

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PREDATOR-PREY
AKIBAT RASA TAKUT DAN PERTAHANAN KELOMPOK**

SKRIPSI

**OLEH
SITI NAULI HIDAYATI
NIM. 15610017**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PREDATOR-PREY
AKIBAT RASA TAKUT DAN PERTAHANAN KELOMPOK**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Siti Nauli Hidayati
NIM. 15610017**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PREDATOR-PREY
AKIBAT RASA TAKUT DAN PERTAHANAN KELOMPOK**

SKRIPSI

Oleh
Siti Nauli Hidayati
NIM. 15610017

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 15 Desember 2020

Pembimbing I,

Pembimbing II,



Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 1990100620180201 2 229



Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA PREDATOR-PREY
AKIBAT RASA TAKUT DAN PERTAHANAN KELOMPOK**

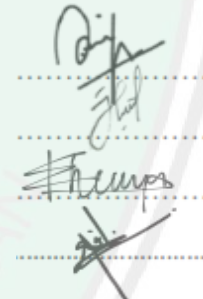
SKRIPSI

**OLEH
SITI NAULI HIDAYATI
NIM. 15610017**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 15 Desember 2020

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd
Ketua Penguji : Juhari, S.Pd, M.Si
Sekretaris Penguji : Dr. Heni Widayani, M.Si
Anggota Penguji : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si


.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Nauli Hidayati

NIM : 15610017

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Matematika Predator-Prey Akibat Rasa
Takut dan Pertahanan Kelompok

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Desember 2020
Yang membuat pernyataan



Siti Nauli Hidayati
NIM.15610017

MOTO

“Ada dua kenikmatan yang banyak manusia tertipu. yaitu kesehatan dan waktu
luang”

(HR.Bukhari)



PERSEMBAHAN

Karya tulis ini penulis ini persembahkan kepada:

Orang tua bapak Muh.Gozali dan ibu Nur Jannah, yang senantiasa memberikan dukungan dan moril serta mendoakan penulis. Dan kedua adik tersayang Muhammad Sauqi Adiatma dan Nur Gozilati Sahiroh yang memberikan semangat sehingga penulis berjuang sejauh ini.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
5. Juhari, S.Pd., M.Si, selaku dosen ketua penguji yang telah banyak memberikan saran dan arahan kepada penulis.

6. Ari Kusumastuti, M.Si,M.Pd, selaku dosen penguji utama yang telah memberikan, masukan, kritik dan saran kepada penulis untuk kesempurnaan skripsi ini.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 15 Desember 2020

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
1.5 Batasan Masalah.....	4
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Model Matematika <i>Predator-Prey</i> akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok	7
2.2 Persamaan Diferensial.....	7
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Non Linear	8
2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	9
2.5 Titik Tetap.....	10
2.6 Kestabilan Titik Tetap.....	10
2.7 Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinear	11
2.8 Model <i>Predator-Prey</i> akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok.....	12

2.8.1 Fungsi Pertahanan Kelompok.....	14
2.8.2 Fungsi Rasa Takut	15
2.9 Fungsi Respon	16
2.10 Model Pertumbuhan Logistik	18
2.11 Analisis Pembentukan Model <i>Predator-prey</i> dengan akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok	20
2.12 Keseimbangan Ekosistem dalam Pandangan Islam.....	24

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Analisis Model Predator-Prey akibat Rasa Takut dan Pertahanan kelompok.....	28
3.1.1 Titik Tetap Equilibrium	28
3.1.2 Analisis Model Gambar I	31
3.1.3 Analisis Model Gambar 2.....	37
3.1.4 Analisis Model Gambar 3.....	41
3.1.5 Analisis Model Gambar 4.....	46
3.1.6 Analisis Model Gambar 5.....	52
3.1.7 Pembuktian Teorema.....	57
3.2 Simulasi Model Predator-prey dengan Pendekatan Fungsi Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok	70
3.3 Analisis Keseimbangan dalam Persepektif Islam	75

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan.....	77
4.2 Saran.....	78

DAFTAR PUSTAKA	80
----------------------	----

LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Dinamik (Boyce dan DiPrima, 2009, hal. 494)	11
Tabel 2.2	Parameter Model Predtor-Prey Akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok	20



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik fungsi pertahanan kelompok dengan $x = 0 \dots 200$	14
Gambar 2.2	Grafik fungsi rasa takut dengan $x = 0 \dots 200$	15
Gambar 2.3	Model Pertumbuhan Logistik pada Persamaan 2.9.2 dengan $a > 0$	20
Gambar 2.4	Model Pertumbuhan Logistic pada Persamaan 2.9.2 dengan $a < 0$	20
Gambar 3.1	$r = 0.18, \alpha = 2.5$, titik equilibrium unik $E_1^*(0.1734, 0.0273)$ adalah stabil asimptotik lokal	32
Gambar 3.2	$r = 0.2, \alpha = 2.5$, siklus batas stabil di sekitar yang unik $E_1^* = (0.1734, 0.0388)$	37
Gambar 3.3	$r = 0.2, \alpha = 2.7, E_1^* = (0.25, 0.0398)$ stabil asimptotik lokal and $(0.4, 0.0225)$ pelana	41
Gambar 3.4	$r = 0.23, \alpha = 2.7$, adalah siklus batas stabil $E_1^* = (0.25, 0.0622)$ and $E_2^* = (0.4, 0.0546)$ adalah plana.....	46
Gambar 3.5	$r = 0.24, \alpha = 2.7, E_1^* = (0.25, 0.0694)$ adalah siklus batas stabil dan $E_2^* = (0.4, 0.0650)$ pelana.	52
Gambar 3.6	$r = 0.18, \alpha = 2.5$, titik equilibrium unik $E_1^*(0.1734, 0.0273)$ adalah stabil asimptotik lokal	72
Gambar 3.7	$r = 0.2, \alpha = 2.5$, siklus batas stabil di sekitar yang unik $E_1^* = (0.1734, 0.0388)$	73
Gambar 3.8	$r = 0.2, \alpha = 2.7, E_1^* = (0.25, 0.0398)$ stabil asimptotik lokal and $(0.4, 0.0225)$ pelana.....	74
Gambar 3.9	$r = 0.23, \alpha = 2.7$, adalah siklus batas stabil $E_1^* = (0.25, 0.0622)$ and $E_2^* = (0.4, 0.0546)$ adalah plana.....	75
Gambar 3.10	$r = 0.24, \alpha = 2.7, E_1^* = (0.25, 0.0694)$ adalah siklus batas stabil dan $E_2^* = (0.4, 0.0650)$ pelana.....	76

ABSTRAK

Hidayati, Siti Nauli, 2020. **Analisis Dinamik Model Matematika Predator-Prey Akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Model *predator-prey*, rasa takut dan pertahanan kelompok pada *prey*, analisis dinamik, solusi numerik.

Dinamika predator-prey pada sebuah ekosistem seringkali tidak mengikutsertakan faktor ketakutan dan ketahanan kelompok dari prey. Faktor ketakutan prey terhadap kehadiran predator mengakibatkan penurunan laju reproduksi populasi prey, karena prey menjadi tidak leluasa untuk berkembang biak. Lebih lanjut, jumlah populasi prey yang meningkatkan sebanding dengan tingkat pertahanan kelompok dari populasi prey itu sendiri. Semakin banyak populasi prey, keberhasilan predator untuk memangsa juga akan mengecil. Penelitian ini membahas mengenai dinamika populasi predator-prey pada suatu ekosistem akibat pengaruh dari kedua faktor tersebut, yakni ketakutan dan pertahanan kelompok. Kedua faktor tersebut dimodelkan dalam fungsi yang bergantung pada jumlah prey dan predator. Dari hasil analisa dinamik yang dilakukan, diperoleh lima titik kesetimbangan positif yang berarti kedua populasi akan eksis di ekosistem tersebut.

ABSTRACT

Hidayati, Siti Nauli. 2020. **Dynamic Analysis Mathematical Model with the Fear and Group Defense**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Predator-prey, fear and group defense models of prey, dynamical analysis, numerical solutions.

Predator-prey dynamics in an ecosystem often do not take into account the fear factor and herd resistance of prey. The fear factor of prey towards the presence of predators results in a decrease in the reproductive rate of the prey population, because prey is not free to breed. Furthermore, the number of prey population that increases will be proportional to the herd defense level of the prey population itself. The more the prey population, the less successful the predator will have on prey. This study discusses the population dynamics of predator-prey in an ecosystem due to the influence of these two factors, namely fear and group defense. These two factors are modeled in a function that depends on the number of prey and predators. From the results of the dynamic analysis carried out, five points of positive equilibrium were obtained, which means that both populations will exist in the ecosystem.

ملخص

ستي نولي هدايتي, ٢٠٢٠. التحليل الديناميكي للنموذج الرياضي المفترس والفريسة مع وظيفة, البحث العلمي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا ملك ابراهيم الاسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١) هيني ويداييتي الماجستير (٢) المشرف محمد نافع جوهاري الماجستير.

الكلمات الرئيسية: فريسة المفترس ، نماذج الخوف والدفاع الجماعي من الفريسة ، المحلل الديناميكي ، الحلول العددية.

غالبًا ما لا تأخذ ديناميكيات المفترس والفريسة في النظام البيئي في الاعتبار عوامل الخوف والمقاومة عامل الخوف من الفريسة من وجود الحيوانات المفترسة يؤدي إلى انخفاض . لدى قطاع الفريسة علاوة على ذلك ، سيكون عدد الفرائس . معدل تكاثر الفريسة ، لأن الفريسة ليست حرة في التكاثر كلما زاد عدد الفريسة ، كلما كانت . المتزايدة متناسبًا مع مستوى الدفاع عن الفرائس نفسها تناقش هذه الدراسة ديناميات مجموعات المفترس . الحيوانات المفترسة أقل نجاحًا على الفريسة تم تصميم . والفرائس في نظام بيئي بسبب تأثير هذين العاملين ، وهما الخوف والدفاع الجماعي من نتائج التحليل الديناميكي . هذين العاملين في دالة تعتمد على عدد الفريسة والحيوانات المفترسة الذي تم إجراؤه ، تم الحصول على خمس نقاط من التوازن الإيجابي ، مما يعني أن المجموعتين ستوجدان في النظام البيئي .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu topik utama dalam ekologi dan evolusi biologi, adalah mempelajari mekanisme yang berbeda yang berkaitan dengan interaksi *predator-prey*. Pemangsa menjadi makhluk hidup yang dominan dalam interaksi *predator-prey*. Akan tetapi, kelompok mangsa juga punya cara agar dapat bertahan hidup dan terhindar dari serangan pemangsa. Salah satu cara kelompok mangsa untuk bertahan hidup adalah dengan membentuk pertahanan kelompok. Tujuan dari mekanisme pertahanan kelompok adalah sebagai bentuk aksi anti predator. Karena ketika mangsa berada dalam kelompok besar maka lebih mudah mengawasi keberadaan pemangsa dengan menggunakan “banyak mata”. Hal ini akan mengurangi tingkat kepunahan populasi mangsa akibat pemangsa.

Mekanisme pertahanan kelompok dan rasa takut yang dialami oleh kelompok mangsa tidak selalu menguntungkan. Beberapa kerugian yang dialami oleh kelompok mangsa ketika melakukan pertahanan kelompok adalah faktor energi dan keterbatasan waktu. Semakin banyak waktu yang dilakukan untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang digunakan untuk mencari makanan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat pertumbuhan kelompok mangsa. Selain itu juga, kelompok mangsa terpaksa harus meninggalkan habitatnya sementara akibat rasa takut yang dialami. Hal ini berdampak pada kelangsungan hidup kelompok mangsa seperti menurunnya tingkat reproduksi dalam jangka waktu panjang (Sasmal & Takeuchi, 2019).

Seiring dengan perkembangan zaman populasi dalam ekosistem semakin tidak stabil. Hal tersebut bisa terjadi karena kerusakan ekosistem akibat bencana alam dan tangan jahat manusia. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt dalam al-Qur'an Surat ar-Rum ayat 41 :

“Zaharal-fasādu fil-barri wal-bahri bimā kasabat aidin-nāsi liyuzīqahum ba'dallazī 'amilu la'allahum yarji'un”

Artinya: “Telah Nampak kerusakan di darat dan di laut akibat perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebahagian akibat dari perbuatan mereka, agar mereka kembali ke jalan yang benar” (QS.ar-Rum:41).

Menurut Tafsir Ibnu Katsir, Ibnu Abbas, 'Ikrimah, adh-Dhahhak, as-Suddi dan lain-lain berkata: “Yang dimaksud dengan *albar* di dalam ayat ini adalah hamparan padang yang luas. Sedangkan yang dimaksud dengan *albahru* adalah kota-kota dan kampung-kampung. Dan di dalam satu riwayat, Ibnu 'Abbas dan 'Ikrimah berkata: *Albahru* adalah kota-kota dan kampung-kampung yang berada di sisi pantai. Sedangkan ulama lain berkata:” *albar* adalah daratan yang disebut *albahru* adalah lautan dari arti kata tersebut. “Zaid bin Rafi' berkata: “*Telah Nampak kerusakan*” yaitu, berbagai macam binatang terkena akibat masa sulit dari lautan dan berhentinya hujan di lautan (HR.Ibnu Abi Hatim). Dan makna firman Allah “*Zaharal fasaadu fil barri wal bahri bimaa kasabat aidinnaasi*” yang artinya “*Telah Nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia,*” Yaitu, kurangnya buahan serta tanaman oleh kemaksiatan” (Bin Ishaq Alu Sayaikh, 2004).

Pada penelitian sebelumnya yaitu Adiesty (2016) mengkaji tentang analisis kesetimbangan dan solusi dinamik pada Model *Predator-Prey* Dengan pertahanan Kelompok. Dari penelitian tersebut, penulis tertarik meneliti solusi dinamik dan

solusi numerik akibat rasa takut dan pertahanan kelompok. Persamaan tersebut diambil dari jurnal yang berjudul “*Dynamic of Predator-prey with Fear and Group Defense*” karya (Sasmal, Sourav & Yasuhiro Takeuchi,2019).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis dinamik model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok?
2. Bagaimana simulasi numerik model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian, berdasarkan rumusan masalah di atas adalah:

1. Untuk mengetahui analisis dinamik model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok.
2. Untuk mengetahui simulasi numerik model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok .

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Penelitian ini dapat menambah khazanah ilmu pengetahuan, khususnya terkait ilmu matematika ekologi, sehingga kepunahan suatu spesies karena predasi dapat dicegah

2. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi para matematikawan untuk lebih memperkaya metode matematika yang dimiliki untuk menyelesaikan masalah ekologi sejenis.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian mengkaji tentang analisis dinamik model matematika *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok, parameter yang dipakai diambil dari jurnal Sasmal & Takeuchi (2019) yaitu:

Model pertama yaitu

$$\frac{dx}{dt} = rx - d_1x - d_2x^2$$

model kedua yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = rx - d_1x - d_2x^2 - p(x)y$$

$$\frac{dy}{dt} = cp(x)y - m(y)y$$

model ketiga yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = rxf(k, y) - d_1x - d_2x^2 - p(x)y$$

$$\frac{dy}{dt} = cp(x)y - m(y)y$$

dan model keempat yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1 + kay} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a + bax + x^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c\beta xy}{a + bax + x^2}$$

Kemudian dari model tersebut dilakukan analisis dinamik dan solusi numerik *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan yaitu

a) Analisis dinamik dengan cara sebagai berikut:

1. Mendapatkan nilai titik tetap pada model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok
2. Linearisasi model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok
3. Membuat matriks jacobian dari model *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok yang digunakan
4. Mencari nilai eigen
5. Menentukan sifat kestabilan lokal dari titik tetap

b) Simulasi solusi numerik *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok menggunakan program matlab

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada skripsi ini yang terdiri dari empat bab dengan urutan sebagai berikut :

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan mengenai konsep yang akan digunakan pada pembahasan, seperti proses terbentuknya *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial nonlinear, analisis dinamik, linierisasi sistem persamaan diferensial, analisis kestabilan titik tetap, dan simulasi solusi numerik

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan dilakukan analisis dinamik yang terdiri dari mencari nilai titik tetap, linearisasi model, membuat matriks jacobian, mencari nilai eigen, menentukan jenis kestabilan lokal dari titik tetap. Kemudian membuat simulasi solusi numerik dengan program matlab.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi tentang kumpulan kesimpulan penelitian serta saran untuk pengembangan selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika *Predator-Prey* akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok

Predator dan prey akan selalu berdampingan, misalnya ada kelompok kijang yang terdiri dari banyak anggota yang akan dimangsa oleh harimau. Semakin banyak anggota kijang (mangsa) maka semakin kuat pertahanan kelompoknya. Maka pada kondisi ini sangat sulit untuk harimau memangsa kijang. Akan tetapi pada kondisi kijang melakukan pertahanan kelompok dalam waktu yang cukup lama, akan menyebabkan kijang tersebut memiliki rasa takut. Akibat dari rasa takut tersebut mengakibatkan kijang tersebut mengalami kelaparan dan menurunnya tingkat reproduksi mangsa.

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial yaitu fungsi yang tidak akibat satu atau lebih turunan. Persamaan diferensial parsial dan persamaan diferensial biasa adalah dua jenis yang dimuat. Persamaan diferensial yang di pengaruhi (bebas) yaitu persamaan berisi satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial yang mempengaruhi (parsial) yaitu persamaan yang berisi lebih dari satu variabel bebas (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa (PDB) adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \dots, y_n)$$

persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial biasa orde n yang menyatakan adanya hubungan antara variabel bebas x dan variabel bebas y beserta turunannya yang sama dengan nol. Persamaan (2.1) menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang diamati (Kartono, 2012). Persamaan diferensial disebut memiliki orde n jika turunan tertinggi yang dimuat adalah turunan ke- n (Ibnas, 2017).

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Non Linear

Persamaan diferensial biasa terbagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa linear dan non linear. Persamaan diferensial biasa linear adalah persamaan diferensial yang berderajat satu pada peubah bebas dan turunan-turunannya. Secara umum, persamaan diferensial biasa linear orde n dituliskan sebagai

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad (2.2)$$

persamaan diferensial biasa disebut linear jika memenuhi syarat-syarat berikut: (1) memiliki derajat satu variabel yang dipengaruhi (terikat) dan turunan-turunannya, (2) variabel dipengaruhi (terikat) dengan berbagai turunannya tidak ada perkalian, (3) fungsi transenden bukan variabel terikat.

