharotul Maknun
NIM. 16610014

MOTO

"Ketika usaha dan doa berjalan beriringan hasil akhir dipasrahkan kepada pencipta yang tidak pernah memberi kekecewaan"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk :

Ayahanda Abdul Kodir, Ibunda Ulfiati Nikmah

Adik Rosidatul Faqiyah, Zidan Ahmad Qodir, dan Muhammad Mahir An-Nahdly yang selalu memberi semangat, nasehat dan mendoakan penulis agar selalu diberi kelancaran dan kemudahan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan Prima" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu ad-Din al-Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

6. Orang tua serta semua keluarga yang telah memberi dukungan selama ini.
7. Dosen jurusan matematika yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 05 April 2020

Zauharotul Maknun
NIM. 16610014

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Maknun, Zauharotul. 2020. ***Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan Prima.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) M. Nafie Jauhari, M.Si (II) Dewi Ismiarti, M.Si

Kata kunci : *Randic index*, *reciprocal Randic index*, graf unit, ring bilangan bulat modulo bilangan prima

Misalkan R adalah ring dengan unsur kesatuan. Graf unit $G(R)$ adalah suatu graf dengan R sebagai himpunan titik dan dua titik u, v yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v$ adalah unit dari R. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus *Randic index* dan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi kepustakaan dengan rujukan dari beberapa buku dan artikel. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo p dengan p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$R\big(G(\mathbb{Z}_p)\big) = \left(\frac{p-1}{\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{(p-3)}{2}\right)(p-1}{(p-2)}\right).$$

2. *Reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo p dengan p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$RR\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left((p-1)\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)\right) + \left(\left(\frac{(p-3)}{2}(p-1)\right)(p-2)\right).$$

ABSTRACT

Maknun, Zauharotul. 2020. **On the Randic Index and the Reciprocal Randic Index of Unit Graph of Ring of Integers Modulo a prime.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) M. Nafie Jauhari, M.Si (II) Dewi Ismiarti, M.Si

Keywords : Randic index, reciprocal Randic index, unit graph, ring of integers modulo a prime

Let R be a ring with non-zero identity. The unit graph $G(R)$ is a graph with R as the set of vertices and two distinct vertices u, v are adjacent if and only if $u + v$ is a unit of R. This research aims to determine the general pattern of Randic index and reciprocal Randic index of unit graph of the ring of integers modulo a prime. The method used in this research is the study of literature from books and articles. The results of this study are as follows:

1. The Randic index of unit graph of the ring of integers modulo p with p is a prime and $p \geq 3$ is
$$R\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left(\frac{p-1}{(\sqrt{(p-1)(p-2)})}\right) + \left(\frac{(\frac{(p-3)}{2})(p-1}{(p-2)}\right).$$

2. The reciprocal Randic index of unit graph of the ring of integers modulo p with p is a prime and $p \geq 3$ is
$$RR\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left((p-1)\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)\right) + \left(\left(\frac{(p-3)}{2}(p-1)\right)(p-2)\right).$$

ملخص

مكنون, زوهرة. ٢٠٢٠, مؤشر رانديك *(Randic)* و مؤشر رانديك متبادل *(Reciprocal Randic)* على الرسم البياني للوحدةللحلقة اعداد الصحيحة مودولو فريما *(Modulo Prima)*. البحث العلمى. شعبة الرياضيات, كليةالعلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانامالك إبراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرف (١) محمدنافع جوهاري, الماجستير. المشرفة (٢)دوي اسمي ارتي , الماجستير.

الكلمات الرئيسية: مؤشر رانديك *(Randic)* , مؤشر رانديك متبادل*(reciprocal Randic)*, وحدة الرسم البياني, حلقة اعداد صحيحة مودولو فريما *(modulo prima)*

المثال R حلقة بهوية غير صفرية. الرسم البياني للوحدة $G(R)$ هو رسم بياني بعنصر Rمثل تعيين قمة الرأس واثنين من قمة u, v مختلفة مرتبطة مباشرة و إذا كانت $u+v$ فهي وحدة R, تهدف هذه الدراسة إلى تحديد الصيغة مؤشر رانديك *(Randic)* و مؤشر رانديك متبادل *(reciprocal Randic)* على الرسم البياني للوحدةللحلقة اعداد الصحيحة مودولو فريما *(modulo prima)*. الطريقة المستخدمة في هذه الدراسة هي دراسة الأدب والمراجع من العديد من الكتب والمقالة. نتائج هذه الدراسة هي علي النحو التالي :

١ مؤشر رانديك *(Randic)* على الرسم البياني للوحدة للحلقة اعداد الصحيحة مودولو ف $p \geq 3, (modulo\ p\ )$ مع ف فريما *(p prima)*هو:

$$R\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left(\frac{p-1}{\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{(p-3)}{2}\right)(p-1}{(p-2)}\right).$$

٢ مؤشر رانديك متبادل *(reciprocal Randic)* على الرسم البياني للوحدة للحلقة اعداد الصحيحة مودولو ف $p \geq 3, (modulo\ p\ )$ مع ف فريما *(p prima)*هو:

$$RR\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left((p-1)\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)\right) + \left(\left(\frac{(p-3)}{2}(p-1)\right)(p-2)\right).$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Manusia diberi akal oleh Allah untuk membedakan manusia dengan makhluk yang lainnya. Salah satu tugas manusia adalah berpikir dan memahami tanda-tanda kekuasaan Allah. Perintah memahami terdapat dalam surat Al Ghasyiyah ayat 17-20, yang artinya :

"Maka apakah mereka tidak memperhatikan unta bagaimana dia diciptakan, dan langit, bagaimana ia ditinggikan? Dan gunung-gunung bagaimana ia ditegakkan? Dan bumi bagaimana ia dihamparkan?" (Al-Ghasyiyah(88):17-20).

Berdasarkan penjelasan tafsir Salman, Allah memerintahkan manusia untuk meneliti, bukan sekadar memperhatikan penciptaan unta, pembentukan langit, pemancangan gunung-gunung, dan penghamparan bumi. Secara bahasa Allah memerintahkan kita untuk mengembangkan ilmu pengetahuan.

Ilmu pengetahuan dapat dikembangkan, salah satu contohnya adalah ilmu matematika. Matematika dapat digunakan untuk mengembangkan ke dalam ilmu lainnya seperti ilmu kimia, biologi, fisika, astronomi, dan sebagainya. Sehingga menghasilkan pemikiran-pemikiran baru.

Cabang dari ilmu matematika sangat banyak, salah satunya adalah teori graf. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Leonard Euler yang merupakan seorang ahli matematika dari Swiss. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Euler memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan dinyatakan sebagai titik dan jembatan dinyatakan sebagai sisi.

Menurut Chartrand, dkk (2016) graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi.

Menurut S.Akbari (2015) graf unit dari R adalah Sebuah graf dengan anggota R sebagai titik dan dua titik yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v$ adalah unit dari R, graf unit dari R dilambangkan dengan $G(R)$ Graf unit sebelumnya telah diteliti oleh S. Akbari pada tahun 2015 meneliti tentang graf unit pada ring non komutatif.

