TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

OLEH
SARAH RIZKAYANTI
NIM. 15610020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Sarah Rizkayanti
NIM. 15610020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

Oleh
Sarah Rizkayanti
NIM. 15610020

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 25 Agustus 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Heni Widayani, M.Si	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19901006 20180201 2 229	NIP. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

TRANSFORMASI DOUBLE LAPLACE UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

Oleh
Sarah Rizkayanti
NIM. 15610020

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 13 November 2020

Penguji Utama	:	Ari Kusumastuti, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Heni Widayani, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sarah Rizkayanti

NIM : 15610020

Jurusan : Matematika

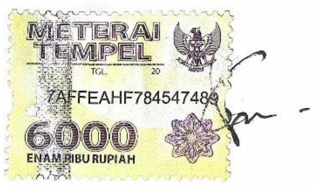
Fakultas : Sains dan Tekonologi

Judul Skripsi : Transformasi Double Laplace Untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 November 2020

Yang membuat pernyataan



Sarah Rizkayanti

NIM. 15610020

MOTO

“Obstacles are the cost of greatness”

-Robin Sharma

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Sartono, S.H dan Ibunda Asiah tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas dan istiqomah mendoakan, membesarkan dan memberi kasih sayang yang tak ternilaibagi penulis, serta adik-adik ku Sarah Rizma Amalia dan Sarah Tria Nurfaizah yang sangat aku banggakan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas berkat rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah membawa kita dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang seperti saat ini.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak membantu serta memberi arahan, nasihat, dan pengalaman berharga bagi penulis.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberi arahan dan ilmunya kepada penulis.

6. Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd, selaku dosen penguji I yang telah banyak memberi masukan dan arahan kepada penulis.
7. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen penguji II yang telah banyak memberi masukan dan arahan kepada penulis.
8. Dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik materiil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Agustus 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Rizkayanti, Sarah. 2020. **Transformasi Double Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Heni Widayani, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kuci: Transformasi Double Laplace, persamaan fisher, persamaan difusi.

Metode Transformasi Laplace merupakan salah satu metode yang sering digunakan untuk mencari solusi eksak persamaan diferensial biasa dengan syarat awal tertentu. Metode tersebut dapat dilakukan dua kali berturut-turut dengan dua variabel bebas berbeda sehingga disebut metode transformasi double Laplace. Sifat-sifat transformasi laplace juga tetap berlaku pada transformasi double laplace ini. Beberapa sifat lain yang memuat dua peubah bebas juga diberikan sebagai perumuman dari sifat-sifat transformasi laplace tunggal. Lebih lanjut, solusi eksak untuk suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan batas tertentu dapat diperoleh menggunakan metode ini . Pada penelitian ini, metode transformasi double Laplace diimplementasikan pada pencarian solusi eksak Persamaan Diferensial Parsial Linier (PDPL). Dalam hal ini, PDPL yang dibahas adalah persamaan difusi dan persamaan fisher dengan syarat awal dan syarat batas ditentukan. Pada bagian akhir, solusi analitik dari kedua PDPL tersebut dapat diperoleh dan sesuai dengan solusi eksak menggunakan metode analitik yang lain.

ABSTRACT

Rizkayanti, Sarah. 2020.**Double Laplace Transformation for Solving Partial Differential Equations.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Heni Widayani, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Double Laplace Transformation, Fisher Equation, Diffusion Equation.

The Laplace transforms method is a method that is often used to find exact solutions of ordinary differential equations with a certain initial condition. This method can be done twice in a row with two different independent variables, so it is called the Double Laplace Transforms method. The properties of the Single Laplace Transforms also apply to this Double Laplace Transforms. Other several properties containing two independent variables are also given as generalizations of the Single Laplace Transformation properties. Furthermore, an exact solution of a partial differential equation with certain initial and boundary conditions can be obtained using this method. In this study, the Double Laplace Transformation is implemented to calculated an exact solution of the Linear Partial Differential Equation (PDPL). In this research we discussed the solution of the diffusion equation and the Fisher equation as an example. Finally, the analytical solutions of that differential equations can be obtained and fit with other the exact solutions using other analytical methods.

ملخص

ريزكاينتي، ساراه. **٢٠٢٠. تحويل *Double Laplace* لحل المعادلة التفاضلية الجزئية**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف : (١) هاني ويدييانى الماجستير (٢) محمد ناف جوهر الماجستير

الكلمات الرئيسية : التحويل *Double Laplace*، معادلة الانتشار، معادلة الصيادين.

أسلوب تحويل ***Laplace*** هو واحد من الأساليب التي غالبا ما تستخدم لإيجاد حلول للمعادلات التفاضلية العادية مع شروط أولية معينة. يمكن تنفيذ الأسلوب مرتين في صف واحد مع اثنين من المتغيرات الحرة المختلفة ما يسمى أسلوب التحويل ***Double Laplace***. تظل خصائص تحويل ***Laplace*** أيضاً صحيحة في هذا التحويل المزدوج. كما يتم إعطاء العديد من السمات الأخرى التي تحتوي على اثنين من المغيرين الحرة نتيجة لخصائص التحول من ***Laplace*** واحد. وعلاوة على ذلك، يمكن الحصول على حل إفراز لمعادلة تفاضلية جزئية مع بعض الشروط والحدود الأولية باستخدام هذه الطريقة. في هذه الدراسة، تم تنفيذ أسلوب التحويل ***Double Laplace*** في البحث عن حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (PDPL). في هذه الحالة، فإن PDPL مناقشتها هي معادلة الانتشار ومعادلة الصيادين مع الشروط والأحكام الأولية للحد المحدد. في النهاية، يمكن الحصول على حلول التحليلات من كل من PDPL ووفقًا لحل ***eksak*** باستخدام أساليب تحليلية أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang tidak kalah penting dalam kehidupan sehari-hari. Oleh sebab itu, ilmu matematika perlu dikaji untuk menambah wawasan. Berbagai masalah di dunia nyata seringkali dimodelkan secara matematis. Hal ini dilakukan untuk memudahkan manusia dalam memahami permasalah yang ada disekitarnya. Allah berfirman dalam Q.S. az-Zumar ayat 27 yang artinya

"Sesungguhnya telah Kami buatkan bagi manusia dalam al-Quran ini setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran" (Q.S. az-Zumar[39]:27)

Dapat diumpamakan berbagai permasalahan dapat direpresentasikan ke dunia nyata. Dengan memodelkan suatu masalah, manusia menjadi lebih paham tentang masalah tersebut. Salah satunya dengan model matematis yakni menjadi persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Dalam penelitian ini digunakan persamaan diferensial parsial yakni persamaan difusi dan persamaan fisher.

