

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL SEIQR
DENGAN PERIODE LATEN**

SKRIPSI

**OLEH
ROHAMAH
NIM. 16610028**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL SEIQR
DENGAN PERIODE LATEN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Rohamah
NIM. 16610028**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL SEIQR
DENGAN PERIODE LATEN**

SKRIPSI

Oleh
Rohamah
NIM. 16610028

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 16 Juni 2020

Pembimbing I,



Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Pembimbing II,



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL SEIQR
DENGAN PERIODE LATEN**

SKRIPSI

Oleh
Rohamah
NIM. 16610028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

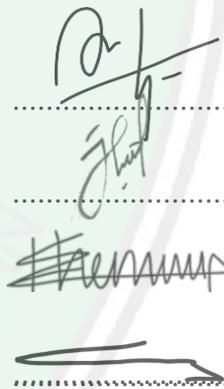
Tanggal, 24 Juni 2020

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd

Ketua Penguji : Juhari, M.Si

Sekretaris Penguji : Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rohamah

NIM : 16610028

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Global Model SEIQR dengan Periode Laten

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Juni 2020

Yang membuat pernyataan



Rohamah

NIM. 16610028

MOTO

“Allah tidak akan Membebani Seseorang Melainkan sesuai Kemampuannya”

(Al-Baqarah: 286)

Semangat menjalani aktivitas hari ini untuk kamu yang hebat, karena
Sesungguhnya sesudah Kesulitan itu ada Kemudahan.



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada untuk yang tersayang dan tercinta Ibunda Moseh, Ayahanda Senadi dan saudara-saudara yaitu ka' Jeppar, ka' Abdus, dan mbak Rofiah yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menimba ilmu.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis penjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun dan memberikan inspirasi kepada seluruh umat manusia untuk terus berkarya dengan penuh semangat dengan berdasarkan keagungan moral dan spiritual.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan bimbingan dari banyak pihak. Oleh karena itu, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasehat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan ilmunya kepada penulis.

6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu serta kakak-kakak tercinta yang memberikan do'a, restu, dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016 yang berjuang bersama-sama untuk menggapai impian serta teman-teman lainya yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan motivasi dan semangat untuk keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga segala yang telah diberikan kepada penulis, mendapatkan balasan terbaik dari Allah SWT. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Amiiinn.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Malang, 17 Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	7
2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa	7
2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Nonlinear	8
2.1.3 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda	9
2.2 Analisis Kestabilan	10

2.2.1	Titik Keseimbangan	10
2.2.2	Linearisasi	11
2.2.3	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	13
2.2.4	Kestabilan Titik Keseimbangan	14
2.2.5	Kriteria Kestabilan <i>Routh-Hurwitz</i>	15
2.2.6	Metode Kestabilan Lyapunov	16
2.3	Pemodelan Matematika	20
2.3.1	Penyakit Menular	20
2.3.2	Karantina	21
2.3.3	Periode Laten (masa inkubasi)	22
2.3.4	Model SEIQR	24
2.4	Pencegahan Penyakit dalam Perspektif Islam	25

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Model SEIQR dengan Periode Laten	30
3.2	Titik Keseimbangan	35
3.3	Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	38
3.4	Kestabilan Titik Keseimbangan	40
3.5	Simulasi Numerik	57
3.6	Model SEIQR dengan Periode Laten dalam Pandangan Islam	62

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	64
4.2	Saran	65

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Kompartemen SEIQR dengan Periode Laten	31
Gambar 3.2	Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 < 1$ dengan $\tau = 3$	58
Gambar 3.3	Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 < 1$ dengan $\tau = 10$	59
Gambar 3.4	Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 11$, $k_3 = 0.001$	60
Gambar 3.5	Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 11$, $k_3 = 0.95$	60
Gambar 3.6	Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$	61
Gambar 3.7	Simulasi pada I untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$	61
Gambar 3.8	Simulasi pada E untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$	61

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Dinamik	15
Tabel 3.1	Variabel Model SEIQR dengan Periode Laten	34
Tabel 3.2	Satuan Parameter Model SEIQR dengan Periode Laten	34
Tabel 3.3	Nilai Parameter Model yang digunakan dalam Simulasi Numerik .	58



DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

- S : Subpopulasi individu rentan pada waktu t
- E : Subpopulasi individu terinfeksi akan tetapi tidak bisa menginfeksi (rentan)
- I : Subpopulasi individu terinfeksi dan tanpa melakukan perawatan
- Q : Subpopulasi individu terinfeksi dan melakukan perawatan (karantina) pada waktu t
- R : Subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t
- A : Laju rekrutmen pada populasi yang rentan
- μ : Laju kematian alami
- β : Laju infeksi penyakit
- α : Laju kematian individu
- γ : Laju pemulihan setelah karantina
- ν : Laju pemulihan sebelum karantina
- k_1 : Karantina pada individu dari E dan I
- k_2 : Karantina pada individu dari E dan I
- k_3 : Laju individu sembuh dari E
- t : Waktu
- τ : Waktu tunda
- R_0 : Bilangan reproduksi dasar
- λ : Nilai Eigen
- e : Eksponensial

ABSTRAK

Rohamah. 2020. **Analisis Kestabilan Global Model SEIQR dengan Periode Laten**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Negeri Islam Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Heni Widayani, M.Si (2) Dr. Usman Pagalay, M.Si

Kata Kunci: Fungsi Lyapunov, Kestabilan Global, Model SEIQR, Periode Laten, Waktu Tunda

Model SEIQR merupakan model epidemik pada penyebaran penyakit menular dengan periode laten yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Adanya waktu tunda sangat mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan sistem model SEIQR.

Berdasarkan permasalahan di atas, maka penelitian ini bertujuan untuk menganalisis secara global kestabilan model SEIQR dengan periode laten. Namun sebelum itu, dilakukan konstruksi model sehingga menjadi model SEI. Terdapat batas ambang atau sering disebut dengan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang menentukan penyakit tersebut menghilang atau menetap. Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan mencapai stabil asimtotik dan penyakit akan menghilang. Akan tetapi, jika $R_0 > 1$, maka terjadi kesetimbangan endemik dan penyakit akan menetap.

Dengan asumsi yang telah diberikan diatas, maka dengan waktu tunda $\tau = 0$ dan tidak ada individu yang terinfeksi, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0\right)$. Jika waktu tunda $\tau = 0$ dan terdapat individu yang terinfeksi, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik $E^* = \left(\frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}, \frac{\sigma(1-e^{-\mu_2 \tau})I^*}{e^{-\mu_2 \tau}(\mu_2+k_1+k_3)}, \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta}\right)$. $R_0 < 1$ menentukan titik kesetimbangan asimtotik lokal dan $R_0 > 1$ menentukan titik kesetimbangan asimtotik global. Menurut analisis dinamika matematika, dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik lokal dengan menggunakan kriteria Hurwitz dan stabil asimtotik global dengan menggunakan fungsi Lyapunov untuk setiap τ . Selanjutnya dilakukan simulasi numerik pada model SEI dengan waktu tunda untuk menggambarkan dan memverifikasi kesimpulan yang berguna untuk mengendalikan penyebaran penyakit menular.

ABSTRACT

Rohamah. 2020. **Global Stability Analysis of SEIQR Model with Latent Period**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Heni Widayani, M.Si. (2) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keyword: Lyapunov Function, Global Stability, SEIQR Model, Latent Period, Time Delay.

SEIQR model is epidemic model on the spread of infectious diseases with latent period from a system of nonlinear differential equations. The existence of time delay is important to stability of equilibrium point of the SEIQR model equation system.

Based on the above issues, the study aims to globally analyze the stability of SEIQR with latent period. But before that, the model construction was carried out to become a SEI model. The threshold or often referred to as basic reproduction number (R_0) determining whether the disease dies out or persist. If $R_0 < 1$, then the disease-free equilibrium is asymptotically stable and the disease always dies out. However, if $R_0 > 1$, then the endemic equilibrium and the disease will be endemic.

With the assumptions time delay $\tau = 0$ and no human infected, then the disease-free equilibrium point is $E_0 = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0\right)$. If time delay $\tau = 0$ and there are human infected, the endemic equilibrium point is $E^* = \left(\frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}, \frac{\sigma(1-e^{-\mu_2 \tau})I^*}{e^{-\mu_2 \tau}(\mu_2 + k_1 + k_3)}, \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta}\right)$. $R_0 < 1$ determine locally asymptotically stable and if $R_0 > 1$ determine the globally asymptotically stable. According to the mathematical dynamics analysis, we show that disease-free equilibrium and endemic equilibrium are locally asymptotically stable by using Hurwitz criterion and they are globally asymptotically stable by using Lyapunov functions for any τ . Then a numerical simulations is performed on the SEI model with time delay to describe and verify the conclusions that will be useful for us to control the spread of infectious diseases.

ملخص

رحمة. 2020. تحليل الاستقرار بنموذج SEIQR مجملا الفترة الكامنة. البحث العلمي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (1) هاني ويداييتي الماجستير (2) الدكتور عثمان فاكالاي الماجستير.

الكلمات المفتاحية: وظيفة ليافونوف (Lyapunov) والاستقرار المجل نموذج SEIQR والفترة الكامنة والوقت المؤجل.

نموذج SEIQR هو نموذج الوباء في انتشار الأمراض المعية الفترة الكامنة الذي يتكون من نظام المعادل انتقاصلى غير الخطي. كان الوقت المؤجل ماثرا جدا على استقرار نقطة التوازن عند نظام نموذج SEIQR.

استفاد إلى المشكلة السابقة، كان هدف هذا البحث تحليل استقرار نموذج SEIQR مجملا بالفترة الكامنة. بل قبل ذلك، لا بد على بناء نموذج أن يصبح نموذج SEI. كان حد العتبة أو يسمى كثيرا بعدد التكاثر الأساسي (R_0) يعين وجدد اختفاء الأمراض أم غير موجود. إذا $R_0 < 1$ فتكون النقطة المتوازنة المجتنبية عن الأمراض تحصل على استقرار أستمطيل (Asimtotik) تزول الأمراض. بل، إذا $R_0 > 1$ فيقع توازن الوباء واستوطنت الأمراض.

اعتمادا على الافتراض السابق، كان الوقت المؤجل $\tau = 0$ وعدم المصابين بها يحصلان على النقطة المتوازنة المجتنبية عن الأمراض $E_0 = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0\right)$. وإذا كان الوقت المؤجل $\tau = 0$ ووجود المصابين بها فيحصلان على النقطة المتوازنة الوبائية $E^* = \left(\frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}, \frac{\sigma(1-e^{-\mu_2 \tau})I^*}{e^{-\mu_2 \tau}(\mu_2 + k_1 + k_3)}, \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta}\right)$. إذا $R_0 < 1$ فتكون النقطة المتوازنة الإستمطية محلية وإذا $R_0 > 1$ فتكون النقطة المتوازنة الإستمطية مجملا. عند تحليل ديناميكية الرياضيات، يمكن أن يدل على أن النقطة المتوازنة المجتنبية عن الأمراض والنقطة المتوازنة الوبائية الاستقرار الأستمطي المحلية باستخدام معيار هرويت (Hurwitz) والاستقرار الأستمطي المجل باستخدام عمل ليافونوف (Lyapunov) لكل τ . ثم يقام بالمحاكاة العددية بنموذج SEI بالوقت المؤجل لتصوير الخلاصة وتصديقها الذان يفيدان لضبط انتشار الأمراض المعدية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan suatu bidang untuk mempresentasikan atau menjelaskan sistem-sistem fisik ataupun problem terhadap dunia nyata dalam mengemukakan pernyataan matematik, sehingga dapat diperoleh adanya pemahaman sebuah problem tersebut agar lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan melalui proses ini dinamakan dengan “Model Matematika”. Konstruksi, analisis, dan penggunaan model matematika merupakan suatu aplikasi matematika yang sangat penting (Widowati, 2007). Model matematika merupakan bagian dari pengembangan Aljabar, Analisis, dan Persamaan Diferensial, karena sebagian besar isi dari pemodelan matematika adalah penerapan atau pengaplikasian dibidang tersebut. Adanya konsep persamaan diferensial sering digunakan untuk memodelkan masalah-masalah yang berkaitan dengan ilmu kesehatan, yakni model matematika yang telah berkaitan dengan penyebaran penyakit menular.

