EKUIVALENSI INTEGRAL *LEBESGUE* DAN INTEGRAL *DENJOY-PERRON*

SKRIPSI

OLEH
M. SYAMSU DLUCHA
NIM. 15610075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

EKUIVALENSI INTEGRAL *LEBESGUE* DAN INTEGRAL *DENJOY-PERRON*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
M. Syamsu Dlucha
NIM. 15610075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

EKUIVALENSI INTEGRAL *LEBESGUE* DAN INTEGRAL *DENJOY-PERRON*

SKRIPSI

Oleh
M. Syamsu Dlucha
NIM. 15610075

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Desember 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Elly Susanti, M.Sc	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19741129200012 2005	NIDT. 19870218201608011056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414200312 1001

EKUIVALENSI INTEGRAL *LEBESGUE* DAN INTEGRAL *DENJOY-PERRON*

SKRIPSI

Oleh
M. Syamsu Dlucha
NIM. 15610075

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 Desember 2020

Penguji Utama	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	....
Anggota Penguji	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504142003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : M. Syamsu Dlucha

NIM : 15610075

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ekuivalensi Integral *Lebesgue* dan Integral *Denjoy-Perron*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Desember 2020
Yang membuat pernyataan

M. Syamsu Dlucha
NIM. 15610075

MOTO

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi pula kamu menyukai sesuatu padahal ia amat buruk bagimu, Allah mengetahui sedang kamu tidak mengetahui"

QS. Al-Baqarah ayat 216

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahi robbil ‘alamin, dengan mengucap syukur kepada Allah SWT., Penulis mempersembahkan skripsi ini untuk kedua orang tua, Bapak H. Fatchur Rozi, dan Ibu Musyahadah yang selalu memberikan doa, dukungan dan lain sebagainya yang mungkin tidak bisa penulis balas dengan bentuk apapun, serta teman-teman seperjuangan yang selalu memberikan motivasi kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT. atas rahmat, taufiq, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari beberapa pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi dan berbagi pengalaman yang berharga bagi penulis.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Seluruh dosen Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen di Jurusan Matematika yang telah memberi banyak pengalaman dan ilmu kepada penulis.
7. Bapak dan ibu serta saudara-saudara tercinta yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 (LATTICE), teman-teman Berbaginasi Malang, teman-teman konter pulsa Barokah Cell, dan juga teruntuk Grenda Ayuning Nurani serta pahlawan yang tidak bisa saya sebutkan namanya. Terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan yang terukir rapi dan abadi, juga motivasi dari sekian banyak curhatan perjuangan skripsi ini.

Semoga Allah SWT. Melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Aamiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 24 Desember 2020

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRACT

Dlucha, M. Syamsu. 2020. **Equivalence of Lebesgue Integral and Denjoy-Perron Integral**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Equivalent, Lebesgue Integral, Denjoy Integral, Perron Integral, Integral.

Lebesgue integrals can be used to compute integrals for a wider class of functions. For example, the Dirichlet function, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{R} \,/\, \mathbb{Q} \end{cases}$. Perron integral is the development of the Lebesgue integral, so that by using the definition of the Perron integral a function that is not Lebesgue integral can be integrated with the Perron. Apart from the Perron integral, Denjoy's integral is also a development of the Lebesgue integral, it's just that Denjoy's definition is different from Perron's. However, Denjoy's integral and Perron's integral are equivalent. Both have the equivalent symbolized $(L)\int_a^b f \Leftrightarrow (D)\int_a^b f$. A function is said to be Lebesgue integrated if and only if Denjoy is integrated and has the same integral properties. Within the boundaries of the study under study include partition, upper, lower, supremum, and infimum in a continuous finite function f in $[a, b]$. The nature, namely:

a. $|S(P; f) - L| < \varepsilon$
b. $U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$
c. $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$
d. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

ABSTRAK

Dlucha, M. Syamsu. 2020. **Ekuivalensi Integral Lebesgue dan Integral Denjoy-Perron**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Ekuivalensi, Integral Lebesgue, Integral Denjoy, Integral Perron, Integral.

Integral Lebesgue dapat digunakan untuk menghitung integral untuk kelas fungsi yang lebih luas. Misalnya fungsi Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{R} / \mathbb{Q} \end{cases}$. Integral Perron adalah pengembangan dari integral Lebesgue, sehingga dengan menggunakan definisi integral Perron suatu fungsi yang tak terintegralkan Lebesgue dapat terintegralkan Perron. Selain integral Perron, integral Denjoy juga merupakan pengembangan dari integral Lebesgue, hanya saja pendefinisian yang dilakukan oleh Denjoy berbeda dengan Perron. Akan tetapi integral Denjoy dan integral Perron ekuivalen. Keduanya memiliki ekuivalensi yaitu $(L)\int_a^b f \Leftrightarrow (D)\int_a^b f$. Suatu fungsi dikatakan terintegralkan Lebesgue jika dan hanya jika terintegralkan Denjoy dan memiliki sifat-sifat integral yang sama. Batasan kajian yang diteliti meliputi partisi, *upper*, *lower*, *supremum*, dan *infimum* di fungsi f kontinu terbatas di $[a, b]$. Adapun sifatnya adalah:

a. $|S(P; f) - L| < \varepsilon$
b. $U(P; f) - L(P; f) < \varepsilon$
c. $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$
d. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

ملخص

الضحي، محمد شمس. ٢٠٢٠. **ما يعادل *Lebesgue Integral* و *Denjoy-Perron Integral*.**
البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) إيلي سوسانتي، ماجستير، (٢) محمد نافع الجوهري، ماجستير.

الكلمات المفتاحية : ما يعادل، *Lebesgue Integral, Denjoy Integral, Perron Integral, Integral*.

يمكن استخدام *Lebesgue Integral* لحساب التكاملات لفئة أوسع من الوظائف. المثال، *Dirichlet function*, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{R} / \mathbb{Q} \end{cases}$. *Perron Integral* هو تطوير إلى تكامل *Lebesgue Integral* لذلك باستخدام تعريف *Perron Integral* وظيفة غير متكاملة *Lebesgue Integral* يمكن أن *Perron Integral* بصرف النظر عن *Perron Integral*، يعد *Denjoy integral* أيضًا تطورًا لا يتجزأ من *Lebesgue Integral*، كل ما في الأمر أن تعريف دينجوي يختلف عن تعريف *Perron*. ومع ذلك، فإن *Denjoy Integral* و *Perron Integral* متكافئان. يقال إن الوظيفة هي *Lebesgue* متكاملة إذا $(D)\int_a^b f \Leftrightarrow (L)\int_a^b f$ كلاهما لهما معادل، وهما وفقط إذا تم دمج *Denjoy* ولها نفس الخصائص المتكاملة ضمن حدود الدراسة التي تمت دراستها، ضمن حدود الدراسة قيد الدراسة تشمل التقسيم ، العلوي ، السفلي ، الأعلى ، واللانهائي في دالة محدودة مستمرة f في $[a,b]$. الطبيعة وهي

a. $|S(P;f) - L| < \varepsilon$
b. $U(P;f) - L(P;f) < \varepsilon$
c. $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$
d. $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam mempelajari ilmu matematika banyak sekali diketahui cabang ilmu, salah satunya adalah analisis riil. Analisis sendiri merupakan proses mengurai suatu hal menjadi berbagai unsur yang terpisah untuk memahami suatu sifat, hubungan, dan peranan masing-masing unsur. Selain itu ilmu analisis riil juga mempelajari materi limit, turunan, integral, dan deret serta barisan. Analisis riil memiliki aplikasi yang luas dalam bidang sains dan teknologi.

Pada abad ke-10, matematikawan Iraq yaitu Ibn Al-Haytham (Alhazen) menjadi orang pertama yang menurunkan rumus perhitungan hasil jumlah pangkat empat dan dengan menggunakan induksi matematika. Dia mengembangkan suatu metode untuk menurunkan rumus umum dari hasil pangkat integral yang sangat penting terhadap perkembangan kalkulus integral. (Sinay & Talakua, 2012)

Sekitar tahun 1670, tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan kalkulus adalah Newton dan Leibniz. Kedua tokoh tersebut berhasil mengembangkan teorema fundamental, yaitu mengenai anti-derivatif. Kemudian A. Cauchy atau memiliki nama lengkap Augustin-Louis Cauchy pada tahun 1789-1857 mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil menemukan tentang integral dan fungsi kontinu. (Sinay & Talakua, 2012).

Pada tahun 1854, Bernhard Riemann mulai memperhalus definisi yang dikembangkan oleh Cauchy, dan Riemann melakukan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat sederhana untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut dengan integral Riemann. (Sinay & Talakua, 2012)

Pada tahun 1902, Henry Lebesgue (1875-1974) menemukan suatu pendekatan baru dalam integral, yang mana metode tersebut memberikan solusi dari kekurangan yang dimiliki oleh integral-integral sebelumnya, terutama mengatasi kekurangan pada integral Riemann. (Sinay & Talakua, 2012) Seperti pada kasus fungsi Dirichlet seperti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{R} \,/\, \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Metode integral tersebut sering diselesaikan dengan integral Lebesgue. Namun integral Lebesgue masih memiliki kekurangan, yaitu mengharuskan F fungsi kontinu mutlak (AC). Agar F' terintegralkan Lebesgue, sehingga integral Lebesgue dari suatu interval tidak secara lengkap menyelesaikan masalah rekonstruksi fungsi primitif dari turunannya. Contohnya:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & jika\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases}$$

Fungsi tersebut mempunyai turunan pada setiap titik di $[0,1]$, tetapi F tidak kontinu mutlak pada $[0,1]$. Akibatnya fungsi F' tidak terintegralkan Lebesgue pada $[0,1]$. (Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Beberapa tokoh yang melakukan penelitian tentang teori integral dan berhasil mendefinisikan teori-teori integral yang lebih konstruktif. Tokoh-tokoh tersebut adalah Arnaud Denjoy pada tahun 1912, Oscar Perron pada tahun 1914, Ralph Henstock dan Jaroslav Kurzweil pada tahun 1950-1960. Secara mendasar, metode integral yang dipaparkan oleh para tokoh-tokoh tersebut ekuivalen, namun integral Henstock (Henstock-Kurzweil) lebih unggul dibandingkan integral Denjoy-Perron. (Sinay & Talakua, 2012)

Pada penelitian kali ini, akan dibahas ekuivalensi antara integral Lebesgue dengan integral Denjoy-Perron pada persamaan fungsi kontinu terbatas dan terukur di interval $[a, b]$.

Dalam penelitian ini penulis mengambil batasan yang sederhana, di mana dijelaskan dalam QS. Al-Baqarah ayat 185 yang berbunyi:

يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ

Artinya: "Allah menginginkan bagi kalian kemudahan, dan (Allah) tidak menginginkan bagi kalian kesulitan." (QS. Al-Baqarah :185)

Berdasarkan pada ayat di atas, maka penulis ingin mengkaji lebih dalam permasalahan dengan batasan yang mudah yakni pada persamaan fungsi kontinu dan terbatas di interval $[a, b]$ dan membahasnya dengan judul "Ekuivalensi Integral Lebesgue dan Integral Denjoy-Perron".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini bagaimana bukti ekuivalensi integral Lebesgue dengan integral Denjoy-Perron?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka tujuan penelitian ini adalah untuk membuktikan ekuivalensi integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian untuk skripsi ini antara lain:

1. Manfaat bagi peneliti sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai hubungan antara integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron.
2. Manfaat bagi pemerhati matematika sebagai tambahan pengetahuan khususnya dalam bidang analisis pada ilmu matematika.