Suatu persamaan diferensial biasa dikatakan non-linear jika tidak memenuhi syarat-syarat persamaan diferensial biasa linear. Persamaan diferensial biasa non-linear yaitu jika terdapat beberapa persamaan diferensial biasa non-linear yang saling terikat. Sistem persamaan diferensial non-linear yang terdiri dari dua fungsi tak diketahui memiliki contoh :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + d'y + G(x, y)\end{aligned}\tag{2.3}$$

dimana $ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathcal{R}$ (Aliyah, 2007).

Penyelesaian sistem persamaan diferensial linear maupun nonlinear dapat menggunakan metode eksplisit diperluas, yaitu dengan metode eliminasi atau metode matriks. Persamaan diferensial linear maupun persamaan diferensial nonlinear biasanya ada dalam pemakaiannya, namun persamaan terpisah, homogen, eksak dapat ditentukan solusi analitiknya secara eksplisit (Aliyah, 2007).

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen yaitu matriks persegi $m \times m$ memiliki nilai dan vektor karakteristik.

Definisi 1 Av adalah kelipatan skalar dari v , vektor tak nol v , $v \in \mathbb{R}^m$ disebut vektor eigen dari, jika matriks $m \times m$, jadi jika atau ditulis sebagai :

$$Av = \lambda v\tag{2.4}$$

Nilai skalar λ dinamakan nilai eigen A dan v dinamakan vektor eigen dari A yang sesuai dengan λ . Nilai eigen matriks A yaitu solusi tak nol dari persamaan

$$(\lambda I - A)v = 0\tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) memiliki solusi tak nol jika

$$\det(\lambda I - A) = 0\tag{2.6}$$

Persamaan karakteristik matriks A yaitu persamaan (2.6). Nilai eigen dari matriks A adalah skalar yang memenuhi persamaan karakteristik (Pratiwi, Kiftiah, & Ramdhani, 2017).

2.5 Titik Tetap

Titik yang tidak berubah terhadap waktu dari persamaan diferensial disebut titik tetap, misalnya (Sulisti, Noviani, & Kusumastuti, 2014)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.7}$$

$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, dengan f dan g fungsi kontinu dari x dan y . Titik kritis dari sistem (2.7) adalah titik (x^*, y^*) dari variabel (x, y) . Titik tetap x^* dan y^* diperoleh ketika terjadi keadaan seimbang atau ditulis sebagai $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut keadaan seimbang. Titik tetap ini identik dengan titik kritis dari suatu Fungsi (Edwards & Penney, 2008).

2.6 Kestabilan Titik Tetap

Titik tetap merupakan solusi konstan dari sistem sepanjang waktu. Titik akan memenuhi $\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, \dots, \frac{dx_n}{dt} = 0$. Definisi 4.1 (Olsder & Woude, 2003:53) diberikan persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ dan memiliki solusi $x(t, x_0)$ maka:

1. Titik equilibrium \bar{x} disebut **stabil** jika $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.

2. Titik equilibrium \bar{x} disebut **stabil asimtotik** jika titik tersebut stabil dan jika ada $\alpha\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0 - \bar{x})\| = 0$ jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.
3. Titik equilibrium \bar{x} dikatakan **tidak stabil** jika tidak stabil atau tidak memenuhi syarat (1).

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Dinamik (Boyce dan DiPrima, 2009, hal. 494)

No	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
	$\lambda_i \lambda_j \in \mathbf{R}$		
1.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
2.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
3.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	Saddle/Pelana
4.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
	$\lambda_{12} = a + bi \in \mathbf{C}$		
6.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
7.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
8.	$a = 0$	Stabil	Terpusat

2.7 Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinear

Linearisasi adalah proses mengubah PDB nonlinear yang rumit menjadi PDB linear yang lebih sederhana. Tujuan linearisasi yaitu untuk memudahkan pada syarat awal dengan mengetahui perubahan kecil. Misalkan $(x, y) = (x^*, y^*)$ merupakan titik kesetimbangan, maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut. Jika titik (x, y) merupakan titik di sekitar titik kesetimbangan maka secara matematis titik (x, y) dapat dirumuskan dan diekspresikan sebagai

$$(x, y) = (x^*, \Delta x, y^* + \Delta y). \quad (2.8)$$

Pendekatan fungsi $f_1(x, y)$ dan $f_2(x, y)$ dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\approx f_1(x^*, y^*) + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*) \\ f_2(x, y) &\approx f_2(x^*, y^*) + \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka $f_1(x^*, y^*) = f_2(x^*, y^*) = 0$. Oleh karena itu, sistem $\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$ dan $\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$ dapat didekati sebagai sistem linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y} \Delta y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} \Delta y. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sistem linear (2.10) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\ &= J(x) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Matriks $J(x)$ pada sistem (2.10) merupakan matriks Jacobian (Nugroho, 2009).

2.8 Model *Predator-Prey* akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok

Suatu ekosistem terdiri dari semua organisme yang hidup dalam suatu komunitas dan juga semua faktor-faktor abiotik yang berinteraksi dengan

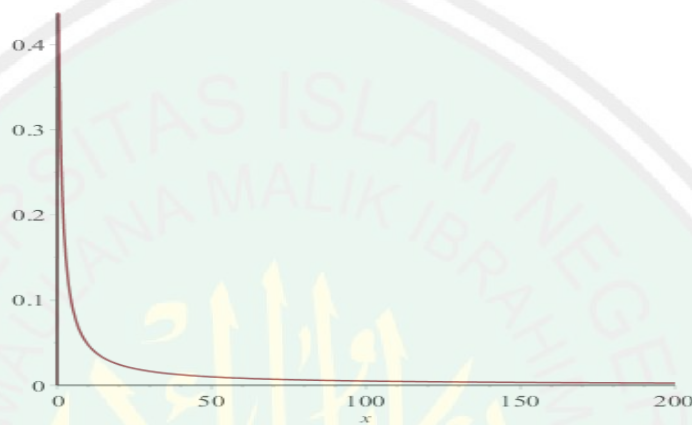
organisme tersebut. Selain itu, sekumpulan makhluk hidup sejenis atau populasi juga akan berinteraksi dengan individu pada populasi lainnya. Salah satu interaksi antar populasi dalam ekosistem adalah predasi, yaitu hubungan prey dan predator. Hubungan ini sangat erat kaitannya karena tanpa prey, predator tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan. Hubungan antara *predator* dan *prey* dapat dimodelkan secara matematis menjadi model *predator-prey*.

Group defense (pertahanan kelompok) yaitu suatu kejadian ketika populasi pemangsa berkurang atau bahkan dihilangkan akibat kemampuan populasi mangsa untuk mempertahankan diri atau melakukan penyamaran (Levin & Hallam, 1998). Selain itu, pertahanan kelompok merupakan model sosial ketika individu-individu dari suatu populasi mangsa berkumpul membentuk kelompok yang bertujuan untuk mencari makanan dan membentuk pertahanan kelompok (Rosellia & Abadi, 2018). Sehingga pemangsa berinteraksi dengan mangsa yang berada di luar anggota kelompoknya. Jika populasi mangsa semakin banyak, maka semakin kecil kemungkinan berhasilnya kelompok pemangsa untuk mendapatkan mangsanya (Ajraldi, Pittavino, & Venturino, 2011).

Ketika populasi mangsa membentuk pertahanan kelompok maka tidak lepas dari rasa takut akan dimangsa oleh pemangsa. Akibat rasa takut yang dialami oleh populasi mangsa maka dapat menimbulkan beberapa kerugian diantaranya menurunnya tingkat reproduksi dan kelompok mangsa terpaksa harus meninggalkan habitatnya (Sasmal & Takeuchi, 2019).

2.8.1 Fungsi Pertahanan Kelompok

Fungsi pertahanan kelompok mengikuti fungsi respon Holling type IV dengan persamaan $p(x) = \frac{\beta x}{a+bx+x^2}$, di mana β adalah tingkat kelahiran predator, $a > 0$ adalah saturasi setengah konstan, dan parameter b adalah batas toleransi predator (Sasmal & Takeuchi, 2019).

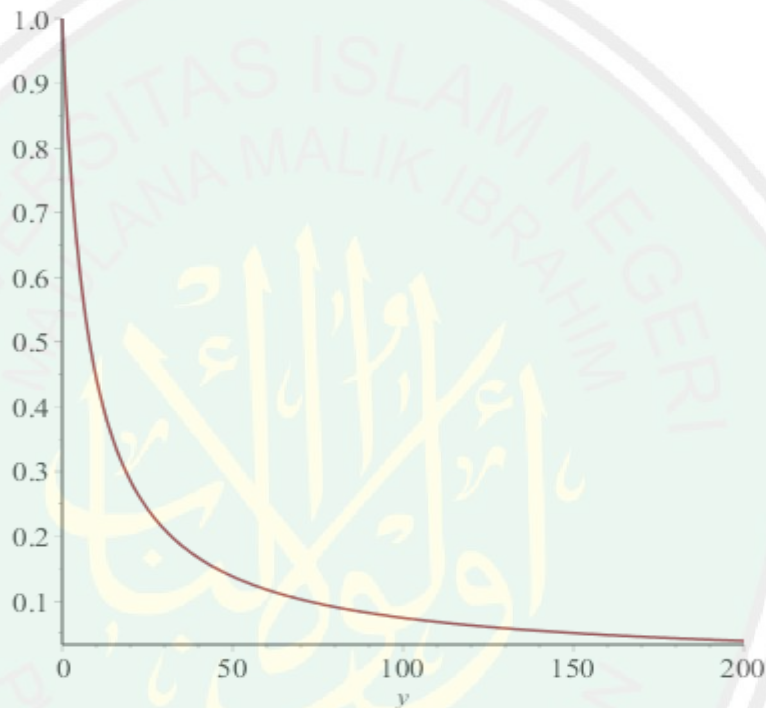


Gambar 2.1 Grafik fungsi pertahanan kelompok dengan $x = 0 \dots 200$

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang telah ditentukan sebagai berikut $r = 0.2, k = 0.5, \alpha = 0.25, d_1 = 0.1, d_2 = 0.2, \beta = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1, m = 0.25$. Nilai parameter yang digunakan merupakan nilai yang asumsikan, bukan berdasarkan data hasil pengamatan. Hal ini bertujuan agar analisa kestabilan dari titik kesetimbangan lebih mudah untuk diilustrasikan. Dari gambar grafik di atas semakin besar nilai x atau semakin besar jumlah populasi mangsa maka kurva akan mendekati 0. Artinya ketika semakin besar jumlah populasi mangsa maka semakin kuat tingkat pertahanan kelompok, sehingga tingkat keberhasilan populasi predator untuk mendapatkan mangsanya semakin kecil. Pada kondisi tersebut populasi mangsa cenderung dapat mempertahankan diri atau melindungi diri dari serangan predator. Sehingga fungsi ini layak untuk dikatakan sebagai fungsi pertahanan kelompok.

2.8.2 Fungsi Rasa Takut

Fungsi rasa takut menurut (Sasmal & Takeuchi, 2019) memiliki persamaan sebagai berikut $f(k, y) = \frac{1}{1+ky}$, dengan parameter k adalah tingkat ketakutan mangsa.



Gambar 2.2 Grafik fungsi rasa takut, $k = 200$ dengan $x = 0 \dots 200$

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang telah ditentukan sebagai berikut $r = 0.2, k = 0.5, \alpha = 0.25, d_1 = 0.1, d_2 = 0.2, \beta = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1, m = 0.25$. Dari grafik di atas semakin besar nilai y atau semakin banyak jumlah populasi predator, maka semakin tinggi tingkat ketakutan yang dialami oleh populasi mangsa. Akibat rasa takut yang berlebihan akan berdampak pada tingkat reproduksi populasi mangsa semakin menurun, sehingga pada kondisi ini populasi mangsa cenderung mendekati kepunahan.

2.9 Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi menurut Purnomo (2010) adalah kemampuan predator dalam mendeteksi atau menanggapi jumlah mangsa yang ada di sekitarnya. Sedangkan menurut Holling (1953) fungsi respon predator adalah tingkat daya konsumsi predator terhadap mangsanya. Sehingga fungsi respon berkaitan dengan meningkat atau berkurangnya jumlah *predator* dan *prey* saat saling berinteraksi. Ada tiga fungsi respon menurut Holling (1953) yaitu fungsi respon tipe I, fungsi respon tipe II dan fungsi respon tipe III.

Fungsi respon tipe I adalah fungsi linear yang sederhana dibandingkan dengan fungsi respon tipe II dan fungsi respon tipe III. Dikatakan linear karena diasumsikan waktu yang dibutuhkan oleh pemangsa untuk mencerna mangsa dapat diabaikan, karena hal tersebut tidak akan bisa mengganggu pemangsa untuk berburu mangsa yang lain. Fungsi respon tipe I digunakan dalam model *predator-prey Lotka-Volterra*. Contoh fungsi respon tipe I adalah interaksi antara laba laba dengan mangsanya. Pada tahun 1913, Michaelis dan Menten memperkenalkan fungsi respon sebagai berikut

$$p(x) = \frac{mx}{ax}$$

di mana $m > 0$ melambangkan tingkat pertumbuhan suatu spesies, dan $a > 0$ adalah setengah saturasi Konstant (Ruan & Xiao, 2001) .

Fungsi respon tipe II ditandai dengan melambatnya proses mencerna mangsa, karena kapasitas pemangsa dalam mencerna makanan. Dengan kata lain pada fungsi respon tipe II memperhatikan waktu yang dibutuhkan pemangsa dalam

mencerna mangsa. Contoh fungsi respon tipe II adalah interaksi antara serigala sebagai pemangsa dan karibu sebagai mangsa. Pada populasi karibu yang sangat banyak, serigala membutuhkan waktu yang sedikit untuk menemukan mangsanya, akan tetapi membutuhkan waktu yang sangat lama untuk menangani karibu tersebut. Persamaan fungsi respon tipe II adalah sebagai berikut (Ruan & Xiao, 2001).

$$p(x) = \frac{mx^2}{a + bx + x^2}$$

Fungsi respon tipe III disebut juga dengan fungsi respon sigmoidal di mana tingkat kepadatan mangsa yang tinggi mengalami kejenuhan. Artinya, pemangsa cenderung mencari mangsa yang lain ketika mangsanya mulai berkurang. Contoh dari fungsi respon tipe III adalah tikus dan kijang yang memakan lalat kayu. Persamaan untuk fungsi respon tipe III adalah sebagai berikut (Ruan & Xiao, 2001)

$$p(x) = \frac{mx^2}{a + x^2}$$

Fungsi monoton naik yaitu fungsi respon tipe I, II dan III, ada yang tidak monoton antara interaksi *predator-prey*. Yaitu tingkat konsumsi pemangsa menurun akibat mangsa dapat bertahan atau melindungi diri dari pemangsa. Dengan kata lain, ketika jumlah populasi mangsa meningkat maka pertahanan kelompok semakin meningkat. Contoh dari kasus ini yaitu interaksi antara harimau dan banteng. Semakin sedikit jumlah populasi banteng maka semakin besar peluang harimau untuk dapat memangsa, akan tetapi semakin banyak jumlah populasi banteng makan semakin kecil peluang harimau untuk dapat memangsa banteng.

Fenomena ini telah diperkenalkan oleh Monod-Haldane yang disebut juga fungsi respon tak monoton atau fungsi respon tipe IV yang diberikan dengan persamaan sebagai berikut

$$p(x) = \frac{mx}{ax^2 + bx + c}$$

yang mana fungsi respon tersebut merupakan modifikasi dari fungsi respon tipe II (Ruan & Xiao, 2001).

Sokol dan Howell pada penelitiannya menunjukkan sifat tidak monoton pada phenol dan pseudomonas putida, dan mengatakan fungsi respon tak monoton tersebut menghasilkan nilai sederhana yang terbaik. Fungsi respon yang diajukan adalah pengembangan dari fungsi respon tipe III. Persamaan dari fungsi respon tak monoton atau fungsi respon tipe IV adalah sebagai berikut (Ruan & Xiao, 2001)

$$p(x) = \frac{mx}{a + x^2}$$

2.10 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik atau biasa dikenal dengan kaidah logistik (*logistic law*) adalah model yang mengasumsikan pada suatu masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan. Jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama pada titik kesetimbangan tersebut. Oleh karena itu grafiknya mendekati nilai constant. Misalkan species tertentu mengikuti persamaan logistik dengan mengalami pertumbuhan alami, dengan banyaknya populasi dilambangkan dengan N , *carrying capacity* dilambangkan dengan K , dan \bar{a} laju pertumbuhan intrinsik yang menggambarkan daya pertumbuhan populasi.