Graf dapat dibangun dari ring. Menurut Gilbert dan Gilbert (2015) ring adalah himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma tertutup terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap penjumlahan, adanya unsur identitas terhadap penjumlahan, invers terhadap penjumlahan, komutatif terhadap penjumlahan, tertutup terhadap perkalian, asosiatif terhadap perkalian, dan distributif perkalian terhadap penjumlahan. Apabila operasi perkalian bersifat komutatif maka disebut ring komutatif. Apabila adanya unsur identitas terhadap perkalian maka disebut ring dengan unsur kesatuan.

Ring yang digunakan pada penelitian adalah ring bilangan bulat modulo bilangan prima. Menurut Buchman (2004) ring bilangan bulat modulo m dapat dikatakan ring komutatif dengan unsur kesatuan jika m adalah bilangan bulat dengan $m > 1$, maka $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan $1 \in \mathbb{Z}_m$.

Derajat titik dari titik v di graf G dinotasikan dengan $deg(v)$ adalah jumlah titik yang terkait langsung dengan v di G (Abdussakir, dkk, 2009). *Randic index* dari graf G adalah $R(G) = \sum_{\boldsymbol{uv \in E(G)}} \frac{1}{\sqrt{deg(u)deg(v)}.}$ (Farrukh, dkk, 2016). Penelitian terkait *Randic index* telah dilakukan oleh Huiqing Liu pada tahun 2006 dengan judul "*On the Randic Index*". Pada penelitian tersebut Huiqing Liu meneliti *Randic index* pada graf segitiga, dan pada tahun 2016 Fatima Farrukh, dkk telah melakukan penelitian dengan judul "*Calculating Some Topological Indices of S_iO_2 Layer Structure*". Pada penelitian tersebut Fatima Farrukh fokus menghitung *Randic index*, *reciprocal Randic index*, *sum connectivity index*, *reduced second Zagreb index*, dan *reduced reciprocal Randic index* pada lapisan struktur S_iO_2.

Reciprocal Randic index dari graf G adalah

$RR(G) = \sum_{\boldsymbol{uv \in E(G)}} \sqrt{\deg(u)\deg(v)}$ (Farrukh, dkk, 2016) Penelitian terkait *reciprocal Randic index* telah dilakukan oleh Muhammad K. Jamil, dkk pada tahun 2017 dengan judul "*Four Vertex Degree Based Topological Indices of VC_5C_7[p;q] Nanotubes*". Pada penelitian tersebut Muhammad K. Jamil, dkk fokus menghitung indeks dari nanotubes VC_5C_7 dengan perhitungan *Randic index*, *reduced Randic index*, *reduced second Zagreb index*, dan *forgotten index*.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik untuk meneliti tentang "*Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan Prima".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dibahas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah

1. Bagaimana rumus *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima?
2. Bagaimana rumus *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui rumus *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.
2. Untuk mengetahui rumus *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini untuk memberikan informasi mengenai *Randic index* dan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, permasalahan yang dibahas dibatasi hanya pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima dan $p \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan semua unit dari ring $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$ dengan menggunakan tabel perkalian.
2. Menentukan titik-titik yang terhubung langsung pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
3. Menggambar graf unit dari ring $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
4. Menentukan derajat setiap titik pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
5. Menentukan *Randic index* pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
6. Menentukan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$.
7. Membuat lemma terkait graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima, meliputi:
   a. Himpunan titik dari graf unit.
   b. Keterhubungan titik pada graf unit.
   c. Derajat titik pada graf unit.
8. Merumuskan *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.
9. Membuktikan rumus *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.
10. Merumuskan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.
11. Membuktikan rumus *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan pada penelitian ini mudah dipahami dan lebih terarah, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan pada masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut :

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan terdiri atas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka meliputi teori-teori yang digunakan dan untuk membantu memecahkan masalah yang berkaitan dengan topik penelitian. Pada penelitian ini, teori yang digunakan meliputi graf, ring, ring dengan unit, ring komutatif dengan unsur kesatuan, graf unit, faktor persekutuan terbesar, kongruensi modulo m, relasi ekuivalensi, ring bilangan bulat modulo m, *Randic index*, *reciprocal Randic index*, serta ilmu pengetahuan dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang lemma dan pembuktian rumus *Randic index* dan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.

Bab IV Penutup

Penutup meliputi kesimpulan tentang penelitian yang telah dilakukan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

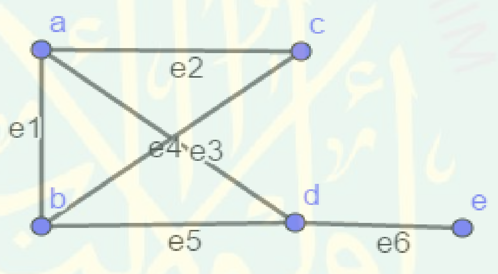
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 2.1.1

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Chartrand, dkk, 2016).

Contoh 2.1.1



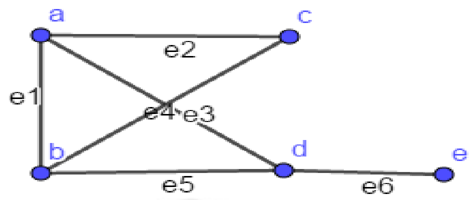
Gambar 2.1 Contoh Graf

Graf G pada Gambar 2.1 merupakan contoh graf yang memuat himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

2.1.1 Graf Terhubung

Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e, u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, titik u dan v disebut ujung dari sisi e (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh 2.1.2



Gambar 2.2 Contoh Graf Terhubung

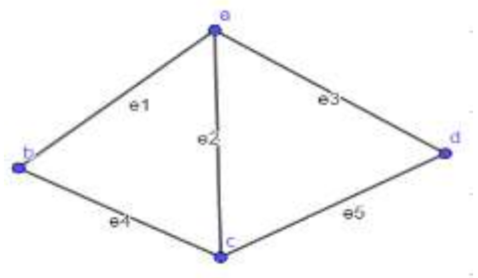
Gambar 2.2 merupakan graf terhubung yang memuat himpunan titik $V = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_{4,} e_5, e_6\}$. Dari gambar tersebut titik yang terhubung langsung(*adjacent*) adalah titik a dan b, a dan c ,b dan c, a dan d, b dan d, d dan e. Sedangkan titik yang terkait langsung(*incident)* adalah sisi e_1 terkait langsung dengan a dan b, sisi e_2 terkait langsung dengan a dan c ,sisi e_3 terkait langsung dengan b dan c, sisi e_4 terkait langsung dengan a dan d, sisi e_5 terkait langsung dengan b dan d, sisi e_6 terkait langsung dengan d dan e.