1.5 Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini penelitian hanya dibatasi pada integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron pada fungsi f kontinu terbatas di interval $[a, b]$.

1.6 Metode Penelitian

Penulis dalam menyusun skripsi ini menggunakan metode kajian pustaka untuk menunjang penelitian, yaitu deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan sistematika mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan.

Langkah-langkah dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Sebelum penulis memulai kegiatannya, penulis membuat rancangan terlebih dahulu dengan merumuskan masalah mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas lebih lanjut.

2. Mengumpulkan data dan informasi dengan cara membaca dan memahami beberapa literatur yang berkaitan dengan integral baik itu Lebesgue maupun Denjoy-Perron. Diantara buku yang digunakan penulis adalah *Real Analysis Introduction*, dan *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock* serta buku dan jurnal literatur lain untuk menunjang penulisan skripsi ini.

3. Setelah memperoleh informasi dan data-data terkait integral Lebesgue dan Denjoy-Perron, langkah selanjutnya adalah membuktikan partisi, *lower* dan *upper*, supermum dan infimum dari integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron. Setelah itu penulis menarik kesimpulan apakah integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron ekuivalen.

4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan gambaran hasil dari pembahasan atas apa yang sedang dikaji. Kesimpulan berlandaskan

pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam suatu karya ilmiah, sistematika penulisan merupakan rangkaian urutan dari beberapa uraian pendekatan dalam penelitian. Dalam kaitannya dengan penulisan skripsi ini, kami menyusun sistematika sebagai berikut.

Pada bab pertama dipaparkan latar belakang terjadinya ekuivalensi antara integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron, sehingga didapatkan rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian serta metode penelitian yang dipakai oleh penulis.

Pada bab kedua dipaparkan tentang teori yang akan dipakai untuk menunjang penelitian. Dalam bab kedua juga memaparkan integrasi antara ekuivalensi integral Denjoy dan integral Perron.

Pada bab ketiga dipaparkan hasil penelitian penulis tentang proses terjadinya ekuivalensi antara integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron.

Pada bab terakhir yaitu bab keempat dipaparkan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan oleh penulis.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Integral Riemann

Terdapat beberapa definisi yang berkaitan dengan integral Riemann.

Definisi 2.1.1 Misalkan f adalah fungsi nilai riil terbatas yang didefinisikan pada interval tertutup dan dibatasi $[a, b]$. Misalkan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ menjadi partisi dari $[a, b]$, yaitu,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\ .$$

Jumlah Darboux bawah dan atas untuk f dengan sebarang partisi P adalah,

$$L(P; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, .\, (x_i - x_{i-1})$$

dan

$$U(P; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, .\, (x_i - x_{i-1})$$

di mana untuk $1 \leq i \leq n$,

$$m_i = \inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

dan

$$M_i = \sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}\ ,$$

Kemudian didefinisikan batas bawah dan atas integral Riemann dari f pada $[a, b]$, masing-masing dengan

$$(R)\int_{\_a}^{b} f = \sup\{L(P; f)|P \text{ adalah partisi dari } [a, b]\}$$

dan

$$(R)\int_{a}^{-b} f = \inf\{U(P; f)|P \text{ adalah partisi dari } [a, b]\}\,.$$

Karena f diasumsikan terbatas pada interval $[a, b]$ memiliki panjang berhingga, batas bawah dan atas integral Riemann adalah berhingga. Integral atas selalu setidaknya sebesar integral bawah, dan jika keduanya sama dikatakan bahwa f terintegralkan Riemann pada $[a, b]$ dan nilai dari integral ini disebut sebagai integral Riemann dari f pada $[a, b]$. Ditulis sebagai,

$$(R)\int_{a}^{b} f$$

untuk sementara membedakannya dari integral Lebesgue, yang akan kita bahas di bagian selanjutnya.

2.2 Integral Lebesgue

Fungsi bernilai riil f yang didefinisikan pada $[a, b]$ disebut fungsi tangga (*step function*) jika terdapat partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari $[a, b]$ dan bilangan $c_1, \dots, c_n$, sehingga untuk $1 < i < n$,

$$\psi(x) = c_i \text{ jika } x_{i-1} < x < x_i\,.$$

Perhatikan bahwa

$$L(P;\psi) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = U(P;\psi)\,.$$

Dari ini dan definisi integral Riemann atas dan bawah, disimpulkan bahwa fungsi tangga ψ terintegralkan Riemann dan

$$(R)\int_a^b \psi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})\,.$$

Oleh karena itu, dapat dirumuskan kembali definisi integral Riemann bawah dan atas sebagai berikut:

$$(R)\int_{-a}^{b} f = \sup\left\{(R)\int_a^b \psi \,\middle|\, \psi \text{ fungsi tangga dan } \psi \leq f \text{ pada } [a,b]\right\}$$

dan

$$(R)\int_{a}^{-b} f = \inf\left\{(R)\int_a^b \psi \,\middle|\, \psi \text{ fungsi tangga dan } \psi \geq f \text{ pada } [a,b]\right\}$$

Definisi 2.2.1 (Fungsi *Dirichlet*). Misalkan f terdefinisikan pada [0,1] sebagai berikut:

$$f(x)\begin{cases}1, & x \in \mathbb{Q}\\ 0, & x \notin \mathbb{R} \,/\, \mathbb{Q}\end{cases}$$

Misalkan P adalah sebarang partisi dari [0,1]. Karena $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R} \,/\, \mathbb{Q}$ padat di R,

$$L(P;f) = 0 \text{ dan } U(P;f) = 1\,.$$

Jadi

$$(R)\int_{-0}^{1} f = 0 < 1 = (R)\int_{0}^{-1} f\ ,$$

dengan demikian f tidak terintegralkan Riemann.

Himpunan bilangan rasional dalam $[0,1]$ dapat dihitung. Misalkan $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah penghitungan bilangan rasional dalam $[0,1]$. Untuk bilangan asli n, didefinisikan f_n pada $[0,1]$ sebagai $f_n(x) = 1$, jika $x = q_k$ untuk beberapa q_k dengan $1 \leq k \leq n$, dan $f(x) = 0$ jika tidak, maka setiap f_n adalah fungsi tangga, dapat dilihat bahwa f terintegralkan Riemann. Jadi, $\{f_n\}$ adalah barisan (*sequence*) naik dari fungsi integral Riemann pada $[0,1]$,

$$|f_n| \leq 1 \text{ untuk setiap } n \text{ pada } [0,1]$$

dan

$$\{f_n\} \rightarrow f \textit{ pointwise} \text{ pada } [0,1].$$

Namun, fungsi limit f gagal terintegralkan Riemann pada $[0,1]$.

2.2.1 Integral Lebesgue pada Fungsi Terukur Terbatas terhadap Himpunan Terukur Berhingga

Fungsi *Dirichlet*, menunjukkan salah satu kekurangan utama dari integral Riemann. Barisan terbatas secara seragam dari fungsi terintegralkan Riemann pada interval yang tertutup dan terbatas dapat *converge pointwise* ke sebuah fungsi yang tidak dapat terintegralkan Riemann. Dapat dilihat bahwa integral Lebesgue dapat menutupi kekurangan ini.

Untuk selanjutnya hanya mempertimbangkan integral Lebesgue, kecuali secara eksplisit disebutkan sebaliknya, dan karenanya kita menggunakan simbol integral saja untuk menunjukkan integral Lebesgue. Teorema yang akan datang memberi tahu kita bahwa setiap fungsi terbatas yang dapat terintegralkan Riemann di interval $[a, b]$ juga dapat terintegralkan Lebesgue di interval $[a, b]$ dan kedua integralnya sama.

Ingat bahwa fungsi ψ bernilai riil terukur yang didefinisikan pada himpunan *perfect* E dikatakan fungsi sederhana jika hanya mengambil bilangan berhingga dari nilai riil. Jika ψ mengambil nilai yang berbeda $a_1, \dots, a_n$ pada E maka dengan keterukuran dari ψ, himpunan level $\psi^{-1}(a_i)$ dapat diukur dan didefinisikan ψ pada E sebagai

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i . \mathcal{X}_{E_i} \text{ pada } E \text{ dimana masing} - \text{masing } E_i = \psi^{-1}(a_i)$$

$$= \{x \in E | \psi(x) = a_i\} .$$

Hal tersebut memiliki karakteristik E_i yang saling lepas (*disjoint*) dan a_i yang jelas berbeda (*distinct*).

Definisi 2.2.2 *Untuk fungsi sederhana ψ yang didefinisikan pada suatu himpunan terukur berhingga E, didefinisikan integral ψ terhadap E sebagai*

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} a_i . m(E_i) ,$$

Lemma 2.2.3 *Misalkan $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ adalah himpunan yang saling lepas pada himpunan bagian terukur dari himpunan terukur berhingga $m(E_i)$. Untuk $1 \leq i \leq n$, misalkan a_i adalah bilangan riil.*

$$jika\ \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mathcal{X}_{E_i}\ pada\ E, maka\ \int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i.m(E_i)\,.$$

Bukti Himpunan $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ saling lepas tetapi di atas bukan seperti lemma 2.2.3 karena a_i mungkin tidak berbeda dan akan diperhitungkan kembali. Misalkan $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ adalah nilai-nilai yang berbeda yang diperoleh dari φ. Untuk $1 \le j \le m$, didefinisikan himpunan $A_j = \{x \in E | \varphi(x) = \lambda_j\}$. Menurut definisi integral secara resmi

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j.m(A_j)\,.$$

Untuk $1 \le j \le m$, misalkan himpunan E saling lepas pada himpunan terukur berhingga, dan I_j sebagai himpunan indeks i di $\{1, \dots, n\}$ untuk setiap $a_i = A_j$. Sehingga $\cup_{j=1}^{m} I_j$ adalah gabungan yang saling lepas. Selain itu, dengan penjumlahan ukuran berhingga,

$$m(A_j) = \sum_{i \in I_j} m(E_i)\,; 1 \le j \le m\,.$$

Oleh karena itu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.m(E_i) = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i \in I_j} a_i.m(E_i)\right] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\left[\sum_{i \in I_j} m(E_i)\right] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j.m(A_j)$$

$$= \int_E \varphi\,.$$

Salah satu tujuan ini adalah untuk menetapkan sifat linieritas dan monotonisitas untuk integral Lebesgue umum.