Misalkan:1. Diasumsikan $\bar{a} > 0$, melihat populasi mempunyai kemampuan untuk berkembang, maka model pertumbuhan logistik adalah sebagai berikut:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \bar{a} - \frac{\bar{a}}{N} N$$

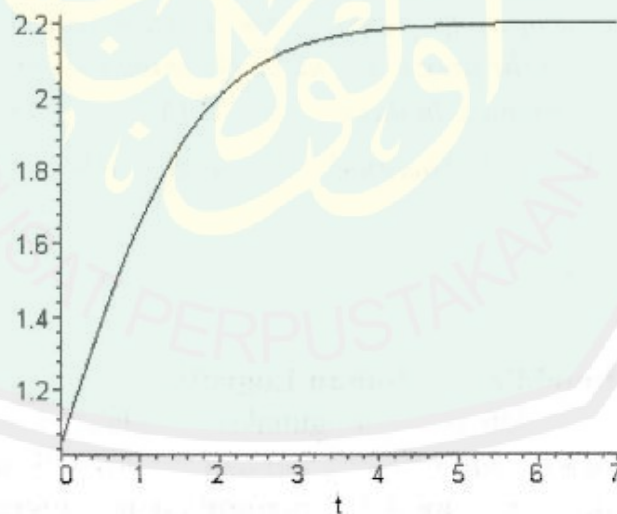
atau

$$\frac{dN}{dt} = \bar{a}N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.12)$$

Kemudian dengan menggunakan syarat awal $N(0) = N_0$, diperoleh solusi khusus persamaan tersebut yaitu:

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N} - 1\right) e^{-\bar{a}t} + 1} \quad (2.13)$$

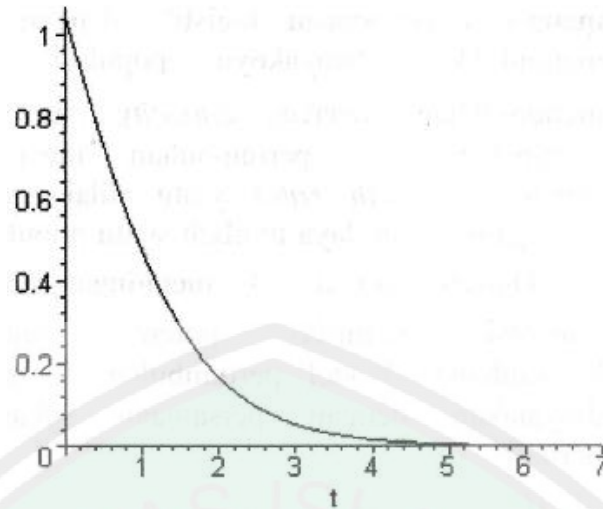
Untuk $\bar{a} > 0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, dan dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.3 Model Pertumbuhan Logistik, $K = 2.2$ pada Persamaan 2.9.2 dengan $\bar{a} > 0$

Sedangkan untuk $\bar{a} < 0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, sehingga solusi khusus untuk

persamaan 2.9.2 dapat digambarkan dengan grafik berikut,



Gambar 2.4 Model Pertumbuhan Logistic, $K = 2.2$ pada Persamaan 2.9.2 dengan $\bar{a} < 0$

2.11 Analisis Pembentukan Model *Predator-prey* dengan akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok

Berikut adalah model *predator-prey* dengan pendekatan fungsi rasa takut dan pertahanan kelompok yang pertama kali diperkenalkan oleh Freedman dan Wolkowicz pada tahun 1986.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{rx}{1+kay} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a+bax+x^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{c\beta xy}{a+bax+x^2} - my \end{aligned} \quad (2.14)$$

dimana $r, k, \alpha, d_1, d_2, \beta, a, b, c$, dan m adalah konstanta positif, Parameter model (3.1) yaitu:

Tabel 2.1 Parameter Model Predtor-Prey Akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok

Parameter	Deskripsi
r	Tingkat kelahiran mangsa

k	Tingkat ketakutan mangsa
α	Sensitivitas taxis-predator
d_1	Tingkat kematian alami dari mangsa
d_2	Tingkat kematian yang disebabkan oleh kompetisi antar mangsa
β	Tingkat kelahiran predator
a	Konstanta setengah saturasi
b	Batas toleransi predator
c	Efisiensi konversi biomassa
m	Tingkat kematian alami predator

Pertama diasumsikan pertumbuhan populasi mangsa (dx) dari waktu ke waktu (dt) mengikuti dinamika logistik, yang dapat dibagi menjadi tiga bagian yang berbeda yaitu, tingkat kelahiran spesies mangsa (r) sebesar 0.2, tingkat kematian alami spesies mangsa (d_1) sebesar 0.5, dan kematian yang disebabkan oleh kompetisi antar mangsa (d_2) sebesar 0.2. Oleh karena itu, dengan tidak adanya predator, banyaknya populasi mangsa diatur dengan mengikuti persamaan diferensial biasa.

$$\frac{dx}{dt} = rx - d_1x - d_2x^2 \quad (2.15)$$

dimana x adalah kepadatan populasi mangsa, r adalah tingkat kelahiran dari mangsa, d_1 adalah tingkat kematian alami dari mangsa, dan d_2 tingkat kematian akibat kompetisi antar mangsa. Sehingga sangat mudah untuk menunjukkan solusi $x(t)$ untuk setiap nilai awal positif pada persamaan (2.19) cenderung ke-0 ketika $\leq d_1$, itulah kenapa mangsa selalu menuju kepunahan.

Pada lingkungan predator, ada gabungan istilah predasi $p(x)$ pada dinamika populasi mangsa dan juga memasukkan dinamika predator secara eksplisit ke dalam persamaan (2.19). Dalam penelitian ini, penulis menganggap

pertahanan kelompok mangsa sebagai respons anti-predator. Terutama ada dua pendekatan terkenal yang ada untuk menggabungkan pertahanan kelompok dalam kompetisi *predator-prey*. Satu adalah dengan mempertimbangkan *Holling Tipe IV* atau *Monod-Haldane* jenis respon fungsional dan yang lain adalah untuk mempertimbangkan bahwa predasi sebagian besar terjadi pada perimeter kawanan yang dimodelkan oleh istilah akar kuadrat. Oleh karena itu, model *predator-prey* umum dengan pertahanan kelompok diberikan oleh:

$$\frac{dx}{dt} = rx - d_1x - d_2x^2 - p(x)y \quad (2.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = cp(x)y - m(y)y \quad (2.17)$$

di mana, y kepadatan populasi predator, c adalah efisiensi konversi dari biomassa mangsa menjadi biomassa pemangsa dan $m(y)$ adalah tingkat kematian predator, yang mana bisa tergantung kepadatan dan tidak tergantung kepadatan. Di sini kita mempertimbangkan tingkat kematian yang tidak tergantung kepadatan, $m(y) = m$. Pertahanan kelompok mengikuti respon fungsi Holling Type IV, sedangkan $p(x) = \frac{\beta x}{a+bx+x^2}$, dimana β adalah tingkat predasi, $a > 0$ adalah konstanta setengah saturasi dan parameter b adalah batas toleransi predator. Tingkat kesuksesan predasi saat predator berkurang yaitu jika tingkat pertahanan atau kesetaraan batas toleransi predator meningkat.

Energi dan keterbatasan waktu, perilaku anti-predator tingkat tinggi dalam waktu yang lama mungkin memiliki kerugian juga. yang dapat mengurangi tingkat pertumbuhan mangsa. Faktanya, beberapa percobaan lapangan menunjukkan bahwa ketakutan akan *predator* secara signifikan dapat mengurangi tingkat reproduksi mangsa. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis

memasukkan kerugian akibat ketakutan predasi, pada populasi predator yang tergantung pada kepadatan populasi predator. Dengan demikian, dengan adanya populasi predator, maka modifikasi persamaan di atas (2.20-2.21) dengan mengalikan mangsa reproduksi dengan faktor $f(k, y) = \frac{1}{1+ky}$ yang bertanggung jawab atas kerugian pertahanan *anti-predator* akibat rasa takut. Dengan demikian model (2.20-2.21) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rxf(k, y) - d_1x - d_2x^2 - p(x)y \quad (2.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = cp(x)y - m(y)y \quad (2.19)$$

Parameter k adalah tingkat ketakutan yang mencerminkan pengurangan tingkat pertumbuhan mangsa karena kebiasaan anti-predator. Saat k meningkatkan laju pertumbuhan mangsa berkurang. Selain itu, dalam penelitian ini, penulis menganggap d_1 dan d_2 sebagai konstan. Meskipun, tanpa bukti eksperimental langsung, beberapa penelitian menunjukkan bahwa ketakutan predator dapat menyebabkan tingkat kelangsungan hidup mangsa dewasa, karena beberapa dampak fisiologis ketika mangsa masih muda. Oleh karena itu, dapat dianggap d_1 dan d_2 sebagai fungsi kepadatan predator (d_1 dan d_2 mungkin merupakan fungsi yang meningkat dari y).

Dalam rumusan di atas, baik kerugian (akibat rasa takut) maupun manfaat karena pertahanan kelompok saling independen. Namun, populasi mangsa tidak bisa saling mandiri, karena waktu dan energi total terbatas. Artinya, jika mangsa menghabiskan lebih banyak waktu dan energi untuk pertahanan kelompok maka reproduksi dapat berkurang lebih banyak karena hal tersebut. Oleh karena itu,

penulis menghubungkan kedua faktor ini melalui parameter yang disebut sensitivitas predator-taxis ' α '. Dengan meningkatnya sensitivitas predator-taxis, dengan kata lain, ketika mangsa lebih sensitif terhadap *predator*, populasi mangsa akan meningkatkan pertahanan kelompok mereka dan tingkat *predator* yang berhasil akan menurun. Namun, pada saat yang sama tingkat reproduksi populasi mangsa juga menurun karena waktu pencarian makan dan energi berkurang, dengan kata lain tingkat ketakutan meningkat. Di sini kita mempertimbangkan baik batas toleransi predator dan tingkat ketakutan k meningkat secara linear sehubungan dengan sensitivitas predator-taxis α ($b \rightarrow b\alpha$ dan $k \rightarrow k\alpha$). Oleh karena itu, modifikasi fungsi $f(k, y)$ dan $p(x)$ pada model (2.3), seperti $f(k, y) \equiv \frac{1}{(1 + k\alpha y)}$ dan $p(x) \equiv p(\alpha, x) \equiv p(\alpha, x) = \frac{\beta x}{(a + b\alpha x + x^2)}$ baik tingkat reproduksi sukses dari mangsa dan tingkat predasi sukses predator menurun jika tingkat pertahanan atau sensitivitas predator-taxis setara meningkat. Oleh karena itu, model akhir menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1 + k\alpha y} - d_1 x - d_2 x^2 - \frac{\beta xy}{a + b\alpha x + x^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{c\beta xy}{a + b\alpha x + x^2} \quad (2.21)$$

2.12 Keseimbangan Ekosistem dalam Pandangan Islam

Ekosistem merupakan komunitas komponen biotik (tanaman, hewan, dan organisme) serta abiotik (cuaca, matahari, iklim, tanah, dan atmosfer) yang berada di sekitar makhluk hidup. Kedua komponen tersebut membentuk kesatuan utuh

menyeluruh dan saling mempengaruhi dalam membentuk keseimbangan, stabilitas dan produktivitas makhluk hidup. Di dalam ekosistem ada yang berperan sebagai *predator* (pemangsa) dan *prey* (yang dimangsa). Ekosistem memberi banyak manfaat bagi manusia karena menghasilkan barang dan jasa yang menjadi kebutuhan manusia. Misalnya, tanaman yang ditemukan dalam suatu ekosistem bisa dijadikan sebagai bahan obat-obatan untuk menyembuhkan penyakit manusia.

Adanya gangguan yang menyebabkan perubahan sementara pada suatu ekosistem dan suksesi ekologis yang menyebabkan proses perubahan pada struktur spesies dari komunitas ekologi dari waktu ke waktu dapat mempengaruhi fungsi ekosistem. Sebagai kholifah di bumi, manusia bertanggung jawab dalam menjaga dan mengawasi kelestarian dan keseimbangan ekosistem. Karena bumi ini cukup untuk menghidupi manusia seluruh alam, namun tidak akan cukup untuk menghidupi dua orang yang serakah. Oleh karena itu, sudah sewajarnya manusia menjaga dan melestarikan ekosistem, karena bumi ini pada dasarnya sudah diciptakan dalam keadaan seimbang atau ideal, berdasarkan firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Hajj ayat 63:

“Alam tara annalāha anzala minas-samā`i mā`an fa tuṣbiḥul-arḍu mukḥdarrah, innalāha laṭīfun khabīr”

Artinya : “Apakah kamu tidak melihat bahwasanya Allah menurunkan air dari langit, lalu menjadikan bumi itu hijau? sesungguhnya Allah itu maha halus lagi maha mengetahui” (QS.al-Hajj:63).

Menurut tafsir al-Wasith Melalui ayat ini, Allah menyebutkan serangkaian bukti nyata dan dalil atas kuasa-Nya yang unggul dan ilmu-Nya yang menyeluruh. Zat yang menyandang sifat kuasa agung ini tentu mampu untuk menolong para wali-Nya, dan diantaranya adalah kuasa yang tidak patut diklaim untuk selain Dia.

Di antara bukti kekuasaan Allah adalah, menurunkan hujan dari langit lalu berkat hujan itu bumi menghidupkan dengan tumbuh-tumbuhan, berbagai bunga dengan warna-warni yang menawan dan bentuk yang asri padahal sebelumnya bumi gersang dan tandus. Allah maha penyayang terhadap hamba-hambaNya, mengatur urusan hidup dan tempat kembali untuk mereka, Maha mengetahui kebaikan, manfaat dan kondisi makhluk, tidak ada sesuatupun yang samar bagi-Nya. Kemudian Allah memiliki bumi dan langit dan apapun yang terjadi. Semua yang ada di langit dan di bumi milik Allah SWT dari sisi penciptaan, kekuasaan dan penghambaan. Segala yang ada adalah milik-Nya, tunduk pada putusan-Nya, Maha kaya tanpa memerlukan siapapun dan terpuji dalam setiap kondisi (Az-Zuhaili, 2013)

Menurut tafsir al-Qur'anul Majid melalui ayat di atas Allah berfirman "Apakah kamu tidak melihat bahwa Allah menurunkan air hujan dari awan, membasahi bumi yang kering dan hiduplah bumi dengan tumbuhnya berbagai macam tanaman yang indah warnanya dan indah bentuknya". Sesungguhnya Allah itu maha lembut terhadap hamba-hambaNya. Mengatur segala urusan hidup mereka di dunia, mengetahui keadaan-Nya, dan peraturan atas hidup mereka. Dan apasaja yang berada di langit dan di bumi adalah kepunyaan Allah dan tunduk padaNya. Allah itu maha kaya, tidak memerlukan sesuatu dari pihak lain, dan maha Terpuji. Sesuatu nikmat besar dari Allah yang diberikan kepada manusia adalah bahwa mereka mampu menundukkan segala apa yang berada di langit dan di bumi, misalnya, menundukkan binatang, tumbuh-tumbuhan, sungai ataupun kekuatan-kekuatan lain tabiat makhluk lain, seperti kekuatan atom dan nuklir (Ash-Shiddieqy, 2000).

Menurut Tafsir al-Qurthubi (2008) al Farra'berkata, "Lafazh *Alam Tara*" apakah kamu tidak melihat adalah *khobar*, seperti kalimat "*I'lamu annallaha azza wajalla yunziluhu minassamaai*" (Ketahuilah bahwa Allah Azza wajalla menurunkan air dari langit). *Fatubihul Ardu mukhdorrotan* (lalu jadilah bumi itu hijau), maksudnya adalah memiliki yang hijau, seperti kalimat "*muqbilatan musbaataní*, maksudnya adalah memiliki sayur mayur dan binatang buas. Ini merupakan sebuah ungkapan tentang segeranya bumi menumbuhkan tumbuh-tumbuhan setelah diturunkannya air, dan keberlangsungannya dalam kondisi menurut kebiasaannya. Ibnu Ahiyyah berkata:"Diriwayatkan dari Ikrimah bahwa dia berkata, "Ini hanya terjadi di Makkah dan Tihamah". Makna ucapan ini adalah, dia menafsirkan firman Allah *fatusbihu* dengan pagi hari setelah malamnya turun hujan. Dia juga berpendapat bahwa penghijauan tersebut agak terlambat di seluruh negeri yang lain, selain Makkah dan Tihamah. Aku pernah menyaksikan hal ini di Sus jauh, dimana hujan turun pada malam hari, setelah kemarau melanda, lalu jadilah tanah berpasir yang dihembus angin itu menghijau karena tumbuh-tumbuhan yang lunak lembut. Dan sesungguhnya Allah Maha Halus lagi Maha lembut, maksudnya adalah Allah Maha mengetahui keputusan yang dirasakan seorang hamba akibat lambatnya hujan, Maha Halus dalam memberikan rizki kepada hamba-hamba-Nya (Al-Qurthubi, 2008).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Analisis Model Predator-Prey akibat Rasa Takut dan Pertahanan kelompok

Berikut adalah model *predator-prey* dengan pendekatan fungsi rasa takut dan pertahanan kelompok yang pertama kali diperkenalkan oleh Freedman dan Wolkowicz pada tahun 1986.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{rx}{1+k\alpha y} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a+bax+x^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{c\beta xy}{a+bax+x^2} - my \end{aligned} \quad (3.1)$$

dimana $r, k, \alpha, d_1, d_2, \beta, a, b, c,$ dan m adalah konstanta positif, pada bagian ini akan dilakukan pencarian titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.14).