2.1.2 Derajat Titik

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$ adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$(Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh 2.1.3

Perhatikan graf H yang memuat himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_{4,} e_5\}$ dibawah ini:



Gambar 2.3 Contoh Graf Terhubung

Dari Gambar 2.3 diperoleh bahwa:

$$\deg(a) = 3 \qquad \deg(b) = 2$$
$$\deg(c) = 3 \qquad \deg(d) = 2$$

2.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Definisi 2.2.1

Misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang berturut-turut dilambangkan dengan $(+)$ dan $(\cdot)$. Maka R adalah ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. R tertutup terhadap penjumlahan, artinya jika $x \in R$ dan $y \in R$ maka $x + y \in R$.
2. Asosiatif terhadap penjumlahan, artinya $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk semua $x, y, z \in R$.
3. Adanya unsur identitas terhadap penjumlahan, yaitu terdapat $e \in R$ sehingga untuk setiap $x \in R$ berlaku $x + e = e + x = x \in R$.
4. Adanya unsur balikan atau invers terhadap penjumlahan, yaitu $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
5. Komutatif terhadap penjumlahan, artinya $x + y = y + x$ untuk semua $x, y \in R$.

6. R tertutup terhadap perkalian, artinya jika $x \in R$ dan $y \in R$ maka $x \cdot y \in R$.
7. Asosiatif terhadap perkalian, artinya $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ untuk semua $x, y, z \in R$.
8. Distribusi perkalian $(\cdot)$ terhadap penjumlahan, artinya $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ untuk semua $x, y, z \in R$.

(Gilbert dan Gilbert, 2015).

Contoh 2.2.1

Sebuah 3-tuple $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dengan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat merupakan ring karena

1. $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

   Untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) \in \mathbb{Z}$
2. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$

   Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. 0 adalah unsur identitas terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}$

   Untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}$, sehingga

   $a + (-a) = (-a) + a = 0$
5. Operasi penjumlahan bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$

   Untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$
6. $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi perkalian

   Untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$
7. Operasi perkalian bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$

8. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap penjumlahan

   $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$

   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$

   Jadi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring.

Definisi 2.2.2

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut ring komutatif jika dan hanya jika operasi kedua $(\cdot)$ bersifat komutatif di R (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Contoh 2.2.2

Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif, karena untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b = b \cdot a$.

Definisi 2.2.3

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ disebut ring dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika R mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua $(\cdot)$ yaitu terdapat $1 \in R$ sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, untuk semua $a \in R$ (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh 2.2.3

Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring dengan unsur kesatuan, karena terdapat $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.2.4

Suatu ring disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan jika ring tersebut komutatif dan mempunyai unsur kesatuan (Dewi, 2011).

Contoh 2.2.4

Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Definisi 2.2.5

Misalkan R adalah suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan. Unsur $u \in R$ dikatakan "unit" di R apabila terdapat unsur $v \in R$ sedemikian sehingga $uv = 1$. Himpunan unit di R dilambangkan dengan $U(R)$ (Mas'oed, 2013).

2.3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Definisi 2.3.1

Misalkan a dan p adalah dua buah bilangan bulat yang tidak keduanya nol, faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan p adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d \mid a$ dan $d \mid p$. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa FPB $(a, p) = d$ (Rosen, 2012).

Contoh 2.3.1

FPB dari 18 dan 12 adalah 6 ditulis FPB $(18, 12) = 6$.

Definisi 2.3.2

Bilangan a dan p dikatakan relatif prima jika$(a, p) = 1$, begitu pula bilangan bulat $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah relatif prima jika $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ Dapat dikatakan bahwa $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah relatif prima bila pasangan $(a_i, a_j) = 1$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (Irawan, dkk, 2004).

Teorema 2.3.1

Jika a dan b dua bilangan bulat yang tidak keduanya nol maka terdapat bilangan bulat m dan n sehingga FPB $(a, b) = ma + nb$ (Rosen, 2012)

Bukti

Dibentuk suatu suatu himpunan semua kombinasi linier dari a dan b, namakan himpunan $S = \{ma + nb | m, n \in \mathbb{Z}\}$, selanjutnya dibentuk himpunan

$T = \{s \in S | s > 0\}$, maka T memiki elemen terkecil, namakan d, misalkan $d = ma + nb$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa d adalah pembagi persekutuan dari a dan b. Berdasarkan algoritma pembagian, diperoleh bahwa $a = dq + r$ dengan $0 \leq r \leq d - 1$. Dari sini diperoleh

$$r = a - dq = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a + (-qn)b$$

yaitu $r \in S$. Diketahui $0 \leq r \leq d - 1$ dan d adalah kombinasi linier positif terkecil dari a dan b, akibatnya satu-satunya r yang memenuhi hanyalah $r = 0$ sehingga diperoleh $a = dq$ yang berarti $d|a$. Selanjutnya, dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $d|b$. Dari sini diperoleh bahwa d adalah pembagi persekutuan dari a dan b. Untuk menunjukkan bahwa d adalah pembagi persekutuan dari a dan b, dimisalkan c adalah pembagi persekutuan dari a dan b, maka $c|(ma + nb)$, sehingga diperoleh $c|d$. Diketahui $d < 0$, akibatnya $c \leq d$. Hal ini menunjukkan bahwa d adalah pembagi persekutuan terbesar dari a dan b.

Akibat 2.3.1

Diberikan $a, b \in \mathbb{Z}$, maka a dan b relatif prima jika dan hanya jika terdapat $m, n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $ma + nb = 1$.

2.4 Relasi Ekuivalensi dan Kongruensi

2.4.1 Relasi Ekuivalensi

Definisi 2.4.1

Suatu relasi $\mathcal{R}$ dalam suatu himpunan tak kosong A disebut relasi ekuivalensi jika memenuhi sifat berikut ini:

a) Refleksif, jika untuk setiap $a \in A$, berlaku $a\mathcal{R}a$,

b) Simetris, jika untuk setiap $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ mengakibatkan $b\mathcal{R}a$,

c) Transitif, , jika untuk setiap $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ dan $b\mathcal{R}c$ mengakibatkan $a\mathcal{R}c$.

(Abdurrahman, 2019).

Contoh 2.4.1

Diberikan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan

$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,3), (3,2)\}$, maka $\mathcal{R}$ adalah suatu relasi ekuivalensi pada A.

Definisi 2.4.2

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A, kelas ekuivalensi yang memuat x adalah subhimpunan-subhimpunan yang dinyatakan dengan

$$[x] = \{y \in A | y\mathcal{R}x\}$$

(Abdurrahman, 2019).

2.4.2 Kongruensi Modulo m

Definisi 2.4.3

Misalkan m adalah bilangan bulat positif, $m > 1$. Untuk bilangan bulat a dan b, dikatakan a kongruen dengan b modulo m jika dan hanya jika $a - b$ adalah kelipatan dari m. Ditulis $a \equiv b(mod\ m)$. Misalkan $0 \leq r < m$ maka $a \equiv r(mod\ m)$ dapat dituliskan $r = a\ mod\ m$ (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Contoh 2.4.2

$17 \equiv 3(mod\ 7)$ karena 7 membagi habis $17 - 3$ atau 4.