Proposisi 2.2.4 (Integrasi sifat Linier dan Monoton) *Misalkan φ dan ψ sebagai fungsi sederhana didefinisikan pada suatu himpunan terukur berhingga E. Kemudian untuk setiap α dan β,*

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi \,.$$

Kemudian.

$$jika\ \varphi \leq \psi\ pada\ E, maka\ \int_E \varphi \leq \int_E \psi \,.$$

Bukti Karena φ dan ψ hanya mengambil sejumlah nilai terbatas pada E, kita dapat memilih himpunan saling lepas yang berhingga $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ dari himpunan bagian yang terukur di E, gabungannya adalah E, sehingga φ dan ψ konstan pada setiap E_i. Untuk setiap $1 \leq i \leq n$, misalkan a_i dan b_i masing-masing nilai yang diambil oleh φ dan ψ pada E_i. Dengan lemma sebelumnya,

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i . m(E_i) \text{ dan } \int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} b_i . m(E_i) \,,$$

Oleh karena itu, fungsi sederhana $\alpha\varphi + \beta\psi$ untuk setiap α dan β di E_i. Jadi dengan lemma sebelumnya,

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) . m(E_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i . m(E_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i . m(E_i) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi \,.$$

Untuk membuktikan sifat monoton, asumsikan $\varphi \leq \psi$ pada E. Definisikan $\eta = \psi - \varphi$ pada E. Dengan sifat linier,

$$\int_E \psi - \int_E \varphi = \int_E (\psi - \varphi) = \int_E \eta \geq 0\,,$$

karena fungsi sederhana nonnegatif η memiliki integral nonnegatif.

Linearitas integrasi atas himpunan ukuran terbatas dari fungsi sederhana menunjukkan bahwa pembatasan dalam pernyataan Lemma 1 bahwa kumpulan $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ tidak perlu dipisahkan.

Fungsi tangga hanya membutuhkan sejumlah nilai dan setiap interval dapat diukur. Jadi fungsi tangga sederhana. Karena ukuran himpunan tunggal adalah nol dan ukuran interval adalah panjangnya, kami menyimpulkan dari linearitas integrasi Lebesgue untuk fungsi sederhana yang ditentukan pada himpunan ukuran terbatas bahwa integral Riemann di atas interval tertutup dan dibatasi dari fungsi tangga setuju dengan integral Lebesgue.

Misalkan f adalah fungsi bernilai riil terbatas yang didefinisikan pada himpunan ukuran terbatas E. Oleh analogi dengan integral Riemann, kita mendefinisikan *lower and upper Lebesgue integral*, masing-masing dari f pada E menjadi.

$$\sup\left\{\int_E \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ } sederhana \text{ } dan \text{ } \varphi \leq f \in E\right\}$$

dan

$$\inf\left\{\int_E \psi \,\middle|\, \psi \text{ } sederhana \text{ } dan \text{ } \psi \geq f \in E\right\}$$

Karena f diasumsikan terbatas, oleh sifat monotonisitas dari integral untuk fungsi sederhana, integral bawah dan atas adalah berhingga dan integral atas selalu paling sedikit sebesar integral bawah.

Definisi 2.2.5 *Sebuah fungsi terbatas f pada domain E terukur berhingga dikatakan sebagai terintegralkan Lebesgue terhadap E asalkan integral Lebesgue atas dan bawahnya terhadap E adalah sama. Nilai persekutuan dari integral atas dan bawah disebut integral Lebesgue, atau integral secara sederhana, dari f terhadap E dan dilambangkan dengan $\int_E f$.*

Teorema 2.2.6 *Misalkan f adalah fungsi terbatas yang didefinisikan pada interval yang tertutup pada $[a, b]$. Jika f terintegralkan Riemann atas $[a, b]$, maka terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$ dan kedua integralnya sama.*

Bukti Penegasan bahwa f adalah terintegralkan Riemann dan $I = [a, b]$,

$$\sup\left\{(R)\int_I \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ fungsi tangga } \varphi \leq f\right\}$$
$$= \inf\left\{(R)\int_I \psi \,\middle|\, \psi \text{ fungsi tangga } \psi \geq f\right\}.$$

Untuk membuktikan f terintegralkan Lebesgue kita harus menunjukkan

$$\sup\left\{\int_I \varphi \,\middle|\, \varphi \text{ sederhana dan } \varphi \leq f\right\}$$
$$= \inf\left\{\int_I \psi \,\middle|\, \psi \text{ sederhana dan } \psi \geq f\right\}.$$

Namun, setiap fungsi tangga adalah fungsi sederhana dan seperti yang telah kita amati, untuk fungsi tangga, integral Riemann dan integral Lebesgue adalah sama. Oleh karena itu persamaan pertama menyiratkan persamaan kedua dan juga persamaan integral Riemann dan Lebesgue.

Kami sekarang sepenuhnya dibenarkan dalam menggunakan simbol $\int_E f$, tanpa pendahuluan (R), untuk menunjukkan integral dari fungsi terbatas yang dapat diintegrasikan Lebesgue terhadap himpunan ukuran terbatas. Dalam kasus interval $E = [a, b]$, terkadang kita menggunakan notasi $\int_a^b f$ untuk menunjukkan $\int_{[a,b]} f$ dan terkadang berguna untuk menggunakan notasi Leibniz klasik $\int_a^b f(x)\, dx$.

Teorema 2.2.7 *Misalkan f adalah fungsi terukur yang dibatasi pada himpunan ukuran berhingga E. Kemudian f dapat diintegrasikan di atas E.*

Bukti Misalkan n adalah bilangan asli. Dengan Lemma Pendekatan Sederhana, dengan $\varepsilon = \frac{1}{n}$, ada dua fungsi sederhana φ_n dan ψ_n yang didefinisikan di E yang mana

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \in E\ ,$$

dan

$$0 \leq \psi_n - \varphi_n \leq \frac{1}{n} \in E\ .$$

Dengan monotonisitas dan linieritas integral untuk fungsi sederhana,

$$0 \leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n = \int_E [\psi_n - \varphi_n] \leq \frac{1}{n} . m(E)\ .$$

Akan tetapi

$$0 \le \inf\{\textstyle\int_E \psi \,|\psi \text{ sederhana dan } \psi \ge f\}$$

$$- \sup\{\textstyle\int_E \varphi \,|\varphi \text{ sederhana dan } \varphi \le f\} \le \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n$$

$$\le \frac{1}{n}.m(E)\,.$$

Ketidaksamaan ini berlaku untuk setiap bilangan asli n dan $m(E)$ berhingga. Oleh karena itu integral Lebesgue atas dan bawah adalah sama dan sedemikian hingga fungsi f dapat terintegralkan terhadap E.

Teorema 2.2.8 *Misalkan f dan g dibatasi fungsi terukur pada suatu himpunan terukur berhingga E. Kemudian untuk setiap α dan β,*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g\,.$$

Bahkan,

$$jika\ f \le g \in E, maka\ \int_E f \le \int_E g\,.$$

Bukti Kombinasi linier dari fungsi terikat terukur dapat diukur dan dibatasi. Jadi, dengan Teorema 4, $\alpha f + \beta g$ dapat diintegralkan terhadap E. Kita pertama-tama membuktikan linearitas untuk $\beta = 0$. Jika ψ adalah fungsi sederhana, begitu juga pada $\alpha\psi$, dan sebaliknya (jika $\alpha \ne 0$). Kami menetapkan linearitas integrasi untuk fungsi sederhana. Misalkan $\alpha > 0$. Karena integral Lebesgue sama dengan integral Lebesgue atas,

$$\int_E \alpha f = \inf_{\psi \ge \alpha f} \int_E \psi = \alpha \inf_{[\psi/\alpha] \ge f} \int_E [\psi/\alpha] = \alpha \int_E f\,.$$

Untuk $\alpha < 0$, karena integral Lebesgue sama dengan integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah,

$$\int_E \alpha f = \inf_{\varphi \geq \alpha f} \int_E \varphi = \alpha \sup_{[\varphi/\alpha] \leq f} \int_E [\varphi/\alpha] = \alpha \int_E f \, .$$

Tetap menetapkan linieritas dalam kasus $\alpha = \beta = 1$. Misalkan ψ_1 dan ψ_2 menjadi fungsi sederhana di mana $f \leq \psi_1$ dan $g \leq \psi_2$ di E. Maka $\psi_1 + \psi_2$ adalah fungsi sederhana dan $f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ di E. Sehingga, karena $\int_E (f + g)$ sama dengan integral Lebesgue atas dari $f + g$ terhadap E, dengan linearitas integrasi untuk fungsi sederhana,

$$\int_E (f + g) \leq \int_E (\psi_1 + \psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2 \, .$$

Batas bawah terbesar untuk jumlah integral di sisi kanan, karena ψ_1 dan ψ_2 bervariasi di antara fungsi sederhana yang mana $f \leq \psi_1$ dan $g \leq \psi_2$ sama dengan $\int_E f + \int_E g$. Pertidaksamaan ini memberi tahu kita bahwa $\int_E (f + g)$ adalah batas bawah untuk jumlah yang sama ini. Oleh karena itu,

$$\int_E (f + g) \leq \int_E f + \int_E g \, .$$

Itu tetap membuktikan ketidaksetaraan ini ke arah yang berlawanan. Misalkan φ_1 dan φ_2 adalah fungsi sederhana yang mana $\varphi_1 \leq f$ dan $\varphi_2 \leq g$ di E. Maka $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g$ di E dan $\varphi_1 + \varphi_2$ sederhana. Sehingga, karena $\int_E (f + g)$ sama dengan integral Lebesgue bawah dari $f + g$ terhadap E, dengan linearitas integrasi untuk fungsi sederhana,

$$\int_E (f+g) \geq \int_E (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_E \varphi_1 + \int_E \varphi_2 \,.$$

Batas atas terkecil untuk jumlah integral di sisi kanan, sebagai φ_1 dan φ_2 bervariasi di antara fungsi sederhana yang mana $\varphi_1 \leq f$ dan $\varphi_2 \leq g$, sama dengan $\int_E f + \int_E g$. Pertidaksamaan ini memberi tahu kita bahwa $\int_E (f+g)$ adalah batas atas untuk jumlah yang sama ini. Oleh karena itu,

$$\int_E (f+g) \geq \int_E f + \int_E g \,.$$

Ini melengkapi bukti linearitas integrasi.

Untuk membuktikan monotonisitas, asumsikan $f \leq g$ di E. Definisikan $h = g - f$ di E. Dengan linieritas,

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g-f) = \int_E h \,.$$

Fungsi h adalah nonnegatif dan oleh karena itu $\psi \leq h$ di E, di mana $\psi \equiv 0$ di E. Karena integral dari h sama dengan integral bawahnya, $0 = \int_E \psi \leq \int_E h$. Oleh karena itu, $\int_E f \leq \int_E g$.

2.2.2 Integral Lebesgue Umum

Untuk fungsi nilai riil yang diperluas f di E, kita telah mendefinisikan bagian positif f^+ dan bagian negatif f^- dari f, masing-masing dengan,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ dan } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \ \forall x \in E \,.$$

Kemudian f^+ dan f^- adalah fungsi nonnegatif terhadap E,

$$f = f^{+} - f^{-} \text{ pada } E$$

dan

$$|f| = f^{+} + f^{-} \text{ pada } E$$

Amati bahwa f terukur jika dan hanya jika f^{+} dan f^{-} juga terukur.