Penyakit menular merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh mikroorganisme seperti virus, bakteri, parasit, atau jamur. Penyakit menular dapat ditularkan secara langsung maupun tidak langsung. Penularan secara langsung terjadi ketika kuman pada orang yang sakit berpindah melalui kontak fisik seperti sentuhan, melalui udara saat bersin dan batuk, atau melalui cairan tubuh seperti darah dan urine. Penyakit menular juga dapat berpindah secara tidak langsung, misalnya melalui gigitan hewan, makanan atau minuman yang telah terkontaminasi oleh penyebab penyakit (Irwan, 2017).

Masing-masing penyakit infeksi memiliki gejala tersendiri dan pengobatan yang berbeda-beda, tergantung penyebabnya. Selain itu juga memiliki masa inkubasi berbeda-beda yaitu beberapa hari, minggu, bulan, hingga tahun.

Masa inkubasi merupakan selang waktu dari saat mikroorganisme masuk ke dalam tubuh hingga menunjukkan gejala pertama kali. Pada masa inkubasi, wabah penyakit yang masuk dalam tubuh manusia akan melawan sistem kekebalan tubuh, jika kekebalan tubuh individu sehat yang telah melakukan kontak dengan individu terinfeksi lebih kuat maka individu tersebut tidak akan tertular penyakit. Namun sebaliknya jika kekebalan tubuh individu sehat yang telah melakukan kontak dengan individu terinfeksi lemah maka individu yang sehat akan menjadi terinfeksi.

Penyebaran penyakit menular merupakan masalah serius yang dihadapi oleh seseorang, karena dapat menyebabkan kematian. Oleh sebab itu, tindakan pencegahan perlu dilakukan agar penyebaran infeksi dapat dihentikan. Tindakan yang diberikan berupa karantina pada individu yang terpapar dan individu yang terinfeksi. Karantina merupakan perlakuan dengan memisahkan dan membatasi pergerakan individu yang terinfeksi penyakit menular untuk dipantau apakah individu tersebut benar-benar sakit. Segala sesuatu yang menimpa manusia telah diatur sesuai dengan ketetapanNya, sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an surah Yunus ayat 57 yang artinya: *"Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman"*. Dalil ini menunjukkan bahwa sesungguhnya Allah SWT menciptakan segala sesuatu dan mengatur semuanya sesuai kekuasaan dan ketetapanNya. Allah menurunkan

penyakit disertai pula dengan obatnya. Upaya pengobatan penyakit pada kasus ini yaitu berupa karantina dengan periode laten.

Penelitian ini merujuk pada jurnal (Li, T. dan Xue, Y., 2013), pada penelitiannya model matematika yang digunakan adalah model SEIQR tertunda dengan karantina dan periode laten terhadap penyebaran penyakit menular. Penelitian ini merupakan pengembangan model hasil penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh (Gao, S., dan Chen, L., 2008) dan (Yongzhen, P., 2009). (Gao, S., dan Chen, L., 2008) membahas tentang vaksinasi nadi dari model SEIR dengan penundaan waktu. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa dengan tingkat vaksinasi besar atau periode laten yang lama maka individu yang terinfeksi akan sembuh atau penyakit menghilang. Sedangkan (Yongzhen, P., 2009) membahas tentang model epidemik SEIQR tertunda dengan vaksinasi nadi dan karantina. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa dengan tindakan karantina yang diambil, jumlah individu yang terinfeksi berkurang.

Model pada penelitian ini terdapat dua titik kesetimbangan yaitu bebas penyakit dan endemik dengan analisis kestabilannya. Disimpulkan bahwa ketika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan mencapai stabil asimtotik yang berarti penyakit akan menghilang, sedangkan ketika $R_0 > 1$ maka terjadi kesetimbangan endemik dan penyakit akan menetap. Selanjutnya adalah simulasi numerik yang menunjukkan dinamika penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi. Adanya waktu tunda, dapat diketahui tingkat kestabilannya. Semakin besar waktu tunda yang diberikan maka semakin lama menuju kestabilan dan sebaliknya semakin kecil waktu tunda yang diberikan maka semakin cepat menuju stabil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka didapatkan beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi model SEIQR dengan waktu tunda?
2. Bagaimana analisis kestabilan secara global pada model SEIQR dengan waktu tunda?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui konstruksi model SEIQR dengan waktu tunda.
2. Untuk mengetahui analisis kestabilan secara global pada model SEIQR dengan waktu tunda.

1.4 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini dibatasi oleh ruang lingkup pembahasannya yaitu konstruksi model SEIQR dengan waktu tunda dan melakukan analisis pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik kesetimbangan model SEIQR pada penyebaran penyakit menular dengan menggunakan metode Lyapunov.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Memperoleh pengetahuan model SEIQR dengan waktu tunda.
- b. Memperoleh pengetahuan analisis kestabilan global model SEIQR dengan waktu tunda.

- c. Memberikan informasi bahwa pemberian waktu tunda dapat menjadi salah satu solusi dalam mengatasi masalah penyebaran penyakit menular.
- d. Sebagai referensi bagi pembaca untuk melakukan penelitian selanjutnya.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji dan mempelajari buku, jurnal, dan lainnya berkaitan dengan masalah yang diambil. Penulis merujuk pada jurnal yang ditulis oleh Li dan Xue dengan judul *Global Stability Analysis of a Delayed SEIQR Epidemic Model with Quarantine and Latent*.
2. Langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan masalah Analisis Kestabilan Global Model SEIQR dengan Periode Laten sebagai berikut:
 - a. Membentuk model matematika pengaruh periode laten terhadap penyakit menular pada model SEIQR dengan waktu tunda.
 - b. Menentukan titik kesetimbangan pada model.
 - c. Melakukan linearisasi pada model, kemudian menentukan matriks jacobian pada titik kesetimbangan.
 - d. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model.
Kestabilan global dari titik kesetimbangan ditentukan dengan penggunaan fungsi Lyapunov.
 - e. Melakukan simulasi numerik pada model menggunakan program maple.
 - f. Menginterpretasikan hasil yang diperoleh.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan hasil penelitian ini lebih teratur dan mudah dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari beberapa subbab adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisikan teori-teori yang menjadi landasan pembahasan masalah. Yakni membahas tentang sistem dinamik, sistem persamaan diferensial, model SEIQR, kestabilan titik kesetimbangan, nilai Eigen dan vektor Eigen, serta metode Lyapunov.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini berisikan hasil penelitian yang meliputi konstruksi pembentukan model epidemik SEIQR dengan waktu tunda, analisis kestabilan secara global pada titik kesetimbangan dengan menggunakan fungsi Lyapunov, dan simulasi model menggunakan program Maple.

BAB IV PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial merupakan model matematika yang sangat berperan dalam memecahkan masalah yang berhubungan dengan dunia nyata. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui (Waluya, 2006). Beberapa katagori dalam persamaan diferensial, katagori pertama adalah persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas. Turunan ini dilambangkan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ atau y' , sedangkan fungsi yang tidak diketahui dilambangkan dengan adanya variabel terikat (Sihombing dan Dahlia, 2018).

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad (2.1)$$

dimana x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel terikat.

Kartono (2012) dalam bukunya mendefinisikan bentuk umum persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.2) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta turunannya dalam bentuk himpunan yang secara identik sama dengan nol. Sebuah persamaan diferensial tersebut memiliki orde n jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut turunan ke n , sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi berderajat k maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial berderajat k . Jadi,

perubahan variabel terikat y terhadap perubahan hanya satu variabel bebas x pada persamaan (2.2) dinamakan persamaan diferensial biasa.

Kategori persamaan diferensial lainnya adalah persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memiliki lebih dari satu variabel bebas (Sihombing dan Dahlia, 2018).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial parsial karena variabel terikat u bergantung pada variabel bebas lebih dari satu yaitu x dan y . Secara umum persamaan diferensial parsial dapat ditulis sebagai berikut $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (Strauss, 2007).

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Nonlinear

Persamaan diferensial biasa didefinisikan $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$, dikatakan linear jika F adalah linear dalam variabel-variabel $x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ (Waluya, 2006). Secara umum persamaan diferensial biasa linear orde n diberikan sebagai berikut:

$$a_0(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dikatakan persamaan diferensial orde n jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut (Baiduri, 2002).

- a. Variabel terikat dan turunannya hanya berderajat satu.
- b. Tidak ada perkalian antara variabel terikat yang satu dengan yang lain.
- c. Variabel terikat bukan merupakan fungsi transenden.

Apabila suatu persamaan tidak memenuhi syarat dari ketiga syarat yang menyatakan suatu persamaan tersebut linear, maka boleh dikatakan bahwa persamaan nonlinear. Berikut contoh persamaan diferensial nonlinear.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y \frac{dy}{dx} + xy = x^2 \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) dinamakan persamaan diferensial nonlinear karena terdapat perkalian variabel pada bentuk $y \frac{dy}{dx}$ dengan variabel terikat lainnya (Kartono, 2012).

2.1.3 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda

Menurut Arizona dan Fuad (2014) persamaan diferensial dengan waktu tunda adalah suatu persamaan diferensial fungsional sederhana yang sering muncul dalam masalah nyata. Artinya, persamaan ini mengemukakan beberapa turunan terhadap x pada waktu t , terhadap x dan turunan-turunannya yang lebih rendah pada waktu t , dan pada beberapa waktu sebelumnya $(t - \tau)$, dengan τ menyatakan tundaan waktu. Secara umum bentuk persamaan diferensial dengan waktu tunda untuk $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)), t \geq t_0 \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

dengan τ positif yang merepresentasikan lama waktu tunda. Pada persamaan (2.26), f adalah fungsi dari bentuk $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times C^1$ ke \mathbb{R}^n . Bentuk persamaan diferensial dengan waktu tunda kontinu yaitu

$$\frac{d}{dt} x(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^0 x(t - \tau) d\mu(\tau)\right) \quad (2.7)$$

dan persamaan waktu tunda dengan diskret yaitu

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_i)) \quad (2.8)$$

dengan $\tau_i > 0$ dan $i = 1, 2, \dots$ adalah waktu tunda.

Waktu tunda penting dalam pemodelan masalah nyata sebab keputusan yang diperoleh berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya. Hal ini penting dalam mempertimbangkan model pertumbuhan populasi sebab laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang t , akan tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya (Toaha, 2008). Adapun metode-metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial tunda, Misalnya $x'(t) = -x(t - \tau)$. Jika $\tau = \frac{\pi}{2}$, maka solusinya adalah $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang. Jika $\tau \neq \frac{k\pi}{2}$, dimana k adalah bilangan bulat positif, sehingga diperoleh solusi tidak lagi dalam kelas $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$.

2.2 Analisis Kestabilan

2.2.1 Titik Kesetimbangan

Menurut Sulisti, dkk (2014) mendefinisikan titik kesetimbangan dari suatu sistem merupakan titik kesetimbangan yang membuat sistem tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Misalkan, diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.9}$$

dengan f dan g adalah fungsi kontinu dari x dan y . Titik kritis dari sistem (2.7) adalah titik (x^*, y^*) dari (x, y) sedemikian sehingga $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$.