3.1.1 Titik Tetap Equilibrium

a. Titik Equilibrium *Trivial Extinction* $E_0 = (0,0)$ akan selalu punah

Persamaan (2.24) dan 2.25) menjadi :

$$\frac{rx(t)}{1+k\alpha y(t)} - d_1x(t) - d_2x^2(t) - \frac{\beta x(t)y(t)}{a+bax(t)+x^2(t)} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{c\beta xy}{a+bax+x^2} - my = 0 \quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.3) didefinisikan $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ dan $x(t) = 0$ sehingga persamaan tersebut menjadi :

$$\frac{c\beta x(t)y(t)}{a + bax(t) + x^2(t)} - my(t) = 0$$

$$-my(t) = 0$$

$$y(t) = 0$$

maka didapatkan titik tetap yang pertama yaitu $E_0 = (0,0)$

b. Titik Equilibrium axial, yaitu ketika populasi *prey* dapat bertahan ditunjukkan

dengan $E_1 = \left(\frac{r-d_1}{d_2}, 0\right)$, yang mana jika $r > d_1$.

c. Titik Equilibrium *interior steady states* akan selalu seimbang persamaan (3.1)

bisa didapatkan melalui persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1 - d_2 x - \frac{\beta y}{a + bax + x^2} &=: g(x, y) \\ \frac{c\beta x}{a + bax + x^2} - m &=: f(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Untuk mendapatkan $f(x) = 0$ langkah-langkah yang dilakukan adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c\beta x}{a + bax + x^2} - m \\ &= -\frac{abmx - \beta cx + mx^2 + am}{abx + x^2 + a} \\ &= -mx^2 + (-abm + \beta c)x - am \end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus $b - 4ac$ maka didapatkan

$$\frac{1 - abm + \beta c + \sqrt{a^2 b^2 m^2 - 2ab\beta cm + \beta^2 c^2 - 4am^2}}{2m}$$

atau

$$\frac{1}{2} \frac{abm - \beta c + \sqrt{a^2 b^2 m^2 - 2ab\beta cm + \beta^2 c^2 - 4am^2}}{m}$$

Sehingga didapatkan x sebagai berikut:

$$x_i = \frac{(c\beta - mba) \pm \sqrt{(c\beta - mba)^2 - 4m^2}}{2m}, i = 1,2$$

dimana $x_1 \leq x_2$. Untuk mendapatkan $g(x, y) = 0$ dengan cara mendapatkan polynomial kuadrat y ke dalam x sebagai berikut

$$g(x, y) = \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1 - d_2 x - \frac{\beta y}{a + bax + x^2} \quad (3.5)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.5) ke dalam persamaan (3.1) dan $\beta = \frac{m(abx + x^2 + a)}{cx}$ ke dalam persamaan

(3.5). Kemudian mengecek kelinearisasi $k_2 = \text{coeff}(g, y, 2)$. Dan untuk

mensubstitusikan $x^2 = -abx + \frac{\beta cx}{m} - a$ ke dalam persamaan $k_1 =$

$\text{simplify}\left(\left(-abx + \frac{\beta cx}{m} - a\right) d_2 + \alpha c k x d_1 + m\right) m$. Maka dilakukannya substitusi

$x^2 = -abx + \frac{\beta cx}{m} - a$ ke dalam persamaan $k_0 = \text{expand}\left(cm * \left(-abx + \frac{\beta cx}{m} -$

$a\right) d_2 - cmrx = cmx d_1$). Selanjutnya dilakukanlah perhitungan

$$g = k_2 * y^2 + k_1 * y + k_0$$

$$g = (-\alpha^2 bckmx d_2 + \alpha \beta c^2 k x d_2 - aackm d_2 + ackmx d_1 + m^2) y - cmd_2 abx$$

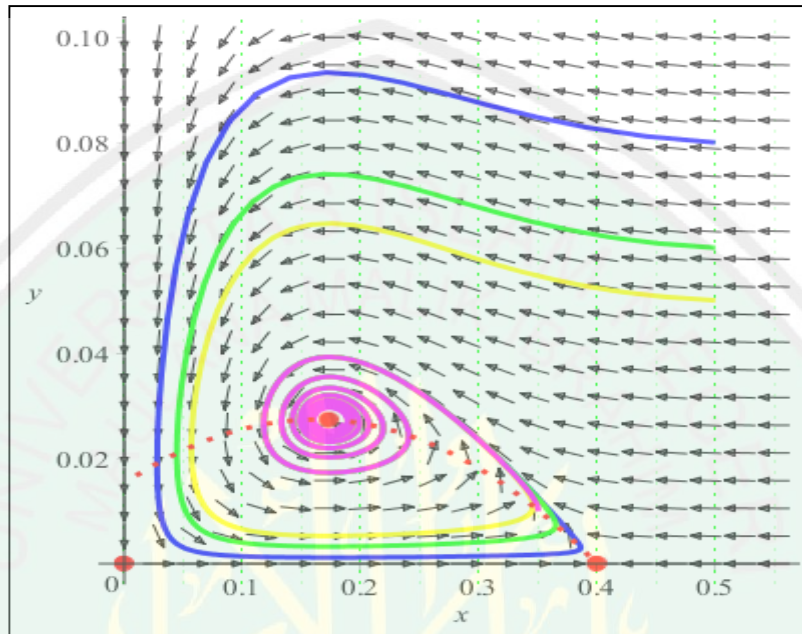
$$+ c^2 d_2 \beta x - cmd_2 a - cmrx + cmx d_1$$

$$(m^2 k \alpha) y^2 + [\{c^2 \beta d_2 + cmd_1 - mbad_2\} x - macd_2] k \alpha + m^2] y$$

$$+ [\{c^2 \beta d_2 + cmd_1 - mbad_2\} x - macd_2] - cmrx = 0$$

Berdasarkan nilai parameter dan x_i untuk $i = 1,2$, maka persamaan (3.5) tidak memiliki satu atau dua *interior steady states*.

3.1.2 Analisis Model Gambar I



Gambar 3.1 $r = 0.18, \alpha = 2.5$, titik equilibrium unik $E_1^* = (0.1734, 0.0273)$ adalah stabil asimtotik local

Simulasi model dilakukan dengan menggunakan nilai parameter yang telah ditentukan sebagai berikut $r = 0.2, k = 0.5, \alpha = 0.25, d_1 = 0.1, d_2 = 0.2, \beta = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1, m = 0.25$. Nilai parameter yang digunakan merupakan nilai yang asumsikan, bukan berdasarkan data hasil pengamatan. Hal ini bertujuan agar analisa kestabilan dari titik kesetimbangan lebih mudah untuk diilustrasikan. Garis biru menggambarkan $(0.1734, 0.0273)$, garis hijau menggambarkan $(0.1734, 0.0273)$, garis kuning menggambarkan $(0.1734, 0.0273)$, dan kemudian garis ungu menggambarkan $(0.1734, 0.0273)$.

Sehingga keempat garis tersebut memiliki titik tetap yang bernama stabil asimptotik local.

a. Titik Tetap 1

Pada persamaan (3.1) di peroleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Dari persamaan (3.1)

dicari dengan program maple yaitu terdapat pada lampiran, maka titik tetapnya adalah:

- a. $x_0 = 0, y_0 = 0$
- b. $x_1 = 0.4, y_1 = 0$
- c. $x_2 = 0.1734435536, y_2 = 0.02731302064$

Ketiga titik tetap tersebut akan dianalisis kestabilan.

b. Linearisasi Model Titik Tetap 1

Linearisasi adalah proses mengubah persamaan diferensial non linear ke persamaan diferensial linear dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yaitu dengan menghilangkan suku nonlinear di sekitar titik kesetimbangan. Pada pembahasan sebelumnya telah diperoleh titik-titik kesetimbangan yaitu $(x_0^*, y_0^*) = (0,0), (x_1^*, y_1^*) = (0.4,0)$, dan $(0.1734,0.0273)$. Agar titik-titik kesetimbangan tersebut stabil dilakukan analisis kestabilan dengan melinearisasi sistem persamaan (3.1) dan (3.2). Dari persamaan tersebut dimisalkan.

$$f(x, y) = \frac{rx(t)}{1 + kay} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a + bax + x^2}$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta xy}{a + bax + x^2} - my$$

Berdasarkan (Nugroho, 2009) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde satu persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (3.6)$$

$$g(x, y) = g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Berdasarkan substitusi parameter dan titik tetap maka diperoleh linearisasi sebagai berikut:

1. Titik tetap pertama yaitu $(x_0^*, y_0^*) = (0, 0)$

$$f(x^*, y^*) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}}$$

$$f_x(x^*, y^*) = \frac{r}{1 + k\alpha y^*} - d_1 - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$f_y(x^*, y^*) = -\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}}$$

$$g(x^*, y^*) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m y^*$$

$$g_x(x^*, y^*) = \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$g_y(x^*, y^*) = \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

Kemudian substitusikan titik tetap $(x_0^*, y_0^*) = (0, 0)$ ke dalam persamaan (3.6)

sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (\alpha b + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = 0,08x$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.25$$

c. Matriks Jacobian Titik Tetap 1

Titik tetap pertama $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} -d_1 + r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix}$$

Atau

$$A = \begin{bmatrix} 0,08 & -0 \\ 0 & -0,25 \end{bmatrix}$$

d. Nilai Eigen Titik Tetap 1

Untuk mencari nilai eigen pada matriks Jacobian di atas maka:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} -d_1 + r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -d_1 + r - \lambda & 0 \\ 0 & -m - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda + d_1 - r)(\lambda + m) = 0$$

$$\lambda_1 = r - d_1 \text{ dan } \lambda_2 = -m$$

$$\lambda_1 = 0.08 \text{ dan } \lambda_2 = -0.25$$

Pada titik tetap yang pertama $E_0(0,0)$ yaitu $r - d_1$ dan $\lambda_2 = -m (< 0)$. Maka titik tetap tersebut bersifat stabil asimtotik lokal jika $r - d_1 < 0$.

e. Linearisasi Titik Tetap 2

Substitusikan titik tetap $(x_1^*, y_1^*) = (0.4, 0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y^*} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = -0.08x - 0.03531578948y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.0131578948y$$

f. Matriks Jacobian Titik Tetap 2

Titik tetap kedua $(x_1^*, y_1^*) = (0.4, 0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya yaitu:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -0.08000000 & -0.3531578948 \\ 0 & 0.0131578948 \end{bmatrix}$$

e. Nilai Eigen Titik Tetap 2

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.008000000, \lambda_2 = 0.0131578948$$

g. Linereasisi Titik Model 3

Subsitusikan titik tetap $(x_2^*, y_2^*) = (0.1734, 0.0273)$ ke dalam persamaan (3.6)

sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = -0.00325499048x - 0.2864905948y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.00793502426y$$

h. Matriks Jacobian Titik Tetap 3

Titik tetap ketiga $(x_2^*, y_2^*) = (0.1734, 0.0273)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya yaitu:

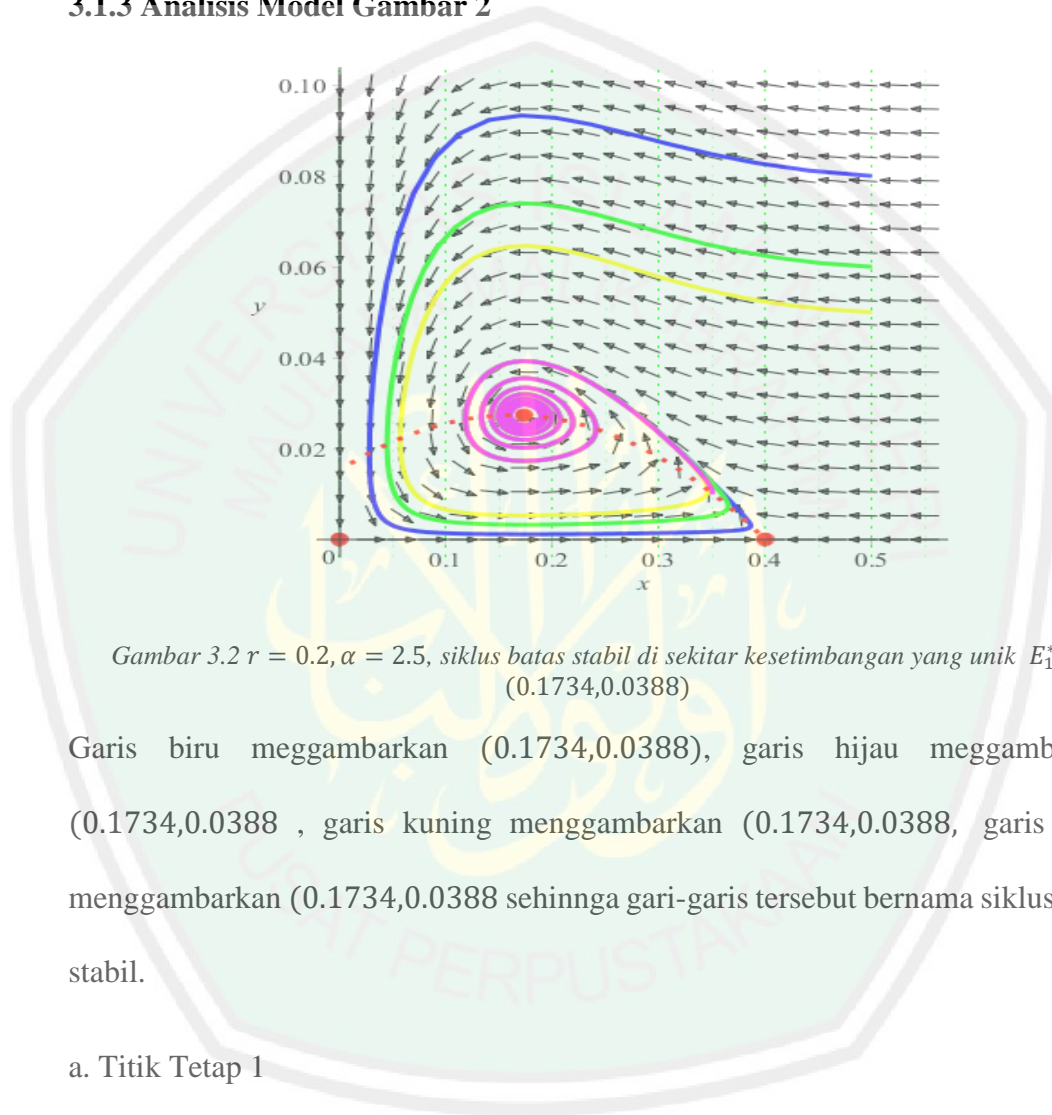
$$J_3 = \begin{bmatrix} -0.00325499048 & -0.2864905948 \\ 0.00793502426 & 0 \end{bmatrix}$$

i. Nilai Eigen Titik Tetap 3

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.00162749524 + 0.0476514541146816I, \lambda_2 \\ &= -0.00162749524 - 0.0476514541146816I\end{aligned}$$

3.1.3 Analisis Model Gambar 2



Gambar 3.2 $r = 0.2, \alpha = 2.5$, siklus batas stabil di sekitar kesetimbangan yang unik $E_1^* = (0.1734, 0.0388)$

Garis biru menggambarkan $(0.1734, 0.0388)$, garis hijau menggambarkan $(0.1734, 0.0388)$, garis kuning menggambarkan $(0.1734, 0.0388)$, garis ungu menggambarkan $(0.1734, 0.0388)$ sehingga garis-garis tersebut bernama siklus batas stabil.

a. Titik Tetap 1

Pada persamaan (3.1) di peroleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Dari persamaan (3.1)

dicari dengan program maple yaitu terdapat pada lampiran, maka titik tetapnya adalah:

$$a. x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$b.x_1 = 0.500000000, y_1 = 0$$

$$c.x_2 = 0.1734435536, y_2 = 0.03888029976$$

b. Linereasisi Titik Model 1

Substitusikan titik tetap $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = 0.1x$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.25$$

c. Matriks Jacobian Titik Tetap 1

Titik tetap pertama $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

d. Nilai Eigen Titik Tetap 1

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.25, \lambda_2 = 0.1$$

e. Linereasisi Titik Model 2

Subsitusikan titik tetap $(x_1^*, y_1^*) = (0.5, 0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + kay^*} - d_1x^* - d_2x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + kay} - d_1$$

$$- 2d_2x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + bax^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* ak}{(1 + kay^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = -0.1x - 0.3814102564y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.0064102564y$$

f. Matriks Jacobian Titik Tetap 2

Titik tetap kedua $(x_1^*, y_1^*) = (0.5, 0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -0.10000000 & -0.31814102564 \\ 0 & 0.0064102564 \end{bmatrix}$$

g. Nilai Eigen Titik Tetap 2

Dari matriks jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = 0.0064102564$$

h. Linereasisi Titik Model 3

Substitusikan titik tetap $(x_2^*, y_2^*) = (0.1734435563, 0.03888029976)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = 0.01005743762x - 0.2894346655y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.01129556946y$$

i. Matriks Jacobian Titik Tetap 3

Titik tetap ketiga $(x_2^*, y_2^*) = (0.1734435563, 0.03888029976)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

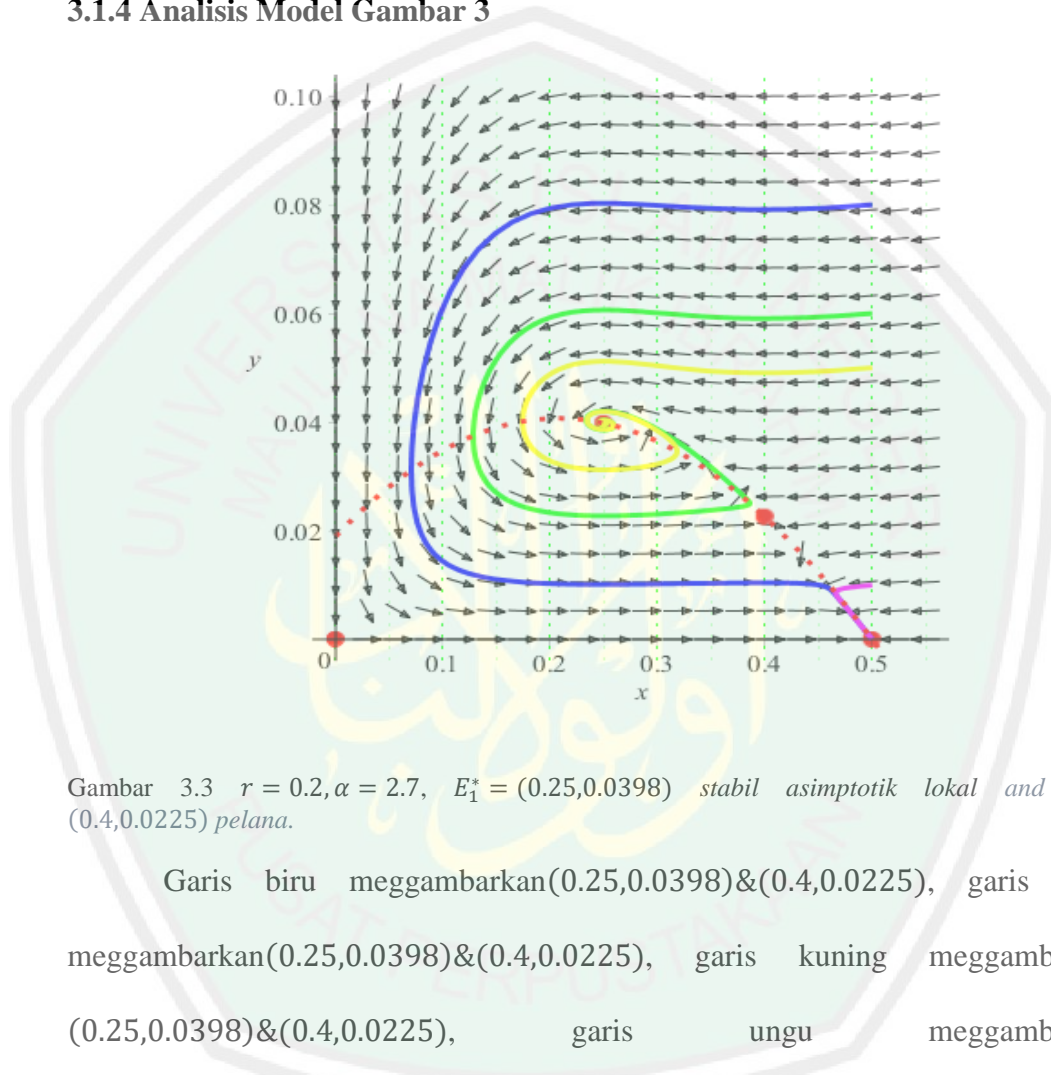
$$J_3 = \begin{bmatrix} -0.01005743762 & -0.2894346655 \\ 0.011295569946 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Nilai Eigen Titik Tetap 3

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.00502871881 + 0.0569564865087118I, \lambda_2 \\ &= 0.00502871881 - 0.0569564865087118I\end{aligned}$$

3.1.4 Analisis Model Gambar 3



Gambar 3.3 $r = 0.2, \alpha = 2.7$, $E_1^* = (0.25, 0.0398)$ stabil asimptotik lokal and $E_2^* = (0.4, 0.0225)$ pelana.