Definisi 2.2.9 *Fungsi terukur f di E dikatakan dapat terintegralkan terhadap E dengan syarat $|f|$ terintegralkan terhadap E. Jika demikian, kita tentukan integral f terhadap E,*

$$\int_E f = \int_E f^{+} - \int_E f^{-}.$$

Tentu saja, untuk fungsi nonnegatif f, karena $f = f^{+}$ dan $f^{-} \equiv 0$ di E, definisi integral ini sama dengan definisi yang baru saja dipertimbangkan. Dengan linearitas integrasi untuk fungsi terukur terbatas yang didukung berhingga, definisi integral di atas juga setuju dengan definisi integral untuk kelas fungsi ini.

2.2.3 Karakterisasi Integral Lebesgue

Lemma 2.2.10 *Misalkan $\{\varphi_n\}$ dan $\{\psi_n\}$ adalah urutan fungsi, yang masing-masing dapat terintegralkan terhadap E, sedemikian hingga $\{\varphi_n\}$ meningkat sementara $\{\psi_n\}$ menurun di E. Misalkan fungsi f di E memiliki bentuk seperti*

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \in E, \forall n.$$

Jika

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [\psi_n - \varphi_n] = 0\,,$$

maka

$$[\varphi_n] \to f \; dan, [\psi_n] \to f \; searah \; hampir \; di \; setiap \; E$$

$$dan \; f \; terintegralkan \; terhadap \; E\,,$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n = \int_E f \;\; dan \;\; \lim_{n\to\infty}\int_E \psi_n = \int_E f$$

Bukti Untuk $x \in E$, mendefiniskan

$$\varphi^*(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) \text{ dan } \psi^*(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\,.$$

Fungsinya adalah, φ^* dan ψ^* didefinisikan dengan benar karena urutan monoton dari bilangan nilai riil yang diperpanjang bertemu dengan bilangan riil yang diperluas dan keduanya dapat diukur karena masing-masing adalah batas titik dari urutan fungsi yang dapat diukur. Kami memiliki ketidaksetaraan

$$\varphi_n \leq \varphi^* \leq f \leq \psi^* \leq \psi_n \in E, \forall n$$

Dengan monotonisitas dan linieritas integral dari fungsi terukur non-negatif,

$$0 \leq \int_E (\psi^* - \varphi^*) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)\,, \forall n\,,$$

sehingga

$$0 \leq \int_E (\psi^* - \varphi^*) \leq \lim_{n\to\infty}\int_E (\psi_n - \varphi_n) = 0\,.$$

Karena $\psi^* - \varphi^*$ adalah fungsi terukur non-negatif dan $\int_E (\psi^* - \varphi^*) = 0$, kita tahu bahwa $\psi^* = \varphi^*$ hampir dimana-mana di E. Tapi, $\varphi^* \leq f \leq \psi^*$ di E. Oleh karena itu

$$[\varphi_n] \to f \; dan, [\psi_n] \to f \; searah \; a.e \; di \; E$$

Oleh karena itu f terukur. Amati bahwa karena $0 \leq f - \varphi_1 \leq \psi_1 - \varphi_1$ di E dan ψ_1 dan φ_1 dapat terintegralkan di E, kita menyimpulkan dari uji perbandingan integral bahwa f dapat diintegrasikan terhadap E. Kita menyimpulkan dari pertidaksamaan sebelumnya bahwa untuk semua n,

$$0 \leq \int_E \psi_n - \int_E f = \int_E (\psi_n - f) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)$$

dan

$$0 \leq \int_E f - \int_E \varphi_n = \int_E (f - \varphi_n) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n)$$

oleh karena itu

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n = \int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \,.$$

Teorema 2.2.11 *Misalkan f adalah fungsi yang dibatasi pada himpunan ukuran berhingga E. Maka f adalah terintegralkan Lebesgue terhadap E jika dan hanya jika terukur.*

Bukti Kami telah menunjukkan bahwa fungsi terukur yang dibatasi pada satu set ukuran terbatas adalah Integral Lebesgue. Itu tetap membuktikan sebaliknya. Misalkan f dapat terintegralkan. Dari persamaan integral

Lebesgue atas dan bawah kita menyimpulkan bahwa ada urutan fungsi sederhana $\{\varphi_n\}$ dan $\{\psi_n\}$ yang mana

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \in E, \forall n\,,$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [\psi_n - \varphi_n] = 0\,.$$

Karena maksimum dan minimum dari sepasang fungsi sederhana lagi-lagi sederhana, menggunakan monotonisitas integrasi dan dengan kemungkinan menggantikan φ_n dengan $\max\limits_{1\le i\le n} \varphi_i$ dan ψ_n dengan $\min\limits_{1\le i\le n} \psi_i$, kita dapat menganggap $\{\varphi_n\}$ meningkat dan $\{\psi_n\}$ menurun. Dengan lemma sebelumnya, $\{\varphi_n\} \to f$ mengarah ke hampir semua tempat di E. Oleh karena itu f terukur karena ini adalah batas titik hampir di semua urutan fungsi yang terukur.

2.3 Integral Perron

2.3.1 Fungsi Minor dan Fungsi Mayor

Definisi 2.3.1 Diketahui $F: [a, b] \to \mathbb{R}$. Turunan kanan atas dan turunan kanan bawah dari F diturunkan pada $x \in [a, b)$ didefinisikan sebagai:

$$D^+F(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

$$D_+F(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x < y < x + \delta \right\}$$

dan, turunan kiri atas dan turunan kiri bawah dari F diturunkan pada $x \in (a, b]$ didefinisikan sebagai:

$$D^{-}F(x) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

$$D_{-}F(x) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : x - \delta < y < x \right\}$$

Fungsi F dapat diturunkan pada $x \in (a, b)$ jika keempat turunan di atas berhingga dan bernilai sama. Turunan atas dan turunan bawah dari F diturunkan pada $x \in [a, b]$ didefinisikan oleh:

$$\overline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \sup \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}$$

$$= \max\{D^{+}F(x), D^{-}F(x)\}$$

$$\underline{D}F(x) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \inf \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}$$

$$= \min\{D_{+}F(x), D_{-}F(x)\}$$

Definisi 2.3.2 Diketahui $E \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan E adalah *perfect* jika E tutup dan setiap titik dari E adalah titik limit dari E.

Suatu *perfect portion* dari P adalah himpunan $P \cap [c, d]$ dimana $P \cap (c, d) \neq \emptyset, c, d \in P$, dan$P \cap [c, d]$ adalah *perfect set* (Gordon, 1994, hal. 70).

Definisi 2.3.3 Diketahui $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $E \subseteq [a, b]$.

$$\omega(F, [c, d]) = \sup\{|F(y) - F(x)| : c \leq x < y \leq d\}.$$

a. Variasi lemah dari F pada E dan variasi kuat dari F pada E didefinisikan sebagai;

$$V(F,E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)|\right\}$$

$$V_*(F,E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \omega(F,[c_i,d_i])\right\}$$

Dengan supermum keduanya diambil atas semua koleksi hingga $\{[c_i,d_i]: 1 \le i \le n\}$ dari interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E.

b. Fungsi F merupakan variasi terbatas dari E jika $V(F,E)$ berhingga. Fungsi F adalah variasi terbatas dalam arti sempit pada E jika $V_*(F,E)$ berhingga.

c. Fungsi F merupakan variasi terbatas secara umum pada E, jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah BV pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah variasi terbatas yang digeneralisasi dalam arti sempit pada E jika E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah BV_* pada setiap setiap himpunan tersebut.

d. Fungsi F merupakan kontinu mutlak pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon$ ketika $\{[c_i,d_i], 1 \le i \le n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$. Fungsi F adalah kontinu mutlak dalam arti sempit pada E jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n} \omega(F,[c_i,d_i]) < \varepsilon$ ketika $\{[c_i,d_i], 1 \le i \le n\}$ adalah koleksi berhingga dari interval-interval yang tidak saling tumpang tindih yang mempunyai titik ujung di E dan memenuhi $\sum_{k=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$.

e. Fungsi F merupakan kontinu mutlak secara umum pada E jika $F|_E$ (F dibatasi pada E) kontinu pada E, dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah kontinu mutlak (AC) pada setiap himpunan tersebut. Fungsi F adalah kontinu mutlak yang digeneraliasasi dalam arti sempit pada E jika $F|_E$ kontinu pada E dan E dapat ditulis sebagai gabungan terhitung dari himpunan-himpunan dimana F adalah AC_* pada setiap himpunan tersebut.

Definisi 2.3.4 Misalkan fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$.

a. Suatu fungsi $U: [a, b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi mayor dari f pada interval [a,b] jika $\underline{D}U(x) > -\infty$ dan $\underline{D}U(x) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

b. Suatu fungsi $V: [a, b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi minor dari f pada interval $[a, b]$ jika $\overline{D}V(x) < +\infty$ dan $\overline{D}V(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

2.3.2 Integral Perron Umum

Definisi 2.3.5 Suatu fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$ jika f mempunyai setidaknya satu fungsi mayor U dan fungsi minor V pada $[a, b]$ dan berlaku

$$\inf\{U_a^b : U \ fungsi\ mayor\ dari\ f\ pada\ [a, b]\}$$
$$= \sup\{V_a^b : V\ fungsi\ minor\ dari\ f\ pada\ [a, b]\}$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $f \in P[a,b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P)\int_a^b f$ dan didefinisikan $(P)\int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$ (Gordon, 1994)

Definisi 2.3.6 Suatu fungsi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan P_c pada $[a,b]$ jika f mempunyai setidaknya satu fungsi mayor kontinu U dan satu fungsi minor kontinu V pada $[a,b]$ dan berlaku

$$\inf\{U_a^b : U\ fungsi\ mayor\ kontinu\ dari\ f\ pada\ [a,b]\}$$
$$= \sup\{V_a^b : V\ fungsi\ \ minor\ kontinu\ dari\ f\ pada\ [a,b]\}$$

Suatu fungsi f yang terintegralkan P_c pada $[a,b]$ dinotasikan dengan $f \in P_c[a,b]$ dengan nilai integralnya dinotasikan $(P_c)\int_a^b f$ dan didefinisikan $(P_c)\int_a^b f = \inf\{U_a^b\} = \sup\{V_a^b\}$. (Kurtz & Swartz, 2004)

Teorema 2.3.7 *Suatu fungsi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu fungsi mayor U dan suatu fungsi minor V dari f pada $[a,b]$ sehingga $U_a^b - V_a^b < \varepsilon$.*

Bukti Misalkan f terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dan $\varepsilon > 0$. Sesuai dengan $\frac{\varepsilon}{2}$, pilih u dan v pada teorema di ruang fungsi *baire* kelas satu. Fungsi $U(x) = \int_a^x u$ dan $V(x) = \int_a^x v$ terbukti kontinu di $[a,b]$. Pada teorema di fungsi ruang *baire* kelas satu, persamaan $\underline{D}U(x) \geq u(x)$ dan $\overline{D}V(x) \leq v(x)$ terbukti untuk setiap $x \in [a,b]$, dan didefinisikan sebagai,

$$\underline{D}U(x) > -\infty, \underline{D}U(x) \geq f(x) \text{ dan } \overline{D}V(x) < +\infty, \overline{D}V(x) \leq f(x)$$

Untuk setiap $x \in [a,b]$.