Titik tetap x^* dan y^* diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Keadaan yang

menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis tersebut disebut titik kesetimbangan (Edwards dan Panney, 2008).

2.2.2 Linearisasi

Proses pendekatan persamaan diferensial nonlinear dengan persamaan linear disebut dengan linearisasi. Deret Taylor adalah suatu metode yang digunakan untuk melinearisasi. Persamaan dimana $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ adalah persamaan nonlinear, selanjutnya akan dicari pendekatan persamaan linear disekitar (x^*,y^*) dengan melakukan ekspansi deret Taylor (x^*,y^*) dan menghilangkan suku nonlinearnya sebagai berikut (Boyce dan DiPrima, 2000).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)\end{aligned}\quad (2.10)$$

Jika dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$ dan $(y - y^*) = v$ maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ pada keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$, sehingga diperoleh persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v\end{aligned}\quad (2.11)$$

Persamaan (2.11), apabila ditulis dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\quad (2.12)$$

Sehingga diperoleh persamaan linear pada titik kesetimbangan (x^*, y^*) adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\quad (2.13)$$

dimana semua turunan parsial dalam matriks adalah hasil dari titik kesetimbangan (x^*, y^*) .

Menurut Ermentrout (2017), bentuk umum persamaan diferensial waktu tunda sebagai berikut:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U) \quad (2.14)$$

dimana $U(t) = X(t - \tau)$ dan $F: R^{2n} \rightarrow R^n$, sehingga titik tetap yang memenuhi,

$$0 = F(X^*, X^*) \quad (2.15)$$

Titik tetap akan stabil asimtotik jika sistemnya stabil linear. Dua bentuk matriks $n \times n$ sebagai berikut

$$P = (p_{ij}) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad Q = (q_{ij}) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \quad (3.16)$$

dimana semua dievaluasi pada titik tetap. Dengan demikian diperoleh hasil linearisasi.

$$\frac{dY}{dt} = PY(t) + QY(t - \tau) \quad (2.17)$$

Misalkan $Y(t) = Ve^{\lambda t}$, dimana V adalah konstanta vektor. Bila bagian real λ bernilai negatif maka solusinya menurun dan sebaliknya bila bernilai positif maka solusinya meningkat. Kemudian substitusikan Y ke persamaan sebelumnya sehingga diperoleh,

$$(\lambda I - P - Qe^{-\lambda\tau})V = 0 \quad (2.18)$$

Persamaan (2.16) merupakan sebuah persamaan linear dari V dan memiliki solusi jika dan hanya jika

$$H(\lambda) \equiv \det(\lambda I - P - Qe^{-\lambda\tau}) = 0 \quad (2.19)$$

Oleh sebab itu, diharuskan menyelesaikan persamaan transendel tersebut dan apabila terdapat satu variabel waktu tunda maka,

$$H(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) adalah bentuk eksak dari teorema *Brauers*. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat berbagai macam teorema yang menjamin akar polinomial yang memiliki bagian real negatif.

2.2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah suatu matriks ber orde $n \times n$. Vektor $x \in R^n$ dan $x \neq 0$ disebut dengan vektor Eigen dari A jika Ax adalah perkalian skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.21)$$

untuk skalar λ , berkaitan dengan λ yang memenuhi persamaan diatas disebut nilai Eigen dari A dan x disebut vektor Eigen dari A yang bergantung pada λ . Dengan ini, untuk memperoleh nilai matriks ber orde $n \times n$ maka persamaan (2.19) dapat ditulis kembali sebagai (Waluya, 2006).

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.22)$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.20) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika,

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad (2.23)$$

Persamaan (2.21) menghasilkan persamaan polinomial terhadap variabel λ yang dinamakan persamaan karakteristik dari A . Skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik yang tak lain adalah nilai-nilai Eigen dari A .

Misalkan, diberikan nilai Eigen dan vektor Eigen sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solusi nilai Eigen dapat ditentukan dari persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$, diperoleh

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Nilai Eigen dari A menunjukkan akar kembar yaitu $\lambda = 2$. Selanjutnya dicari vektor Eigen dengan menggunakan persamaan (2.20), maka

$$(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

dengan memberikan $x_1 = -x_2$, jika $x_1 = c$ dimana c adalah konstanta sehingga diperoleh

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh vektor Eigen adalah $x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.2.4 Kestabilan Titik Keseimbangan

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melihat nilai-nilai eigennya yaitu λ_i , dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A yakni $(A - \lambda I) = 0$. Secara umum titik kesetimbangan mempunyai tiga syarat sebagai berikut (Finizio dan Ladas, 1988).

1. Stabil, jika
 - a. Setiap nilai Eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0, \forall_{i=1,2,\dots,n}$).
 - b. Setiap komponen nilai Eigen kompleks, bagian realnya kecil atau sama dengan nol ($Re(\lambda_i) \leq 0, \forall_{i=1,2,\dots,n}$).
2. Tidak stabil, jika
 - a. Setiap nilai Eigen real adalah positif ($\lambda_i > 0, \forall_{i=1,2,\dots,n}$).

- b. Setiap komponen nilai Eigen kompleks, bagian realnya lebih besar dari nol ($Re(\lambda_i) > 0, \forall_{i=1,2,\dots,n}$).

3. Pelana (*Saddle*), jika

Suatu titik kesetimbangan x^* dari suatu sistem adalah pelana jika perkalian dua nilai Eigen real adalah negatif ($\lambda_i \cdot \lambda_j < 0, \forall_{ij}$ sebarang).

Adapun titik kesetimbangan dari sistem dinamik dapat di lihat pada Tabel

2.1 sebagai berikut:

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sitem Dinamik

Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
$\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node</i>
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node</i>
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak stabil	<i>Saddle</i>
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	<i>Node</i>
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node</i>
$\lambda_{1,2} = a + bi \in \mathbb{C}$		
$a > 0$	Tidak Stabil	<i>Spiral</i>
$a < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Spiral</i>
$a = 0$	Stabil	<i>Terpusat</i>

2.2.5 Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*

Nilai-nilai Eigen dari suatu matriks diperoleh melalui persamaan karakteristiknya. Persamaan karakteristik merupakan persamaan polinom, maka metode menganalisa kestabilan titik kesetimbangan dalam menentukan nilai Eigen dari polinomial karakteristik suatu matriks dapat digunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* adalah suatu metode yang menunjukkan kestabilan tanpa menghitung akar-akar persamaan karakteristik secara langsung. Kriteria ini tidak dapat menjelaskan bagaimana menstabilkan

sistem tak stabil serta dapat digunakan dalam menentukan batas penguatan suatu sistem agar tetap stabil (Putra, 2016).

Misalkan a_0, a_1, \dots, a_k adalah bagian real. Semua nilai dari persamaan karakteristik yaitu,

$$P(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0 \quad (2.24)$$

memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika determinan dari matriks M_j , diperoleh

$$M_j = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

dengan $i = 0, 1, 2, \dots, k$, bernilai positif, dimana $a_i = 0$ jika $j > k$.

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, nilai k disebut nilai Eigen dari persamaan (2.22) stabil asimtotik lokal.

2.2.6 Metode Kestabilan Lyapunov

Metode Lyapunov adalah suatu metode untuk menganalisis lebih jauh kestabilan dari titik kesetimbangan pada suatu sistem dengan cara mengkonstruksi fungsi Lyapunov yang disertai dengan beberapa teorema yang akan memperjelas kestabilan titik kesetimbangan dari sistem yang dianalisa.

2.2.6.1 Fungsi Lyapunov

Suatu fungsi untuk menentukan dan memeriksa kestabilan secara global dari suatu sistem nonlinear disebut dengan fungsi Lyapunov, diberikan persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut (Yulida dan Ahsar, 2011).

$$x' = f(x) \quad (2.26)$$

dengan $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ dan $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi kontinu terhadap E .

Definisi 2.1

Diberikan $x' = f(x)$ dengan $E \subset \mathbb{R}^n$ dan $M \subset E$. Himpunan M adalah himpunan invarian terhadap Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear. Jika $x(t_0) = x_0 \in M$ maka $x(x_0, t) \in M$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Fungsi Lyapunov dari suatu sistem persamaan diferensial tidak tunggal, asalkan fungsi tersebut dari sistem memenuhi tiga pernyataan yang diberikan oleh definisi fungsi Lyapunov yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.2

Diberikan fungsi $V: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dan $\hat{x} \in E$ titik kestabilan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear. Fungsi V dikatakan fungsi Lyapunov, jika memenuhi tiga pernyataan berikut:

- Fungsi V kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada E .
- Fungsi $V(x) > 0$ untuk $x \in E$ dengan $x \neq \hat{x}$ dan $V(\hat{x}) = 0$ dengan $x = \hat{x}$ (dengan titik kesetimbangan \hat{x} merupakan titik minimum global).
- Fungsi $V(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E$.

Leon (2009) memberikan beberapa fungsi Lyapunov jika memenuhi tiga pernyataan diatas.

- Fungsi Lyapunov Logaritma diperkenalkan oleh Goh untuk sistem Lokta-Volterra.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right) \quad (2.27)$$

- b. Fungsi Lyapunov kuadratik umum (sistem linear dan nonlinear)

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2} (x_i - x_i^*)^2 \quad (2.28)$$

- c. Fungsi Lyapunov kuadratik gabungan

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{c_i}{2} [\sum_{i=1}^n x_i - x_i^*]^2 \quad (2.29)$$

Metode Lyapunov dapat menganalisis titik-titik kesetimbangan dari model yaitu dengan penyelesaian positif dari model, kestabilan secara global pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, dimana metode ini menghasilkan teorema mengenai analisis tersebut (Side, 2015). Teorema untuk menganalisis sifat kestabilan global titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

Teorema 2.3

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan $E \subset \mathbb{R}^n$. Apabila terdapat fungsi Lyapunov V dengan,

- $E_k = \{x \in E | V(x) \leq k\}$ dengan $k > 0$ merupakan himpunan terbatas.
- $V(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E_k$.
- Ada M himpunan invarian terbesar dalam $H = \{x \in E_k | V(x) = 0\}$ maka setiap solusi $x(t)$ ke M untuk $t \rightarrow \infty$.

Berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh akibat sebagai berikut:

Diberikan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear (2.24) dengan $E \subset \mathbb{R}^n$. Jika terdapat fungsi Lyapunov V , dengan

- $E_k = \{x \in E_k | V(x) \leq k\}$ dengan $k > 0$ merupakan himpunan terbatas.
- $V(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in E_k$.

- c. $H = \{x \in E_k | V(x) = 0\}$ tidak memuat solusi, kecuali titik kesetimbangan $\hat{x} = 0$ maka \hat{x} stabil asimtotik lokal. Jika E_k adalah E maka titik kesetimbangan tersebut stabil asimtotik global.

2.2.6.2 Metode Krasovsky

Dalam mengkonstruksi fungsi Lyapunov, dibutuhkan metode yang dapat memenuhi semua syarat dalam membentuk fungsi tersebut.

Proporsi 2.4 Fungsi $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah fungsi diferensial sedemikian sehingga $f(0) = 0$. Maka untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ terdapat $\alpha \in [0,1]$ sedemikian sehingga $g^T(x)f(x) = g^T(x) \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x$.