Garis biru menggambarkan $(0.25, 0.0398) \& (0.4, 0.0225)$, garis hijau menggambarkan $(0.25, 0.0398) \& (0.4, 0.0225)$, garis kuning menggambarkan $(0.25, 0.0398) \& (0.4, 0.0225)$, garis ungu menggambarkan $(0.25, 0.0398) \& (0.4, 0.0225)$, sehingga garis-garis tersebut membentuk titik tetap yang dinamakan stabil asimptotik lokal dan pelana

a. Titik Tetap 1

Pada persamaan (3.1) di peroleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Dari persamaan (3.1) dicari dengan program maple yaitu terdapat pada lampiran, maka titik tetapnya adalah:

$$a. x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$b. x_1 = 0.5000000000, y_1 = 0$$

$$c. x_2 = 0.2500000000, y_2 = 0.03980156188$$

$$d. x_3 = 0.4000000000, y_3 = 0.02254729708$$

b. Linereasisi Titik Model 1

Substitusikan titik tetap $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + kay^*} - d_1x^* - d_2x^{2*} - \frac{\beta x^*y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + kay} - d_1$$

$$- 2d_2x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^*y^*(ab + 2x)}{(a + bax^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^*ak}{(1 + kay^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = 0.1x$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^*y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^*y^*(ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.25$$

c. Matriks Jacobian Titik Tetap 1

Titik tetap pertama $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

d. Nilai Eigen Titik Tetap 1

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.25, \lambda_2 = 0.1$$

e. Linerealisasi Titik Model 2

Subsitusikan titik tetap $(x_1^*, y_1^*) = (0.5, 0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1 \\ & - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (\alpha b + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} \\ & + \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = -0.1000000000x - 0.3789024390y$$

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m y^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} \\ & + \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -0.0060975610y$$

f. Matriks Jacobian Titik Tetap 2

Titik tetap kedua $(x_1^*, y_1^*) = (0.5, 0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) :

$$J_2 = \begin{bmatrix} -0.10000000 & -0.03789024390 \\ 0 & -0.0060975610 \end{bmatrix}$$

g. Nilai Eigen Titik Tetap 2

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = 0.0060975610$$

h. Linereasisi Titik Model 3

Subsitusikan titik tetap $(x_2^*, y_2^*) = (0.2500000000, 0.3980156188)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y^*} - d_1 \\ & - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (\alpha b + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} \\ & + \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 0.01318355534x - 0.3107915679y$$

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m y^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} \\ & + \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -0.00298511714$$

i. Matriks Jacobian Titik Tetap 3

Titik tetap ketiga $(x_2^*, y_2^*) = (0.250000000, 0.3980156188)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) :

$$J_3 = \begin{bmatrix} -0.01318355534 & -0.3107915679 \\ 0.0029851174 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Nilai Eigen Titik Tetap 3

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.00659177767000000 + 0.0297371434985766i, \lambda_2 \\ &= 0.00659177767000000 - 0.02977371434985786i \end{aligned}$$

k. Linereasisi Titik Model 4

Subsitusikan titik tetap $(x_3^*, y_3^*) = (0.4, 0.0254729708)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1 \\ &\quad - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (\alpha b + 2x)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} \\ &\quad + \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = -06485103475x - 0.3517136656y$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} \\ &\quad + \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -0.00105690455y$$

l. Matriks Jacobian Titik Tetap 4

Titik tetap keempat $(x_3^*, y_3^*) = (0.4, 0.0254729708)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) :

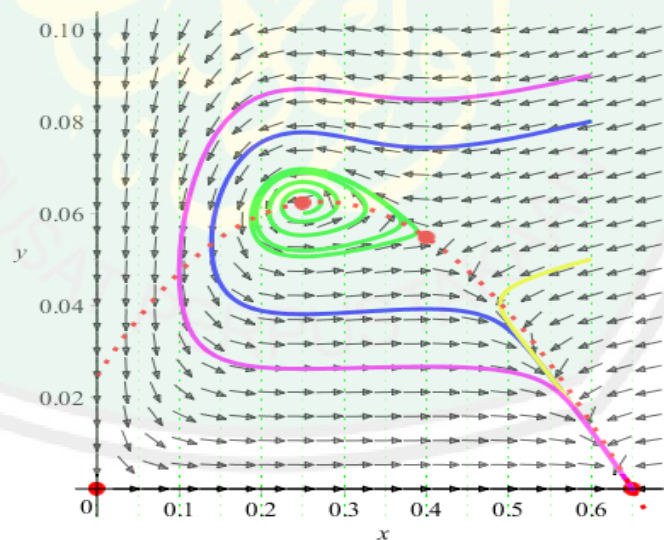
$$J_4 = \begin{bmatrix} 0.06485103475 & -0.3517136656 \\ -0.00105690455 & 0 \end{bmatrix}$$

m. Nilai Eigen Titik Tetap 4

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.0701500710570019, \lambda_2 = 0,00529903630700193$$

3.1.5 Analisis Model Gambar 4



Gambar 3.4 $r = 0.23, \alpha = 2.7$, siklus batas stabil $E_1^* = (0.25, 0.0622)$ and $E_2^* = (0.4, 0.0546)$ pelana.

Garis ungu menggambarkan $(0.25,0.0622)$ & $(0.4,0.0546)$, garis biru menggambarkan $(0.25,0.0622)$ & $(0.4,0.0546)$, garis kuning menggambarkan $(0.25,0.0622)$ & $(0.4,0.0546)$, dan garis hijau menggambarkan $(0.25,0.0622)$ & $(0.4,0.0546)$, sehingga garis-garis tersebut membentuk titik tetap yang bernama siklus batas sabil dan pelana.

a. Titik Tetap 1

Pada persamaan (3.1) di peroleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Dari persamaan (3.1) dicari dengan program maple yaitu terdapat pada lampiran, maka titik tetapnya adalah:

$$a. x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$b. x_1 = 0.6500000000, y_1 = 0$$

$$c. x_2 = 0.2500000000, y_2 = 0.06218654867$$

$$d. x_3 = 0.4000000000, y_3 = 0.05469565144$$

b. Linereasisi Titik Model 1

Substitusikan titik tetap $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{rx^*}{1 + kay^*} - d_1x^* - d_2x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + kay} - d_1 \\ & - 2d_2x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} \\ & + \left(-\frac{rx^* ak}{(1 + kay^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 0.13x$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} \\ + \frac{c\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.25$$

c. Matriks Jacobian Titik Tetap 1

Titik tetap pertama $(x_0^*, y_0^*) = (0, 0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.13 & -0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

d. Nilai Eigen Titik Tetap 1

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.25, \lambda_2 = 0.13$$

e. Linereasisi Titik Model 2

Subsitusikan titik tetap $(x_1^*, y_1^*) = (0.65, 0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + kay^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + kay^*} - d_1 \\ - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} \\ + \left(-\frac{rx^* ak}{(1 + kay^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = -0.130000000x - 0.4339678572y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} + \frac{c\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.0178571428y$$

f. Matriks Jacobian Titik Tetap 2

Titik tetap kedua $(x_1^*, y_1^*) = (0.65, 0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -0.1300000000 & -0.04339678572 \\ 0 & -0.0178571428 \end{bmatrix}$$

g. Nilai Eigen Titik Tetap 2

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.130000000000000, \lambda_2 = 0.017857142800000$$

h. Linereasisi Titik Model 3

Subsitusikan titik tetap $(x_2^*, y_2^*) = (0.2500000000, 0.06218654867)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y} - d_1 - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} + \left(-\frac{rx^* ak}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = 0.00752255750x - 0.3160665515y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m y^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2} + \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.00466399110$$

i. Matriks Jacobian Titik Tetap 3

Titik tetap ketiga $(x_2^*, y_2^*) = (0.250000000, 0.06218654867)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0.00752255750 & -0.3160665515 \\ 0.00466399110 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Nilai Eigen Titik Tetap 3

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.00376127875000000 + 0,0382097417600341I, \lambda_2 \\ &= 0.00376127875000000 - 0.0382097417600341I \end{aligned}$$

l. Linereasisi Titik Model 4

Subsitusikan titik tetap $(x_3^*, y_3^*) = (0.4, 0.05469565144)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y^*} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x)}{(a + bax^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = -0,0432513913x - 0.3577068057y$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.00256385867y$$

m. Matriks Jacobian Titik Tetap 4

Titik tetap keempat $(x_3^*, y_3^*) = (0.400000000, 0.05469565144)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

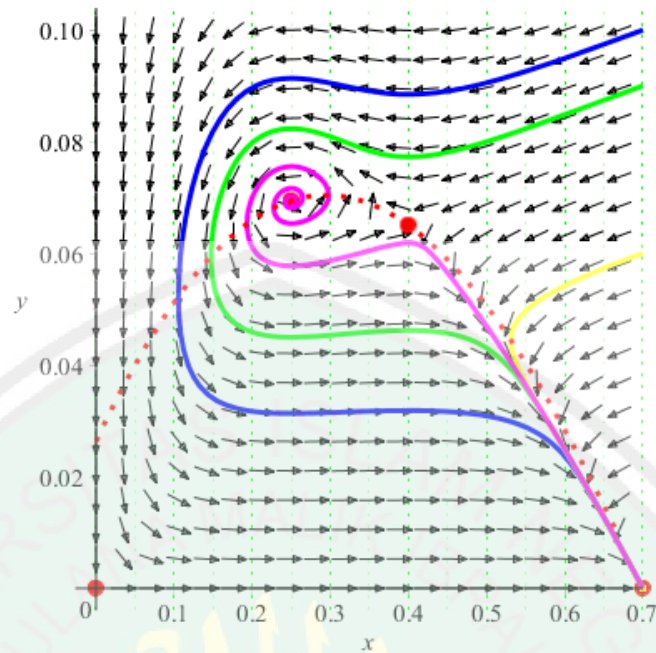
$$J_3 = \begin{bmatrix} -0.04325135913 & -0.3577068057 \\ -0.00256385867 & 0 \end{bmatrix}$$

n. Nilai Eigen Titik Tetap 4

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.05883830795591906, \lambda_2 = 0,01555869488259106$$

3.1.6 Analisis Model Gambar 5



Gambar 3.5 $r = 0.24, \alpha = 2.7, E_1^* = (0.25, 0.0694)$ adalah spiral and $E_2^* = (0.4, 0.0650)$ pelana.

Garis biru menggambarkan $(0.25, 0.0694) \& (0.4, 0.0650)$, garis hijau menggambarkan $(0.25, 0.0694) \& (0.4, 0.0650)$, garis ungu menggambarkan $(0.25, 0.0694) \& (0.4, 0.0650)$, garis kuning menggambarkan $(0.25, 0.0694) \& (0.4, 0.0650)$, sehingga garis-garis tersebut membentuk titik tetap yang dinamakan spiran dan saddle.

a. Titik Tetap 1

Pada persamaan (3.1) di peroleh jika $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$. Dari persamaan (3.1)

dicari dengan program maple yaitu terdapat pada lampiran, maka titik tetapnya

adalah:

$$a. x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$b. x_1 = 0.700000000, y_1 = 0$$

$$c. x_2 = 0.250000000, y_2 = 0.06943195428$$

$$d. x_3 = 0.400000000, y_3 = 0.0650155019$$

b. Linereasisi Titik Model 1

Substitusikan titik tetap $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$f(x, y) = \frac{rx^*}{1 + k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + k\alpha y^*} - d_1$$

$$- 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1 + k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} \right)$$

$$f(x, y) = 0.14x$$

$$g(x, y) = \frac{c\beta x^* y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (\alpha b + 2x^*)}{(a + b\alpha x^* + x^{2*})^2}$$

$$+ \frac{c\beta x^*}{a + b\alpha x^* + x^{2*}} - m$$

$$g(x, y) = -0.25$$

c. Matriks Jacobian Titik Tetap 1

Titik tetap pertama $(x_0^*, y_0^*) = (0,0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.14 & -0 \\ 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

d. Nilai Eigen Titik Tetap 1

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebai berikut:

$$\lambda_1 = -0.25, \lambda_2 = 0.14$$

e. Linereasisi Titik Model 2

Subsitusikan titik tetap $(x_1^*, y_1^*) = (0.70000000000, 0)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{rx^*}{1+kay^*} - d_1x^* - d_2x^{2*} - \frac{\beta x^*y^*}{a+bax^*+x^{2*}} + \frac{r}{1+kay^*} - d_1 \\ & - 2d_2x^* - \frac{\beta y^*}{a+bax^*+x^{2*}} + \frac{\beta x^*y^*(ab+2x)}{(a+bax^*+x^{2*})^2} \\ & + \left(-\frac{rx^*ak}{(1+kay^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a+bax^*+x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = -0.14000000000x - 04548130293y$$

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{c\beta x^*y^*}{a+bax^*+x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a+bax^*+x^{2*}} - \frac{c\beta x^*y^*(ab+2x^*)}{(a+bax^*+x^{2*})^2} \\ & + \frac{c\beta x^*}{a+bax^*+x^{2*}} - m \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -0.21986970700000y$$

f. Matriks Jacobian Titik Tetap 2

Titik tetap kedua $(x_1^*, y_1^*) = (0.70000000000, 0)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -0.140000000000 & -0.4548130293 \\ 0 & -0.0219869707 \end{bmatrix}$$

g. Nilai Eigen Titik Tetap 2

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.140000000000000, \lambda_2 = -0.0219869707$$

h. Linereasisi Titik Model 3

Substitusikan titik tetap $(x_2^*, y_2^*) = (0.2500000000, 0.06943195428)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{rx^*}{1+k\alpha y^*} - d_1 x^* - d_2 x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a+b\alpha x^*+x^{2*}} + \frac{r}{1+k\alpha y^*} - d_1 \\ & - 2d_2 x^* - \frac{\beta y^*}{a+b\alpha x^*+x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab+2x)}{(a+b\alpha x^*+x^{2*})^2} \\ & + \left(-\frac{rx^* \alpha k}{(1+k\alpha y^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a+b\alpha x^*+x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 0.01422455780x - 0.3177114755y$$

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \frac{c\beta x^* y^*}{a+b\alpha x^*+x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a+b\alpha x^*+x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab+2x^*)}{(a+b\alpha x^*+x^{2*})^2} \\ & + \frac{c\beta x^*}{a+b\alpha x^*+x^{2*}} - m \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -0.00520739660y$$

i. Matriks Jacobian Titik Tetap 3

Titik tetap ketiga $(x_2^*, y_2^*) = (0.2500000000, 0.06943195428)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0.01422455780 & -0.3177114755 \\ 0.00520739660 & 0 \end{bmatrix}$$

j. Nilai Eigen Titik Tetap 3

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.007112278900000 + 0.0400482851836168I, \lambda_2 \\ &= 0.007112278900000 - 0.0400482851836168I \end{aligned}$$

k. Linereasisi Titik Model 4

Substitusikan titik tetap $(x_3^*, y_3^*) = (0.400000000, 0.6501550193)$ ke dalam persamaan (3.6) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{rx^*}{1 + kay^*} - d_1x^* - d_2x^{2*} - \frac{\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{r}{1 + kay^*} - d_1 \\ &\quad - 2d_2x^* - \frac{\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} + \frac{\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} \\ &\quad + \left(-\frac{rx^* ak}{(1 + kay^*)^2} - \frac{\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} \right) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = -0,03613770975x - -0.3595292481y$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{c\beta x^* y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - my^* + \frac{c\beta y^*}{a + bax^* + x^{2*}} - \frac{c\beta x^* y^* (ab + 2x^*)}{(a + bax^* + x^{2*})^2} \\ &\quad + \frac{c\beta x^*}{a + bax^* + x^{2*}} - m \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -0.00304760615y$$

l. Matriks Jacobian Titik Tetap 4

Titik tetap keempat $(x_3^*, y_3^*) = (0.40000000, 0.6501550193)$ dari matriks jacobian akan dianalisis titik kestabilannya lalu disubsitusikan ke dalam persamaan (3.6) yaitu:

$$J_3 = \begin{bmatrix} -0.03631770975 & -0.3595292881 \\ -0.00304760165 & 0 \end{bmatrix}$$

m. Nilai Eigen Titik Tetap 4

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka nilai eigen diperoleh dari program maple adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.05591393332102933, \lambda_2 = 0,0195962234602933$$

3.1.7 Pembuktian Teorema

Teorema 1

(a) Sistem (3.1) tidak memiliki interior steady states jika dan hanya jika mengikuti kondisi di bawah ini:

$$\frac{ma}{x_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} \leq c\beta - mba \text{ atau } c\beta - mba < 2m\sqrt{a}$$

Bukti, dari x_i dalam persamaan (3.2) didapatkan:

$$x_i > 0 \text{ jika } c\beta - mba > 0 \text{ dan } (c\beta - mba)^2 \geq 4m^2a$$

$$x_i > 0 \text{ jika } c\beta - mba > 2m\sqrt{a}$$

Dengan metode *Descartes sign rule*, kita bisa mengetahui bahwa bilangan (3.3) memiliki lebih dari satu akar real positif untuk nilai yang cocok dari parameter

dan variabel x di bawah. Kita bisa mengganti koefisien dari persamaan (3.3) sebagai berikut:

$$C_1 = m^2 k \alpha (> 0)$$

$$C_2 = [(c^2 \beta d_2 + c m d_1 - m b a c d_2) x - m a c d_2] k \alpha + m^2 \quad (3.7)$$

$$C_3 = [(c^2 \beta d_2 + c m d_1 - m b a c d_2) x - m a c d_2] - c m r x$$

Sekarang $C_3 > 0 \rightarrow (c^2 \beta d_2 + c m d_1 - m b a c d_2) x - m a c d_2 > c m r x$

$$\rightarrow [(c^2 \beta d_2 + c m d_1 - m b a c d_2) x - m a c d_2] k \alpha + m^2 > c m r x k \alpha + m^2$$

$$\rightarrow C_2 > (c r k \alpha x + m > 0$$

Kemudian, dari metode *Descartes sign rule*, persamaan (3.7) tidak bisa mempunyai solusi akar

positif jika $C_3 > 0$, kemudian persamaan tersebut memiliki akar unik positif jika dan hanya jika

$C_3 < 0$, dimana memberikan $c \beta - m b \alpha < \frac{m \alpha}{x} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$. Itulah sebabnya $\frac{m \alpha}{x_1} +$

$$\frac{m(r-d_1)}{d_2} \leq c \beta - m b \alpha \text{ atau } c \beta - m b \alpha < 2m\sqrt{a}.$$

(b) Persamaan (3.1) memiliki *unique interior stedy state* jika $E_1^* = (x_1, y_1)$ jika mengikuti kondisi dibawah ini:

$$\max \left\{ 2m\sqrt{a}, \frac{m \alpha}{x_2} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} \right\} < c \beta - m b \alpha < \frac{m \alpha}{x_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$$

(c) persamaan (3.1) memiliki *two interior steady states* $E_1^* = (x_1, y_1)$ dan $E_2^* = (x_2, y_2)$ mengikuti kondisi dibawah ini:

$$2m\sqrt{a} < c\beta - mba < \frac{ma}{x_2} + \frac{m(r - d_1)}{d_2}$$

Caranya dengan $2m\sqrt{a}$ ditambah dengan persamaan $C_3 = c\beta - mba < \frac{ma}{x_2} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$.