Teorema 2.4.1

Relasi kongruensi modulo m adalah relasi ekuivalensi di $\mathbb{Z}$

Bukti

Misalkan $m > 1$, dan x, y, z di $\mathbb{Z}$

1. Refleksif : $x - x = (m)(0)$ maka $x \equiv x(mod\ m)$.
2. Simetris : $x \equiv y\ (mod\ m) \Rightarrow\ x - y = mq$ untuk $q \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow\ y - x = m(-q) \text{ dan } -q \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\ y \equiv x(\ mod\ m).$$

3. Transitif : $x \equiv y(mod\ m)$ dan $y \equiv z(mod\ m)$

$$\Rightarrow\ x - y = mq \text{ dan } y - z = mk \text{ dan } q, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\ x - z = x - y + y - z$$

$$= m(q + k)$$

$$\Rightarrow\ x \equiv z(\ mod\ m).$$

Jadi, relasi kongruensi adalah suatu relasi ekuivalensi (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Misalkan $m \in \mathbb{Z}, m > 1$, berdasarkan Definisi 2.4.2 untuk $a \in \mathbb{Z}$ diperoleh kelas ekuivalensi

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a(mod\ m)\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = mk, k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z} | x = a + mk, k \in \mathbb{Z}\}\\ &= [a + mk | k \in \mathbb{Z}],\end{aligned}$$

Dua kelas ekuivalensi $[a]$ dan $[b]$ sama jika dan hanya jika $a \equiv b(mod\ m)$

Terdapat m kelas ekuivalensi berbeda pada $\mathbb{Z}$, sebagai berikut

$$[0] = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -2m + 1, -m + 1, 1, m + 1, 2m + 1, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -2 + 2, -m + 2, 2, m + 2, 2m + 2, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$[m-1] = \{\dots, -m-1, -1, m-1, 2m-1, 3m-1, \dots\}.$$

Kelas ekuivalensi tersebut disebut dengan kelas kongruensi. Untuk selanjutnya $[a]$ akan disimbolkan dengan $\bar{a}$. Himpunan semua kelas kongruensi modulo m pada $\mathbb{Z}$ dilambangkan dengan $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ (Gilbert dan Gilbert, 2015).

2.4.3 Ring Bilangan Bulat Modulo m

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dan $m > 1$.

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_m$ sebagai berikut:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_m$ merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan

1. $\mathbb{Z}_m$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

   Untuk semua $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) \in \mathbb{Z}_m$.

2. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_m$

   Untuk semua $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, berlaku

$$\begin{aligned}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{a+b} + \bar{c} \\ &= \overline{(a+b)+c} \\ &= \overline{a+(b+c)} \\ &= \bar{a} + (\overline{b+c}) \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).\end{aligned}$$

3. $\bar{0}$ adalah unsur identitas terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$

Untuk semua $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} = \bar{a} + \bar{0}$.

Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, berlaku

$\bar{0} + \bar{a} = \overline{0 + a} = \bar{a}$ dan $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$.

4. Untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, terdapat $-\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, sehingga

   $\bar{a} + -\bar{a} = \bar{0}$ dan $-\bar{a} + \bar{a} = \bar{0}$

   Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, jelas bahwa $-\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

   $\bar{a} + -\bar{a} = \overline{a + (-a)} = \bar{0}$ dan $-\bar{a} + \bar{a} = \overline{-a + a} = \bar{0}$

5. Operasi penjumlahan bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_m$

   Untuk semua $\bar{a},\ \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

   Ambil sebarang $\bar{a},\ \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a + b} \\ &= \overline{b + a} \\ &= \bar{b} + \bar{a}. \end{aligned}$$

6. $\mathbb{Z}_m$ tertutup terhadap operasi perkalian

   Untuk semua $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$.

7. Operasi perkalian bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_m$

   Untuk semua $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$.

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, berlaku

$$\begin{aligned} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} &= (\overline{a \cdot b}) \cdot \bar{c} \\ &= \overline{(a \cdot b) \cdot c} \\ &= \overline{a \cdot (b \cdot c)} \\ &= \bar{a} \cdot (\overline{b \cdot c}) \\ &=. \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}). \end{aligned}$$

8. Operasi perkalian bersifat distributif terhadap penjumlahan

   Untuk semua $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})$.

   Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, berlaku

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} &= (\overline{a + b}) \cdot \bar{c} \\
&= \overline{(a + b) \cdot c} \\
&= \overline{(a \cdot c) + (b \cdot c)} \\
&= (\overline{a \cdot c}) + (\overline{b \cdot c}) \\
&= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\overline{b \cdot c}) \\
&= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c}).
\end{aligned}
$$

9. $\bar{1}$ adalah unsur identitas terhadap operasi perkalian di $\mathbb{Z}_m$

   Untuk semua $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{1} \cdot \bar{a} = \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{1}$.

   Ambil sebarang $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, berlaku

   $\bar{1} \cdot \bar{a} = \overline{1 \cdot a} = \bar{a}$ dan $\bar{a} \cdot \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}$.

10. Operasi perkalian bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_m$

    Untuk semua $\bar{a},\ \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

    Ambil sebarang $\bar{a},\ \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\bar{a} \cdot \bar{b} &= \overline{b \cdot a} \\
&= \overline{b \cdot a} \\
&= \bar{b} \cdot \bar{a}.
\end{aligned}
$$

Jadi $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Operasi pada ring $\mathbb{Z}_m$ dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b\ (mod\ m)}$$

$$\bar{a}\ \cdot \bar{b} = \overline{a\ \cdot b\ (mod\ m)}.$$

2.5 Graf Unit

Definisi 2.5.1

Misalkan R suatu ring dengan unsur kesatuan. Graf unit dari R dilambangkan dengan $G(R)$ adalah graf dengan anggota R sebagai titik dan dua titik yang berbeda u, v terhubung langsung jika dan hanya jika $u + v$ adalah unit dari R (S.Akbari, 2015).

Contoh 2.5.1

Ring bilangan bulat modulo 3 dengan anggotanya adalah $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ dan memiliki unit $\overline{1}, \overline{2}$. Semua anggota ring bilangan bulat modulo 3 akan menjadi titik pada graf unit. Kemudian titik tersebut terhubung langsung jika dan hanya jika hasil penjumlahannya adalah unit.

2.6 *Randic Index*

Randic index awalnya diusulkan oleh seorang ahli kimia bernama Milan Randic pada tahun 1975. *Randic index* juga dikenal sebagai indeks konektivitas perkalian. *Randic index* berhubungan dengan beberapa sifat fisikokimia alkana yang mencakup entalpi formasi, titik didih, tekanan uap, luas permukaan, dan sebagainya. *Randic index* dari graf G didefinisikan sebagai :

$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{deg(u)deg(v)}}.$$

(Farrukh,dkk, 2016).

2.7 *Reciprocal Randic Index*

Reciprocal Randic index dihasilkan dari *Randic index*, pertama kali ditemukan oleh Favaron, Maheo dan Sacle. *Reciprocal Randic index* ini didefinisikan sebagai jumlah dari akar kuadrat dari perkalian derajat titik yang terhubung langsung. *Reciprocal Randic index* dari graf G didefinisikan sebagai berikut :

$$RR(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\deg(u)\deg(v)}.$$

(Farrukh,dkk, 2016).