Teorema 2.5 Diberikan $x(t) = 0$ adalah titik kesetimbangan untuk sistem dinamika nonlinear

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0, t > 0 \quad (2.30)$$

Dimana $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah diferensial kontinu dan D adalah himpunan buka dengan $0 \in D$. Diasumsikan terdapat matrik definit positif $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dan $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sedemikian sehingga

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right]^T P + P \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right] \geq -R, x \in D, x \neq 0 \quad (2.31)$$

Maka solusi nol $x(t) = 0$ pada persamaan adalah kesetimbangan tunggal stabil asymptotik dengan fungsi Lyapunov $V(x) = f^T(x)Pf(x)$. Jika $D \equiv \mathbb{R}^n$, maka solusi nol $x(t) = 0$ pada persamaan adalah kesetimbangan tunggal stabil asymptotik global.

2.3 Pemodelan Matematika

2.3.1 Penyakit Menular

Menurut beberapa para ahli mendefinisikan penyakit sebagai berikut (Irwan, 2017):

- a. Penyakit adalah kegagalan suatu organisme dari mekanisme yang beradaptasi dan dapat bereaksi secara tepat terhadap rangsangan ataupun tekanan, sehingga berakibat menurunnya kekebalan tubuh yang akan menimbulkan gangguan.
- b. Penyakit merupakan suatu keadaan dimana proses berlangsungnya kehidupan tidak teratur pertumbuhannya.
- c. Penyakit berupa kelainan yang tampak dari luar dan keadaan yang dapat terganggu dari keteraturan fungsifungsi pada tubuh.

Keadaan dimana terjadinya ketidakseimbangan fungsi normal pada tubuh manusia dengan sejumlah sistem biologis serta kondisi penyesuaiannya disebut sakit. Seorang dikatakan sakit jika munculnya gejala, mengenali keadaan yang dirasakan, dan menurunnya kemampuan dalam beraktivitas sehari-hari.

Penyakit menular merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh mikroorganisme, seperti virus, bakteri, jamur, atau parasit. Penyakit dapat berpindah dari individu ke individu yang lain baik secara langsung maupun melalui perantara. Penularan secara langsung terjadi ketika kuman pada orang yang sakit berpindah melalui kontak fisik seperti sentuhan, melalui udara saat bersin dan batuk, atau melalui cairan tubuh seperti darah dan urine. Misalnya penyakit TBC, penularannya melalui percikan-percikan halus yang dihasilkan oleh manusia yang sakit seperti bersin dan ludah. Sedangkan dengan melalui

perantara seperti gigitan hewan, makanan atau minuman yang telah terkontaminasi oleh penyebab penyakit contohnya penyakit disentri, kolera, dan demam berdarah dengue (Irwan, 2017).

Suatu penyakit dapat menular dari individu ke individu yang lain dipengaruhi oleh tiga faktor yaitu faktor *Agen*, faktor *Host* (manusia), dan faktor *Route of Transmission*. Faktor *Agen* dikelompokkan menjadi beberapa golongan diantaranya golongan virus (berupa influenza, cacar, dan lainnya), golongan riketsia (berupa typhus), golongan bakteri (berupa disentri), golongan protozoa (berupa malaria, filarial, dan lainnya). Faktor *Host* berkaitan dengan daya tahan tubuh, misalnya imunitas seseorang, makin lemahnya seseorang maka sangat mudah terinfeksi. Sedangkan faktor *route of Transmission* berdasarkan potensi yang ditularkan, misalnya infeksi tersebut berpotensi wabah atau tidak (Irwan, 2017).

2.3.2 Karantina

Penyakit menular disebabkan melalui bakteri, virus, maupun parasit. Suatu individu dapat terjangkit penyakit menular, baik dari kontak langsung ataupun perantara dengan individu yang terinfeksi, sehingga mengakibatkan terjadinya suatu infeksi baru yang menjadi tanda adanya penyebaran penyakit. Kondisi dimana penyebaran penyakit menular terus terjadi disebut dengan epidemik. Penanggulangan masalah epidemik adalah dengan cara melakukan karantina terhadap individu yang terinfeksi (Zulaikha, 2017).

Suatu individu yang rentan dengan penyakit akan mudah terinfeksi, dengan demikian dilakukan pengkarantinaan terhadap individu yang terinfeksi. Individu tersebut akan tinggal terpisah dirumah atau suatu tempat tertentu yang

untuk mencegah penularan penyakit. Pada saat dikarantina, tidak diperbolehkan untuk masuk sekolah, kerja, ataupun bepergian ke tempat-tempat umum, namun boleh melakukan aktivitas yang biasa dilakukan di dalam tempat tersebut. Selama karantina berlangsung kondisi kesehatan akan terus di pantau, menjalani serangkaian pemeriksaan medis seperti tes darah atau tes lainnya. Hal ini diberlakukan untuk pihak yang berwenang atau dinas kesehatan setempat dapat melihat dan mengevaluasi adanya resiko penularan penyakit berbahaya (Putra, 2016).

2.3.3 Periode Laten (masa inkubasi)

Periode laten merupakan selang waktu dimana beberapa individu yang terinfeksi hingga adanya penyakit atau gejala pertama kali. Individu terinfeksi disebabkan oleh masuknya mikroorganisme ke dalam tubuh. Mikroorganisme berupa bakteri, virus, atau parasit. Misalnya, individu terinfeksi virus influenza dikarenakan individu menjalin kontak langsung dengan penderita, sehingga virus masuk ke dalam tubuh dan menimbulkan penyakit flu. Mulainya terinfeksi virus tersebut, maka fase selanjutnya masa inkubasi. Fase ini merupakan waktu dimana awal munculnya penyakit hingga timbulnya periode laten pada penyakit kronis. Berlangsungnya fase inkubasi, penyakit belum muncul adanya tanda ataupun gejala yang disebut dengan penyakit subklinis (asimtomatis).

Periode laten dibutuhkan oleh suatu mikroorganisme untuk bereplikasi hingga menimbulkan gejala penyakit. Pada masa laten, wabah penyakit yang masuk dalam tubuh manusia akan melawan sistem kekebalan tubuh, jika kekebalan tubuh individu sehat yang telah melakukan kontak dengan individu terinfeksi lebih kuat maka individu tersebut tidak akan tertular penyakit. Namun

sebaliknya jika kekebalan tubuh individu sehat yang telah melakukan kontak dengan individu terinfeksi lemah maka individu yang sehat akan menjadi terinfeksi. Setiap mikroorganisme mempunyai masa laten yang berbeda-beda antara satu mikroorganisme dengan mikroorganisme lainnya seperti masa inkubasi pada orang dewasa akan membutuhkan waktu cukup lama dibandingkan anak-anak. Ada dua faktor yang mempengaruhi masa laten (masa inkubasi) secara klinis yaitu faktor yang meningkatkan resiko terjadinya penyakit disebut dengan faktor resiko dan faktor yang menurunkan resiko terjadinya penyakit disebut dengan faktor protektif. Selain itu, terdapat faktor-faktor yang dapat mempengaruhi kecepatan periode laten diantaranya dosis, jalur masuknya seperti pembuluh darah, perkembangbiakan mikroorganisme, dan daya tahan tubuh seseorang.

Berikut contoh berbagai jenis penyakit infeksi dengan masa inkubasinya (masa laten) yaitu:

1. Influenza berkisar antara 1 – 3 hari,
2. Diare berkisar antara 1 – 7 hari,
3. Kolera berkisar antara 2 – 5 hari,
4. Herpes berkisar antara 2 – 12 hari,
5. Demam berdarah dengue berkisar antara 4 – 10 hari,
6. Cacar air sekitar 8 – 12 hari,
7. Hepatitis A berkisar antara 2 – 7 minggu,
8. Hepatitis B berkisar antara 2 – 10 minggu,
9. Hepatitis C berkisar antara 2 – 25 minggu,
10. Polio berkisar antara 1 – 3 bulan,

11. HIV berkisar antara beberapa bulan – tahun.

2.3.4 Model SEIQR

Model SEIQR merupakan model epidemik tundaan waktu pada penyebaran penyakit menular dengan periode laten. Model ini dibagi menjadi lima populasi yaitu: *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Quarantine*, dan *Recovered*. *Susceptible* menyatakan individu yang tidak terinfeksi tetapi rentan terhadap penyakit pada waktu t . *Exposed* menyatakan individu yang terinfeksi tetapi tidak bisa menginfeksi (laten), maka individu perlu dikarantina meskipun tidak menularkan kepada individu lain. *Infected* menyatakan individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit melalui kontak langsung dengan individu yang rentan. *Quarantine* menyatakan individu yang terinfeksi dikarantina pada waktu t . *Recovered* menyatakan individu dinyatakan sembuh dari penyakit pada waktu t .

Li dan Xue (2013) dalam jurnalnya mendefinisikan persamaan model SEIQR sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= A - \mu_1 S - \beta SI \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \beta S^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta S^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) I \\
 \frac{dQ}{dt} &= k_1 E + k_2 I - (\mu_4 + \gamma) Q \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma Q + v I + k_3 E - \mu_5 R
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Berdasarkan model diatas terdapat parameter-parameter diantaranya

A : Laju rekrutmen pada populasi yang rentan.

μ_i : Laju kematian alami ($i = 1,2,3,4,5$).

β : Laju infeksi penyakit.

α : Laju kematian individu ketika karantina

γ : Laju pemulihan setelah karantina.

ν : Laju pemulihan sebelum karantina.

k_1, k_2 : Karantina pada individu dari E dan I .

k_3 : Laju individu sembuh dari E .

t : Waktu.

τ : Periode epidemik laten.

2.4 Pencegahan Penyakit dalam Perspektif Islam

Islam merupakan agama yang telah mengatur segala aspek berhubungan dengan kehidupan manusia, salah satu aspek yang menjadi perhatian adalah kesehatan, sebab kesehatan merupakan sesuatu yang pasti dalam menjalani seluruh aktivitas kehidupan manusia. Nikmat Allah SWT yang paling besar dirasakan oleh manusia adalah kesehatan. Banyak hal yang dirasakan oleh penderita sakit seperti ketidaknyamanan dalam menjalani kehidupan baik itu ibadah, aktivitas, maupun lainnya. Belum juga harus menyiapkan banyak uang untuk berobat. Hendaknya manusia banyak bersyukur atas anugerah yang telah Allah SWT berikan kepadanya.

Menurut Shihab (2001) dalam bukunya menjelaskan bahwa tujuan pokok kehadiran Islam adalah untuk selalu melindungi agama, jiwa, akal, jasmani, harta, dan keturunan. Tiga dari enam pokok tersebut berhubungan dengan kesehatan, sehingga dapat disimpulkan bahwa Islam sangat menganjurkan untuk selalu menjaga kesehatan. Berdasarkan pandangan agama Islam, kesehatan memiliki dua makna. Pertama, *Ash-Shihah* adalah bentuk kesehatan yang meliputi jasmani atau raga atau lahiriah. Kedua, *Al-Alfiat* adalah bentuk kesehatan yang berupa rohani

atau jiwa atau batiniah. Islam menghimbau kepada setiap manusia untuk selalu menjaga kesehatan baik dari segi kebersihan diri sendiri, kebersihan rumah, dan lingkungan sekitarnya. Sebagaimana yang telah diajarkan Nabi dalam agama Islam yakni mencegah lebih baik dari pada mengobati.

Dalam Islam, kebersihan sangat penting sehingga orang yang membersihkan diri dan mengusahakan kebersihan akan disukai Allah SWT. Sebagaimana dalil Al-Qur'an dalam surah Al-Baqarah ayat 222, artinya *"Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertaubat dan orang-orang yang menyucikan atau membersihkan diri"*. Dalil ini menjelaskan bahwa Allah SWT baik dan mencintai perihal tentang kesucian atau kebersihan. Kebersihan adalah bagian dari nikmat paling besar yang telah Allah SWT berikan kepada hambaNya, karena kebersihan adalah pokok utama dari pola hidup sehat. Kesehatan inilah yang merupakan anugerah yang tiada harganya yang Allah SWT berikan. Selain itu, dalam sabdanya Rasulullah Saw juga menyampaikan bahwa *"Sesungguhnya Allah itu baik dan mencintai kebaikan, Bersih (suci) dan mencintai kebersihan, Mulia dan mencintai kemuliaan, bagus dan mencintai kebagusan, bersihkanlah rumahmu"* (H.R.Tirmidzi dari Saad).