Teorema 2

Persamaan (3.1) memiliki titik equilibrium E_0 adalah stabil asimptotik local jika $r - d_1 < 0$. Faktanya, E_0 adalah stabil asimptotik global dibawah kondisi ini.

Bukti:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -d_1 + r & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -d_1 + r - \lambda & 0 \\ 0 & -m - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda + d_1 - r)(\lambda + m) = 0$$

$$\lambda_1 = r - d_1 \text{ dan } \lambda_2 = -m$$

Nilai eigen dari titik tetap E_0 diberikan $\lambda_1 = r - d_1$ dan $\lambda_2 = -m > 0$, itu yang menyebabkan E_0 adalah stabil simptomik global $r - d_1, = 0$.

Teorema 3

Titik equilibrium unique prey E_1 adalah locally asymptotically stable jika $r - d_1 > 0$ dan $c\beta - mba < \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$. Walaupun, E_1 adalah globally asymptotically ketika $r - d_1 > 0$ dan $c\beta - mba < 2m\sqrt{a}$. Pada kenyataannya, E_1 adalah globally asymptotically stable ketika $r - d_1 > 0, c\beta - mba < \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$ dan $\frac{r-d_1}{d_2} < \sqrt{a}$.

Bukti: Nilai eigen untuk axial equilibrium E_1 adalah $\lambda_1 = -(r - d_1) (< 0)$ dan $\lambda_2 = r - \frac{d_1[d_2(c\beta - mba) - m(r-d_1) - mad_2]}{abd_2(r-d_1) + (r-d_1)^2 + ad_2^2}$, dimana $\lambda_2 < 0$ jika $(r - d_1)[d_2(c\beta - mba) - m(r - d_1)] < mad_2^2$, jika $c\beta - mba < \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$. Kemudian E_1 adalah asymptotically stable jika $r - d_1 > 0$ dan $c\beta - mba < \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$.

Dari (3.1), kita bisa mendefinisikan $g(x)$ sebagai berikut:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \frac{c\beta x}{a + bax + x^2} - m = g(x)$$

Dengan $g(x)$ adalah maximum $x = \sqrt{a}$, pertama $\frac{r-d_1}{d_2} \geq \sqrt{a}$.

$$\begin{aligned} g(\sqrt{a}) &= \frac{c\beta\sqrt{a}}{2a + b\alpha\sqrt{a}} - m \\ &= \frac{\sqrt{a}(c\beta - mba - 2m\sqrt{a})}{2a + b\alpha\sqrt{a}} \end{aligned}$$

dengan mengasumsikan $c\beta - mba < 2m\sqrt{a}$, dengan $\epsilon = 2m\sqrt{a} - (c\beta - mba) > 0$, kita memiliki

$$g(\sqrt{a}) = -\frac{\epsilon\sqrt{a}}{2a + b\alpha\sqrt{a}} < 0$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = g(x) \leq -\frac{\epsilon\sqrt{a}}{2a+b\alpha\sqrt{a}} = -\bar{\epsilon}, \text{ dengan } \bar{\epsilon} > 0$$

$$= y(t) \leq C e^{\bar{\epsilon}t} \text{ untuk } C > 0$$

$$= y(t) \rightarrow 0, \text{ dan } t \rightarrow \infty$$

Sekarang kita membutuhkan subsequence $((x(t), y(t)))$ dengan E_0 , dengan memilih $\epsilon_y > 0$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &= \text{sgn}\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dy}\right) \Big|_{y = \epsilon_y} \\ &= \text{sgn}\left(\frac{r}{1 + k\alpha\epsilon_y} - d_1 - d_2x - \frac{\beta\epsilon_y}{a + bax + x^2}\right) \\ &= \text{sgn}[r(a + bax + x^2) - (d_1 + d_2x)(1 + k\alpha\epsilon_y)(a + bax + x^2) - \beta\epsilon_y(1 \\ &\quad + k\alpha\epsilon_y)] \\ &= \text{sgn}[-\beta k\alpha\epsilon_y^2 - (k\alpha(d_1 + d_2x)(a + bax + x^2) + \beta)\epsilon_y + (a + bax + x^2)(r \\ &\quad - d_1 - d_2x)] \\ &> 0 \forall x < \frac{r-d_1}{d_2} \text{ dan lebih kecil dari } \epsilon_y > 0 \\ &> 0 \forall x < \frac{r-d_1}{d_2} \text{ dan lebih kecil } y > 0 \end{aligned}$$

Ini merupakan bukti tidak ada solusi untuk E_0 , ketika $x = \frac{r-d_1}{d_2}$ dan lebih kecil dari

$y = 0$. Semenjak $y(t) \rightarrow 0$ seperti $t \rightarrow \infty$, kita memiliki:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow (r - d_1)x - d_2x^2,$$

$$x(t) \rightarrow \frac{r - d_1}{d_2}$$

Selanjutnya bisa ditulis dengan:

$$\frac{mad_2}{r - d_1} + \frac{m(r - d_1)}{d_2} - 2m\sqrt{a} = \frac{m(r - d_1 - \sqrt{ad_2})^2}{d_2(r - d_1)} > 0.$$

Kemudian dimasukan $2m\sqrt{a} < \frac{mad_2}{r - d_1} + \frac{m(r - d_1)}{d_2}$, sekarang $c\beta - mba < \sqrt{a}$

selanjutnya

$$c\beta - mba < \frac{mad_2}{r - d_1} + \frac{m(r - d_1)}{d_2}$$

Inilah sebabnya E_1 disebut globally asymptotically stable jika $c\beta - mba < 2m\sqrt{a}$.

Selanjutnya $\frac{(r - d_1)}{d_2} < \sqrt{a}$, itulah sebabnya lebih memudahkan $g\left(\frac{r - d_1}{d_2}\right) < 0$, jika

$c\beta - mba < \frac{amd_2}{r - d_1} + \frac{m(r - d_1)}{d_2}$. Itulah sebabnya $\sup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \frac{r - d_1}{d_2}$. Kemudian

$y(t) \rightarrow 0$ seperti $t \rightarrow \infty$. Dengan begitu kita membuktikan E_1 adalah globally

asymptotically $c\beta - mba < \frac{amd_2}{r - d_1} + \frac{m(r - d_1)}{d_2}$ ketika $\frac{r - d_1}{d_2} < \sqrt{a}$.

Teorema 4

Interior equilibrium E_1^* adalah stabil asymptotic local jika $2m\sqrt{a} < c\beta - mba <$

$\frac{ma}{x_1} + \frac{m(r - d_1)}{d_2}$ dan $y_1 < \frac{d_2 c^2 \beta x_1^2}{m^2 (b\alpha + 2x_1)}$, kemudian akan diketahui interior equilibrium

E_2^* adalah saddle.

Pembuktian, sekarang diketahui matriks jacobian dari titik tetap sebagai berikut:

$$J_{Ei}^* = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_i \left(\frac{\beta y_i (b\alpha + 2x_i)}{(a + b\alpha x_i + x_i^2)^2} - d_2 \right) & -x_i \left(\frac{rk\alpha}{1 + k\alpha y_i} + \frac{\beta}{a + b\alpha x_i + x_i^2} \right) \\ \frac{c\beta y_i (a - x_i^2)}{(a + b\alpha x_i + x_i^2)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian persamaan karakteristik dari titi tetap tersebut adalah:

$$\lambda^2 - J_{11}\lambda - J_{12}J_{21} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{x_i [d_2 (a + b\alpha x_i + x_i^2)^2 - \beta y_i (b\alpha + 2x_i)]}{(a + b\alpha x_i + x_i^2)^2} \lambda + \frac{c\beta x_i y_i (a - x_i^2) [rk\alpha (a + b\alpha x_i + x_i^2) + \beta (1 + k\alpha y_i)^2]}{(a + b\alpha x_i + x_i^2)^3 (1 + k\alpha y_i)^3} = 0 \quad (3.8)$$

Akar akan menjadi negatif riil atau kompleks konjugasi dengan riil negatif jika;

$$x_i^2 < a \text{ dan } y_i < \frac{d_2 (a + b\alpha x_i + x_i^2)^2}{\beta (b\alpha + 2x_i)} = \frac{d_2 c^2 \beta x_i^2}{m^2 (b\alpha + 2x_i)}$$

Walaupun, x_2^2 tidak bisa kurang dari a . faktanya $x_2^2 < a$ implikasi $[(c\beta - m\beta\alpha)^2 - 4m^2a] + (c\beta - m\beta\alpha) \times \sqrt{(c\beta - m\beta\alpha)^2 - 4m^2a} < 0$ tidak mungkin.

kemudian E_2^* selalu unstable. Di lain sisi $x_1^2 < a$ implikasi $(c\beta - m\beta\alpha)^2 > 4m^2a$

yang selalu ada, kemudian titik tetap E_1^* adalah stabil asymptotic local ketika berada

pada kondisi $y_1 < \frac{d_2 c^2 \beta x_1^2}{m^2 (b\alpha + 2x_1)}$. Lalu E_1^* dijadikan Hopf-bifurkasi ketika nilai

eigennya kompleks konjugasi dengan bagian riil 0. $\lambda(\alpha) = \lambda_r(\alpha) + i\lambda_i(\alpha)$ menjadi

nilai eigen pada persamaan (3.8). Setelah disubstitusi nilai $\lambda(\alpha)$ pada persamaan

(3.4) maka persamaan tersebut menjadi :

$$\lambda_r^2 - \lambda_i^2 - J_{11}\lambda_r - J_{12}J_{21} = 0$$

$$2\lambda_r\lambda_i - J_{11}\lambda_i = 0$$

Pada Hopf-bifurkasi, memiliki $\lambda_r(\alpha) = 0$. Kemudian dijadikan $\alpha_H, \lambda_r(\alpha_H) = 0$, dan $\lambda_r = 0$ di persamaan (3.8), maka dari itu:

$$\lambda_i^2 + J_{12}J_{21} = 0$$

$$J_{11}\lambda_i = 0 \text{ dimana } \lambda_i \neq 0$$

Kemudian dari persamaan di atas kita memiliki $J_{11}(\alpha_H) = 0$ dan $\lambda_i(\alpha_H) =$

$$\sqrt{-J_{12}(\alpha_H)J_{21}(\alpha_H)} > 0, \det(J_{E_1}^*)|_{\alpha = \alpha_H} = -J_{12}(\alpha_H)J_{21}(\alpha_H) > 0$$

Inilah hopf-bifurkasi, kita memiliki:

$$J_{11}(\alpha_H) = 0, \alpha_H = \frac{[\beta y_1 - 2d_2x_1(a + x_1^2)] \pm \sqrt{\beta y_1[\beta y_1 - 4d_2x_1(a - x_1^2)]}}{2d_2bx_1^2}$$

Dari persamaan (3.5) didapatkan α dan diambil $\lambda_r(\alpha) = 0$, kita memiliki

$$-J_{11} \frac{d(\lambda_r)}{d\alpha} - 2\lambda_i \frac{d(\lambda_i)}{d\alpha} = \frac{d(J_{12}J_{21})}{d\alpha}$$

$$2\lambda_i \frac{d(\lambda_r)}{d\alpha} - J_{11} \frac{d(\lambda_r)}{d\alpha} = \lambda_i \frac{d(J_{11})}{d\alpha}$$

Dengan menemukan pada persamaan di atas, memiliki :

$$\left. \frac{d(\lambda_r)}{d\alpha} \right|_{\alpha = \alpha_H} = \frac{2\lambda_i^2 \frac{d(J_{11})}{d\alpha} - J_{11} \frac{d(J_{12}J_{21})}{d\alpha}}{J_{11}^2 + 4\lambda_i^2} \Big|_{\alpha = \alpha_H} \neq 0$$

$$\left[2\lambda_i^2 \frac{d(J_{11})}{d\alpha} - J_{11} \frac{d(J_{12}J_{21})}{d\alpha} \right] \Big|_{\alpha = \alpha_H} \neq 0$$

Teorema 5

Jika $\det(J_{E_1}^*)|_{\alpha = \alpha_H} = -J_{12}(\alpha_H)J_{21}(\alpha_H) > 0$, dan $\frac{d(\lambda_r(\alpha))}{d\alpha}|_{\alpha = \alpha_H} \neq 0$, kemudian titik equilibrium E_1^* pada model (3.1) adalah stabil asymptotic local ketika $\alpha < \alpha_H$, dan dibawah Hopf-bifurkasi E_1^* ketika $\alpha = \alpha_H$.

Teorema 6

Definisikan L sebagai:

$$L := 3f_{xxx}f_y^2 - f_y g_x f_{xyy} + \left(2\sqrt{-f_y g_x f_{xyy} y_1 - f_{xy} - 2f_{xxy} f_y x_1} \right)$$

$$\left[f_{xx} f_y + 3f_{xxx} f_y^2 x_1 - g_x f_{yy} - f_y g_x f_{xyy} x_1 - \sqrt{-f_y g_x (f_y f_{xxy} - 3g_x f_{yyy}) y_1} \right]$$

Kemudian hopf bifurkasi adalah supertikal jika $L < 0$ dan subcritical jika $L > 0$, dimana:

$$f_y = J_{12} = -\frac{rx_1 k \alpha}{(1 + k \alpha y_1)^2} - \frac{\beta x_1}{a + b \alpha x_1 + x_1^2}$$

$$f_{xx} = -2d_2 + \frac{2\beta y_1 (b \alpha + 2x_1)}{(a + b \alpha x_1 + x_1^2)^2} - \frac{2\beta x_1 y_1 (b \alpha + 2x_1)^2}{(a + b \alpha x_1 + x_1^2)^3} + \frac{2\beta x_1 y_1}{(a + b \alpha x_1 + x_1^2)^2}$$

$$f_{xy} = -\frac{rk \alpha}{(1 + k \alpha y_1)^2} - \frac{\beta}{(a + b \alpha x_1 + x_1^2)} + \frac{x_1 \beta (b \alpha + 2x_1)}{(a + b \alpha x_1 + x_1^2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2x_1 r k^2 \alpha^2}{(1 + k \alpha x_1)^3}$$

$$f_{xxx} = -\frac{6\beta y_1 (ba + 2x_1)^2}{(a + bax_1 + x_1^2)^3} + \frac{6\beta y_1}{(a + bax_1 + x_1^2)^2} + \frac{6\beta x_1 y_1 (ba + 2x_1)^3}{(a + bax_1 + x_1^2)^4} - \frac{12\beta x_1 y_1 (ba + 2x_1)}{(a + bax_1 + x_1^2)^3}$$

$$f_{xxy} = \frac{2\beta (ba + 2x_1)}{(a + bax_1 + x_1^2)^2} - \frac{2\beta x_1 (ba + 2x_1)^2}{(a + bax_1 + x_1^2)^3} + \frac{2\beta x_1}{(a + bax_1 + x_1^2)^2}$$

$$f_{xyy} = \frac{2rk^2 \alpha^2}{(1 + k\alpha y_1)^3}$$

$$f_{yyy} = -\frac{6x_1 rk^3 \alpha^3}{(1 + k\alpha y_1)^4}$$

$$g_x = J_{21} = \frac{c\beta y_1}{(a + bax_1 + x_1^2)} - \frac{c\beta x_1 y_1 (ba + 2x_1)}{(a + bax_1 + x_1^2)^2}$$

Pada persamaan (3.1) adalah bi-stable antara titik equilibrium E_1 dan E_1^* pada persamaan berikut;

$$r - d_1 > 0, 2m\sqrt{a} < c\beta - mba < \min\left\{\frac{ma}{x_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}, \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}\right\} \text{ dan } y_1 < \frac{d_2 c^2 \beta x_1^2}{m^2 (ba + 2x_1)}$$

Dengan mengikuti parameter dengan nilai $\alpha = 2.7, r = 0.2, k = 0.5, d_1 = 0.1, d_2 = 0.2, \beta = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1$, dan $m = 0.25$, maka memiliki:

$$r - d_1 = 0.1, y_1 = 0.0398 < \frac{d_2 c^2 \beta x_1^2}{m^2 (ba + 2x_1)} = 0.2250$$

Dan

$$2m\sqrt{a} = 0.1581 < c\beta - mba = 0.1625$$

$$< \left\{ \frac{ma}{x_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} = 0.2250, \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} = 0.175 \right\}$$

Teorama 7

- a. Ketika dua interior titik tetap E_1^* dan E_2^* , adalah hanya prey maka titik tetap E_1^* adalah stabil local asimptotik.
- b. Ketika titik tetap unik E_1^* , hanya prey maka titik tetap E_1^* adalah tidak stabil.