2.8 Menentukan *Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada $G(\mathbb{Z}_p)$

Subbab ini membahas tentang menentukan *Randic index* dan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima.

2.8.1 *Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada $G(\mathbb{Z}_3)$

Anggota dari ring $\mathbb{Z}_3$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$. Anggota $U(\mathbb{Z}_3)$ ditentukan dengan operasi perkalian dua anggota pada ring $\mathbb{Z}_3$ yang dapat dinyatakan dalam tabel perkalian berikut:

2.1 Tabel Perkalian Ring $\mathbb{Z}_3$

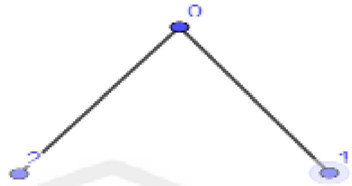
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa anggota dari $U(\mathbb{Z}_3)$ adalah $\bar{1}, \bar{2}$. Setelah menentukan anggota dari $U(\mathbb{Z}_3)$ maka akan dibentuk graf $G(\mathbb{Z}_3)$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 maka semua anggota ring $\mathbb{Z}_3$ sebagai titik pada graf $G(\mathbb{Z}_3)$ dan titik yang terhubung langsung pada graf $G(\mathbb{Z}_3)$ adalah

$\bar{0}$ dan $\bar{1}$, karena $\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_3)$

$\bar{0}$ dan $\bar{2}$, karena $\bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_3)$

Sehingga graf unit dari ring bilangan bulat modulo 3 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.4 Graf $G(\mathbb{Z}_3)$

Dari Gambar 2.4 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $G(\mathbb{Z}_3)$ yaitu:

$$\deg(\bar{0}) = 2 \qquad \deg(\bar{1}) = 1 \qquad \deg(\bar{2}) = 1.$$

Setelah memperoleh derajat titik dari setiap titik pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo 3, maka dapat dihitung *randic index dan reciprocal randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo 3, sebagai berikut:

Randic index pada $G(\mathbb{Z}_3)$ adalah

$$R(G(\mathbb{Z}_3)) = \sum_{uv \in E(G(\mathbb{Z}_3))} \frac{1}{\sqrt{deg(u)deg(v).}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{1})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2.1}} + \frac{1}{\sqrt{2.1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Kemudian *reciprocal randic index* pada $G(\mathbb{Z}_3)$ adalah

$$RR(G(\mathbb{Z}_3)) = \sum_{uv \in E(G(\mathbb{Z}_5))} \sqrt{\deg(u)\deg(v).}$$

$$= \sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{1})} + \sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{2})}$$

$$= \sqrt{2.1} + \sqrt{2.1} = 2\sqrt{2}.$$

2.8.2 ***Randic Index* dan *Reciprocal Randic Index* pada $G(\mathbb{Z}_7)$**

Anggota dari ring $\mathbb{Z}_7$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$. Anggota $U(\mathbb{Z}_7)$ ditentukan dengan operasi perkalian dua anggota pada ring $\mathbb{Z}_7$ yang dapat dinyatakan dalam tabel perkalian berikut:

Tabel 2.2 Tabel Perkalian Ring $\mathbb{Z}_7$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 2.2 dapat dilihat bahwa anggota dari $U(\mathbb{Z}_7)$ adalah $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$. Setelah menentukan anggota dari $U(\mathbb{Z}_7)$ maka akan dibentuk graf $G(\mathbb{Z}_7)$. Berdasarkan Definisi 2.5.1 maka semua anggota ring $\mathbb{Z}_7$ sebagai titik pada graf $G(\mathbb{Z}_7)$ dan titik yang terhubung langsung pada graf $G(\mathbb{Z}_7)$ adalah

$\bar{0}$ dan $\bar{1}$, karena $\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{0}$ dan $\bar{2}$, karena $\bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{0}$ dan $\bar{3}$, karena $\bar{0} + \bar{3} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{0}$ dan $\bar{4}$, karena $\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{0}$ dan $\bar{5}$, karena $\bar{0} + \bar{5} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{0}$ dan $\bar{6}$, karena $\bar{0} + \bar{6} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{1}$ dan $\bar{2}$, karena $\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{1}$ dan $\bar{3}$, karena $\bar{1} + \bar{3} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{1}$ dan $\bar{4}$, karena $\bar{1} + \bar{4} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{1}$ dan $\bar{5}$, karena $\bar{1} + \bar{5} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{2}$ dan $\bar{3}$, karena $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{2}$ dan $\bar{4}$, karena $\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{2}$ dan $\bar{6}$, karena $\bar{2} + \bar{6} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{3}$ dan $\bar{5}$, karena $\bar{3} + \bar{5} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7)$

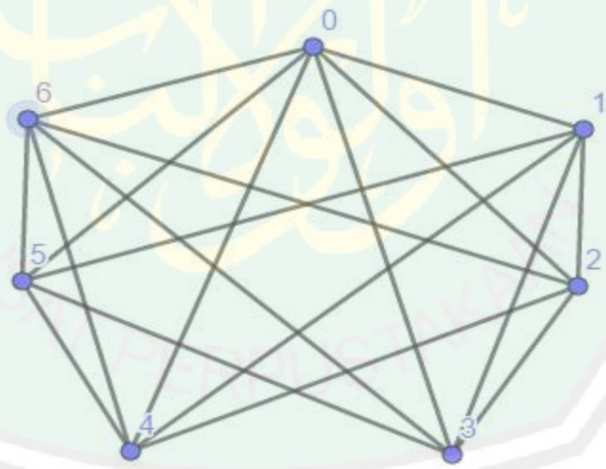
$\bar{3}$ dan $\bar{6}$, karena $\bar{3} + \bar{6} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{4}$ dan $\bar{5}$, karena $\bar{4} + \bar{5} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{4}$ dan $\bar{6}$, karena $\bar{4} + \bar{6} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\bar{5}$ dan $\bar{6}$, karena $\bar{5} + \bar{6} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7)$

Sehingga graf unit dari ring bilangan bulat modulo 7 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf $G(\mathbb{Z}_7)$

Dari Gambar 2.5 diperoleh derajat titik dari masing-masing titik pada graf $G(\mathbb{Z}_7)$ yaitu:

$\deg(\bar{0}) = 6$, $\deg(\bar{3}) = 5$,

$\deg(\bar{1}) = 5,$ $\deg(\bar{4}) = 5,$

$\deg(\bar{2}) = 5,$ $\deg(\bar{5}) = 5,$

$\deg(\bar{6}) = 5.$

Setelah memperoleh derajat titik dari setiap titik pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo 7, maka dapat dihitung *Randic index dan reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo 7, sebagai berikut:

Randic index pada $G(\mathbb{Z}_7)$ adalah

$$R(G(\mathbb{Z}_7)) = \sum_{uv \in E(G(\mathbb{Z}_7))} \frac{1}{\sqrt{deg(u)deg(v).}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{1})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{2})}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{3})}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{6})}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{1}).\deg(\bar{2})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{1}).\deg(\bar{3})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{1}).\deg(\bar{4})}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{1}).\deg(\bar{5})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{2}).\deg(\bar{3})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{2}).\deg(\bar{4})}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{2}).\deg(\bar{6})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{3}).\deg(\bar{5})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{3}).\deg(\bar{6})}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{4}).\deg(\bar{5})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{4}).\deg(\bar{6})}} + \frac{1}{\sqrt{\deg(\bar{5}).\deg(\bar{6})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6.5}} + \frac{1}{\sqrt{6.5}} + \frac{1}{\sqrt{6.5}} + \frac{1}{\sqrt{6.5}} + \frac{1}{\sqrt{6.5}} + \frac{1}{\sqrt{6.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}} + \frac{1}{\sqrt{5.5}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{30}} + \frac{12}{5}$$

Kemudian *reciprocal Randic index* pada $G(\mathbb{Z}_7)$ adalah

$$RR\big(G(\mathbb{Z}_7)\big) = \sum_{uv \in E\left(G(\mathbb{Z}_7)\right)} \sqrt{\deg(u)\deg(v).}$$

$$= \sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{1})} + \sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{2})} +$$

$$\ldots + \sqrt{\deg(\bar{0}).\deg(\bar{6})} + \sqrt{\deg(\bar{1}).\deg(\bar{2})} + \ldots$$

$$+\sqrt{\deg(\bar{1}).\deg(\bar{5})}+\sqrt{\deg(\bar{2}).\deg(\bar{3})}$$

$$+\sqrt{\deg(\bar{2}).\deg(\bar{4})}+\sqrt{\deg(\bar{2}).\deg(\bar{6})}$$

$$+\sqrt{\deg(\bar{3}).\deg(\bar{5})}+\sqrt{\deg(\bar{3}).\deg(\bar{6})}$$

$$+\sqrt{\deg(\bar{4}).\deg(\bar{5})}+\sqrt{\deg(\bar{4}).\deg(\bar{6})}$$

$$+\sqrt{\deg(\bar{5}).\deg(\bar{6})}$$

$$= \sqrt{6.5}+\sqrt{6.5}+\sqrt{6.5}+\sqrt{6.5}+\sqrt{6.5}+\sqrt{6.5}$$

$$+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+$$

$$\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}+\sqrt{5.5}$$

$$= 6\sqrt{30}+12.5 = 6\sqrt{30}+60.$$

2.9 Ilmu Pengetahuan dalam Al-Quran

Al-Quran telah mengisyaratkan pentingnya ilmu pengetahuan dan menjadikan proses pencariannya sebagai ibadah. Di samping itu Al-Quran juga menegaskan bahwa satu-satunya sumber ilmu pengetahuan adalah Allah SWT. Memahami tanda-tanda kekuasaan Pencipta hanya mungkin dilakukan oleh orang-orang yang terdidik dan bijak yang berusaha menggali rahasia-rahasia alam serta memiliki ilmu (keahlian) dalam bidang tertentu. Ilmu-ilmu kealaman seperti matematika, fisika, kimia, astronomi, biologi, geologi, dan lainnya merupakan perangkat yang dapat digunakan untuk memahami fenomena alam semesta secara tepat.

Dalam Al-qur'an banyak ayat yang menyatakan bahwa seorang manusia harus berpikir dan memahami dan itu menjadi salah satu tugas kita sebagai makhluk hidup yang diberi keistimewaan yaitu akal. Perintah memahami terdapat dalam surat Al Ghasyiyah ayat 17-20, yang artinya :

“Maka apakah mereka tidak memperhatikan unta bagaimana dia diciptakan, dan langit, bagaimana ia ditinggikan? Dan gunung-gunung bagaimana ia ditegakkan? Dan bumi bagaimana ia dihamparkan?” (Al-Ghasyiyah(88):17-20).

Berdasarkan tafsir fi zhilalil Qur’an empat ayat ini merangkum sisi-sisi lingkungan bangsa Arab yang di dalam Al-Quran pertama kali, sebagaimana ia juga merangkum sisi makhluk yang menonjol di alam semesta. Yaitu, ketika ia membicarakan langit, bumi, gunung-gunung, dan unta (sebagai salah satu contoh yang mewakili semua binatang) karena kekhasan unta dalam penciptaannya pada umumnya, dan nilainya bagi bangsa Arab. Pemandangan-pemandangan ini dihamparkan untuk dipandangi manusia di manapun mereka berada. Di manapun manusia mengkaji ilmu pengetahuan dan kebudayaan, maka pemandangan ini tentu masuk di dalam dunianya dan objek pengetahuannya. Pemandangan-pemandangan ini yang mengisyaratkan kepadanya tentang apa yang ada di belakangnya. Yakni, ketika mereka mengarahkan pandangan dan hatinya kepada petunjuk-petunjuk yang dikandungnya khusus (Faqih, Allamah Kamal dan tim ulama, 2006).

Kemukjizatan tersimpan di dalamnya, dan penciptaan Yang Maha Pencipta terhadapnya sangat jelas tiada bandingnya. Hal ini mengisyaratkan hakikat akidah yang pertama dan utama. Oleh karena itu, Al-Quran mengarahkan perhatian semua manusia kepadanya.

Ayat lain yang juga menjelaskan tentang berpikir dan memahami yakni terdapat pada surat Al Imran ayat 191 yang artinya

“(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci

Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka".

Berdasarkan tafsir M. Quraish shihab ayat tersebut menjelaskan sebagian dari ciri-ciri siapa yang dinamai Ulūl-albāb. Mereka adalah orang baik laki-laki atau perempuan yang terus-menerus mengingat Allah, dengan ucapan dan atau hati dalam seluruh situasi dan kondisi apapun. Obyek dzikir adalah Allah, sedangkan obyek akal pikiran adalah seluruh makhluk ciptaan-Nya. Akal diberi kebebasan seluas-luasnya untuk memikirkan fenomena alam, dan terdapat keterbatasan dalam memikirkan dzat Allah (Tafsir Al-Mishbah, 2009).

Berdasarkan uraian di atas Allah memberi akal bagi manusia untuk berfikir. Banyak ilmu pengetahuan yang dapat dikembangkan misalnya dalam ilmu matematika dapat digunakan untuk mengembangkan ke dalam ilmu lainnya seperti ilmu kimia, biologi, fisika, astronomi, dan sebagainya. Sehingga dapat dikembangkan melalui pemikiran-pemikiran baru.

BAB III
PEMBAHASAN

Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima dan memiliki sifat-sifat yang dipaparkan dalam lemma berikut.

Lemma 3.1

Misalkan p adalah bilangan prima. Untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{a}$ adalah unit.

Bukti

Karena FPB(a, p) = 1, dari Teorema 2.4.1 maka terdapat $s,t \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $sa + tp$ = 1, perhatikan bahwa

$sa + tp$ = 1 $\Leftrightarrow sa - 1 = -tp$

Diperoleh $sa \equiv 1\ (mod\ p)$.