Kapan dan dimanapun manusia berada akan terkena penyakit sebab penyakit datang dari berbagai ragam sumber. Cara penularannya terjadi sangat cepat. Wabah penyakit menular merupakan suatu peringatan serta menjadi pelajaran bagi manusia agar ia lebih bersyukur. Semua yang terjadi karena kekuasaanNya, sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an surah Yunus ayat 57 yang artinya: *"Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman"*.

Wabah penyakit sebelumnya sudah terjadi di zaman Rasulullah Saw, pada saat itu wabah muncul ketika masa kekhalifahan Umar bin Khattab yaitu penyakit kusta, tak hanya menular namun juga menyebabkan kematian. Proses penyebarannya pun sangat cepat kala itu. Penyakit kusta adalah sebuah penyakit kulit, dimana penderitanya mengalami bercak-bercak merah pada kulit, mati rasa, dan tubuh melemah. Penyakit ini disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Leprae*. Penyakit kusta dikenal dengan wabah *Tha'un Amwas*. Nama *Amwas* diambil dari daerah asal lahirnya penyakit yaitu sebuah desa kecil di negeri Damaskus (Syam). Rasulullah Saw bersabda: "*Thaun (wabah penyakit menular) adalah suatu peringatan dari Allah SWT untuk menguji hamba-hambaNya dari kalangan manusia*" (HR. Bukhari dan Muslim).

Sayyidina Umar menyusun beberapa strategi dalam menangani wabah penyakit yaitu memerintahkan gubernur Abu Ubaidah bin Al-Jarrah untuk mengisolasi rakyatnya dan mengurungkan perjalanannya menuju Damaskus. Pembatalan itu terjadi saat sayyidina Umar bersama rombongan sudah sampai di Sargha, sebuah desa di wilayah Tabuk, setelah mendapat kabar wabah *Amwas*. Keputusan ini diambil melalui musyawarah dengan para sahabat, kalangan Muhajirin dan Anshar. Diriwayatkan dari Rasulullah Saw bahwa beliau bersabda: "*Jika kalian mendengar wabah di suatu daerah, maka jangan memasuki daerah tersebut; dan jika terjadi wabah ditempat kalian berada, maka jangan tinggalkan daerah tersebut*" (HR. Bukhari). Hadist ini menjelaskan bahwa jika sedang terjadi wabah di daerah yang ditinggali, kita tidak boleh keluar dari daerah itu, sebab akan berpotensi menulari daerah lainnya. Sebaliknya, jika ada daerah atau seseorang terinfeksi wabah, lebih baik kita menjaga jarak tubuh dari seseorang tersebut, agar tidak langung tertular atau menularkan.

Para ahli sejarah mencatat, korban yang meninggal dunia akibat wabah *Amwas* mencapai 25 ribu orang dengan waktu yang sangat cepat. Mengenai wabah yang menimpa umat Islam, Aisyah ra., ia berkata: Aku pernah bertanya kepada Rasulullah Saw tentang wabah penyakit yang mematikan, lalu beliau menjawab, *“Adzab yang Allah kirim kepada orang yang Dia kehendaki. Allah jadikan wabah penyakit sebagai rahmat bagi orang-orang beriman. Tidaklah seseorang yang di negerinya mewabah lalu ia tetap berada di situ dengan sabar dan berharap pahala, ia tahu tidak ada musibah yang menimpanya kecuali apa yg telah Allah tetapkan bagi dirinya melainkan baginya pahala seperti pahala seorang syahid”* (HR. Al-Bukhari).

Penelitian ini membahas tentang penyakit menular, dimana para ahli kedokteran membuktikan bahwa penyakit menular telah terjadi pada manusia ataupun hewan. Meskipun banyak penyakit yang telah ditemukan obatnya namun sebagian manusia masih ada yang harus mengalami pengucilan (karantina). Karantina adalah salah satu cara untuk mengevaluasi adanya penularan penyakit berbahaya. Wabah penyakit tidak pernah diharapkan muncul hingga mengakibatkan kekhawatiran. Namun, selalu ada alasan dan hikmah yang terkandung dari setiap peristiwa yang telah terjadi. Setiap penyakit yang menimpa seseorang pasti dapat disembuhkan, seperti hadits yang diriwayatkan oleh Imam Bukhori dari sahabat Abu Hurairah bahwasanya Nabi Saw bersabda: *“Tidaklah Allah turunkan penyakit kecuali Allah turunkan pula obatnya”* dan Rasulullah Saw juga bersabda: *“Sesungguhnya Allah telah menurunkan penyakit dan obatnya, demikian pula Allah menjadikan bagi setiap penyakit ada obatnya. Maka berobatlah kalian dan janganlah berobat dengan yang haram”* (HR. Abu Dawud dari Abud Darda` radhiallahu ‘anhu). Kedua hadits ini menerangkan bahwa segala penyakit yang menimpa

manusia, Allah turunkan pula obatnya. Wabah penyakit dapat menyerang tubuh kita bisa terjadi kapan saja, maka dari itu mencegah lebih baik. Berdasarkan penjelasan diatas suatu penyebaran penyakit menular dapat dilakukan dengan karantina dan periode laten, dimana individu yang terinfeksi akan dikarantina sampai dia pulih.



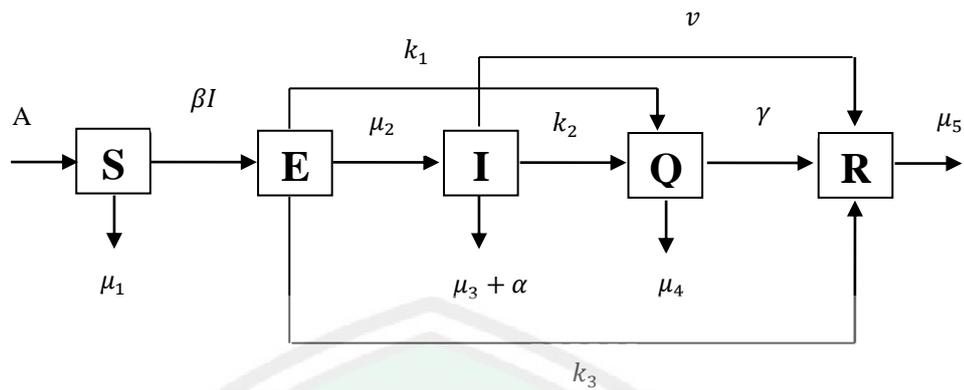
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model SEIQR dengan Periode Laten

Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini merupakan model epidemik SEIQR didasari adanya penyakit menular yang memiliki periode laten. Periode laten adalah selang waktu dimana beberapa individu yang terinfeksi hingga adanya penyakit. Periode laten ini menjadi alasan pembentukan model SEIQR yakni munculnya kelas *Exposed*. Model SEIQR merupakan pengembangan model SIR dengan menambahkan kompartemen E sebagai individu yang terinfeksi namun tidak dapat menginfeksi dan kompartemen Q sebagai individu yang dikarantina. Populasi yang diberikan terdiri dari lima kelas yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Quarantine*, dan *Recovered*. Penelitian ini menggunakan waktu tunda yang berperan penting dalam pemodelan masalah nyata, sebab keputusan yang dibuat berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya. Haberman (1998) menyatakan bahwa laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang t tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya pada waktu $(t - \tau)$. Pengaruh waktu tunda pada model epidemik SEIQR hanya berpengaruh pada konvergensi dari kestabilan tiap titik kesetimbangan dan tidak berpengaruh pada jenis kestabilannya. Waktu tunda memberikan pengaruh pada periode penyebaran infeksi penyakit dari individu rentan ke individu terinfeksi.

Model SEIQR merupakan model epidemik dengan periode laten untuk penyebaran penyakit. Secara sistematis model penularan penyakit dengan periode laten dapat digambarkan dalam diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Kompartemen SEIQR dengan Periode Laten

Berdasarkan Gambar 3.1 menunjukkan bahwa tingkat rekrutmen pada populasi yang rentan sebesar A . Subpopulasi *susceptible* dan *infected* dalam populasi tersebut memiliki kondisi tetap, yang mana terdapat bilangan konstan pada *susceptible*. Bilangan konstan melambangkan laju kematian alami yakni μ_1 . Misalkan, laju infeksi penyakit adalah β , maka dalam satu waktu laju dari *susceptible* menjadi *infected* dikarenakan mengalami penurunan pada populasi individu yang diasumsikan sebagai $-\beta SI$, dengan β adalah konstan positif. Oleh karena itu diperoleh persamaan untuk kompartemen S adalah sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu_1 S - \beta SI \quad (3.1)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang terinfeksi namun tidak dapat menginfeksi (laten) terhadap waktu, dipengaruhi oleh laju infeksi terhadap individu yang rentan dan individu yang terinfeksi. Menurunnya laju infeksi dengan memprediksi jangka waktu panjang saat penyakit $\beta e^{-\mu_2 t}$ terhadap populasi individu yang rentan pada waktu t dan populasi individu yang terinfeksi dengan perlambatan waktu. Waktu tunda diberikan untuk mencegah penyebaran penyakit dimana terdapat individu yang akan rentan terhadap penyakit sehingga individu tersebut terinfeksi. Menurunnya laju kematian μ_2 dengan melakukan

karantina terhadap individu yang terinfeksi k_1 sehingga individu akan sembuh k_3 . Oleh karena itu, maka diperoleh persamaan untuk kompartemen E adalah sebagai berikut.

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E \quad (3.2)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang terinfeksi terhadap waktu dipengaruhi laju infeksi terhadap individu yang terinfeksi pada waktu t dengan perlambatan waktu sebanyak jumlah populasi individu yang terinfeksi dan jumlah populasi individu yang rentan. Menurunnya laju kematian μ_3 terhadap populasi individu baik yang setelah ataupun sebelum dikarantina α , laju pemulihan sebelum karantina v , dan karantina pada individu dari *exposed* dan *infected* k_2 . Oleh karena itu, maka diperoleh persamaan untuk kompartemen I adalah sebagai berikut.

$$\frac{dI}{dt} = \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) I \quad (3.3)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang terinfeksi dan melakukan perawatan (karantina) pada waktu t dipengaruhi adanya individu yang dikarantina dari sejumlah populasi individu yang terinfeksi akan tetapi tidak dapat menginfeksi (*exposed*) dan populasi individu yang terinfeksi (*infected*). Menurunnya laju kematian μ_4 dan laju pemulihan setelah karantina γ . Oleh karena itu, maka diperoleh persamaan untuk kompartemen Q adalah sebagai berikut.

$$\frac{dQ}{dt} = k_1 E + k_2 I - (\mu_4 + \gamma) Q \quad (3.4)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang sembuh pada waktu t dipengaruhi laju pemulihan setelah dikarantina γ , ditambah jumlah individu

dalam kelas *infected* disebabkan laju pemulihan sebelum dikarantina v , ditambah jumlah individu dalam kelas *exposed* disebabkan individu yang telah sembuh dari *exposed* k_3 . Sedangkan penurunan jumlah individu dalam kelas *recovered* dikarenakan laju kematian alami μ_5 . Oleh karena itu, maka diperoleh persamaan untuk kompartemen R adalah sebagai berikut.

$$\frac{dR}{dt} = \gamma Q + vI + k_3E - \mu_5R \quad (3.5)$$

Berdasarkan diagram kompartemen diatas, dihasilkan model epidemik SEIQR dengan periode laten dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \mu_1S - \beta SI \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \beta e^{-\mu_2\tau}S(t-\tau)I(t-\tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3)E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta e^{-\mu_2\tau}S(t-\tau)I(t-\tau) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2)I \\ \frac{dQ}{dt} &= k_1E + k_2I - (\mu_4 + \gamma)Q \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma Q + vI + k_3E - \mu_5R \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan kondisi awal pada persamaan (3.6) adalah

$$\begin{aligned} S(\theta) = \phi_1(\theta), E(\theta) = \phi_2(\theta), I(\theta) = \phi_3(\theta), Q(\theta) = \phi_4(\theta), R(\theta) = \phi_5(\theta), \phi_i \\ \geq 0, \theta \in [-\tau, 0], \phi_i(0) > 0, \phi_i \in C([-h, 0], \mathbb{R}_+^5), i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}_+^5 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

model dengan kondisi awal diatas dapat ditulis sebagai berikut

$$\Omega_1 = \left\{ (S, E, I, Q, R) \in \mathbb{R}_+^5 \mid S + E + I + Q + R \leq \frac{A}{\mu} \right\}$$

dimana,

$$\mu \leq \min \{ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5 \}$$

Dengan demikian, memudahkan kita untuk menunjukkan bahwa Ω_1 merupakan invarian positif terhadap sistem persamaan (3.6).