Pembuktian

- a. Dua titik tetap ada jika;

$$2m\sqrt{a} < c\beta - mba < \frac{ma}{x_i} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}; i = 1,2 \quad (3.9)$$

$$\frac{r}{1+k\alpha y} - d_1 - d_2 x_i - \frac{\beta y}{a + b\alpha x_i + x_i^2} = 0$$

$$\frac{r}{1+k\alpha y} - d_1 - d_2 x_i \geq 0$$

$$r - d_1 - d_2 x_i > 0$$

$$\frac{1}{x_i} > \frac{d_2}{r-d_1}$$

Sekarang, hanya prey titik tetap E_1 adalah stabil asimptotik local jika:

$$c\beta - mba < \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$$

$$c\beta - mba < \frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} < \frac{ma}{x_i} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}; i = 1,2 \quad (3.10)$$

$$\frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} < c\beta - mba < \frac{ma}{x_i} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}; i = 1,2 \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.11) didapatkan:

$$\frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} < c\beta - mba$$

$$m(r-d_1)^2 - (c\beta - mba)d_2(r-d_1) + mad_2^2 < 0$$

$$\frac{(c\beta - mba)d_2 - \sqrt{(c\beta - mba)^2 d_2^2 - 4m^2 ad_2^2}}{2m} < r - d_1$$

$$< \frac{(c\beta - mba)d_2 + \sqrt{(c\beta - mba)^2 d_2^2 - 4m^2 ad_2^2}}{2m}$$

$$d_2 x_1 < r - d_1 < d_2 x_2$$

Dari persamaan (3.1) diperoleh:

$$(c\beta - mba)x_i = mx_i^2 + am; i = 1,2.$$

Dengan menggunakan persamaan di atas persamaan (3.11) menjadi:

$$c\beta - mba < \frac{ma}{x_i} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}; i = 1,2$$

$$(mx_i^2 + am) d_2 < mad_2 + m(r-d_1)x_i; i = 1,2$$

$$d_2 x_i < r - d_1; i = 1,2$$

$$d_2 x_2 < r - d_1.$$

Berdasarkan (3.11) kiri dan kanan berkontradiksi satu sama lain. Persamaan (3.9) dan (3.10) menyebutkan bahwa E_1 adalah stabil asimtotik lokal dengan dua titik equilibrium.

(b). pada persamaan (3.1) memiliki titik equilibrium unik dengan mengikuti:

$$\max \left\{ 2m\sqrt{a}, \frac{ma}{x_2} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} \right\} < c\beta - mba < \frac{ma}{x_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$$

Kemudian $x_i (i = 1, 2)$ dengan persamaan (3.1) diberikan $\frac{1}{x_1} > \frac{d_2}{r-d_1}$ dan $\frac{1}{x_2} > \frac{d_2}{r-d_1}$,

kemudian

$$\frac{mad_2}{r-d_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} < \frac{ma}{x_2} + \frac{m(r-d_1)}{d_2} < c\beta - mba,$$

Oleh karena itu E_1 disebut tidak stabil jika titik tetapnya E_1^* .

Teorema 8

Titik tetap E_1^* adalah stabil asymptotic global jika $y_1 < \frac{d_2 c^2 \beta x_1^2}{m^2 (b\alpha + 2x_1)}$ dan $0 < r - d_1 <$

$\min \left\{ d_2 b\alpha, \frac{ad_2}{b\alpha} \right\}$, E_1^* adalah stabil asymptotic global jika $\max \left\{ 2m\sqrt{a}, \frac{ma}{x_2} + \right.$

$\left. \frac{m(r-d_1)}{d_2} \right\} < c\beta - mba < \frac{ma}{x_1} + \frac{m(r-d_1)}{d_2}$, $y_1 < \frac{d_2 c^2 \beta x_1^2}{m^2 (b\alpha + 2x_1)}$ dan $0 < r - d_1 <$

$\min \left\{ d_2 b\alpha, \frac{ad_2}{b\alpha} \right\}$.

Pembuktian

Pertama, akan dilakukan substitusi $dt = (a + bax + x^2)d\tau$, kemudian model (3.1)

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(\frac{rx}{1+k\alpha y} - d_1 x - d_2 x^2 \right) (a + bax + x^2) - \beta xy \quad (3.12)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = c\beta xy - my(a + bax + x^2)$$

menjadi:

Dengan menggunakan persamaan Dulac $D(x, y) = \frac{1}{xy}$ digunakan di persamaan (3.12),

$$\begin{aligned} \operatorname{div}|_{PD, QD} &= \frac{\partial}{\partial x}(P(x, y)D(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y}(Q(x, y)D(x, y)) \\ &= \frac{1}{y} \left[-3d_2x^2 - 2 \left(d_1 + d_2b\alpha - \frac{r}{1+k\alpha y} \right) x - \left(ad_2 + d_1b\alpha - \frac{rb\alpha}{1+k\alpha y} \right) \right], \end{aligned}$$

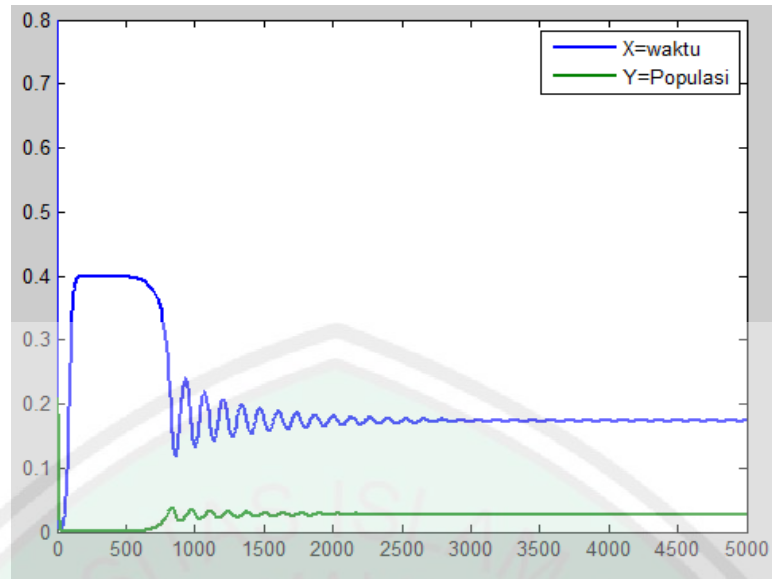
Dimana;

$$P(x, y) = \left(\frac{rx}{1+k\alpha y} - d_1x - d_2x^2 \right) (a + bax + x^2) - \beta xy \text{ dan } Q(x, y) = c\beta xy - my(a + bax + x^2).$$

Sekarang jika $d_1 + d_2b\alpha - r > 0$ ($r - d_1 < d_2b\alpha$) dan $ad_2 + d_1b\alpha - rba > 0$ ($r - d_1 < \frac{ad_2}{b\alpha}$) kemudian $d_1 + d_2b\alpha - \frac{r}{1+k\alpha y} > 0$ dan $ad_2 + d_1b\alpha - \frac{rb\alpha}{1+k\alpha y} > 0$ dan untuk setiap $y \geq 0$. dan

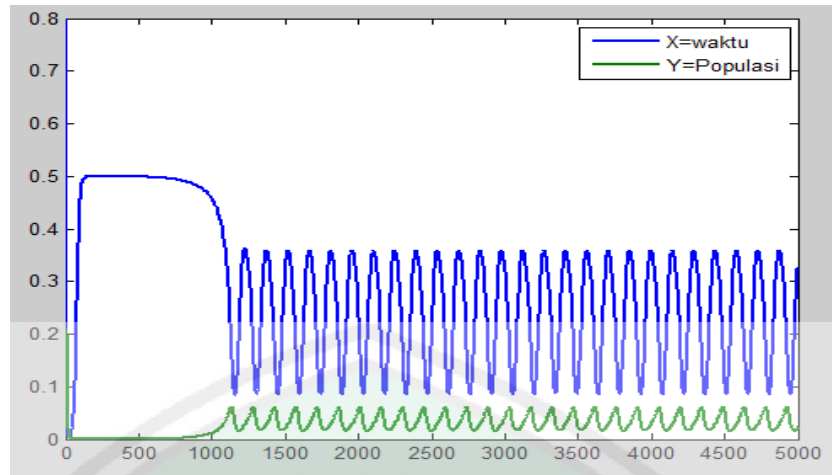
Dua kondisi tersebut cocok untuk $\operatorname{div}|_{PD, QD} < 0$ di $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$. Itulah sebabnya kriteria Dulac adalah teorema 2,4 dan 7, maka dari itu E_1^* adalah stabil asymptotic global jika $0 < r - d_1 < \min \left\{ d_2b\alpha, \frac{ad_2}{b\alpha} \right\}$.

3.2 Simulasi Model Predator-prey dengan Pendekatan Fungsi Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok



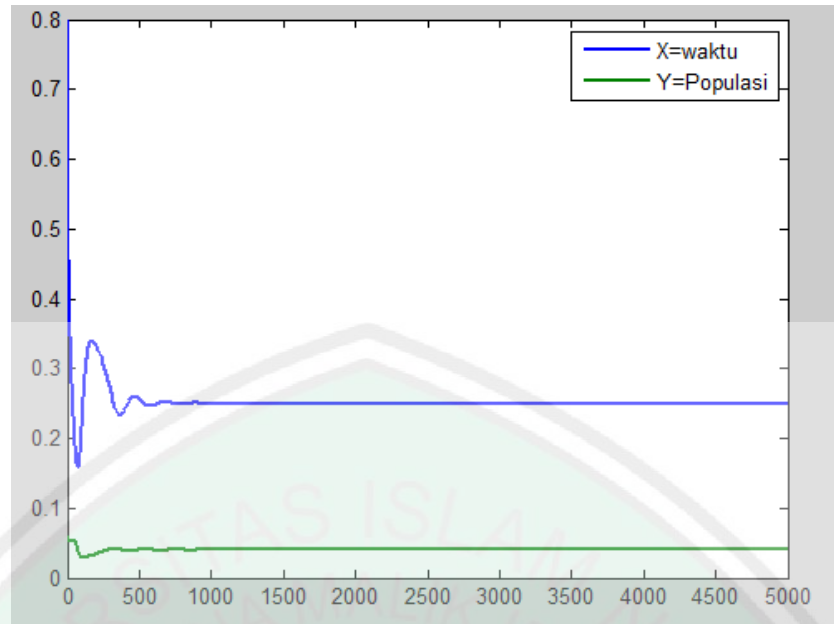
Gambar 3.6 $r = 0.18, \alpha = 2.5$, titik equilibrium unik $E_1^* = (0.1734, 0.0273)$ adalah stabil asimtotik local

Plot pada gambar 3.6 menunjukkan bahwa semakin banyak waktu yang dibutuhkan untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan untuk mencari makanan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat reproduksi populasi mangsa. Pada plot 3.6 tersebut X melambangkan waktu dan Y melambangkan populasi. Misalnya pada gambar tersebut dibutuhkan waktu 500 hari untuk pertahan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.4 spesimen. Kemudian waktu yang dibutuhkan adalah 2000 hari untuk melakukan pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk mencari makanan. Akibatnya semakin terjadi kelaparan dan hal tersebut juga menghambat populasi mangsa 0.2 spesimen.



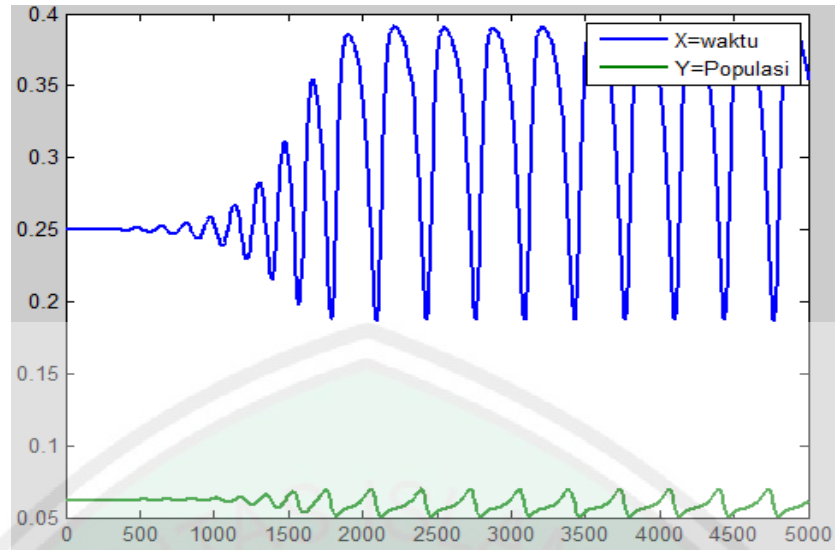
Gambar 3.7 $r = 0.2, \alpha = 2.5$, siklus batas stabil di sekitar kesetimbangan yang unik $E_1^* = (0.1734, 0.0388)$

plot pada gambar 3.7 dibutuhkan waktu 1500 hari untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.38 spesimen. Kemudian waktu yang dibutuhkan adalah 2000 hari untuk melakukan pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk mencari makanan. Akibatnya semakin terjadi kelaparan dan hal tersebut juga menghambat populasi mangsa 0.3 spesimen.



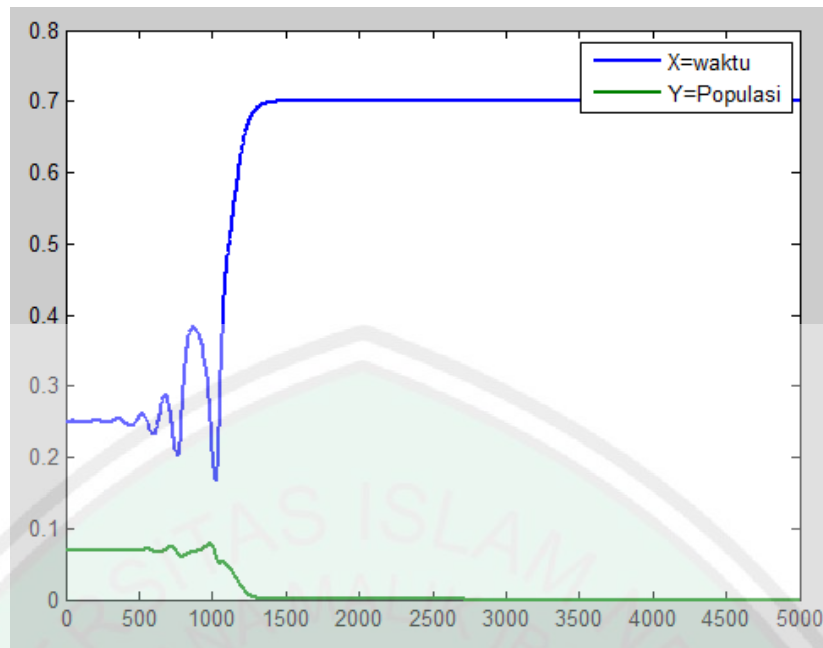
Gambar 3.8 $r = 0.2$, $\alpha = 2.7$, $E_1^* = (0.25, 0.0398)$ stabil asimtotik lokal and $E_2^* = (0.4, 0.0225)$ pelana

Plot pada gambar 3.8 dibutuhkan waktu 250 hari untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.35 spesimen. Kemudian waktu yang dibutuhkan adalah 2000 hari untuk melakukan pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk mencari makanan. Akibatnya semakin terjadi kelaparan dan hal tersebut juga menghambat populasi mangsa 0.25 spesimen.



Gambar 3.9 $r = 0.23$, $\alpha = 2.7$, siklus batas stabil $E_1^* = (0.25, 0.0622)$ and $E_2^* = (0.4, 0.0546)$ pelana.

Plot pada gambar 3.9 dibutuhkan waktu 1500 hari untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.3 spesimen. Kemudian waktu yang dibutuhkan adalah 3000 hari untuk melakukan pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk mencari makanan. Akibatnya semakin terjadi kelaparan dan hal tersebut juga menghambat populasi mangsa 0.4 spesimen.



Gambar 3.10 $r = 0.24$, $\alpha = 2.7$, $E_1^* = (0.25, 0.0694)$ adalah spiral and $E_2^* = (0.4, 0.0650)$ pelana.

Plot pada gambar 3.10 dibutuhkan waktu 500 hari untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.25 spesimen. Kemudian waktu yang dibutuhkan adalah 1000 hari untuk melakukan pertahanan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk mencari makanan. Akibatnya semakin terjadi kelaparan dan hal tersebut juga menghambat populasi mangsa 0.7 spesimen.

3.3 Analisis Keseimbangan dalam Persepektif Islam

Ayat Al Quran ternyata sudah membuat beraneka macam tentang betapa pentingnya merawat serta menjaga pelestarian satwa dan kestimbangan ekosistem.

Ayat-ayat tersebut menjelaskan betapa pentingnya peran manusia sebagai khalifah di muka bumi ini, untuk ikut serta dalam melindungi dan menyelamatkan satwa-satwa tersebut dari kepunahan. Beberapa dari ayat Al Quran yang menjelaskan betapa pentingnya melestarikan hewan-hewan langka agar tidak punah diantara:

“Wamma min daabbatin fil ardhi walaa thaa-irinyathiiru bijannaihi ilaa umamun amtsaalukum maa farrathnaa fiil kitaabi min sya-in tsumma ila rabbihim yuhsyaruun” (Al-An’am:38).

Artinya: Dan tiadalah binatang-binatang yang ada di bumi ini dan burung-burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan umat (juga) seperti kamu. Tiadalah kami alpakan sesuatupun dalam Al-kitab, kemudian kepada Tuhanlah mereka dihimpunkan (Al-An’am:38).