Pilih $\bar{b}$ dengan $b \equiv s(mod\ p)$

$\Leftrightarrow ab \equiv as\ (mod\ p)$

$\Leftrightarrow\ ab \equiv 1\ (mod\ p)$

Artinya $\bar{a}\,\bar{b} = \bar{1}$.

Terbukti $\bar{a}$ adalah unit.

Akibat 3.1

Misalkan p adalah bilangan prima maka $V\big(G(\mathbb{Z}_p)\big) = \mathbb{Z}_p - \{\bar{0}\}$.

Lemma 3.2

Misalkan p adalah bilangan prima. Untuk setiap $\bar{\imath}, \bar{\jmath} \in V\left(G\big(\mathbb{Z}_p\big)\right)$, $\bar{\imath} \neq \bar{\jmath}$ berlaku

$\bar{\imath}\,\bar{\jmath} \in E\left(G\big(\mathbb{Z}_p\big)\right)$ jika dan hanya jika $\bar{\jmath} \neq -\bar{\imath}$.

Bukti

$\bar{\imath}\,\bar{\jmath} \in E\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) \leftrightarrow \bar{\imath} + \bar{\jmath} \in \mathbb{Z}_p - \{\bar{0}\}$

$\leftrightarrow \bar{\imath} + \bar{\jmath} \neq \bar{0}$

$\leftrightarrow \ \bar{\jmath} \neq -\bar{\imath}.$

Terbukti $\bar{\imath}\,\bar{\jmath} \in E\left(G(\mathbb{Z}_p)\right)$ jika dan hanya jika $\bar{\jmath} \neq -\bar{\imath}$.

Lemma 3.3

Misalkan p bilangan prima maka derajat titik $\bar{0}$ di $G(\mathbb{Z}_p)$ adalah deg $(\bar{0}) = p - 1$.

Bukti

Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p$ dan $\bar{x} \neq \bar{0}$ maka $\bar{x} \in U(\mathbb{Z}_p)$ sehingga berlaku

$\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} \in U(\mathbb{Z}_p)$.

Artinya $\bar{0}$ terhubung langsung dengan $\bar{x}$ jika dan hanya jika $\bar{x} \in U(\mathbb{Z}_p)$. Diperoleh

$$\deg(\bar{0}) = |U(\mathbb{Z}_p)| = |\mathbb{Z}_p - \{\bar{0}\}| = p - 1$$

Terbukti bahwa deg $(\bar{0}) = (p - 1)$.

Lemma 3.4

Misalkan p bilangan prima dan $p \geq 3$ maka derajat titik $\bar{x} \in V\left(G(\mathbb{Z}_p)\right)$,

$\bar{x} \neq \bar{0}$ adalah deg $(\bar{x}) = p - 2$.

Bukti

Misalkan $\bar{y} \in V(G(\mathbb{Z}_p))$ dan $\bar{y} \neq \bar{x}$ maka $\bar{x}\bar{y} \in E(G(\mathbb{Z}_p))$ jika dan hanya jika

$\bar{y} \neq -\bar{x}$.

karena $p \geq 3$ maka $\bar{x} \neq -\bar{x}$, sehingga diperoleh

deg $(\bar{x}) = |\{\bar{y}\} \in \mathbb{Z}_p | \bar{y} \neq \bar{x}, \bar{y} \neq -\bar{x}\}| = p - 2$.

Terbukti bahwa $\deg(\bar{x}) = p - 2$.

3.1 *Randic Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan Prima.

Subbab ini membahas tentang *Randic index* yang akan di interpretasikan pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima, sehingga diperoleh teorema *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima sebagai berikut :

Teorema 3.1.1

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima adalah

$$R\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left(\frac{p-1}{(\sqrt{(p-1)(p-2)})}\right) + \left(\frac{(\frac{(p-3)}{2})(p-1)}{(p-2)}\right)$$

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4 maka $\deg(\bar{0}) = p-1$ dan untuk derajat titik selain $\bar{0}$ adalah $p-2$. Dari pernyataan tersebut diketahui bahwa jumlah dua titik $\bar{0}\bar{v} \in E\big(G(\mathbb{Z}_p)\big)$ sebanyak $p-1$ dan jumlah dua titik $\bar{u}\bar{v} \in E\big(G(\mathbb{Z}_p)\big)$, $\bar{u} \neq \bar{0}$ sebanyak $\left(\left(\frac{(p-3)}{2}\right)(p-1)\right)$ dimana $\bar{u}\bar{v} \in E\big(G(\mathbb{Z}_p)\big)$, $\bar{u} \neq \bar{0}$ terhubung ke semua titik di $G(\mathbb{Z}_p)$ kecuali $\bar{u} + \bar{v} = \bar{0}$ dan $\bar{u} = \bar{v}$ maka $p-2$, setelah itu dikurangi dengan $\bar{0}\bar{v} \in E\big(G(\mathbb{Z}_p)\big)$ jadi $p-2-1 = p-3$, dan dibagi dengan 2 karena bersifat komutatif maka untuk sisi yang sama ditulis 1 kali, contohnya $\bar{0}, \bar{2}$ dan $\bar{2}, \bar{0}$ ditulis $\bar{0}, \bar{2}$ dan dikali $p-1$ karena jumlah titik selain $\bar{0}$ sebanyak $p-1$, jadi berlaku *Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima adalah

$$R(G(\mathbb{Z}_p)) = \sum_{uv\in E(G(\mathbb{Z}_p))} \frac{1}{\sqrt{deg(u)deg(v).}}$$

$$= \sum_{\bar{0}\bar{v}\in E(G(\mathbb{Z}_p))} \frac{1}{\sqrt{deg(\bar{0})deg(\bar{v})}} + \sum_{\bar{u}\bar{v}\in E(G(\mathbb{Z}_p)),\bar{u}\neq 0} \frac{1}{\sqrt{deg(\bar{u})deg(\bar{v})}}$$

$$= (p-1)\frac{1}{\sqrt{(p-1)(p-2)}} + \frac{(p-3)}{2}(p-1)\frac{1}{\sqrt{(p-2)(p-2)}}$$

$$= \left(\frac{p-1}{(\sqrt{(p-1)(p-2)})}\right) + \left(\frac{(\frac{(p-3)}{2})(p-1)}{(p-2)}\right).$$

3.2 *Reciprocal Randic Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan prima.