Sedemikian hingga, U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor dari f di $[a,b]$. Akhirnya,

$$U_a^b - V_a^b = \int_a^b u - \int_a^b f + \int_a^b f - \int_a^b v < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Teorema 2.3.8 *Misal $f:[a,b] \to \mathbb{R}_e$ dan missal $c \in (a,b)$.*

a. *Jika f terintegralkan Perron pada $[a,b]$, maka f terintegralkan Perron pada setiap bagian interval dari $[a,b]$.*

b. *Jika f terintegralkan Perron pada setiap interval $[a,c]$ dan $[c,b]$, maka f terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dan $(P)\int_a^b f = (P)\int_a^c f + (P)\int_c^b f$.*

Bukti Misalkan U dan V merupakan fungsi mayor dan fungsi minor pada f di $[a,b]$. Jelas bahwa U dan V merupakan fungsi mayor dan fungsi minor pada f untuk setiap subinterval di $[a,b]$ juga.

Pembuktian b. misalkan $\varepsilon > 0$. Pilih salah satu fungsi mayor ${}_1U$ dan fungsi minor ${}_1V$ di f pada $[a,c]$ sedemikian hingga ${}_1U_a^c - {}_1V_a^c < \varepsilon$, dan pilih salah satu fungsi mayor ${}_2U$ dan fungsi minor ${}_2V$ pada f di $[c,b]$ sedimikian hingga ${}_2U(c) = {}_1U(c)$, ${}_2V(c) = {}_1V(c)$, dan ${}_2U_c^b - {}_2V_c^b < \varepsilon$. Sehingga

$$U(x)\begin{cases} {}_1U(x), if\ a \le x \le c; \\ {}_2U(x), if\ c \le x \le b; \end{cases} \quad \text{dan} \quad V(x)\begin{cases} {}_1V(x), if\ a \le x \le c; \\ {}_2V(x), if\ c \le x \le b. \end{cases}$$

Kemudian U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor pada f di $[a,b]$ dan

$$U_a^b - V_a^b = \left({}_2U_c^b - {}_2V_c^b\right) + \left({}_1U_a^c - {}_1V_a^c\right) < 2\varepsilon.$$

Oleh karena itu, fungsi f terintegralkan Perron di $[a,b]$ berdasarkan teorema sebelumnya. Dengan notasi yang sama, diperoleh

$$\int_a^b f < V_a^b + 2\varepsilon = {}_1V_a^c + {}_2V_c^b + 2\varepsilon \leq \int_a^c f + \int_c^b f + 4\varepsilon;$$

$$\int_a^b f > U_a^b - 2\varepsilon = {}_1U_a^c + {}_2U_c^b - 2\varepsilon \geq \int_a^c f + \int_c^b f - 4\varepsilon.$$

Oleh karena itu

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 2.3.9 *Misal $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_e$ dan missal $c \in (a,b)$.*

a. Jika f terintegralkan P_c pada $[a,b]$, maka f teritegralkan P_c pada setiap bagian interval dari $[a,b]$.

b. Jika f terintegralkan P_c pada setiap interval $[a,c]$ dan $[c,b]$, maka f terintegralkan P_c pada $[a,b]$ dan $(P_c)\int_a^b f = (P_c)\int_a^c f = (P_c)\int_c^b f$.

Teorema 2.3.10 *Jika $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a,b]$, maka f bernilai berhingga hampir di setiap interval $[a,b]$.*

Bukti Misalkan $C = \{x \in [a,b]: |f(x)| = +\infty\}$. U merupakan fungsi mayor dan V merupakan fungsi minor pada f di $[a,b]$ dan didefinisikan $W = U - V$. Fungsi W tidak mengalami penurunan di $[a,b]$ sehingga himpunan $D = \{x \in [a,b]: \underline{D}W(x) = +\infty\}$ memiliki ukuran nol. Kita akan membuktikan $C \subseteq D$.

Misalkan $c \in C$ dan $f(c) = +\infty$. Menurut sifat dari fungsi mayor dan fungsi minor, $\underline{D}U(c) = +\infty$ dan $\overline{D}V(c) = +\infty$, sedemikian hingga

$$\underline{D}W(c) \geq \underline{D}U(c) - \overline{D}V(c) = +\infty$$

Kemudian $\underline{D}U(c) = -\infty$ dan $\overline{D}V(c) = -\infty$ dan $\underline{D}W(x) = +\infty$. Sedemikian hingga $c \in D$.

Teorema 2.3.11 *Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}_e$ terintegralkan Perron pada $[a, b]$. Jika $f = g$ almost everywhere pada $[a, b]$, maka g terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $(P) \int_a^b f = (P) \int_a^b g$.*

Bukti Misalkan $E = \{x \in [a, b]: g(x) \neq f(x)\}$, kemudian didefinisikan fungsi m dan M di $[a, b]$ dengan $m(x) = 0 = M(x)$ untuk $x \notin E$, $m(x) = -\infty$, $M(x) = \infty$ untuk $x \in E$. Misalkan $\varepsilon > 0$. Karena f terintegralkan Perron di $[a, b]$, terdapat sebuah fungsi mayor ${}_1U$ pada f di $[a, b]$ sedemikian hingga $0 \leq {}_1U_a^b - \int_a^b f < \varepsilon$. Karena M terintegralkan Perron di $[a, b]$ dan memiliki nilai integral dari 0, terdapat fungsi mayor ${}_2U$ dari M di $[a, b]$ sedemikian hingga $0 \leq {}_2U_a^b < \varepsilon$. Fungsi $U = {}_1U + {}_2U$ merupakan fungsi mayor pada g di $[a, b]$ dan $0 \leq U_a^b - \int_a^b f < 2\varepsilon$. Demikian pula, terdapat fungsi minor V pada g di $[a, b]$ sedemikian hingga $-2\varepsilon \leq V_a^b - \int_a^b f < 0$. Oleh karena itu, fungsi g terintegralkan Perron pada $[a, b]$ dan $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Teorema 2.3.12 *Misalkan f terintegralkan Perron pada $[a, b]$, maka :*

a. kf *terintegralkan Perron pada* $[a,b]$ *dan* $(P)\int_a^b kf = k(P)\int_a^c f$ *untuk setiap* $k \in \mathbb{R}$.

b. $f+g$ *terintegralkan Perron pada* $[a,b]$ *dan* $(P)\int_a^b (f+g) = (P)\int_a^b f + (P)\int_a^b g$.

c. Jika $f \leq g$ *almost everywhere pada* $[a,b]$, *maka* $(P)\int_a^b f \leq (P)\int_a^b g$.

Lemma 2.3.13 Misal $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Perron pada $[a,b]$ dan missal $F(x) = (P)\int_a^x f$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika U adalah fungsi mayor dan V adalah fungsi minor dari f pada $[a,b]$, maka fungsi $U - F$ dan $F - V$ adalah tidak menurun pada $[a,b]$.

Teorema 2.3.14 *Misalkan* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Perron pada* $[a,b]$ *dan missal* $F(x) = (P)\int_a^x f$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *maka* F *fungsi kontinu pada* $[a,b]$.

Teorema 2.3.15 *Misal* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Perron pada* $[a,b]$ *dan misal* $F(x) = \int_a^x f$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *maka* F *dapat diturunkan almost everywhere pada* $[a,b]$ *dan* $F' = f$ *almost everywhere pada* $[a,b]$.

Teorema 2.3.16 *Misalkan* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan* P_c, *pada setiap subinterval* $[c,d] \subseteq (a,b)$. *Jika* $(P_c)\int_c^d f$ *konvergen ke suatu limit hingga saat* $c \to a^+$ *dan* $d \to b^-$, *maka* $f \in P_c[a,b]$ *dan* $(P_c)\int_a^b f = \lim_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} (P_c)\int_c^d f$.

Bukti Jika f terintegralkan P_c pada setiap interval $[a, c]$ untuk $c \in (a, b)$ dan jika $\int_a^c f$ menuju ke limit yang terbatas seperti $c \to b^-$, kemudian f terintegralkan P_c di $[a, b]$ dan $\int_a^b f = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f$.

Misalkan $L = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f$, $a_0 = a$, dan $\{a_k\}$ menjadi barisan keatas di (a, b) yang menuju ke b. Misalkan $\varepsilon > 0$. Untuk setiap $k \geq 0$, pilih sebuah fungsi mayor kontinu W_k pada f di $[a_k, a_{k+1}]$ sedemikian hingga

$$W_k(a_k) = 0 \text{ dan } 0 \leq W_k(x) - \int_{a_k}^{x} f < \epsilon 2^{-k}, \forall x \in [a_k, a_{k+1}] .$$

Didefinisikan sebuah fungsi $W: [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan

$$W(x) = W_k(x) + \sum_{i=0}^{k=1} W_i(a_{i+1}), \forall x \in [a_k, a_{k+1})$$

dan

$$W(b) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(a_{k+1})$$

W kontinu di $[a, b]$. Sekarang $\underline{D}W > -\infty$ dan $\underline{D}W \geq f$ di $[a, b)$, dan

$$W_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(a_{k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f + \sum_{k=0}^{\infty} \left(W_k(a_{k+1}) - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \right) < L + 2\epsilon.$$

Dengan lemma sebelumnya, terdapat fungsi mayor kontinu U pada f di $[a, b]$ sedemikian hingga $U_a^b < W_a^b + \epsilon < L + 3\varepsilon$. Dengan demikian terdapat fungsi minor kontinu V pada f di $[a,b]$ sedemikian hingga $V_a^b > L - 3\varepsilon$. Oleh karena itu, fungsi f yang teintegralkan P_c di $[a,b]$ dan $\int_a^b f = L$.

Teorema 2.3.17 *Misal E suatu himpunan tertutup dan terbatas dengan batas a dan b dan $\{(a_k,b_k)\}$ suatu barisan dari intervals contiguous ke E di dalam $[a,b]$. Misalkan $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan P_c pada E dan pada setiap interval $[a_k,b_k]$. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(\int_{a_k}^{x} f, [a_k,b_k])$ konvergen, maka $f \in P_c[a,b]$ dan*

$$\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f\,.$$

Bukti Untuk setiap k, misalkan $z_k = \omega\left(\int_{a_k}^{x} f, [a_k,b_k]\right) + 2^{-k}$. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan pilih salah satu bilangan bulat positif K sedemikian hingga $\sum_{k=K}^{\infty} z_k < \varepsilon$. Misalkan f_1 merupakan fungsi yang sama dengan f di E dan pada setiap interval $[a_k,b_k]$ untuk $1 \le k < K$ dan sama dengan 0 di tempat lain. Sehingga f_1 terintegralkan P_c di $[a,b]$, terdapat fungsi mayor kontinu Y pada $[a,b]$ sedemikian hingga

$$0 \le Y_a^b - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{K-1} \int_{a_k}^{b_k} f < \varepsilon.$$

Selanjutnya kita bentuk fungsi mayor kontinu dari $f - f_1$ di $[a,b]$.