Variabel dan parameter yang digunakan dalam sistem persamaan diferensial pada model SEIQR dengan periode laten adalah sebagai berikut.

Tabel 3.1 Variabel Model SEIQR dengan Periode Laten

Variabel	Keterangan
S	Subpopulasi individu rentan pada waktu t
E	Subpopulasi individu terinfeksi akan tetapi tidak bisa menginfeksi (laten)
I	Subpopulasi individu terinfeksi dan tanpa melakukan perawatan
Q	Subpopulasi individu yang terinfeksi dan melakukan perawatan (karantina) pada waktu t
R	Subpopulasi individu yang sembuh pada waktu t

Tabel 3.2 Satuan Parameter Model SEIQR dengan Periode Laten

Parameter	Keterangan	Satuan
A	Laju rekrutmen pada populasi yang rentan	Perhari
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$	Laju kematian alami	Perhari
β	Laju infeksi penyakit	Perhari
α	Laju kematian individu ketika karantina	Perhari
γ	Laju pemulihan setelah karantina	Perhari
ν	Laju pemulihan sebelum karantina	Perhari
k_1, k_2	Karantina pada individu dari E dan I	Perhari
k_3	Laju individu sembuh dari E	Perhari
t	Waktu	Perhari
τ	Periode epidemik laten	Perhari

Kemudian model tersebut dikonstruksi berdasarkan asumsi Li dan Xue (2013) sehingga diperoleh model SEI dengan waktu tunda yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \mu_1 S - \beta SI \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + \nu + k_2) I \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan kondisi awal pada persamaan (3.7) adalah

$$S(\theta) = \phi_1(\theta), E(\theta) = \phi_2(\theta), I(\theta) = \phi_3(\theta), \phi_i \geq 0, \theta \in [-\tau, 0], \phi_i(0) > 0, \phi_i \in C([-h, 0], \mathbb{R}_+^3), i = 1, 2, 3.$$

$$\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

Model dengan kondisi awal diatas dapat ditulis sebagai berikut

$$\Omega_2 = \left\{ (S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 \mid S + E + I \leq \frac{A}{\mu} \right\}$$

dimana,

$$\mu \leq \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$$

Dengan demikian dapat ditunjukkan bahwa Ω_2 merupakan invarian positif terhadap sistem persamaan (3.7).

3.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan (titik tetap) dari persamaan (3.7) dikatakan setimbang jika memenuhi $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dI}{dt} = 0$. Sistem persamaan (3.7) apabila ruas kanan sistem tersebut dimisalkan dengan nol maka diperoleh

$$A - \mu_1 S - \beta SI = 0 \quad (3.8)$$

$$\beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E = 0 \quad (3.9)$$

$$\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) I = 0 \quad (3.10)$$

3.2.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Misalkan titik keseimbangan model tanpa waktu tunda ($\tau = 0$). Ambil persamaan (3.10) sebagai langkah awal dalam memperoleh titik-titik keseimbangan tersebut.

$$\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) I = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta e^{-\mu_2(0)} S(t - 0) I(t - 0) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) I = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta SI - (\mu_3 + \alpha + v + k_2)I = 0 \\
&\Leftrightarrow I(\beta S - (\mu_3 + \alpha + v + k_2)) = 0 \\
&\Leftrightarrow I_0 = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Substitusikan persamaan (3.11) kepersamaan (3.8) diperoleh,

$$\begin{aligned}
&A - \mu_1 S - \beta SI = 0 \\
&\Leftrightarrow A - \mu_1 S - \beta S(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow A = \mu_1 S \\
&\Leftrightarrow S_0 = \frac{A}{\mu_1}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Substitusikan persamaan (3.11) kepersamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3)E = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta SI - \beta e^{-\mu_2(0)} S(t - 0) I(t - 0) - (\mu_2 + k_1 + k_3)E = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta SI - \beta SI - (\mu_2 + k_1 + k_3)E = 0 \\
&\Leftrightarrow E_0 = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dari persamaan (3.7) pada model epidemik yaitu sebagai berikut:

$$E_0 \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0 \right)$$

3.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Dari persamaan (3.10) dapat difaktorkan menjadi

$$\begin{aligned}
&(\beta e^{-\mu_2 \tau} S - (\mu_3 + \alpha + v + k_2))I = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta e^{-\mu_2 \tau} S - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta e^{-\mu_2 \tau} S = \mu_3 + \alpha + v + k_2 \\
&\Leftrightarrow S^* = \frac{\mu_3 + \alpha + v + k_2}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}
\end{aligned}$$

Misalkan $\sigma = \mu_3 + \alpha + v + k_2$, maka

$$S^* = \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} \quad (3.14)$$

Substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.8) diperoleh,

$$\begin{aligned} A - \mu_1 S - \beta SI &= 0 \\ \Leftrightarrow A - \mu_1 S &= \beta SI \\ \Leftrightarrow A - \mu_1 \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} &= \beta \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} I \\ \Leftrightarrow \beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1 &= \sigma \beta I \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.9) diperoleh,

$$\begin{aligned} \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} SI - (\mu_2 + k_1 + k_3)E &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} I - \beta e^{-\mu_2 \tau} \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} I - (\mu_2 + k_1 + k_3)E &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} I - \beta e^{-\mu_2 \tau} \frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}} I &= (\mu_2 + k_1 + k_3)E \\ \Leftrightarrow \beta \sigma I - \beta e^{-\mu_2 \tau} \sigma I &= \beta e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)E \\ \Leftrightarrow \sigma I - \sigma e^{-\mu_2 \tau} I &= e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)E \\ \Leftrightarrow \sigma(1 - e^{-\mu_2 \tau}) I^* &= e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)E \\ \Leftrightarrow E^* &= \frac{\sigma(1 - e^{-\mu_2 \tau}) I^*}{e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Jika persamaan (3.15) substitusikan pada persamaan (3.16), menjadi

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\sigma(1 - e^{-\mu_2 \tau}) \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta}}{e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)} \\ &= \frac{\sigma(1 - e^{-\mu_2 \tau}) (\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1)}{\sigma \beta} \cdot \frac{1}{e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)} \\ &= \frac{(\sigma - \sigma e^{-\mu_2 \tau}) (\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1)}{\sigma \beta (e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3))} \\ &= \frac{\sigma \beta A e^{-\mu_2 \tau} - \sigma^2 \mu_1 - \sigma \beta e^{-2\mu_2 \tau} A + \sigma^2 \mu_1 e^{-\mu_2 \tau}}{\sigma \beta (e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} - \sigma \mu_1 - \beta e^{-2\mu_2 \tau} + \sigma \mu_1 e^{-\mu_2 \tau}}{\beta (e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3))} \\
&= \frac{(\beta A - \beta e^{-\mu_2 \tau} + \sigma \mu_1) e^{-\mu_2 \tau} - \sigma \mu_1}{\beta e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)}
\end{aligned}$$

atau

$$= \frac{(A - e^{-\mu_2 \tau}) \beta e^{-\mu_2 \tau} - (1 - e^{-\mu_2 \tau}) \sigma \mu_1}{\beta e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik dari persamaan (3.7) pada model epidemik yaitu sebagai berikut:

$$E^* \left(\frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}, \frac{\sigma (1 - e^{-\mu_2 \tau}) I^*}{e^{-\mu_2 \tau} (\mu_2 + k_1 + k_3)}, \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta} \right)$$

3.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah nilai harapan dari banyaknya infeksi tiap satuan waktu. Infeksi ini terjadi pada suatu populasi rentan yang diperoleh dari individu terinfeksi. Bilangan R_0 merupakan suatu kondisi ambang batas untuk menentukan apakah suatu populasi terjadi endemik atau bebas dari penyakit. Dalam menentukan bilangan (R_0) persamaan yang digunakan adalah sistem persamaan (3.7) dengan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0 \right)$.

Penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) akan dicari menggunakan metode matriks generasi selanjutnya (*next generation*). Pada model ini sistem persamaan (3.7) merupakan populasi individu terinfeksi adalah.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} SI - (\mu_2 + k_1 + k_3)E \\
\frac{dI}{dt} &= \beta e^{-\mu_2 \tau} SI - (\mu_3 + \alpha + v + k_2)I
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Berdasarkan sistem persamaan (3.17), diperoleh matriks F sebagai laju infeksi yang mana individu terinfeksi bertambah dan matriks V sebagai laju infeksi yang mana individu terinfeksi berkurang yakni sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} SI \\ \beta e^{-\mu_2 \tau} SI \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -\mu_2 E - k_1 E - k_3 E \\ -\mu_3 I - \alpha I - v I - k_2 I \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Selanjutnya dibentuk matriks Jacobian dari persamaan (3.18) dinyatakan dengan matriks $F = J(F)$ dan $V = J(V)$, sehingga diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-\mu_2 \tau} \\ 0 & \beta e^{-\mu_2 \tau} S \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad (3.19)$$

$$V = \begin{bmatrix} -\mu_2 - k_1 - k_3 & 0 \\ 0 & -\mu_3 - \alpha - v - k_2 \end{bmatrix}$$

Substitusikan persamaan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \frac{A}{\mu_1}, 0, 0$ ke persamaan (3.19), sehingga diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-\mu_2 \tau} \\ 0 & \beta e^{-\mu_2 \tau} \frac{A}{\mu_1} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -\mu_2 - k_1 - k_3 & 0 \\ 0 & -\mu_3 - \alpha - v - k_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Selanjutnya mencari nilai V^{-1} , diperoleh

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-\mu_2 - k_1 - k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\mu_3 - \alpha - v - k_2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Berdasarkan persamaan (3.20) dan persamaan (3.21) diperoleh bentuk matriks *next generation* (K) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K = FV^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -e^{-\mu_2 \tau} \\ 0 & \beta e^{-\mu_2 \tau} \frac{A}{\mu_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{-\mu_2 - k_1 - k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\mu_3 - \alpha - v - k_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{e^{-\mu_2 \tau}}{(\mu_3 + \alpha + v + k_2)} \\ 0 & \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A}{-\mu_1(\mu_3 + \alpha + v + k_2)} \end{bmatrix} \quad (3.22) \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan diatas, bilangan reproduksi dasar dari sistem persamaan (3.7) adalah

$$R_0 = \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau}}{\mu_1 (\mu_3 + \alpha + \nu + k_2)} \quad (3.23)$$