Difusi merupakan suatu proses ilmiah yang sering kali terjadi dalam berbagai macam bidang keilmuan. Proses difusi merupakan suatu proses alami yang terjadi tanpa adanya suatu perilaku yang dipaksakan. Dalam proses difusi terjadi perpindahan zat yang berkonsentrasi tinggi menuju zat yang berkonsentrasi rendah. Proses ini akan terus terjadi hingga seluruh partikel zat terlarut menyebar dan tercampur dengan zat pelarut sehingga konsentrasi keduanya seimbang.

Secara matematis proses ini dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan difusi. Persamaan difusi menurut Laili (2014) adalah persamaan diferensial parsial linier tipe parabolik yang umumnya digunakan untuk merepresentasikan perubahan konsentrasi dari tinggi menjadi rendah seiring dengan berjalannya waktu. Sedangkan persamaan fisher merupakan salah satu contoh persamaan reaksi-difusi paling sederhana. Reaksi kimia dalam permodelannya tidak dapat secara langsung dimodelkan. Oleh karena itu, reaksi kimia membutuhkan suatu proses bantuan yakni proses difusi dalam membentuk suatu model reaksi kimia secara matematis dan realistis. Proses reaksi kimia dan difusi dapat saling berhubungan, hubungan itu disebut dengan proses reaksi difusi.

Kedua persamaan ini dapat dicari solusi analitik maupun numeriknya. Ada banyak metode yang telah dikembangkan dan dapat digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial. Allah Swt. Berfirman dalam surah az-Zumar ayat 18, yang artinya

*“Yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik diantaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi petunjuk Allah dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal”(*Q.S. az-Zumar[39]:18)

Menurut (Shihab, 2012) dalam ayat ini dijelaskan bahwa apabila dihadapkan dengan dua hal yaitu baik dan buruk, maka ia cenderung memilih mengerjakan yang baik. Lalu apabila ia menemukan hal yang lebih baik, maka ia akan memilih hal yang lebih baik itu. Kemudian apabila mereka menemukan dua hal yang benar dan lebih benar, maka ia akan mengambil jalan yang lebih benar tersebut. Itulah hakikat manusia yang diberikan akal untuk berpikir dan mampu menentukan mana yang baik dan yang buruk. Demikian pula jika diberikan suatu persoalan. Ada banyak cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Akan tetapi manusia dapat memilih cara mana yang lebih mudah untuk menyelesaikan persoalan tersebut. Hal ini dapat diimplementasikan dalam permasalahan matematika. Apabila kita menemukan suatu permasalahan matematika yang rumit, maka kita harus menentukan metode mana yang paling tepat untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

Penulis menggunakan metode Transformasi Double Laplace untuk menyelesaikan persamaan difusi dan persamaan fisher. Untuk menentukan solusi analitik dari persamaan diferensial parsial linier. Transformasi Double Laplace adalah suatu metode yang di kembangkan dari metode Transformasi Laplace. Metode ini mentransformasikan persamaan diferensial dari fungsi $f(x,t)$ menjadi $\bar{f}(p,s)$, dimana p dan s merupakan bilangan kompleks. Metode ini digunakan karena langkah-langkah dalam penyelesaikannya sederhana dan dapat menghasilkan suatu solusi analitik yang dapat diuji keakuratannya.

Sebelumnya sudah ada beberapa penelitian mengenai metode ini, salah satunya oleh Lokenath Debnath tahun 2016 dalam jurnalnya yang membahas mengenai aplikasi metode transformasi double laplace dalam fungsi, integral dan persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan penjelasan diatas, pada penelitian ini akan dikaji mengenai penerapan metode Transformasi Double Laplace dalam menentukan solusi analitik persamaan diferensial parsial, yaitu persamaan difusi dan fisher. Menggunakan metode ini penulis akan menentukan solusi analitik dari kedua persamaan yang digunakan. Dengan demikian, penelitian ini berjudul "Transformasi Double Laplace untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial"**.**

1.2 Rumusan Masalah

Sehubungan dengan uraian pada latar belakang, rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan solusi analitik persamaan difusi dengan menggunakan metode Transformasi Double Laplace.
2. Menentukan solusi analitik persamaan fisher dengan menggunakan metode Transformasi Double Laplace.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan solusi analitik dari persamaan difusi dengan menggunakan metode Transformasi Double Laplace.
2. Mendapatkan solusi analitik dari persamaan fisher dengan menggunakan metode Transformasi Double Laplace.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah yaitu:

1. Penelitian ini berfokus pada penentuan solusi persamaan difusi merujuk (F. Muhammad Zain dkk (2018: 1)) yang dinyatakan sebagai berikut

$$u_t = \mu u_{xx}\ , \mu = 1$$

$$u_t = u_{xx},$$

dengan nilai awal dan kondisi batas:

$$u(x,0) = \sin(\pi x)\,, 0 < \mathrm{x} < 1$$

$$u(0,t) = 0, t > 0$$

$$u(1,t) = 0, t > 0$$

2. Penelitian ini berfokus pada penentuan solusi persamaan fisher merujuk Ahmet Buz dan Fevziye Gulsever (2016: 2033) yang dinyatakan sebagai berikut

$$u_t = u_{xx} - u,$$

dengan nilai awal dan kondisi batas:

$$u(x,0) = \sin x \ , 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = 0, t > 0$$

$$u(1,t) = 0, t > 0$$

3. Penelitian ini hanya berfokus kepada proses penyelesaian persamaan difusi dan persamaan fisher menggunakan metode transformasi double laplace.

1.5 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Memberi pemahaman mengenai penggunaan Metode Transformasi Double Laplace untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial.
2. Menjadi referensi untuk mencari solusi analitik dari suatu persamaan diferensial parsial.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab, masing-masing dibagi kedalam subbab yakni:

Bab I Pendahuluan

Bagian ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini berisi materi-materi yang menjadi landasan teori terkait metode Transformasi Double Laplace, persamaan diferensial parsial, persamaan difusi, persamaan fisher dan integrasi konsep keseimbangan alam dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bagian ini menganalisa Metode Transformasi Double Laplace serta aplikasi metode Transformasi Double Laplace dalam menentukan solusi daripersamaan diferensial parsial, yaitu persamaan difusi dan fisher.