Ayat Al Quran menjelaskan jika semua binatang termasuk burung terbang dengan kedua sayapnya, termasuk manusia berjalan dengan kedua kakinya. Ayat Al Qur’an tersebut menjelaskan semua yang diciptakan oleh Allah SWT dalam keadaan seimbang dan sesuai ukurannya. Sehingga manusia wajib mensyukuri atas nikmat-nikmat yang telah diberikan oleh Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Model *predator-prey* dengan pendekatan fungsi rasa takut dan pertahanan kelompok yang pertama kali diperkenalkan oleh Freedman dan Wolkowicz pada tahun 1986:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1 + k\alpha y} - d_1x - d_2x^2 - \frac{\beta xy}{a + b\alpha x + x^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{c\beta xy}{a + b\alpha x + x^2}$$

Titik tetap yang digunakan pada model Predator prey dengan Pendekatan Pertahanan Kelompok dan Fungsi Rasa takut adalah lima titik kesetimbangan. Titik tetap tersebut adalah $E_1^* = (0.1734, 0.0273)$, $E_2^* = (0.1734, 0.0388)$, $E_3^* = (0.25, 0.0398)$ & $E_4^* = (0.4, 0.0225)$, $E_5^* = (0.25, 0.0622)$ & $E_6^* = (0.4, 0.0546)$, $E_7 = (0.25, 0.0694)$ & $E_8^* = (0.4, 0.0650)$ dengan berdasarkan parameter 3.1. Maka dengan analisis dinamik model didapatkan E_1^* adalah stabil asymptotik local, E_2 adalah stabil limit cycle, E_3^* & E_4^* adalah stabil asymptotik lokal dan saddle, E_5^* & E_6^* adalah stabil limit cycle dan saddle dan yang terakhir adalah E_7^* & E_8^* adalah spiral dan saddle. Simulasi numerik pada gambar 3.6 adalah waktu 500 hari untuk pertahan kelompok, maka semakin sedikit waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.4 spesimen. Begitupula dengan gambar 3.7, 3.8, 3.9 dan juga 3.10 dibutuhkan waktu 500 hari untuk pertahanan kelompok, maka semakin sedikit

waktu yang diperlukan mencari makan. Akibatnya terjadi kelaparan dan menghambat populasi mangsa sebesar 0.25 spesimen.

4.2 Saran

Analisa dinamik terkait dengan titik kesetimbangan yang bersifat stabil center (stabil limit cycle) perlu diperdalam karena diduga akan muncul fenomena bifurkasi pada kondisi tersebut.



DAFTAR PUSTAKA

- Ajraldi, V., Pittavino, M., & Venturino, E. (2011). Modeling Herd Behavior in Population System. *Nonlinear Analysis:Real word Applications*, 2319-2338.
- Aliyah, I. (2007). *Analisis Model Matematika pada Pengaruh Sistem Imun terhadap Inveksi Virus HIV*. Malang:UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Tidak dipublikasikan.
- Al-Qurthubi, S. I. (2008). *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Ash-Shiddieqy, T. H. (2000). *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur*. Semarang: Pustaka Rizki Putri.
- Az-Zuhaili, W. (2013). *Tafsir Al-Wasith Jilid 2*. Jakarta: Gema Insani.
- Bin Ishaq Alu Sayaikh, D. B. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Edwards, C., & Penney, D. (2008). *Elementary Differential Quations (Six Edition)*. New York: Pearson Education, Inc.
- Ibnas, R. (2017). Persamaan Diferensial Eksak dengan Faktor Integrasi. *Jurnal Msa*, 91-99.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Levin, S., & Hallam, T. (1998). *Proceedings of The Autumn Course (Research Seminar)*. Singapore: Word Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.
- Nugroho, S. (2009). *Pengaruh Vaksinasi terhadap Penyebaran Penyakit dengan model Endemik SIR*. Surakarta:Universitas Sebelas Maret: Tidak diterbitkan.
- Pagalay, U. (2009). *Mathematical Modelling Aplikasi pada Kedokteran, Immunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-Maliki Press.
- Prasasty,Eka Adiesty,2016. *Model Matematika Predator-Prey dengan Mekanisme Pertahanan Kelompok pada Prey*. Surabaya:Universitas Airlangga. Tidak diterbitkan
- Pratiwi, Y. E., Kiftiah, M., & Ramdhani, E. W. (2017). Penentuan Nilai Eigen Matriks Interval Menggunakan Metode Pangkat. *Buletin Ilmiah Math.Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 17-26.
- Rosellia, F., & Abadi. (2018). Model Matematika Sistem Dinamik Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Akar Kuadrat. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 66-69.

- Ruan, S., & Xiao, D. (2001). Global Anlysis in Predator-Prey System with Nonmotonic Functional Response. *Society for Industrial And Applied Mathematics*, 1445-1472.
- Sasmal, S. K., & Takeuchi, Y. (2019). Dynamics of a predator-prey system with fear and group defense. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.
- Shihab, M. (2002). *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sulisti, H., Noviani, E., & Kusumastuti, N. (2014). Analisis Kestabilan Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Buletin Ilmiah Math.Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 235-244.
- Triatmodjo, B. (2002). *Metode Numerik dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.



LAMPIRAN 1

Analisis dinamik model matematika predator-prey akibat rasa takut dan pertahanan kelompok dengan aplikasi maple

```

restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) : with(plots) : with(DEtools) : with(plots,
implicitplot) :

> dx :=  $\frac{r \cdot x}{1 + k \cdot \alpha \cdot y} - d_1 \cdot x - d_2 \cdot x^2 - \frac{\beta \cdot x \cdot y}{a + b \cdot \alpha \cdot x + x^2}$  : dy :=  $\frac{c \cdot \beta \cdot x \cdot y}{a + b \cdot \alpha \cdot x + x^2} - m \cdot y$  :

Syarat1 := r - d1 :
collect( op( numer(dy) ) [3], x, factor);
g := collect( -1 · numer( subs(  $\beta = \frac{m(\alpha b x + x^2 + a)}{c x}$ , dx ) ) · m, y, factor ) :
k2 := coeff(g, y, 2) :
k1 := simplify( (  $\alpha c k \cdot \left( -\alpha b x + \frac{\beta c x}{m} - a \right) d_2 + \alpha c k x d_1 + m$  ) m ) :# substitusi  $x^2 = -\alpha b x$ 
+  $\frac{\beta c x}{m} - a$ 
k0 := expand( c m ·  $\left( -\alpha b x + \frac{\beta c x}{m} - a \right) d_2 - c m r x + c m x d_1$  ) :# substitusi  $x^2 = -\alpha b x$ 
+  $\frac{\beta c x}{m} - a$ 
g := k2 · y2 + k1 · y + k0;

TTK := solve( {dx, dy}, {x, y});
Jac := Matrix( jacobian( [dx, dy], [x, y] ) );
E0 := TTK[1]; eigenvalues( subs( E0, Jac ) );# stabil ketika  $r < d_1$ 
E1 := TTK[2];#Eksis ketika  $r > d_1$ 
EV1 := eigenvalues( subs( E1, Jac ) ) :# stabil ketika  $r > d_1$  dan
 $\lambda_1 := -Syarat1$  : simplify(  $\lambda_1 - EV1[1]$  );
 $\lambda_2 := -\frac{a m d_2^2 + (r - d_1) (\alpha b m - \beta c) d_2 + m (r - d_1)^2}{a d_2^2 + b \alpha (r - d_1) d_2 + (r - d_1)^2}$  : simplify(  $\lambda_2 - EV1[2]$  );
Syarat2 := (  $\alpha b m - \beta c$  )
E2 := TTK[3];

```

>

```

Data0 := {r = 0.09, k = 0.5, α = 0.25, d1 = 0.1, d2 = 0.2, β = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1, m
        = 0.25} :
subs(Data0, {λ1, λ2});
Eq := solve(subs(Data0, {dx, dy}), {x, y}) :
sys :=  $\frac{d}{dt} x(t) = \text{subs}(\text{Data0} \text{ union } \{x = x(t), y = y(t)\}, dx), \frac{d}{dt} y(t) = \text{subs}(\text{Data0} \text{ union } \{x
        = x(t), y = y(t)\}, dy) :$ 
MedanArah := dfieldplot([sys], [x(t), y(t)], t = 0 .. 100, x = 0 .. 0.6, y = 0 .. 0.5, arrows = SLIM,
        color = black, dirfield = [20, 20]) :
Equilibrium := pointplot((op(Eq[1][1])[2])(op(Eq[1][2])[2])), color = red, symbol
        = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = 30) :
L1 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.6, y(0) = 0.2}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 200, numpoints = 3 · 250, color = blue) :
L2 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.6, y(0) = 0.1}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 200, numpoints = 3 · 250, color = green) :
L3 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.6, y(0) = 0.01}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 200, numpoints = 3 · 250, color = yellow) :
L4 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.08, y(0) = 0.01}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 200, numpoints = 3 · 250, color = magenta) :
display(MedanArah, Equilibrium, L1, L2, L3, L4, thickness = 3);

```

Figure 2

```

Data2a := {r = 0.18, k = 0.5, α = 2.5, d1 = 0.1, d2 = 0.2, β = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1, m
        = 0.25} :
Data := Data2a :
Eq := solve(subs(Data, {dx, dy}), {x, y}) :
sys :=  $\frac{d}{dt} x(t) = \text{subs}(\text{Data} \text{ union } \{x = x(t), y = y(t)\}, dx), \frac{d}{dt} y(t) = \text{subs}(\text{Data} \text{ union } \{x
        = x(t), y = y(t)\}, dy) :$ 
MedanArah := dfieldplot([sys], [x(t), y(t)], t = 0 .. 100, x = 0 .. 0.55, y = 0 .. 0.1, arrows = SLIM,
        color = black, dirfield = [20, 20]) :
v1 := (op(Eq[1][1])[2], op(Eq[2][1])[2], op(Eq[3][1])[2]) :
v2 := (op(Eq[1][2])[2], op(Eq[2][2])[2], op(Eq[3][2])[2]) : (v1|v2);
Equilibrium := pointplot((v1|v2), color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness
        = 30) :
L1 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.08}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 4 · 250, numpoints = 2 · 300, color = blue) :
L2 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.06}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 4 · 250, numpoints = 2 · 300, color = green) :
L3 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.05}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 4 · 250, numpoints = 2 · 300, color = yellow) :
L4 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.35, y(0) = 0.01}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
        = rkf45), [x(t), y(t)], 0 .. 4 · 250, numpoints = 2 · 300, color = magenta) :
B1 := plot(solve(op(deriv(subs(Data, dx)))[3], y)[1], x = 0.01 .. 0.41, color = 'red', linestyle
        = 'dot') :
display(MedanArah, Equilibrium, L1, L2, L3, L4, B1, thickness = 3);

```

Figure 3

```

Data3a := {r=0.2, k=0.5, α=2.7, d1=0.1, d2=0.2, β=0.5, a=0.1, b=0.5, c=1, m
          =0.25}:
Data := Data3a :
Eq := solve(subs(Data, {dx, dy}), {x, y}) :
sys :=  $\frac{d}{dt} x(t) = \text{subs}(\text{Data union } \{x = x(t), y = y(t)\}, dx), \frac{d}{dt} y(t) = \text{subs}(\text{Data union } \{x$ 
      = x(t), y = y(t)\}, dy) :
MedanArah := dfieldplot([sys], [x(t), y(t)], t=0..100, x=0..0.55, y=0..0.1, arrows = SLIM,
color = black, dirfield = [20, 20]) :
v1 := <op(Eq[1][1])[2], op(Eq[2][1])[2], op(Eq[3][1])[2], op(Eq[5][1])[2]> :
v2 := <op(Eq[1][2])[2], op(Eq[2][2])[2], op(Eq[3][2])[2], op(Eq[5][2])[2]> : <v1|v2>
Equilibrium := pointplot(<v1|v2>, color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness
= 30) :
L1 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.08}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = blue) :
L2 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.06}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = green) :
L3 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.05}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = yellow) :
L4 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.5, y(0) = 0.01}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = magenta) :
B1 := plot(solve(op(numer(subs(Data, dx)))[3], y)[1], x=0..0.51, color='red', linestyle =
'dot') :
display(MedanArah, Equilibrium, L1, L2, L3, L4, B1, thickness = 3);

Data3b := {r=0.23, k=0.5, α=2.7, d1=0.1, d2=0.2, β=0.5, a=0.1, b=0.5, c=1, m
          =0.25}:
Data := Data3b :
Eq := solve(subs(Data, {dx, dy}), {x, y}) :
sys :=  $\frac{d}{dt} x(t) = \text{subs}(\text{Data union } \{x = x(t), y = y(t)\}, dx), \frac{d}{dt} y(t) = \text{subs}(\text{Data union } \{x$ 
      = x(t), y = y(t)\}, dy) :
MedanArah := dfieldplot([sys], [x(t), y(t)], t=0..100, x=0..0.67, y=0..0.1, arrows = SLIM,
color = black, dirfield = [20, 20]) :
v1 := <op(Eq[1][1])[2], op(Eq[2][1])[2], op(Eq[3][1])[2], op(Eq[5][1])[2]> :
v2 := <op(Eq[1][2])[2], op(Eq[2][2])[2], op(Eq[3][2])[2], op(Eq[5][2])[2]> : <v1|v2>
Equilibrium := pointplot(<v1|v2>, color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness
= 30) :
L1 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.6, y(0) = 0.08}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = blue) :
L2 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.25, y(0) = 0.06}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = green) :
L3 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.6, y(0) = 0.05}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = yellow) :
L4 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.6, y(0) = 0.09}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
= rkf45), [x(t), y(t)], 0..4*250, numpoints = 2*300, color = magenta) :
B1 := plot(solve(op(numer(subs(Data, dx)))[3], y)[1], x=0..0.67, color='red', linestyle =
'dot') :
display(MedanArah, Equilibrium, L1, L2, L3, L4, B1, thickness = 3)

```

```

Data3c := {r = 0.24, k = 0.5, α = 2.7, d1 = 0.1, d2 = 0.2, β = 0.5, a = 0.1, b = 0.5, c = 1, m
          = 0.25}:
Data := Data3c :
Eq := solve(subs(Data, {dx, dy}), {x, y}) :
sys :=  $\frac{d}{dt} x(t) = \text{subs}(\text{Data union } \{x = x(t), y = y(t)\}, dx), \frac{d}{dt} y(t) = \text{subs}(\text{Data union } \{x
          = x(t), y = y(t)\}, dy) :$ 
MedanArah := dfieldplot([sys], [x(t), y(t)], t = 0..100, x = 0..0.67, y = 0..0.1, arrows = SLIM,
          color = black, dirfield = [20, 20]) :
v1 := <op(Eq[1][1])[2], op(Eq[2][1])[2], op(Eq[3][1])[2], op(Eq[5][1])[2]> :
v2 := <op(Eq[1][2])[2], op(Eq[2][2])[2], op(Eq[3][2])[2], op(Eq[5][2])[2]> : <v1|v2>;
Equilibrium := pointplot(v1|v2, color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness
          = 30) :
L1 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.7, y(0) = 0.10}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
          = rkf45), [x(t), y(t)], 0..4·250, numpoints = 2·300, color = blue) :
L2 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.7, y(0) = 0.09}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
          = rkf45), [x(t), y(t)], 0..4·250, numpoints = 2·300, color = green) :
L3 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.7, y(0) = 0.06}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
          = rkf45), [x(t), y(t)], 0..4·250, numpoints = 2·300, color = yellow) :
L4 := odeplot(dsolve({sys, x(0) = 0.25, y(0) = 0.069}, {x(t), y(t)}, type = numeric, method
          = rkf45), [x(t), y(t)], 0..4·250, numpoints = 2·300, color = magenta) :
B1 := plot(solve(op(numer(subs(Data, dx)))[3], y)[1], x = 0..0.67, color = 'red', linestyle =
          'dot') :
display(MedanArah, Equilibrium, L1, L2, L3, L4, B1, thickness = 3);

```



LAMPIRAN 2

Solusi numerik pada model matematika *predator-prey* akibat rasa takut dan pertahanan kelompok dengan aplikasi matlab

```
function d=solusinumrik5(~,Y)

d=zeros(2,1);
r=0.24;
k=0.5;
alpha=2.7;
f1=0.1;
f2=0.2;
beta=0.5;
a=0.1;
b=0.5;
c=0.1;
m=0.2;

d(1)=.24*Y(1)/(1+(.5*2.7)*Y(2))-1*Y(1)-.2*Y(1)^2-
.5*Y(1)*Y(2)/(.1+(.5*2.7)*Y(1)+Y(1)^2)
%((r*Y(1))/(1+k*alpha*Y(2)))-(f1*Y(1))-(f2*Y(1)^2)-
((beta*Y(1)*Y(2))/(a+b*alpha*Y(1)+Y(1)^2));
d(2)=.5*Y(1)*Y(2)/(.1+(.5*2.7)*Y(1)+Y(1)^2)-
.25*Y(2);%((c*beta*Y(1)*Y(2))/(a+b*alpha*Y(1)+Y(1)^2))-m*Y(2);

end

clc; clear all; close all;

options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-5]);
[T,Y]=ode45(@solusinumrik5,[0 5000],[0.25 0.0694],options);
U=gradient(Y(:,1));
V=gradient(Y(:,2));
% quiver(Y(:,1),Y(:,2),U,V,'r','LineWidth',5);hold on; grid on;
figure(1)
plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2),'LineWidth',2),legend('X=waktu','Y=Populasi
')
figure(2)
plot(Y(:,1),Y(:,2));
xlabel('prey');
ylabel('predator');
```

RIWAYAT HIDUP



Siti Nauli Hidayati, lahir di Lombok pada tanggal 06 September 1996, biasa dipanggil Nauli. Anak pertama dari tiga bersaudara., yaitu kakak dari Muhammad Sauqi Adiyatma dan Nur Gozilati Sahiroh, yaitu anak dari Muh.Gozali dan Nur Jannah. Selama di Malang bertempat tinggal di Jalan Simpang Sunan Kaliga I no 13.

Pendidikan kanak-kanak ditempuh di TK LKMD Kelayu Selatan, pada tahun 2003. Kemudian pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 2 Kelayu Utara, lulus pada tahun 2009. Selain itu, melanjutkan sekolah di SMPN 1 Labuhan Haji dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya di MAN 1 Selong dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang jurusan Matematika Murni.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Nauli Hidayati
NIM : 15610017
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Model Matematika Predator-prey Akibat
Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	13 November 2019	Revisi Bab I & Bab II (Pembimbing 1)	1.	
2	3 Januari 2020	Konsultasi Bab III (Pembimbing 1)		2.
3	3 Januari 2020	Konsultasi Keagamaan (Pembimbing II)	3.	
4	21 Januari 2020	Revisi Bab III (pembimbing I)		4.
5	22 Januari 2020	ACC untuk diseminarkan (Pembimbing 1)	5.	
6	9 Maret 2020	Konsultasi Script Program (Pembimbing 1)		6.
7	14 Juli 2020	Revisi Bab III (Pembimbing 1)	7.	
8	4 September 2020	Revisi Kajian Keagamaan (Pembimbing II)	8.	
9	4 September 2020	Revisi Bab IV (Pembimbing 1)		9.
10	4 September 2020	ACC disidangkan (pembimbing I)	10.	

Malang, 15 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001