3.4 Kestabilan Titik Keseimbangan

Untuk menentukan kestabilan disekitar titik keseimbangan, sebelumnya dilakukan pelinearannya terhadap persamaan (3.7) untuk memperoleh matriks Jacobian. Linearisasi yaitu proses melinearkan suatu persamaan diferensial nonlinear menjadi persamaan diferensial linear dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dan menghilangkan suku nonlinear disekitar titik keseimbangan. Didefinisikan fungsi untuk masing-masing persamaan dari sistem persamaan model SEIQR, yaitu

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu_1 S - \beta SI \quad \equiv F(S, E, I)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E \quad \equiv G(S, E, I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + \nu + k_2) I \quad \equiv H(S, E, I)$$

Misalkan $k_1 + k_3 = k$ dan $\mu_3 + \alpha + \nu + k_2 = \sigma$ sehingga menjadi

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu_1 S - \beta SI \quad \equiv F(S, E, I)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k) E \quad \equiv G(S, E, I) \quad (3.24)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\sigma) I \quad \equiv H(S, E, I)$$

Deret Taylor dari persamaan (3.24) dengan menghilangkan suku linearnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= F(S_0, E_0, I_0) + \frac{\partial F}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)(S - S_0) + \frac{\partial F}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)(E - \\ &E_0) + \frac{\partial F}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)(I - I_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= G(S_0, E_0, I_0) + \frac{\partial G}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)(S - S_0) + \frac{\partial G}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)(E - \\ &E_0) + \frac{\partial G}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)(I - I_0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= H(S_0, E_0, I_0) + \frac{\partial H}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)(S - S_0) + \frac{\partial H}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)(E - \\ &E_0) + \frac{\partial H}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)(I - I_0) \end{aligned}$$

Didefinisikan

$$\begin{aligned} x &= S - S_0 & y &= E - E_0 & z &= I - I_0 \\ x_\tau &= S(t - \tau) - S_0 & y_\tau &= E(t - \tau) - E_0 & z_\tau &= I(t - \tau) - I_0 \end{aligned}$$

Dimana x, y, z adalah deviasi nilai titik kesetimbangan. Begitu pula x_τ, y_τ, z_τ adalah deviasi nilai titik kesetimbangan dengan adanya waktu tunda.

Dengan menggunakan $\frac{dS}{dt} = \frac{d(S-S_0)}{dt}$, $\frac{dE}{dt} = \frac{d(E-E_0)}{dt}$ dan $\frac{dI}{dt} = \frac{d(I-I_0)}{dt}$, maka persamaan (3.25) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d(S-S_0)}{dt} &= F(S_0, E_0, I_0) + \frac{\partial F}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)(S - S_0) + \frac{\partial F}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)(E - \\ &E_0) + \frac{\partial F}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)(I - I_0) \\ \frac{d(E-E_0)}{dt} &= G(S_0, E_0, I_0) + \frac{\partial G}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)(S - S_0) + \frac{\partial G}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)(E - \\ &E_0) + \frac{\partial G}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)(I - I_0) \\ \frac{d(I-I_0)}{dt} &= H(S_0, E_0, I_0) + \frac{\partial H}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)(S - S_0) + \frac{\partial H}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)(E - \\ &E_0) + \frac{\partial H}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)(I - I_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Oleh karena $x = S - S_0, y = E - E_0, z = I - I_0$ dan pada keadaan setimbang $F(S_0, E_0, I_0) = G(S_0, E_0, I_0) = H(S_0, E_0, I_0) = 0$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)x + \frac{\partial F}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)y + \frac{\partial F}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)z$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial G}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)x + \frac{\partial G}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)y + \frac{\partial G}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)z \quad (3.27)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)x + \frac{\partial H}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)y + \frac{\partial H}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)z$$

Persamaan (3.27) merupakan persamaan yang terlinearisasi. Kemudian, mensubstitusi fungsi $F(S, E, I)$, $G(S, E, I)$ dan $H(S, E, I)$ ke persamaan (3.27), maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)x + \frac{\partial F}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)y + \frac{\partial F}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)z \\ &= \frac{\partial(A-\mu_1 S-\beta SI)}{\partial S}x + \frac{\partial(A-\mu_1 S-\beta SI)}{\partial E}y + \frac{\partial(A-\mu_1 S-\beta SI)}{\partial I}z \\ &= -(\mu_1 + \beta I_0)x - \beta S_0 z \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)x + \frac{\partial G}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)y + \frac{\partial G}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)z \\ &= \frac{\partial(\beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\mu_2 + k)E)}{\partial S}x + \\ &\quad \frac{\partial(\beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\mu_2 + k)E)}{\partial E}y + \frac{\partial(\beta SI - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\mu_2 + k)E)}{\partial I}z \\ &= \beta I_0 x - \beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} x_\tau - (\mu_2 + k)y + \beta S_0 z - \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} z_\tau \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial S}(S_0, E_0, I_0)x + \frac{\partial H}{\partial E}(S_0, E_0, I_0)y + \frac{\partial H}{\partial I}(S_0, E_0, I_0)z \\ &= \frac{\partial(\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\sigma)I)}{\partial S}x + \frac{\partial(\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\sigma)I)}{\partial E}y + \\ &\quad \frac{\partial(\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\sigma)I)}{\partial I}z \\ &= \beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} x_\tau + \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} z_\tau - \sigma z \end{aligned} \quad (3.30)$$

Persamaan (3.28), (3.29), dan (3.30) merupakan persamaan yang sudah dilinearkan dan dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (-\mu_1 - \beta I_0)x - \beta S_0 z \\ \frac{dy}{dt} &= \beta I_0 x - \beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} x_\tau - (\mu_2 + k)y + \beta S_0 z - \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} z_\tau \\ \frac{dz}{dt} &= \beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} x_\tau + \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} z_\tau - \sigma z \end{aligned} \quad (3.31)$$

Untuk mendapatkan persamaan karakteristik, maka persamaan (3.31) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \beta I_0 & 0 & -\beta S_0 \\ \beta I_0 & -(\mu_2 + k) & \beta S_0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} & 0 & \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} & 0 & \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Misalkan $M_0 = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \beta I_0 & 0 & -\beta S_0 \\ \beta I_0 & -(\mu_2 + k) & \beta S_0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$

$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} & 0 & \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2 \tau} & 0 & \beta S_0 e^{-\mu_2 \tau} \end{bmatrix}$, maka matriks (3.32) diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Misalkan solusi dari persamaan (3.33) berbentuk $x = c_1 e^{\lambda t}$, $y = c_2 e^{\lambda t}$ dan $z = c_3 e^{\lambda t}$, dengan c_1 , c_2 dan c_3 adalah konstanta. Kemudian $x = c_1 e^{\lambda t}$, $y = c_2 e^{\lambda t}$ dan $z = c_3 e^{\lambda t}$ disubstitusikan ke persamaan (3.33), sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dc_1 e^{\lambda t}}{dt} \\ \frac{dc_2 e^{\lambda t}}{dt} \\ \frac{dc_3 e^{\lambda t}}{dt} \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \\ c_2 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \\ c_3 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda c_1 e^{\lambda t} \\ \lambda c_2 e^{\lambda t} \\ \lambda c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \\ c_2 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \\ c_3 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + M_1 e^{-\lambda \tau} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - M_0 - M_1 e^{-\lambda \tau}) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks $M = (\lambda I - M_0 - M_1 e^{-\lambda \tau})$ maka diperoleh

$$M \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Jika

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Maka M mempunyai invers yaitu M^{-1} , sehingga apabila kedua ruas dikalikan dengan M^{-1} maka (3.35) diperoleh

$$M^{-1}M \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akibatnya,

$$I \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $x = y = z = 0$. Namun solusi yang diinginkan adalah solusi yang tak nol.

Dengan demikian, untuk mendapatkan

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ maka determinan matriks } M \text{ harus nol atau dapat ditulis}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

Berdasarkan pendefinisian matriks M maka diperoleh

$$|(\lambda I - M_0 - M_1 e^{-\lambda\tau})| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\mu_1 - \beta I_0 & 0 & -\beta S_0 \\ \beta I_0 & -(\mu_2 + k) & \beta S_0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} -$$

$$e^{-\lambda\tau} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2\tau} & 0 & \beta S_0 e^{-\mu_2\tau} \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2\tau} & 0 & \beta S_0 e^{-\mu_2\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu_1 + \beta I_0 & 0 & \beta S_0 \\ -\beta I_0 + \beta I_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} & \lambda + \mu_2 + k & \beta S_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} - \beta S_0 \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} & 0 & \lambda + \sigma - \beta S_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

3.4.1 Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

Teorema 3.1. Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 pada sistem (3.7) stabil asimtotik lokal untuk setiap τ di Ω_2 . Jika $R_0 > 1$ maka tidak stabil untuk setiap τ di Ω_2 .

Bukti:

Matriks karakteristik titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 adalah sebagai berikut:

$$J_{E_0} = \begin{vmatrix} \lambda + \mu_1 + \beta I_0 & 0 & \beta S_0 \\ -\beta I_0 + \beta I_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} & \lambda + \mu_2 + k & \beta S_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} - \beta S_0 \\ -\beta I_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} & 0 & \lambda + \sigma - \beta S_0 e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

Substitusikan $E_0 = (\frac{A}{\mu_1}, 0, 0)$ pada persamaan (3.38), maka diperoleh

$$J_{E_0} = \begin{vmatrix} \lambda + \mu_1 & 0 & \frac{\beta A}{\mu_1} \\ 0 & \lambda + \mu_2 + k & \frac{\beta A e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau}}{\mu_1} - \frac{\beta A}{\mu_1} \\ 0 & 0 & \lambda + \sigma - \frac{\beta A e^{-\mu_2\tau} e^{-\lambda\tau}}{\mu_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

$$\lambda + \mu_1 \begin{bmatrix} \lambda + \mu_2 + k & \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}}{\mu_1} - \frac{\beta A}{\mu_1} \\ 0 & \lambda + \sigma - \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}}{\mu_1} \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta A}{\mu_1} \\ 0 & \lambda + \sigma - \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}}{\mu_1} \end{bmatrix} \\ + 0 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta A}{\mu_1} \\ \lambda + \mu_2 + k & \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}}{\mu_1} - \frac{\beta A}{\mu_1} \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai Eigen adalah

$$(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2 + k) \left(\lambda + \sigma - \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}}{\mu_1} \right) = 0.$$

Maka,

$$\lambda + \mu_1 = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu_1$$

$$\lambda + \mu_2 + k = 0$$

$$\lambda_2 = -(\mu_2 + k)$$

Jelas bahwa sistem (3.7) mempunyai dua akar real negatif yaitu

$$\lambda_1 = -\mu_1, \lambda_2 = -(\mu_2 + k)$$

Untuk akar persamaan lainnya diberikan sebagai berikut

$$\lambda + \sigma - \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}}{\mu_1} = 0$$

$$Re(\lambda) = \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} e^{-Re(\lambda)} A \cos(\tau Im \lambda)}{\mu_1} - \sigma$$

dengan $Re(\lambda) \geq 0$, maka $Re(\lambda) \leq \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau}}{\mu_1} - \sigma$.

Demikian sehingga dapat ditulis sebagai $Re(\lambda) \leq \sigma(R_0 - \sigma)$.

Karena $R_0 < 1$ dan $Re(\lambda) < 0$ adalah kontradiktif. Jadi $Re(\lambda) < 0$, titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 dari sistem (3.7) adalah stabil asimtotik lokal.