Bab IV Penutup

Pada bagian ini berisi kesimpulan penelitian dan saran bagi pengembangan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Difusi

Difusi adalah peristiwa berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Perbedaan konsentrasi tersebut disebut gradient konsentrasi. Difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata atau mencapai keadaan kesetimbangan dimana perpindahan molekul tetap terjadi walaupun tidak ada perbedaan konsentrasi (Laili, Afidah karimah, 2015).

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang memformulasikan proses difusi zat pada suatu pelarut. Bentuk umum persamaan difusi atau persamaan panas adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

di mana $u(x, t)$ adalah fungsi dengan x adalah jarak dan t adalah waktu. Koefisien α adalah koefisien difusi dan juga menentukan kecepatan perubahan u dalam waktu. Bentuk paling sederhana dari persamaan difusi adalah $u_t = \alpha u_{xx}$. Umumnya proses difusi terjadi sangat cepat, tetapi untuk u bergerak lambat dan semakin lambat.

Untuk menemukan solusi unik dari persamaan difusi dan untuk pengaplikasian metode numerik, dibutuhkan nilai awal dan kondisi batas. Persamaan difusi memiliki satu nilai awal $u(x, 0) = I\ (x)$, di mana I adalah fungsi yang ditentukan. Satu kondisi batas membutuhkan beberapa titik batas, di mana dalam persamaan difusi 1 dimensi nilai u harus diketahui, u_x harus diketahui, atau bentuk lain dari keduanya. Kita mulai dengan kondisi batas paling sederhana, yaitu $u = 0$. Dan nilai awal dan nilai batas dari persamaan difusi 1 dimensi dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \qquad x \in (0, L), t \in (0, T)$$

$$u(x, 0) = I(x), \qquad x \in [0, L]$$

$$u(0, t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(L, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Persamaan difusi dengan turunan pertama terhadap waktu, hanya membutuhkan satu nilai awal, sementara untuk turunan kedua terhadap jarak membutuhkan dua kondisi batas. Persamaan difusi dapat diaplikasikan kedalam berbagi macam bidang, antara lain fisika, biologi dan keuangan. Salah satu persamaan yang paling dikenal adalah perambatan panas, di mana $u(x, t)$ direpresentasikan sebagai temperature suatu zat pada titik x dan waktu t (Langtangen, 2016).

Untuk memukan penyelesaikan dari persamaan difusi dibutuhkan nilai awal dan kondisi batas. Nilai awal adalah konsentrasi di dalam tabung saat $t = 0$. Ini berarti, kita perlu mengetahui berapa konsentrasi yang berpindah pada tabung dan waktu terjadi perpindahan selanjutnya.

2.2 Persamaan Fisher

Reaksi kimia dalam permodelannya tidak dapat secara langsung dimodelkan. Hal ini disebabkan karena akan adanya ketidakcocokan dalam menggambarkan suatu masalah matematis dengan masalah yang nyata. Oleh karena itu, reaksi kimia membutuhkan suatu proses bantuan yakni proses difusi dalam membentuk suatu model reaksi kimia secara matematis dan realistis.

Difusi adalah peristiwa mengalirnya atau berpindahnya suatu zat pelarut dari bagian yang berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi lebih rendah. Difusi disebabkan oleh adanya gradien konsentrasi yaitu perbedaan konsentrasi antar kedua zat. Komponen pada zat pelarut akan bergerak kearah zat terlarut untuk menyamakan konsentrasi dan menghapus gradien. Dengan kata lain, difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata dan mencapai keadaan setimbang (Holman, 1994).

Proses reaksi kimia dan difusi dapat saling berhubungan, hubungan itu disebut dengan proses reaksi difusi. Secara matematis proses ini dapat dimodelkan dalam bentuk permodelan matematika. Permodelan yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial. Hal ini mengingat bahwa proses yang terjadi akan bergantung pada dua hal yaitu posisi x dan waktu t. Persamaan tersebut dapat disebut persamaan reaksi difusi.

Persamaan Fisher merupakan salah satu contoh persamaan reaksi-difusi paling sederhana. Persamaan ini merupakan pengembangan dari persamaan logistik yang sering digunakan pada kajian permasalahan ilmu ekologi dan epidemiologi. Bentuk umum dari persamaan logistik adalah:

$$u_t = au\left(1 - \frac{1}{K}\right), \qquad (2.6)$$

di mana $u = u(t)$ adalah fungsi terhadap waktu yang menggambarkan jumlah populasi pada setiap waktu. Notasi u_t merupakan turunan pertama u terhadap t yang menyatakan laju perubahan jumlah populasi setiap waktu. Konstanta positif a dan K menyatakan laju pertumbuhan dan kapasitas maksimum habibat (*carrying capacity)*. Nilai$K$ distabilkan sesuai dengan keterbatasan persediaan kebutuhan di habitat. Persamaan (2.6) tidak dapat mengambarkan perubahan total populasi secara spasial, sehingga Fisher (1937) mengembangkan persamaan logistik ini menjadi persamaan diferensial dari fungsi dengan variabel bebas ruang (x) dan waktu (t) (Rohde, 2013).

Bentuk umum dari persamaan fisher adalah:

$$u_t - \alpha u_{xx} = au\left(1 - \frac{u}{K}\right), \qquad (2.7)$$

di mana α merupakan koefisien difusi yang bernilai positif. Suku αu_{xx} menggambarkan perpindahan populasi dalam domain pengamatan. Misalkan didefinisikan besaran tak berdimensi x^*, t^*, u^* yakni:

$$x^* = x\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, t^* = at,\ u^* = K^{-1}u \qquad (2.8)$$

Model tak berdimensi dari Persamaan Fisher diperoleh dengan melakukan substitusi parameter non-dimensional ke dalam persamaan (2.8). Ketika tanda bintang (*) dihilangkan diperoleh persamaan non-dimensional sebagai berikut

$$u_t - u_{xx} = u(1 - u) \qquad (2.9)$$

(Debnath, 2005)

2.3 Transformasi Double Laplace

Transformasi Laplace ditemukan pertama kali oleh matematikawan Prancis Pierre Simon Laplace (1749-1827). Transformasi Laplace juga dikenal dengan Persamaan Laplace (Tang, 2011). Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dengan variable bebas t menjadi persamaan baru dengan variabel bebas s, s adalah bilangan kompleks. Variabel t seringkali menyatakan waktu yang ditransformasi menjadi variable s yang menyatakan frekuensi. Invers transformasi Laplace adalah transformasi yang mengubah variabel fungsi dengan frekuensi s menjadi variabel fungsi dengan waktu t (Effendy dan Sugiyono, 2013).