Untuk setiap $k \ge K$, misalkan W_k merupakan fungsi mayor kontinu pada f di $[a_k,b_k]$ sedemikian hingga $W_k(a_k) = 0$ dan $0 \le W_k(x) - \int_{a_k}^{x} f < z_k$ untuk setiap $x \in [a_k,b_k]$. Sehingga

$$\int_{a_k}^{x} f \leq W_k(x) < \int_{a_k}^{x} f + z_k$$

Untuk setiap $x \in [a_k, b_k]$, kita dapatkan $\omega(W_k, [a_k, b_k]) \leq 2z_k$. Didefinisikan suatu fungsi G di $[a, b]$ yaitu

$$G(x) = W_k(x) + \omega(W_k, [a_k, x]) + \omega(W_k, [a_k, b_k]) - \omega(W_k, [x, b_k])$$

Untuk $x \in (a_k, b_k)$ dengan $k \geq K$ dan $G(x) = 0$ di tempat lain. Dengan menggabungkan syarat di definisi pada fungsi G tersebut, kita melihat bahwa G tidak negatif di $[a, b]$. Fungsi G kontinu pada setiap $[a_k, b_k)$ dan

$$\omega(G, [a_k, b_k]) \leq 3\omega(W_k, [a_k, b_k]) \leq 6z_k.$$

Perhatikan juga bahwa $G(b_k -) = 0$ untuk $1 \leq k < K$ menunjukan $\lim_{x \to b_k^-} G(x)$ dan untuk $k \geq K$

$$0 \leq G(b_k -) = W_k(b_k) + 2\omega(W_k, [a_k, b_k]) \leq 6z_k$$

Untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$Z(x) = G(x) + \sum_{b_k \leq x} G(b_k -)$$

Karena Z konstan pada setiap interval (a_k, b_k) untuk $1 \leq k < K$, kita temukan bahwa $\underline{D}Z = 0 = f - f_1$ pada setiap interval tersebut. Fungsi $Z - G$ konstan pada setiap interval (a_k, b_k) untuk $k \geq K$ dan fungsi

$$\omega(W_k, [a_k, x]) - \omega(W_k, [x, b_k])$$

Tidak mengalami penurunan pada (a_k, b_k), sehingga $\underline{D}Z = \underline{D}G \geq \underline{D}W_k$ pada setiap interval tersebut. Sehingga $\underline{D}Z > -\infty$ dan $\underline{D}Z \geq f - f_1$ di

(a_k, b_k) untuk $k \geq K$. Sekarang misalkan $x \in E$ dan mengandaikan $s \leq x \leq t$. Jika $s \notin E$, kemudia $s \in (a_i, b_i)$ untuk beberapa i dan

$$Z(t) - Z(s) = G(t) - G(s) + \sum_{s<b_k\leq t} G(b_k -)$$
$$\geq G(t) + \big(G(b_i -) - G(s)\big)$$
$$\geq 0 + W_i(b_i) - W_i(s) + \omega(W_i, [s, b_i])$$
$$\geq 0.$$

Jika $s \in E$, maka $Z(t) - Z(s) \geq 0$. Sehingga $\underline{D}Z \geq 0 = f - f_1$ pada himpunan E. Oleh karena itu, fungsi Z merupakan fungsi mayor kontinu pada $f - f_1$ di $[a, b]$. Sehingga $G(b_k -) = 0$ untuk $k < K$ dan $W_k(b_k) \leq G(b_k -) \leq 6z_k$ untuk $k \geq K$ χ,

$$0 \leq \sum_{k=K}^{\infty} \left(W_k(b_k) - \int_{a_k}^{b_k} f \right)$$
$$\leq \sum_{k=K}^{\infty} G(b_k -) - \sum_{k=K}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f = Z_a^b - \sum_{k=K}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$$
$$\leq \sum_{k=K}^{\infty} 6z_k + \sum_{k=K}^{\infty} z_k < 7\varepsilon.$$

Fungsi $U = Y + Z$ merupakan fungsi mayor kontinu pada f di $[a, b]$ dan

$$0 \leq U_a^b - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$$
$$= Y_a^b - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{K-1} \int_{a_k}^{b_k} f + Z_a^b - \sum_{k=K}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$$
$$< \epsilon + 7\epsilon = 8\varepsilon$$

Demikian pula, terdapat fungsi minor kontinu V pada f di $[a,b]$ sedemikian hingga

$$0 \geq V(b) - V(a) - \int_a^b f\chi_E - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f > -8\varepsilon$$

Oleh karena itu, fungsi f terintegralkan P_c di $[a,b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b f\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$.

2.4 Integral Denjoy

Definisi 2.4.1 Suatu fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat fungsi kontinu mutlak umum diperkuat (ACG_*) $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga $F' = f$ ada pada $[a,b]$. Fungsi f terintegralkan Denjoy pada himpunan yang terukur $E \subseteq [a,b]$ jika $f\chi_E$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$.

Teorema 2.4.2 *Diberikan $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ menjadi fungsi kontinu. Jika F terdiferensiasi hampir di setiap interval $[a,b]$, kemudian F' terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ dan $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.*

Bukti Integral memiliki sifat yang medefisinikan fungsi turunannya. Dalam penjumlahan, setiap integral yang memenuhi teorema di atas pasti termasuk dalam sifat integral Lebesgue. Oleh karena itu, setiap fungsi integral Lebesgue pasti akan terintegralkan di setiap integral yang memiliki ciri teorema di atas karena memiliki kesamaan sifat integral.

Teorema 2.4.3 *Diberikan $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in (a,b)$.*

a. *Jika* f *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$, *kemudian* f *terintegralkan Denjoy untuk setiap interval bagian pada* $[a, b]$.

b. *Jika* f *terintegralkan Denjoy untuk setiap interval bagian* $[a, c]$ *dan* $[c, b]$, *kemudian* f *terintegralkan Denjoy pada [a,b] dan* $\int_a^c f + \int_c^b f$.

Teorema 2.4.4 *Diketahui* f *dan* g *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$. *Sehingga*

a. kf *terintegralkan Denjoy pada* $[a. b]$ *dan* $\int_a^b kf = k \int_a^b f$ *untuk setiap* $k \in R$;

b. $f + g$ *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$ *dan* $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

c. *Jika* $f \leq g$ *hampir di mana-mana pada* $[a, b]$, *kemudian* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; *dan*

d. *Jika* $f = g$ *hampir di mana-mana pada* $[a, b]$, *kemudian* $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Teorema 2.4.5 *Diketahui* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$. *Jika* $f = g$ *terdapat pada hampir di setiap interval* $[a, b]$, *kemudian* g *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$ *dan* $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Teorema 2.4.6 *Diketahui* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$ *dan diberikan* $F(x) = \int_a^x f$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$. *Sehingga*

a. *Fungsi* F *kontinu pada* $[a, b]$;

b. *Fungsi* F *terintegralkan pada hampir di setiap* $[a, b]$ *dan* $F' = f$ *terdapat pada hampir di setiap* $[a, b]$; *dan*

c. *Fungsi F terukur pada $[a, b]$.*

Teorema 2.4.7 *Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a, b]$*

a. *Jika f terbatas pada $[a, b]$, kemudian f terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$.*

b. *Jika f nonnegatif pada $[a, b]$, kemudian f terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$.*

c. *Jika f terintegralkan Denjoy pada setiap himpunan bagian yang terukur dari $[a, b]$, kemudian f terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$.*

Bukti Diberikan f terbatas pada $[a, b]$, kemudian f terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$ sehingga terbatas dan terukur. Jika f merupakan nonnegatif pada $[a, b]$, kemudian fungsi $F(x) = \int_a^x f$ tidak mengalami pengurangan pada $[a, b]$ dengan teorema 6.25 yang dijelaskan di buku Gordon 1994. Karena F tidak mengalami pengurangan, turunannya adalah terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$. Dikarenakan $F' = f$ hampir di setiap interval $[a, b]$, fungsi f terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$. Pembuktian ini bagian a dan b.

Diberikan f terintegralkan Denjoy pada himpunan $\{x \in [a, b]: f(x) \geq 0\}$, kemudian f^+ terintegralkan Denjoy dan oleh karena itu terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$. Demikian pula, f^- terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$ sehingga f terintegralkan Denjoy pada himpunan $\{x \in [a, b]: f(x) \leq 0\}$. Oleh karena itu, $f = f^+ - f^-$ terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$ sehingga f terintegralkan Denjoy pada setiap himpunan terukur dari $[a, b]$.

Teorema 2.4.8 *Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a, b]$. Jika E merupakan himpunan sempurna pada $[a, b]$, kemudian terdapat perfect portion $E \cap [c, d]$ dari E sedemikian hingga f terintegralkan Lebesgue pada $E \cap [c, d]$. Selanjutnya, barisan $\sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\int_{c_k}^{x} f, [c_k, d_k]\right)$ konvergen di mana $[c, d] - E = \cup_{k=1}^{\infty}(c_k, d_k)$.*

Bukti Diberikan fungsi $F(x) = \int_a^x f$ merupakan kontinu mutlak umum diperkuat pada $[a, b]$ dan $F' = f$ hampir di mana-mana pada $[a, b]$. Menurut teorema 6.10 pada buku Gordon 1994, terdapat bagian sempurna $E \cap [c, d]$ dari E sedemikian hingga F merupakan kontinu mutlak diperkuat (AC_*) pada $E \cap [c, d]$. Diketahui $G: [c, d] \to \mathbb{R}$ menjadi *linear extension* dari F ke $[c, d]$. Sehingga G merupakan kontinu mutlak (AC) pada $[c, d]$ menurut teorema 6.2 e pada buku Gordon 1994, fungsi G' ada hampir di mana-mana dan terintegralkan Lebesgue pada $[c, d]$. Sehingga $G' = F' = f$ juga hampir di mana-mana pada $E \cap [c, d]$, fungsi f terintegralkan Lebesgue pada $E \cap [c, d]$. Sehingga F merupakan variasi terbatas diperkuat (BV_*) pada $E \cap [c, d]$, barisan dari osilasi F pada interval yang berbatasan dengan E di konvergen $[c, d]$. Oleh karena itu, barisan $\sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\int_{c_k}^{x} f, [c_k, d_k]\right)$ konvergen.

Lemma 2.4.9 Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ menjadi fungsi yang terukur dan diketahui A dan B

Menjadi himpunan bagian yang terukur pada $[a,b]$ dengan $A \subseteq B$. Misalkan f terintegralkan Lebesgue di B. Jika L merupakan bilangan di antara $\int_A f$, kemudian terdapat himpunan yang terukur C sedemikian hingga $A \subseteq C \subseteq B$ dan $\int_C f = L$.