Subbab ini membahas tentang *reciprocal Randic index* yang akan di interpretasikan pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima, sehingga diperoleh teorema *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima sebagai berikut :

Teorema 3.2.1

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. *Reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima adalah

$$RR(G(\mathbb{Z}_p)) = \left((p-1)(\sqrt{(p-1)(p-2)})\right) + \left(\left(\frac{(p-3)}{2}(p-1)\right)(p-2)\right).$$

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4 maka $\deg(\bar{0}) = p-1$ dan untuk derajat titik selain $\bar{0}$ adalah $p-2$. Dari pernyataan tersebut diketahui bahwa jumlah dua titik $\bar{0}\bar{v} \in E(G(\mathbb{Z}_p))$ sebanyak $p-1$ dan jumlah dua titik $\bar{u}\bar{v} \in E(G(\mathbb{Z}_p))$, $\bar{u} \neq \bar{0}$ sebanyak $\left(\left(\frac{(p-3)}{2}\right)(p-1)\right)$ dimana $\bar{u}\bar{v} \in E(G(\mathbb{Z}_p))$, $\bar{u} \neq \bar{0}$ terhubung ke semua titik di $G(\mathbb{Z}_p)$ kecuali $\bar{u}+\bar{v}=\bar{0}$ dan $\bar{u}=\bar{v}$ maka $p-2$, setelah itu dikurangi dengan $\bar{0}\bar{v}\in E(G(\mathbb{Z}_p))$ jadi $p-2-1=p-3$, dan dibagi dengan 2 karena bersifat komutatif maka untuk sisi yang sama ditulis 1 kali, contohnya $\bar{0}$, $\bar{2}$ dan $\bar{2}, \bar{0}$ ditulis $\bar{0}$, $\bar{2}$ dan dikali $p-1$ karena jumlah titik selain $\bar{0}$ sebanyak $p-1$, jadi berlaku *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima adalah

$$RR\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \sum_{uv\in E\left(G(\mathbb{Z}_p)\right)} \sqrt{\deg(u)\deg(v)}.$$

$$= \sum_{\bar{0}\bar{v}\in E\left(G(\mathbb{Z}_p)\right)} \sqrt{\deg(\bar{0})\deg(\bar{v})} + \sum_{\bar{u}\bar{v}\in E\left(G(\mathbb{Z}_p)\right),\bar{u}\neq 0} \sqrt{\deg(\bar{u})\deg(\bar{v})}$$

$$= \left((p-1)\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)\right) + \left(\left(\tfrac{(p-3)}{2}(p-1)\right)\left(\sqrt{(p-2)(p-2)}\right)\right)$$

$$= \left((p-1)\left(\sqrt{(p-1)(p-2)}\right)\right) + \left(\left(\tfrac{(p-3)}{2}(p-1)\right)(p-2)\right).$$

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan beberapa teorema *Randic index* dan *reciprocal Randic index* pada graf unit dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah sebagai berikut :

1. *Randic index* dari $G(\mathbb{Z}_p)$ adalah

$$R\big(G(\mathbb{Z}_p)\big) = \left(\frac{p-1}{(\sqrt{(p-1)(p-2)})}\right) + \left(\frac{(\frac{(p-3)}{2})(p-1}{(p-2)}\right).$$

2. *Reciprocal Randic index* dari $G(\mathbb{Z}_p)$ adalah

$$RR\left(G(\mathbb{Z}_p)\right) = \left((p-1)(\sqrt{(p-1)(p-2)})\right) + \left(\left(\frac{(p-3)}{2}(p-1)\right)(p-2)\right).$$

4.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mencari pola umum dari *Randic index* dan *reciprocal Randic index* pada graf lain dari grup lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdurrahman, Saman. 2019. *Seri Buku Ajar Bidang Aljabar Pengantar Teori Grup.* Sidoarjo: Zifatama Jawara.

Abdussakir, Azizah, N.N. & Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN Malang Press.

Buchmann. Johannes A. 2004. *Introduction To Cryptography*, Second Edition. Spinger, New York.

Chartrand, G., Lesniak, L. dan Zhang, P. 2016. *Graph and Digraph 6th Edition*. New York: CRC Press.

Dewi, Novi Rustiana. 2011. *Analisis Struktur Daerah Integral dari Himpunan Polinomial Berdasarkan Struktur Polinomial Gelanggang*. Jurnal Penelitian Sains. Vol. 14, No.4(A).

Dummit, D. S dan Foote, R. M. 1991. *AbstractAlgebra*. NewYork: Prentice-Hall International,Inc.

Faqih, Allamah kamal dan tim ulama. 2006. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Penerbit al-huda.

Farrukh,Fatima,dkk. 2016. *Calculating Some Topological Indices of SiO2 Layer Structure*. Journal of Informatics and Mathematical Sciences. Vol.8, No.3.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2015. *Element of Modern Algebra 8th Edition*. Boston. Louisiana.

Hidayat, Noor. 2017. *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar*. Malang: Universitas Brawijaya Press (UB Press).

Irawan, Wahyu hengky, dkk. 2014. Pengantar Teori Bilangan. Malang: UIN Maliki Press.

Jamil, Muhammad K,dkk.2017. *Four Vertex Degree Based Topological Indices of $VC_5C_7[p;q]$ Nanotubes*. Communications in Mathematics and Applications. Vol.9, No.1.

Mas'oed, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Palembang: Akademi Permata.

Menezes, A., Oorschot, P. C., & Vanstone, S. A. . 1996. *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press.

Rosen, Kenneth .H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition*. New York: Mc-Graw-Hill Companies, Inc.

S.Akbari,dkk. 2015. *On the Unit Graph of a Non-commutative Ring*. Algebra Colloquium 22 (spac.1) 817 – 822

Shihab, M. Quraish. 2009. *Tafsir al- Mishbah*. Jakarta: Lentera hati.

RIWAYAT HIDUP

Zauharotul Maknun, lahir di Kabupaten Pasuruan pada tanggal 20 Mei 1998, dan biasa dipanggil Zahro, tinggal di dusun Tempuran RT/RW 03/06, desa Trewung, Kec. Grati, Kab. Pasuruan. Anak sulung dari 4 bersaudara dari Abdul Kodir dan Ulfiati Nikmah, serta merupakan kakak dari Rosidatul Faqiyah, Zidan Ahmad Qodir dan Muhammad Mahir An-Nahdly.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Kalipang 1 dan lulus pada tahun 2010, setelah itu melanjutkan ke SMPN 2 Grati dan lulus pada tahun 2013, kemudian melanjutkan ke jenjang SMA dan mondok di Darul Ulum 1 Peterongan jombang dan lulus pada tahun 2016, kemudian melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil jurusan Matematika. Selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dia menjadi anggota Mathematics English Club (MEC) dan Mathematics Arabic Club (MAC).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Zauharotul Maknun
NIM	:	16610014
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	*Randic Index* dan *Reciprocal Randix Index* pada Graf Unit dari Ring Bilangan Bulat Modulo Bilangan Prima
Pembimbing I	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II	:	Dewi Ismiarti, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	15 Januari 2020	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	23 Januari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan, Bab I, dan Bab II		2.
3	15 Februari 2020	Revisi Bab I, Bab II dan Konsultasi Bab III	3.	
4	13 Maret 2020	Revisi Kajian Keagamaan, Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III		4.
5	28 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal Pembimbing 1	5.	
6	31 Maret 2020	ACC untuk Seminar Proposal Pembimbing 2		6.
7	20 April 2020	Revisi Bab II dan Bab III	7.	
8	20 Mei 2020	Revisi Kajian Keagamaan dan Bab III		8.
9	15 Juni 2020	ACC untuk disidangkan Pembimbing 1	9.	
10	20 Juni 2020	ACC untuk disidangkan Pembimbing 2		10.

Malang, 03 Agustus 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001