Untuk menunjukkan Transformasi Laplace, diberikan $f(x,t)$ adalah sebuah fungsi dari dua buah variabel x dan t, di mana $x,t > 0$. Maka dapat didefinisikan sebagai berikut

$$L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(p,s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} f(x,t)dxdt\ , \qquad (2.10)$$

di mana p,s adalah bilangan kompleks (Dhunde dan Waghmare, 2013).

2.3.1 Eksistensi Transformasi Double Laplace

Misalkan $f(x,t)$ adalah fungsi kontinu pada interval $[u,\infty]$ yang merupakan *exponential order*, untuk beberapa $a,b \in R$. Dan

$$Sup_{x>0,t>0} \frac{|f(x,t)|}{e^{ax+bt}} > \infty,$$

maka Transformasi Double Laplace dari $f(x,t)$ adalah:

$$L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(p,s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-px} f(x,t)dxdt\ , \qquad (2.11)$$

berlaku untuk setiap $p > a$ & $s > b$ yang terdiferensial tanpa batas terhadap $p > a$ & $s > b$. Semua fungsi dalam persamaan (2.11) diasumsikan sebagai *exponential order*.

2.3.2 Transformasi Double Laplace Pada Turunan Parsial

Transformasi Double Laplace untuk turunan parsial pertama terhadap x didefinisikan sebagai berikut

$$L_t L_x\{f(x,t)\} = p\bar{f}(p,s) - \bar{f}(0,s) \tag{2.12}$$

Sedangkan untuk Transformasi Double Laplace pada turunan parsial pertama terhadap t didefiniskan sebagai berikut

$$L_t L_x\{f(x,t)\} = s\bar{f}(p,s) - \bar{f}(p,0) \tag{2.13}$$

Transformasi Double Laplace pada turunan parsial kedua terhadap x didefinisikan sebagai berikut

$$L_t L_x\{f_{xx}(x,t)\} = p^2\bar{f}(p,s) - p\bar{f}(0,s) - \bar{f_x}(0,s) \tag{2.14}$$

Begitupun untuk Transformasi Double Laplace pada turuan parsial kedua terhadap t didefinisikan sebagai berikut

$$L_t L_x\{f_{tt}(x,t)\} = s^2\bar{f}(p,s) - s\bar{f}(0,s) - \bar{f_t}(p,0) \tag{2.15}$$

(Dhunde dan Waghmare,2013)

2.3.3 Invers Transformasi Laplace

Adapun invers dari transformasi Laplace secara umum dinyatakan dalam tabel berikut

Tabel 2.1Invers Transformasi Laplace

No	$f(t) = L^{-1}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$t^n g(t), n = 1,2,\dots$	$(-1)^n \frac{d^n G(a)}{ds^n}$
8	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
9	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)}$
10	$g(at)$	$\frac{1}{a} G\left(\frac{s}{a}\right)$
11	$e^{at} g(t)$	$G(s-a)$
12	$a^{at} t^n$, untuk $n = 1,2,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
13	te^{-t}	$\frac{1}{(s+1)^2}$

14	$1 - e^{-tT}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$

2.3.4 Sifat-sifat Dasar Transformasi Double Laplace

Adapun beberapa sifat-sifat dasar dari Transformasi Double Laplace antara lain:

Tabel 2.2 Sifat-sifat dasar Transformasi Double Laplace

(a)	$L_2[e^{-ax-by}f(x,y)] = \bar{\bar{f}}(p+a, q+b),$	(2.16)
(b)	$L_2 = [f(ax)g(by)] = \frac{1}{ab}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)\bar{g}\left(\frac{q}{p}\right),$ $a > 0, b > 0$	(2.17)
(c)	$L_2[f(x)] = \frac{1}{q}\bar{f}(p), \quad \mathcal{L}_2[f(x)] = \frac{1}{p}\bar{f}(q)$	(2.18)
(d)	$L_2[f(x+y)] = \frac{1}{p-q}\left[\bar{f}(p) - \bar{f}(q)\right]$	(2.19)
(e)	$L_2[f(x-y)] = \frac{1}{(p+q)}[\bar{f}(p) - \bar{f}(q),$ untuk f genap $= \frac{1}{(p+q)}[\bar{f}(p) + \bar{f}(q),$ untuk f ganjil	(2.20)
(f)	$L_2[f(x)\,H(x-y)] = \frac{1}{q}\left[\bar{f}(p) - \bar{f}(p+q)\right]$	(2.21)
(g)	$L_2[f(x)\,H(x-y)] = \frac{1}{q}\left[\bar{f}(p+q)\right]$	(2.22)
(h)	$L_2[f(x)\,H(x+y)] = \frac{1}{q}\left[\bar{f}(p)\right]$	(2.23)
(i)	$L_2[H(x-y)] = \frac{1}{p(p+q)}$, dengan $f(x) = 1$	(2.24)
(j)	$L_2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = p\bar{\bar{u}}(p,q) - \bar{u}_1(q),$ di mana $\bar{\bar{u}}(p,q) = L_2[u(x,y)],$ $\bar{u}_1(q) = L[u(0,y)].$	(2.25)
(k)	$L_2\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = q\bar{\bar{u}}(p,q) - \bar{u}_2(p),$	(2.26)

	di mana $\bar{u}_2(p) = L[u(x,0)]$	
(l)	$L_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = p^2\bar{\bar{u}}(p,q) - p\bar{u}_1(q) - \bar{u}_3(q)$, di mana $\bar{u}_3(p) = L_x[u(0,y)]$	(2.27)
(m)	$L_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = q^2\bar{\bar{u}}(p,q) - q\bar{u}_2(p) - \bar{u}_4(p)$, di mana $\bar{u}_4(p) = L\left[u_y(x,0)\right]$	(2.28)
(n)	$L_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] = pq\bar{\bar{u}}(p,q) - q\bar{u}_1(q) - p\bar{u}_2(p) + u(0,0)$, di mana $L[u_x(x,0)] = p\ \bar{u}_2(p) - u(0,0)$.	(2. 29)

Teorema 2.2

Jika $L_2[f(x,y)] = \bar{\bar{f}}(p,q)$ *lalu*

$$L_2[f(x-\xi, y-\eta)H\ (x-\xi, y-\eta)] = e^{-\xi p-\eta q}\bar{\bar{f}}(p,q), \tag{2.30}$$

di mana $H(x,y)$*adalah Hevaviside unit step fuction yang didefinisikan sebagai* $H(x-a, y-b) = 1$ *ketika* $x > a$ *dan* $y > b$ *dan* $H(x-a\ , y-b)$ *di mana* $x < a$ *dan* $y < b$.