Teorema 2.4.10 *Jika $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$, kemudian untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat himpunan yang terukur $E \subseteq [a,b]$ sedemikian hingga $\mu([a,b]-E) < \varepsilon$, f terintegralkan Lebesgue pada E, dan $\int_E f = \int_a^b f$.*

Bukti Kita asumsikan bahwa f tidak terintegralkan pada $[a,b]$. Untuk setiap integer positif n, didefinisikan sebagai berikut

$$A_n = \{x \in [a,b]: n-1 \leq f(x) < n\};$$

$$B_n = \{x \in [a,b]: -n \leq f(x) < -n+1\}$$

Kemudian diketahui $a_n = \int_{A_n} f$ dan $b_n = \int_{B_n} f$. Karena $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$, terdapat integer N sedemikian hingga himpunan $X = \bigcup_{n=1}^{N}(A_n \cup B_n)$ memenuhi $\mu([a,b]-X) < \varepsilon$. Karena f terbatas pada X, maka terintegralkan Lebesgue pada X. Misalkan $\int_X f < \int_a^b f$; kasus $\int_X f < \int_a^b f$ serupa. Karena f tidak terintegralkan Lebesgue pada $[a,b]$, barisan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ berbeda. Pilih sebuah index $M > N$ sedemikian hingga

$$\int_X f + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_M > \int_a^b f$$

dan diketahui $Y = X \cup A_{N+1} \cup \ldots \cup A_M$. Sekarang f terintegralkan Lebesgue pada Y dan $\int_X f < \int_a^b f < \int_Y f$. Dengan lemma yang sebelumnya, terdapat himpunan yang terukur $X \subseteq E \subseteq Y$ sedemikian hingga $\int_E f = \int_a^b f$.

Teorema 2.4.11 *Diketahui bahwa $f; [a,b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy untuk setiap interval $[c,d] \subseteq (a,b)$. Jika $\int_c^d f$ converges pada limit yang terbatas pada $c \to a^+$ dan $d \to b^-$, kemudian f terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f = \lim\limits_{\substack{c \to a^+ \\ d \to b^-}} \int_c^d f$.*

Teorema 2.4.12 *Diketahui E terbatas, himpunan tertutup dengan batas a dan b dan diketahui $\{(a_k, b_k)\}$ menjadi barisan dari interval yang berdampingan menuju E pada $[a,b]$. Misalkan bahwa $f: [a.b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada E dan untuk setiap interval $[a_k, b_k]$. Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\int_{a_k}^{x} f, [a_k, b_k]\right)$ converges, kemudian f terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ dan*

$$\int_a^b f = \int_a^b f\,\chi_E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$$

Bukti Karena integral Denjoy linear, itu sudah cukup untuk membuktikan bahwa fungsi $g = f - f\chi_E$ terintegralkan Denjoy pada $[a,b]$ dan $\int_a^b g = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$. Untuk setiap $x \in [a,b]$, diketahui $I_x = [a,x]$ dan mengartikan sebuah fungsi $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f \, \chi_{I_x}$$

Setiap unsur fungsi individual pada penjumlahan ini kontinu pada $[a, b]$ dan terbatas dengan $\omega\left(\int_{a_k}^{x} f, [a_k, b_k]\right)$. Oleh karena itu, deret converges seragam dengan *Weierstrass* M-test dan fungsi G kontinu pada $[a, b]$. Pada interval $[a_k, b_k]$, fungsi G merupakan ACG_* pada setiap interval $[a_k, \boldsymbol{b_k}]$. Untuk membuktikan bahwa G merupakan ACG_* pada $[a, b]$, itu sudah cukup untuk membuktikan bahwa G merupakan AC_* pada E. Didefinisikan fungsi h pada $[a, b]$ dengan

$$h(x) = \begin{cases} 0 & if\ x \in E \\ \int_{a_k}^{b_k} f/(b_k - a_k), & if\ x \in (a_k, b_k) \end{cases}$$

Karena

$$\int_a^b |h| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{a_k}^{b_k} f \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\int_{a_k}^{x} f, [a_k, b_k]\right) < \infty$$

Fungsi h terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$ dan fungsi $H(x) = \int_a^x h$ merupakan AC pada $[a, b]$. Karena G dan H setara pada E, fungsi G merupakan AC di E. Sehingga deret osilasi terhadap G pada interval yang ebrdampingan menuju E adalah konvergen, fungsi G merupakan AC_* pada E dengan teorema 6.4 pada buku Gordon 1994.

Karena G merupakan ACG_* pada $[a, b]$, itu dapat terdeferensiasi hampir dimanapun pada $[a, b]$. Sekarang $G' = H' = h = 0$ hampir dimanapun pada E dan $G' = f$ hampir dimanapun pada $[a, b] - E$. Oleh karena itu, $G' = g$ hampir dimanapun pada $[a, b]$. Mengikutin itu fungsi g terintegralkan Denjoy pada $[a, b]$ dan $G(x) = \int_a^x g$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Secara khusus, $\int_a^b g = G(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$.

Definisi 2.4.13 Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terukur dan diketahui $E \subseteq [a. b]$ tertutup.

a. Titik $x \in [a, b]$ disebut sebagai titik *nonsummability* dari f jika f tidak terintegralkan Lebesgue pada $[a, b] \cap I$, yang mana I adalah interval yang memuat x sebagai titik interior. Itu jelas bahwa himpunan dari semua titik tersebut adalah tertutup.

b. Titik $x \in E$ disebut sebagai titik *nonsummability* dari relatif f ke E dan oleh karena itu tertutup.

Teorema 2.4.14 *Diketahui $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ menjadi turunan dari fungsi kontinu F pada $[a, b]$, diketahui E adalah himpunan tertutup di $[a, b]$, dan diketahui $(a, b) - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Jika f terintegralkan Lebesgue pada E dan jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} |F(b_n) - F(a_n)|$ konvergen, maka*

$$F(b) - F(a) = \int_E f + \sum_{n=1}^{\infty} \big(F(b_n) - F(a_n)\big).$$

Bukti Diketahui G adalah ekstensi linear F dari E ke $[a, b]$. Fungsi G kontinu pada $[a, b]$ hampir terdiferensiasi di manapun pada $[a, b]$ dengan $G' = f$ hampir di manapun pada E (di kedua sisi titik limit pada E, lihat *Exercise 7.1*). Karena G adalah linier pada setiap (a_n, b_n),

$$\int_{a_n}^{b_n} G' = G(b_n) - G(a_n) = F(b_n) - F(a_n)$$

dan

$$\int_{a_n}^{b_n} |G'| = |F(b_n) - F(a_n)|.$$

Meliputi bahwa

$$\int_a^b |G'| = \int_E |G'| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} |G'| = \int_E |f| + \sum_{n=1}^{\infty} |F(b_n) - F(a_n)| < \infty$$

Ini menunjukkan bahwa G' adalah integral Lebesgue pada $[a, b]$. Dari Teorema 6.27 kita menemukan bahwa $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b G'$. Karena itu,

$$F(b) - F(a) = \int_E G' + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} G' = \int_E f + \sum_{n=1}^{\infty} \big(F(b_n) - F(a_n)\big)$$

Ini melengkapi buktinya.

Definisi 2.4.15 Diketahui $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ merupakan terukur, diketahui E merupakan himpunan tertutup di $[a, b]$, dan $(a, b) - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Titik pada $x \in E$ disebut titik persimpangan dari F relatif menuju E jika deretnya

$$\sum_{(a_n, b_n) \subseteq I} |F(b_n) - F(a_n)|$$

Teorema 2.4.16 *Diketahui* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *menjadi turunan pada fungsi kontinu. Jika* E *merupakan himpunan tertutup di* $[a, b]$*, kemudian terdapat bagian* $E \cap I$ *sedemikian hingga* f *terintegralkan Lebesgue pada* $E \cap I$.

Bukti Mari kita asumsikan bahwa E sempurna. Dengan teorema 5.5 pada buku Gordon 1994, f merupakan kelas *Baire* satu fungsi. Menurut teorema 5.16 pada buku Gordon 1994, terdapat $c \in E$ sedemikian hingga $f|_E$kontinu di c. Demikian, terdabat sebuah interval I sedemikian hingga $c \in I$ dan f terbatas pada $E \cap I$. Jadi f terintegralkan Lebesgue pada $E \cap I$.

Teorema 2.4.17 *Diketahui* $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ *menjadi terdeferensiasi pada* $[a, b]$*, diketahui* E *menjadi himpunan tertutup di* $[a, b]$*, dan diketahui* $(a, b) - E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$*. Kemudian terdapat bagian* $E \cap I$ *dari* E *sedemikian hingga terdapat deret*

$$\sum_{(a_n, b_n) \subseteq I} |F(b_n) - F(a_n)|$$

Bukti. Dari teorema yang akan dibuktikan diatas, kita dapat mengasumsikan bahwa E sempurna. Fungsi F merpakan ACG_* pada $[a, b]$ karena terdeferensiasi setiap point pada $[a, b]$. Menurut teorema 6.10 pada buku Gordon 1994, terdapat bagian sempurna $E \cap I$ dari E sedemikian hingga F merupakan AC_* (dan oleh karena itu BV_*) pada $E \cap I$. Kemudian

$$\sum_{(a_n, b_n) \subseteq I} |F(b_n) - F(a_n)| \leq \sum_{(a_n, b_n) \subseteq I} \omega(F, |a_n, b_n|) < \infty$$

2.5 Ekuivalensi Integral Perron dan Integral Denjoy

Definisi 2.5.1 Suatu fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada $[a, b]$ jika terdapat suatu fungsi $ACG_* \ F: [a, b] \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$ *almost everywhere* pada $[a. b]$. (Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Teorema 2.5.2 *Misalkan* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. *Jika* f *terintegralkan Perron pada* $[a, b]$, *maka* f *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$. (Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

Teorema 2.5.3 *Misalkan* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. *Jika* f *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$, *maka* f *terintegralkan Perron pada* $[a, b]$. (Nurandini, Sumiaty, & Kustiawan, 2018)

2.6 Ekuivalensi Menurut Al-Qur'an

Ekuivalensi mempunyai makna yang sama atau mempunyai nilai yang setara. Setiap objek atau benda yang diciptakan dalam satu ruang akan memiliki suatu kesamaan atau kesetaraan, dan juga tetap memiliki perbedaan. Dalam Al-Qur'an banyak menjelaskan tentang kesetaraan dan sesuatu yang berbeda, tetapi pada akhirnya bernilai sama di hadapan Allah SWT.

Dalam firman Allah SWT yang terkandung pada surat Al-Hujurat ayat 13 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ

لِتَعَارَفُوٓاْ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ

Artinya: *"Hai manusia, sesungguhnya Kami ciptakan kamu dari seorang laki-laki seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah adalah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal." (QS. Al-Hujurat : 13)*

Maksud ayat tersebut yang terdapat dalam tafsirnya Al-Mizan fi Tafsir Al-Qur'an (jilid VI, hal. 134-135) yaitu menjelaskan dari segi penciptaan makhluk yang sempurna yaitu manusia, yang mana terciptanya laki-laki dan perempuan yang menjadikannya berbangsa-bangsa dan bersuku-suku. Jika kita pandang dalam segi bentuk secara biologis akan memiliki perbedaan. Tetapi mereka semua diciptakan sama dari nabi Adam, lalu diciptakannya Siti Hawa sebagai pelengkap nabi Adam. Karena itu, tidak ada kelebihan bagi seorang individu atas individu lainnya. Karena asal-usul kejadian manusia seluruhnya adalah sama. Oleh karenanya yang membedakan di antara kita adalah ketaqwaan di hadapan Allah. (Nurcholish, 2008)

Berdasarkan ayat dan tafsir tersebut, dapat dipahami dalam penciptaan laki-laki dan perempuan yang berbeda suku, ras, dan agama sekalipun, memiliki proses perkembangan yang mengadaptasi terhadap kebutuhan dan lingkungan. Seperti dalam perkembangan integral memiliki proses perkembangan yang diharapkan dapat melengkapi kekurangan dan kebutuhan pada integral sebelumnya, akan tetapi amalan shaleh di hadapan Allah SWT menjadi pembeda tiap manusia, sehingga konsep ekuivalen yang dibahas dalam penelitian ini berkesinambungan dengan ayat di atas.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan tentang bukti ekuivalensi integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron dengan menggunakan teori yang sudah dipaparkan pada bab ii. Kemudian dipaparkan dengan pendekatan pada partisi, *lower* dan *upper*, serta supermum dan infimum pada integral Lebesgue dengan integral Denjoy-Perron.