Teorema 2.3

Jika $f(x,y)$ *adalah fungsi periodik dari periode* a *dan* , *(yang kemudian* $f(x+q, y+b) = f(\ x, y)$ *untuk setiap* x *dan* y*), dan jika* $L_2\{f(x,y)\}$ *ada, maka*

$$L_2\{\ f(x,y)| = [a - e^{-pa-qb}]^{-1}\int_0^a\int_0^b e^{-px-qy}\,f(x,y)dxdy \tag{2.31}$$

Hal ini membuktikan bahwa teorema dari Transformasi Double Laplace adalah fungsi periodik (Debnath, 2016).

2.4 Kajian Integrasi

Allah menciptakan manusia sebagai makhluk yang paling sempurna karena diberi keistimewaan berupa akal. Oleh sebab itu, manusia dapat mengembangkan ilmu pengetahuan dan mampu menghadapi setiap fenomena yang terjadi sehari-hari. Dengan keistimewaan ini, manusia dapat menyelesaikan permasalahan yang ada didunia. Setiap permasalahan pun memiliki berbagai cara penyelesaian yang berbeda-beda. Permasalahan dalam ilmu terapan seringkali dibentuk menjadi persamaan parsial yang terkadang sulit untuk ditemukan solusi analitiknya. Dalam islam dijelaskan bahwa manusia harus berusaha menemukan solusi dari setiap permasalahan yang dihadapi. Oleh sebab itu, untuk menyelesaikan permasalahan matematika diperlukan untuk mempelajari dan mengembangkan metode dalam mencari solusi analitiknya. Ada banyak metode untuk mendapatkan solusi dari berbagai permasalahan matematika, seperti yang dijelaskan dalam QS. Yusuf ayat 67, yang artinya

"Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain… " (QS. Yusuf[12]:67)

Dalam tafsir al-Misbah dijelaskan bahwa ayat tersebut turun pada saat Nabi Ya'kub A.s. telah memberikan izin kepada putra-putranya untuk pergi ke Kota Mesir, walaupun hati Ya'kub A.s. merasakan sesuatu yang sulit, Namun demi keselamatan mereka beliau memerintahkan putra-putranya agar tidak memasuki satu pintu secara bersama-sama melainkan melalui pintu gerbang yang berlainan agar terhindar dari bahaya yang tidak diinginkan (Jabir, 2009).

Uraian diatas dapat diartikan bahwa ada banyak cara untuk menemukan sebuah solusi sehingga dapat mengurangi kegagalan. Hal ini juga berlaku dalam menyelesaikan permasalahan matematika. Terdapat banyak metode baik metode analitik maupun numerik untuk menentukan suatu solusi dari persamaan linier maupun non-linier. Metode analitik memberikan solusi eksak dari suatu permasalahan, sedangkan solusi numerik memberikan solusi hampiran.

Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah Metode Transformasi Double Laplace. Metode tersebut akan memberikan solusi analitik untuk persamaan diferensial parsial. Seperti yang telah diketahui bahwa permasalahan matematika tidaklah mudah untuk diselesaikan tetapi setiap permasalahan yang ada tentunya terdapat sebuah cara untuk menyelesaikannya. Sebagaimana Allah telah berfirmandalam surah Al-Insyiroh ayat 5 yang artinya

"karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"(Q.S. Al-Insyroh [94]:5).

Kemudian Allah SWT mengulang kembali pada ayat selanjutnya, yang artinya

" Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"(Q.S. Al-Insyroh[94]:6*).*

Dari uraian di atas jelas bahwa tidak ada kesulitan dan kesempitan yang abadi, Allah SWT akan memberikan kemudahan dan kelapangan setelahnya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai penyelesaian secara analitik dari persamaan difusi dan persamaan fisher menggunakan Metode Transformasi Double Laplace.

3.1 Analisis Bentuk Transformasi Double Laplace untuk Persamaan Difusi

Ketika diasumsikan persamaan difusi adalah sebagai berikut

$$u_t = u_{xx}, \tag{3.1}$$

dengan kondisi awal:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \tag{3.2}$$

Dan kondisi batas:

$$u(0,t) = 0 \tag{3.3}$$

$$u(1,t) = 0. \tag{3.4}$$

(i) Transformasikan persamaan (3.2) menggunakan definisi (2.14) diperoleh

$$L_t L_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(p,s) \tag{3.5}$$

$$L_t L_x = \int_0^\infty e^{-px} \int_0^\infty sin\pi x \;\; dx\, dt$$

$$L_t L_x = \int_0^\infty e^{-px}\, sin\pi x\, dx\, dt.$$

Untuk menghitung nilai dari $L_t L_x = \int_0^\infty e^{-px}\, sin\pi x\, dx\, dt$ dapat digunakan integral parsial, yakni $\int udv = uv - \int vdu$, misalkan

$$u = \sin \pi x\,, du = \pi \cos(\pi x)$$

$$dv = e^{-px}\,, v = -\frac{1}{p} e^{-px}\,,$$

sehingga diperoleh

$$L_tL_x = \int_0^{\infty} e^{-px}\sin(\pi x)\,dx = -\frac{\sin(\pi x)e^{-px}}{p} - \int \frac{-e^{-px}\pi\cos(\pi x)}{p}. \qquad (3.6)$$

Untuk menyelesaikan persamaan $\int \frac{-e^{-px}\pi\cos(\pi x)}{p}$ dapat menggunakan integral parsial. Misalkan

$$u = \pi\cos(\pi x)\,, du = -\pi^2\sin(\pi x)$$

$$v = \frac{1}{p^2}e^{-px}, dv = -\frac{1}{p}e^{-px},$$

maka

$$\int \frac{-e^{-px}\pi\cos(\pi x)}{p} = \frac{\pi\cos(\pi x)e^{-px}}{p^2} - \int \frac{e^{-px}.(-\pi^2\sin(\pi x))}{p^2}. \qquad (3.7)$$