Selain integral Lebesgue terdapat juga integral Denjoy. Integral Lebesgue ekuivalen dengan integral Denjoy. Suatu fungsi terintegralkan Lebesgue jika dan hanya jika terintegralkan Denjoy.

Teorema 3.1.1 *Diberikan fungsi* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *terintegralkan Lebesgue jika dan hanya jika* f *terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$ *sehingga* $(L) \int_a^b f \Leftrightarrow (D) \int_a^b f$.

Bukti

$(L) \int_a^b f \Rightarrow (D) \int_a^b f$

Diketahui fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika sebarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b; c_1, c_2, \dots, c_n\}$ sedemikian hingga $\{c_i \in [x_{i-1}, x_i]\}$ di interval $[a, b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\left| (P) \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil sebarang sub interval $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,3, \dots n$. Berdasarkan definisi φ_i maka diambil sebarang $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$\varphi_i \leq f(c_i) < \varphi_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

sehingga

$$\varphi_i(x_i - x_{i-1}) \le f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(\varphi_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\varphi_i(x_i - x_{i-1}) \le f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \varphi_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$L(P;\varphi) \le S(P;\varphi) < L(P;\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}$ …………………….. (1)

Demikian pula untuk sebarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,3, \dots n$. Berdasarkan definisi ψ_i maka terdapat $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$\psi_i \le f(c_i) < \psi_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

sehingga

$$\psi_i(x_i - x_{i-1}) \le f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(\psi_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\psi_i(x_i - x_{i-1}) \le f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \psi_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$U(P;\psi) - \frac{\varepsilon}{2} < S(P;\psi) \leq U(P;\psi)$ ……………………... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$U(P;\psi) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P;\varphi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P;\psi) - L(P;\varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P;\psi) - L(P;\varphi) < \varepsilon$$

Karena $L(P;\varphi)$ adalah batas bawah dan $U(P;\psi)$ adalah batas atas. Maka fungsi f juga terintegralkan Denjoy, karena syarat dengan syarat perlu jika f mempunyai setidaknya satu batas bawah dan satu batas atas $\{F(a), F(b)\}$, sehingga mempunyai bentuk

$$F(b) - F(a) < \varepsilon$$

Hasil tersebut membuktikan $L\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$.

$D\int_a^b f \Rightarrow L\int_a^b f$

Diketahui definisi integral Denjoy

$$F(b) = F(a)$$

atau

$$\omega(F, [a_i, b_i]) = F(b) - F(a) < \varepsilon$$

Berdasarkan definisi jumlah Denjoy atas dan Denjoy bawah

$$F(b) - F(a) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\,.$$

Kita misalkan $b_i = f(x_i)$ dan $a_i = f(x_{i-1})$, sehingga

$$F(b) - F(a) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i) - f(x_{i-1})\}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\{f(x_i) - f(x_{i-1})\}(b - a)}{n} < \varepsilon\,.$$

Karena

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2} = \Delta x\,,$$

maka

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i) - f(x_{i-1})\}$$

$$= \frac{b-a}{2}\{f(b) - f(a)\} < \varepsilon\,.$$

Untuk setiap bilangan $\delta > 0$ terdapat sebarang partisi P pada $[a, b]$ sehingga $\|P\| < \delta$. Sehingga berlaku

$$\left|(P)\sum_{i=0}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - L\right| < \varepsilon\,.$$

Hasil di atas merupakan definisi dari Integral Lebesgue. Jadi $(D)\int_a^b f \Rightarrow (L)\int_a^b f$

Karena bukti (1) dan (2) sudah terpenuhi, maka jelas bahwa teorema di atas terbukti $(L)\int_a^b f \Leftrightarrow (D)\int_a^b f$

Teorema 3.1.2 *Diberikan fungsi* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, *terdapat sub interval yang terbentuk dari* $c \in [a, b]$ *terintegralkan Lebesgue jika dan hanya jika* f *juga terintegralkan Denjoy pada* $[a, b]$ *sehingga* $(L) \int_a^b f \Leftrightarrow (D) \int_a^b f$.

Bukti Diketahui fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Lebesgue pada kontinu terbatas $[a, b]$, jika F turunan terbatas pada $[a, b]$, maka F' terintegralkan Lebesgue pada $[a, b]$. Sehingga

$$\int_a^c F' = F(c) - F(a)$$

dan

$$\int_c^b F' = F(b) - F(c)$$

sehingga,

$$\int_a^b F' = \int_a^c F' - \int_c^b F'$$

untuk setiap $c \in [a, b]$.

Demikian pula untuk fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegralkan Denjoy pada kontinu terbatas $[a, b]$, jika F turunan terbatas pada $[a, b]$, maka F' terintegralkan Denjoy pada $[a, b]$. Untuk setiap sub-interval dari $c \in [a, b]$, terdapat sub-interval $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka

$$\int_a^c F' = F(c) - F(a)$$

dan

$$\int_c^b F' = F(b) - F(c)$$

sehingga,

$$\int_a^b F' = \int_a^c F' - \int_c^b F'$$

Hal ini membuktikan bahwa fungsi f pada fungsi kontinu dan terbatas untuk setiap sebarang titik di $[a,b]$ yang terintegralkan Lebesgue, maka ia juga akan terintegralkan Denjoy dan bersifat sebaliknya. Sehingga $(L)\int_a^b f \Leftrightarrow (D)\int_a^b f$

BAB VI
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab iii maka diperoleh kesimpulan bahwa telah dibuktikan antara integral Lebesgue dan integral Denjoy-Perron adalah ekuivalen.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya peneliti menyarankan agar tidak hanya digunakan integral Lebesgue dengan Denjoy-Perron serta tidak hanya terbatas di interval $[a, b]$ saja. Karena banyak integral lain yang merupakan generalisasi dari integral Riemann. Selain itu pembaca juga dapat melanjutkan penelitian ini melalui pendekatan sifat-sifat dari kedua integral secara luas.

DAFTAR RUJUKAN

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to real analysis* . New York: Wiley.

Burkill, J. C. 1932. *The approximately continuous-Perron integral*. Mathematische Zeitschrift.

Gordon, R. A. 1994. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. American Mathematical Soc.

https://ahmadnurcholish.wordpress.com/2008/08/26/*prinsip-persamaan-antar manusia*-qs-al-hujarat4913/.

Nurandini, R. Y., Sumiaty, E., & Kustiawan, C. 2018. *Integral Perron Dan Ekuivalensinya Dengan Integral Denjoy*. *Jurnal Eureka Matika.*

Royden, H. L. Fitzpatrick, P. 2010. *Real analysis*. Krishna Prakashan Media.

Saks, S. 1937. *Theory of the Integral*. New York: Hafner Publishing Company.

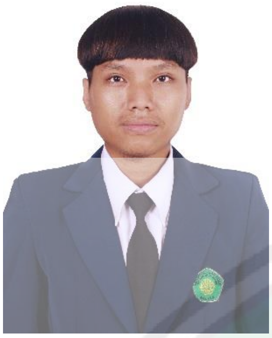
Sinay, L. J. 2012. *Sifat-sifat Dasar Integral Henstock*. Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan.

Swartz, C. W., & Kurtz, D. S. 2004. *Theories of integration*. New Jersey: World Scientific Publishing Company.

Talvila, E. 2008. *The distributional Denjoy integral*. Real Analysis Exchange.

Thobirin, H. 2015. *Analisis Real II*. Yogyakarta: Mata Padi Pressi.

RIWAYAT HIDUP



M. Syamsu Dlucha, lahir di Lamongan pada tanggal 23 Februari 1996. Biasa dipanggil Syamsu yang juga akrab dipanggil Chamem (nama panggilan di kampung halaman). Adik dari anak pertama bernama I'ana Anis Fauziyah dan anak kedua bernama Abdul Hamid, yang merupakan anak ketiga dari 3 bersaudara pasangan Bapak H. Fatchur Rozi dan Ibu Musyahadah.

Pendidikan dasar ditempuh di MI Islamiyah Lengkong Babat, Lamongan dan lulus pada tahun 2008. Setelah itu melanjutkan sekolah tingkat menengah pertama di MTs YTPAI Raudlatul Muta'allimin Tegalrejo Babat, Lamongan dan lulus tahun 2011. Pendidikan selanjutnya tingkat menengah atas di MAN Babat, Lamongan, yang kini berubah nama sesuai keputusan Departemen Agama menjadi MAN 2 Lamongan dan lulus tahun 2014. Selanjutnya sempat melanjutkan kuliah di Institut Seni Indonesia Yogyakarta program studi S1 jurusan Teater dan hanya menyelesaikan 1 semester dikarenakan ada permasalahan dalam keluarga. Setelah itu melanjutkan kerja di Bali sembari menunggu kesempatan untuk bisa melanjutkan pendidikan dan melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang program studi S1 jurusan Matematika.

Disela-sela kesibukan menjadi mahasiswa, sempat bekerja di salah satu lembaga Les Privat Malang sebagai pengajar di tingkat SMP. Sempat bekerja di salah satu penginapan Hillside Suite Guest House sebagai House Keeping (HK) dan Front Office (FO). Dan sekarang membuka usaha sendiri bernama Vaptore Malang yang melayani aneka Vape berbasis online. Mengikuti komunitas intra kampus yakni MEC (Mathematic English Club) yang ada pada jurusan Matematika. Mengikuti beberapa komunitas ekstra kampus yakni Berbaginasi Malang serta menjabat kepengurusan inti sebagai pengelolah komunitas sosial. Mengikuti komunitas motor SMSC (Semua Motor Sama Community) sebagai wadah keilmuan tentang automotif dan juga wadah kekeluargaan di Malang Raya.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : M. Syamsu Dlucha
NIM : 15610075
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
JudulSkripsi : Ekuivalensi Integral *Lebesgue* dan Integral *Denjoy-Perron*
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Agustus 2019	Pengajuan Judul	1.
2.	28 Agustus 2019	Konsultasi Jurnal Literasi	2.
3.	04 November 2019	Konsultasi Jurnal Literasi	3.
4.	06 September 2020	Konsultasi Bab I & II	4.
5.	16 September 2020	Konsultasi Bab I & II	5.
6.	06 Oktober 2020	Literasi Al-Qur'an	6.
7.	08 Oktober 2020	Konsultasi Bab III	7.
8.	15 November 2020	Konsultasi Bab III	8.
9.	16 November 2020	Konsultasi Bab III	9.
10.	23 Desember 2020	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	24 Desember 2020	Konsultasi Bab IV	11.
12.	26 Desember 2020	ACC Skripsi	12.

Malang, 27 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 196504142003121001