Substitusikan persamaan (3.7) ke dalam persamaan (3.6) diperoleh

$$-\frac{\sin(\pi x)e^{-px}}{p} - \frac{\pi\cos(\pi x)e^{-px}}{p^2} - \int \frac{e^{-px}.(-\pi^2\sin(\pi x))}{p^2}$$

$$= \frac{-e^{-px}\sin(\pi x)}{p} - \left(\frac{\pi e^{-px}\cos(\pi x)}{p^2} - \int \frac{-\pi^2\, e^{-px}\sin(\pi x)\ dx}{p^2}\right)$$

$$= \frac{-e^{-px}\sin(\pi x)}{p} - \left(\frac{\pi e^{-px}\cos(\pi x)}{p^2} + \frac{\pi^2}{p^2}\int\ e^{-px}.\sin(\pi x)\ dx\right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px} sin\pi x\, dx = \left.\frac{-pe^{-px}\sin(\pi x) - \pi e^{-px}(\pi x)}{p^2+\pi^2}\right|_0^{\infty}$$

$$L[\sin(\pi x)] = \frac{\pi}{p^2+\pi}. \qquad (3.8)$$

(ii) Transformasikan persamaan (3.1) menggunakan definisi (2.14) sehingga diperoleh

$$L_tL\{u_t\} = L_tL_x(u_{xx})$$

$$s\,\bar{u}(p,s) - \bar{u}(p,0) = p^2\bar{u}(p,s) - p\,\bar{u}(0,s) - \bar{u}_x(0,s), \qquad (3.9)$$

di mana

$$u(0,t) = 0 \text{ maka } \bar{u}(0,s) = 0, \tag{3.10}$$

dan

$$u(x,0) = \sin \pi x \text{ maka } \bar{u}(p,0) = \frac{\pi}{p^2+\pi^2}. \tag{3.11}$$

Maka diperoleh

$$s\,\bar{u}(p,s) - \frac{\pi}{p^2+\pi^2} = p^2\bar{u}(p,s) - p\,(0) - \bar{u}_x(0,s)$$

$$s\,\bar{u}(p,s) - \frac{\pi}{p^2+\pi^2} = p^2\bar{u}(p,s) - \bar{u}_x(0,s)$$

$$(p^2 - s)\bar{u}(p,s) = \bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{p^2+\pi^2}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{p^2+s}\bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(p^2+s)(p^2+\pi^2)}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{p^2+s}\bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(s+\pi^2)}\left(\frac{1}{(p^2+s)} - \frac{1}{(p^2+\pi^2)}\right)$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(p-\sqrt{s})} - \frac{1}{(p+\sqrt{s})}\bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(s+\pi^2)} + \frac{1}{p^2+\pi^2}. \tag{3.12}$$

(iii) Aplikasikan L_x^{-1} pada persamaan (3.12) diperoleh

$$\bar{u}(x,s) = \left\{e^{\sqrt{s}x} - e^{\sqrt{s}x}\right\}\bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(s+\pi^2)} + \frac{1}{(s+\pi^2)}\sin \pi x\,. \tag{3.13}$$

Misalkan $limit\ x \to 1$, maka

$$\bar{u}(1,s) = \left\{e^{\sqrt{s}} - e^{\sqrt{s}}\right\}\bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(s+\pi^2)} + \frac{1}{s+\pi^2}(\sin \pi(1))$$

$$\bar{u}(1,s) = \bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(s+\pi^2)} + 0,$$

diketahui $u(1,t) = 0, \bar{u}(1,s) = 0$, diperoleh

$$0 = \bar{u}_x(0,s) - \frac{\pi}{(s+\pi^2)}$$

$$\bar{u}_x(0,s) = \frac{\pi}{(s+\pi^2)}. \tag{3.14}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.14) ke dalam persamaan (3.13) maka diperoleh

$$\bar{u}(x,s) = \left\{e^{\sqrt{s}x} - e^{\sqrt{s}x}\right\}\frac{\pi}{(s+\pi^2)} - \frac{\pi}{(s+\pi^2)} + \frac{1}{(s+\pi^2)}\sin\pi x \tag{3.15}$$

$$\bar{u}(x,s) = 0 + \frac{1}{(s+\pi^2)}\sin\pi x. \tag{3.16}$$

Aplikasikan L_t^{-1} pada persamaan (3.16)

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin\pi x, \tag{3.17}$$

3.2 Analisis Bentuk Transformasi Double Laplace untuk Persamaan Fisher

Ketika diasumsikan persamaan fisher adalah sebagai berikut

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \tag{3.18}$$

di mana

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = \sin x, \tag{3.19}$$

dan kondisi batas

$$u(0,t) = 0 \tag{3.20}$$

$$u(1,t) = 0\,. \tag{3.21}$$

(i) Transformasikan persamaan (3.19) menggunakan definisi (2.14) diperoleh

$$L_tL_x\{f(x,t)\} = \bar{f}(p,s)$$

$$L_tL_x[sin\pi x] = \int_0^\infty e^{p-x}\sin x\,dx\,dt. \tag{3.22}$$

Untuk menghitung hasil dari persamaan (3.22) dapat menggunakan integral parsial yaitu

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Misalkan

$$u = \sin x\,, du = \cos x\; dx$$

$$dv = e^{-px}, v = \frac{1}{-p} e^{-px},$$

maka diperoleh

$$\mathcal{L}[\sin x] = \int_0^\infty e^{-pq} \sin x \;\; dx = sinx \left(\frac{e^{-px}}{-p}\right) - \int \frac{1}{-p} e^{-px} \cos x \; dx\;. \qquad (3.23)$$

Persamaan$\int \frac{1}{-p} e^{-px} \cos x \; dx$ dapat diselesaikan dengan menggunakan integral parsial.Misalkan

$$u = \cos x, du = -\sin x \; dx$$

$$dv = -\frac{e^{-px}}{p}\;, v = \frac{1}{p^2} e^{-px},$$

maka diperoleh

$$\int \frac{1}{-p} e^{-px} \cos x \; dx \; = \cos x \left(\frac{1}{p^2} e^{-px}\right) + \int \frac{1}{p^2} e^{-px} \sin x \; dx. \qquad (3.24)$$

Selanjutnya persamaan (3.24) disubstitusikan ke persamaan (3.23) akan menjadi

$$\mathcal{L}[\sin x] = \int_0^\infty e^{-pq} \sin x \;\; dx \; = sinx \left(\frac{e^{-px}}{-p}\right) - \cos x \left(\frac{1}{p^2} e^{-px}\right) + \int \frac{1}{p^2} e^{-px} \sin x \, dx$$

$$= \int e^{-px} \sin x \, dx \left(a + \frac{1}{p^2}\right) = \sin x \; \left(\frac{e^{-px}}{-p}\right) - \cos x \; \left(\frac{1}{p^2} e^{-px}\right)$$

$$= \int e^{-px} \sin x \, dx = - \frac{\frac{(\sin x) e^{-px}}{p} - \frac{(\cos x)\; e^{-px}}{p^2}}{1 + \frac{1}{p^2}} \rightarrow \frac{p^2}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{p^2 + 1}{p^2}$$

$$= \int e^{-px} \sin x \, dx = \; - \frac{\frac{p\,(\sin x) e^{-px}}{p} - \frac{(\cos x)\; e^{-px}}{p^2}}{\frac{p^2+1}{p^2}}$$

$$= \int e^{-px} \sin x \, dx = - \frac{\frac{p\,(\sin x) e^{-px} - \cos x \; e^{-px}}{p^2}}{\frac{p^2+1}{p^2}}$$

$$= \int e^{-px} \sin x \, dx = \frac{-p\,(\sin x) e^{-px} - \cos x \; e^{-px}}{p^2 + 1} + C$$

$$=\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty -e^{-px}\frac{p\,(\sin x)\,+\cos x}{p^2+1}$$

$$= \left(-e^{-px}\frac{p\,(\sin x)\ +\cos x}{p^2+1}\right|_0^\infty$$

$$= 0 - \left(-1\frac{0+1}{p^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{p^2+1}\ ,$$

maka diperoleh hasil

$$\mathcal{L}_t\mathcal{L}_x[\sin x] = \frac{1}{p^2+1}. \tag{3.25}$$

(ii) Transformasikan persamaan (3.18) menggunakan definisi (2.14) sehingga diperoleh

$$L_tL_x\{u_t\} = L_tL_x\{u_{xx}\} - L_tL_x\{u\} \tag{3.26}$$

$$s\,\bar{u}(p,s) - \bar{u}(p,0) = \{p^2\bar{u}(p,s) - p\bar{u}(0,s) - u_x(0,s)\} - \bar{u}(p,s), \tag{3.27}$$

dengan

$$\bar{u}(0,s) = 0 \tag{3.28}$$

$$u(p,0) = \frac{1}{p^2+1}. \tag{3.29}$$

Substisikan persamaan (3.28) dan (3.29) kedalam persamaan (3.27) diperoleh

$$s\,\bar{u}(p,s) - \frac{1}{p^2+1} = \{p^2\bar{u}(p,s) - p.0 - \bar{u}_x(0,s)\} - \ \bar{u}(p,s)$$

$$s\,\bar{u}(p,s) - \frac{1}{p^2+1} = \{p^2\bar{u}(p,s) - \bar{u}_x(0,s)\} - \ \bar{u}(p,s)$$

$$(p^2 - s - 1)\bar{u}(p,s) = \bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{p^2+1}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(p^2-s-1)}.\bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{(p^2-s-1)(p^2+1)}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(p^2-s-1)}\bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{(2s)}\left\{\frac{1}{(p^2-s-1)} - \frac{1}{(p^2+1)}\right\}$$

$$\bar{u}(p,s) = \frac{1}{(p^2 - s - 1)}\bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{(2s)(p^2 - s - 1)} + \frac{1}{(2s)(p^2 + 1)}$$

$$\bar{u}(p,s) = \left\{\frac{1}{(p-(\sqrt{s+1}))} - \frac{1}{(p+(\sqrt{s+1}))}\right\}\bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{(2s)} + \frac{1}{(2s)(p^2+1)}. \quad (3.30)$$

(iii) Aplikasikan L_x^{-1} pada persamaan (3.30), sehingga diperoleh

$$\bar{u}(x,s) = \left\{e^{(\sqrt{s+1})x} - e^{(\sqrt{s+1})x}\right\}\bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s} sinx. \quad (3.31)$$

Dimisalkan $limit\ x \to 0$, maka diperoleh

$$\bar{u}(0,s) = \left\{e^{(\sqrt{s+1})(0)} - e^{(\sqrt{s+1})(0)}\right\}\bar{u}_x(0,s) - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}\sin 0$$

$$-\left(\left\{e^{(\sqrt{s+1})(0)} - e^{(\sqrt{s+1})(0)}\right\}\bar{u}_x(0,s)\right)$$

$$= -\bar{u}(0,s) - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}\sin 0$$

$$-\bar{u}_x(0,s) = -\frac{\bar{u}(0,s)}{\left\{e^{(\sqrt{s+1})(0)} - e^{(\sqrt{s+1})(0)}\right\}} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}\sin 0$$

$$-\bar{u}_x(0,s) = -\frac{\bar{u}(0,s)}{\{e^{(0)} - e^{(0)}\}} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}\sin 0$$

karena $u(0,t) = 0,$ maka $\bar{u}(0,s) = 0$ maka diperoleh

$$-\bar{u}_x(0,s) = 0 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}\sin 0$$

$$-\bar{u}_x(0,s) = -\frac{1}{2s}$$

$$\bar{u}_x(0,s) = \frac{1}{2s}. \quad (3.32)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.32) ke dalam persamaan (3.31) diperoleh

$$\bar{u}(x,s) = \left\{e^{(\sqrt{s+1})x} - e^{(\sqrt{s+1})x}\right\}\frac{1}{2s} - 2\frac{1}{s} + 2\frac{1}{s}\sin x$$

$$\bar{u}(x,s) = \frac{1}{2s}\sin x. \quad (3.33)$$

Aplikasikan L_t^{-1} pada persamaan (3.33), sehingga diperoleh

$$u(x,t) = e^{-2t} \sin x.$$

3.3. Konfirmasi Solusi Analitik

Berdasarkan pembahasan di atas, telah didapatkan solusi analitik dari persamaan difusi dan persamaan fisher menggunakan metode transformasi double laplace. Solusi analitik dari persamaan difusi $u_{tt} = u_{xx}$ pada kondisi awal $u(x,0) = \sin(\pi x)$ dan kondisi batas $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ adalah:

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

Agar solusi yang didapatkan dinyatakan benar, perlu dilakukan pembuktian yaitu dengan mensubstitusikan hasil solusi analitiknya ke dalam persamaan awal menjadi

$$u_t - u_{xx} = 0$$
$$-\pi^2 \sin(\pi x) \left(e^{-\pi^2 t}\right) - (-\pi^{2t}) - \left(-\pi^2 \left(e^{-\pi^2 t}\right) \sin(\pi x)\right) = 0$$

Begitupun solusi untuk persamaan fisher $u_t = u_{xx} - u$ dengan kondisi awal $u(x,0) = \sin x$ dan kondisi batas $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ menggunakan metode transformasi double laplace adalah

$$u(x,t) = e^{-2t} \sin x$$

Sama hal nya dengan solusi analitik dari persamaan difusi, solusi analitik dari persamaan fisher ini perlu dibuktikan kebenerannya dengan cara mensubstitusikan solusi analitiknya ke dalam persamaan awal sehingga menjadi

$$u_t - u_{xx} + u = 0$$
$$-2 \sin x \, e^{-2t} + e^{-2t} \sin x + e^{-2t} \sin x = 0$$

Berdasarkan pembuktian di atas dapat disimpulkan bahwa solusi analitik dari penyelesaian persamaan difusi dan persamaan fisher dengan menggunakan metode transformasi double laplace dikatakan benar.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah dipaparkan pada bab tiga dapat disimpulkan bahwa

1. Solusi persamaan difusi $u_{tt} = u_{xx}$ pada kondisi awal $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ dan kondisi batas $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ diperoleh hasil:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

2. Solusi persamaan fisher $u_t = u_{xx} - u$ dengan kondisi awal $u(x, 0) = \sin x$ dan kondisi batas $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ diperoleh hasil:

$$u(x, t) = e^{-2t} \sin x.$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mencari grafik dari solusi analitik persamaan difusi dan persamaan fisher serta diharapkan dapat menemukan solusi numerik dari persamaan difusi dan persamaan fisher menggunakan metode lain karena untuk metode transformasi double hanya dikhususkan untuk mencari solusi analitik saja.

DAFTAR PUSTAKA

Boz, Ahmed. Dan Fevziye Gulsever. 2016. *Numerical Solution of the Diffusion Equation with Restrictive Pade Approximation.* Journal of Applied Mathematics and Physics. (2031-2037)

Debnath, Lokenath. 2005. *Nonlinier Partial Differential Equation Second Edition.* Birkhauser Boston, USA.

Debnath, Lokenath. 2016.*The Double Laplace Transform and Their Properties with Applications to Functional., Integral and Partial Differential Equations.* Int. Appl. Comput. Math.223-241.

Dhunde, Ranjit. R. dan G.L. Waghmare. 2013. Double Laplace Transform & It's Applications. International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)Vol. 2 Issue 12.

Dhunde, Ranjit R dan G.L. Waghmare. 2016. *Double Laplace Transform Method for Solving Sapce and Time Fracsional Telegraph Equations,* International Journal of Mathematics Sciences.

Efenddy, N. dan Sugiyono, V. 3013.*Matematika Teknik /i.* Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service)

F. Muhammad Zain, dkk. 2018. *Analisis Konvergensi Metode Beda Hingga Dalam Menghampiri Persamaan Difusi.* E-Journal Matematika, Vol. 7(1-4).

Holman. J.P. 1997. *Heat Transfer 8th Edition.* Mc Graw Hill Book Co., New York

Jabir, A.B. 2009. *Tafsir al-Aishar* .Jatinegara: Darussunnah Press.

Laili, Afidah Karimah. 2014. *Keakuratan Solusi Pada Persamaan Difusi Menggunakan Skema Crank-Nicolson.*Vol. 3 No. 3

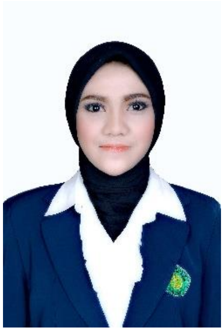
Langtangen, Hans Petter. dan Svein Linge. 2016.*Finite Difference Computing with PFEs – A Modern Software Approach*. CC Attribution, Norway.

Rohde, Klause. 2013. *The Balance of Nature and Human Impact.* Cambridge University Press, United Kingdom.

Sasongko, S.B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab.*Andi: Yogyakarta.

Shihab, M.Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah Volume 15.* Jakarta: Lentera Hati.

RIWAYAT HIDUP



Sarah Rizkayanti, lahir di Sumbawa pada tanggal 7 Oktober 1997. Biasa dipanggil Sarah. Anak pertama dari 3 bersaudara dan merupakan putri dari pasangan Bapak Sartono S.H, dan Ibu Asiah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 14 Sumbawa Besar dan lulus pada tahun 2009. Lalu melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Sumbawa Besar dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya di tempuh di SMAN 1 Sumbawa Besar dan lulus tahun 2015. Pada tahun yang sama melanjutkan ke jenjang yang lebih tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Jurusan Matematika Murni dan selama di Malang tinggal di Jl. Joyo Utomo II, no. 26, sejak semester 5.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Sarah Rizkayanti
NIM	:	15610020
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
JudulSkripsi	:	Transformasi Double Lapalace untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial
Pembimbing I	:	Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	TandaTangan	
1	24 April 2019	Konsultasi Bab I & Bab II	1.	
2	05 Mei 2019	Revisi Bab I & Bab II		2.
3	15 Oktober 2019	Konsultasi Bab I, Bab II & Konsultasi Bab III	3.	
4	18 Oktober 2019	Belajar Invers dari Transformasi Laplace		4.
5	24 Oktober 2019	Revisi Bab II	5.	
6	1 November 2019	Konsultasi Agama		6.
7	4 November 2019	ACC Kajian Agama Bab I & Bab II	7.	
8	26 April 2020	Konsultasi Bab III		8.
9	24 Agustus 2020	ACC Bab III	9.	
10	27 Agustus 2020	Revisi Bab II		10.
11	8 Oktober 2020	ACC Keseluruhan	11.	

Malang,24 Agustus 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001