Jika $R_0 > 1$, maka

$$f(\lambda) = \lambda + \sigma - \frac{\beta A e^{-\mu_2 \tau}}{\mu_1}$$

$$f(0) < 0, f(+\infty) > 0$$

adalah akar real positif, sehingga titik kesetimbangan E_0 sistem (3.7) tidak stabil.

Berdasarkan penjabaran diatas menunjukkan titik kesetimbangan E_0 pada sistem (3.7) adalah stabil asimtotik lokal dengan $\tau = 0$.

Teorema 3.2. Jika $R_0 < 1$ maka titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 pada sistem (3.7) stabil asimtotik global untuk setiap τ di Ω_2 .

Bukti:

Salah satu metode yang digunakan untuk menganalisa kestabilan global pada titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu metode Lyapunov. Metode Lyapunov adalah suatu fungsi untuk menentukan dan memeriksa global dari suatu sistem nonlinear. Didefinisikan fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$V = V_1 + V_2$$

$$\text{dimana, } \begin{cases} V_1 = I \\ V_2 = \int_{t-\tau}^t \beta e^{-\mu_2 \tau} S(\theta) I(\theta) d(\theta) \end{cases}$$

maka $V = V_1 + V_2 \geq 0$,

dengan V bernilai positif. Selanjutnya hitung turunan $V(t)$ pada sistem (3.7),

maka diperoleh,

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}, \frac{dV_1}{dt} = \dot{V}_1, \frac{dV_2}{dt} = \dot{V}_2$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$= \frac{dI}{dt} + \beta e^{-\mu_2 \tau} SI$$

$$= -(\mu_3 + \alpha + v + k_2)I + \beta e^{-\mu_2 \tau} SI$$

$$= -\sigma I + \beta e^{-\mu_2 \tau} S I$$

$$\dot{V} = \beta e^{-\mu_2 \tau} S I - \sigma I$$

Berdasarkan solusi batasnya $S \leq \frac{A}{\mu}$, diperoleh

$$\dot{V} \leq \beta e^{-\mu_2 \tau} S I - \sigma I$$

$$\dot{V} \leq \beta e^{-\mu_2 \tau} \cdot \frac{A}{\mu} \cdot I - \sigma I$$

$$\dot{V} \leq \left(\frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A}{\mu} - \sigma \right) I$$

Sehingga,

$$\dot{V} \leq \sigma(R_0 - 1)I.$$

Dari prinsip invarian LaSalle E_0 stabil asimtotik global jika,

1. Saat $R_0 < 1$ maka $\dot{V} \leq 0$,
2. $\dot{V} = 0$ jika dan hanya jika $S = \frac{A}{\mu}, E = 0, I = 0$.

Berdasarkan prinsip diatas akan diselidiki apakah $\dot{V} = 0$ jika dan hanya jika $S = \frac{A}{\mu}, E = 0, I = 0$.

$$\dot{V} = \beta e^{-\mu_2 \tau} S I - \sigma I$$

$$\dot{V} = \beta e^{-\mu_2 \tau} \left(\frac{A}{\mu} \right) (0) - \sigma(0)$$

$$\dot{V} = 0$$

Terbukti bahwa $\dot{V} = 0$, menunjukkan bahwa E_0 merupakan himpunan invarian terbesar yang termuat dalam $\{(S, E, I): V = 0\}$. Berdasarkan prinsip invarian LaSalle diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 pada sistem (3.7) stabil asimtotik global.

3.4.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Teorema 3.3. Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik E^* pada sistem (3.7) stabil asimtotik lokal untuk setiap τ di Ω_2 .

Bukti:

Matriks karakteristik titik kesetimbangan endemik E^* adalah sebagai berikut:

$$J_{E^*} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu_1 + \beta I^* & 0 & \beta S^* \\ \beta I^* e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - \beta I^* & \lambda + \mu_2 + k & \beta S^* e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - \beta S^* \\ -\beta I^* e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} & 0 & \lambda + \sigma - \beta S^* e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Misalkan $\beta I^* = p, \beta S^* = q$, maka

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda + \mu_1 + p & 0 & q \\ p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - p & \lambda + \mu_2 + k & q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - q \\ -p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} & 0 & \lambda + \sigma - q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} = 0 \\ & 0 \begin{bmatrix} p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - p & q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - q \\ -p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} & \lambda + \sigma - q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \\ & \quad - (\lambda + \mu_2 + k) \begin{bmatrix} \lambda + \mu_1 + p & q \\ -p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} & \lambda + \sigma - q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \\ & \quad + 0 \begin{bmatrix} \lambda + \mu_1 + p & q \\ p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - p & q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} - q \end{bmatrix} = 0 \\ & \left((\lambda + \mu_2 + k) \left((\lambda + \mu_1 + p)(\lambda + \sigma - q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}) \right) - \left((-p e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau})(q) \right) \right) \\ & = 0 \\ & (\lambda + \mu_2 + k) \left((\lambda + \mu_1 + p)(\lambda + \sigma - q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau}) + p q e^{-\mu_2 \tau} e^{-\lambda \tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

Jelas bahwa sistem (3.7) semua nilai Eigen memiliki bagian real negatif.

$$\lambda + \mu_2 + k = 0$$

$$\lambda = -(\mu_2 + k)$$

- untuk $\tau = 0$, maka

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu_1 + p)(\lambda + \sigma - qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau}) + pqe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda + \mu_1 + p)(\lambda + \sigma - qe^{-\mu_2(0)}e^{-\lambda(0)}) + pqe^{-\mu_2(0)}e^{-\lambda(0)} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda + \mu_1 + p)(\lambda + \sigma - q) + pq = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda^2 + \lambda\sigma - \lambda q + \mu_1\lambda + \mu_1\sigma - \mu_1q + \lambda p + p\sigma - pq) + pq = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 + (\sigma - q + \mu_1 + p)\lambda + ((\mu_1\sigma - \mu_1q + p\sigma - pq) + pq) = 0 \end{aligned}$$

$\sigma = q$, akibatnya

$$\begin{aligned} & (\mu_1\sigma - \mu_1q + p\sigma - pq) + pq = 0 \\ & (\mu_1q - \mu_1q + pq - pq) + pq = 0 \\ & (p + \mu_1)(\sigma - q) + pq = 0 \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh,

$$\sigma + p + \mu_1 - q > 0, \quad pq + (p + \mu_1)(\sigma - q) > 0.$$

Berdasarkan perhitungan kriteria *Rount-Hurwitz* diatas, titik kesetimbangan endemik E^* pada sistem (3.7) stabil asimtotik lokal.

- untuk $\tau \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu_1 + p)(\lambda + \sigma - qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau}) + pqe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} = 0 \\ & (\lambda^2 + \lambda\sigma - \lambda qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} + \mu_1\lambda + \mu_1\sigma - \mu_1qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} + p\lambda + p\sigma \\ & \quad - pqe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau}) + pqe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} = 0 \end{aligned}$$

Sederhanakan menjadi,

$$\lambda^2 + (\sigma + \mu_1 + p)\lambda - (\lambda + \mu_1)qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} + (\mu_1 + p)\sigma = 0.$$

Misalkan,

$$\begin{cases} m_1 = \sigma + \mu_1 + p \\ m_2 = (\mu_1 + p)\sigma \end{cases}$$

maka

$$\lambda^2 + m_1\lambda - (\lambda + \mu_1)qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau} + m_2\sigma = 0$$

atau

$$\lambda^2 + m_1\lambda + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau}(\lambda + \mu_1) = 0 \quad (3.41)$$

Persamaan karakteristik dari linearisasi sistem (3.7) pada E^* memiliki solusi imajiner murni berbentuk $\lambda = i\omega$. Substitusikan $\lambda = i\omega$ ke persamaan (3.41) menjadi,

$$\begin{aligned} \lambda^2 + m_1\lambda + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}e^{-\lambda\tau}(\lambda + \mu_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow i\omega^2 + m_1i\omega + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}e^{-i\omega\tau}(i\omega + \mu_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\omega^2 + m_1i\omega + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}(i\omega + \mu_1) \cdot (\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\omega^2 + m_1i\omega + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}(i\omega + \mu_1)\cos(\omega\tau) + qe^{-\mu_2\tau}(i\omega + \mu_1)i\sin(\omega\tau) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\omega^2 + m_1i\omega + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}i\omega\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\omega\sin(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1i\sin(\omega\tau) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\omega^2 + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\omega\sin(\omega\tau)) + i(m_1\omega - qe^{-\mu_2\tau}\omega\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1\sin(\omega\tau)) &= 0 \end{aligned}$$

Pisahkan bagian real dan bagian imajiner, diperoleh

$$\begin{cases} -\omega^2 + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\omega\sin(\omega\tau) = 0 \\ m_1\omega - qe^{-\mu_2\tau}\omega\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1\sin(\omega\tau) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} \sin(\omega\tau) = \frac{-\omega^3 + (m_2 - m_1\mu_1)\omega}{qe^{-\mu_2\tau}(\omega^2 + \mu_1^2)} \\ \cos(\omega\tau) = \frac{(m_1 - \mu_1)\omega^2 + \mu_1m_2}{qe^{-\mu_2\tau}(\omega^2 + \mu_1^2)} \end{cases}$$

Kemudian kuadratkan persamaan (3.28) dan gunakan metode eliminasi,

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + m_2 - qe^{-\mu_2\tau}\mu_1\cos(\omega\tau) - qe^{-\mu_2\tau}\omega\sin(\omega\tau))^2 \\ = (-\omega^3 + (m_2 - m_1\mu_1)\omega)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\omega^6 + m_2^2 - q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1^2 (\cos(\omega\tau))^2 - q^2 e^{-2\mu_2\tau} \omega^2 (\sin(\omega\tau))^2 - \\ &2\omega^2 m_2 + 2\omega^2 q e^{-\mu_2\tau} \mu_1 \cos(\omega\tau) + \omega^2 q e^{-\mu_2\tau} \omega \sin(\omega\tau) - \\ &2m_2 q e^{-\mu_2\tau} \mu_1 \cos(\omega\tau) - 2m_2 q e^{-\mu_2\tau} \omega \sin(\omega\tau) + \\ &2q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1 \cos(\omega\tau) \omega \sin(\omega\tau) = -\omega^6 + 2(m_2 - m_1 \mu_1) \omega + \\ &((m_2 - m_1 \mu_1) \omega)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_1 \omega - q e^{-\mu_2\tau} \omega \cos(\omega\tau) - q e^{-\mu_2\tau} \mu_1 \sin(\omega\tau))^2 &= ((m_1 - \mu_1) \omega^2 + \mu_1 m_2)^2 \\ \Leftrightarrow m_1 \omega^2 - q^2 e^{-2\mu_2\tau} \omega^2 (\cos(\omega\tau))^2 - q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1^2 (\sin(\omega\tau))^2 + \\ 2m_1 \omega^2 q e^{-\mu_2\tau} \cos(\omega\tau) - 2m_1 \omega q e^{-\mu_2\tau} \mu_1 \sin(\omega\tau) + \\ 2q^2 e^{-2\mu_2\tau} \omega \cos(\omega\tau) \mu_1 \sin(\omega\tau) &= ((m_1 - \mu_1) \omega^2)^2 + 2(m_1 - \\ \mu_1) \omega^2 \mu_1 m_2 + \mu_1^2 m_2^2 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \omega^6 + ((m_1 - \mu_1)^2 - 2(m_2 - m_1 \mu_1) - q^2 e^{-2\mu_2\tau}) \omega^4 + ((m_2 - m_1 \mu_1)^2 + \\ 2m_2 \mu_1 (m_1 - \mu_1) - 2q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1^2) \omega^2 + m_2^2 \mu_1^2 - q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Misalkan,

$$\begin{aligned} f_1 &= ((m_1 - \mu_1)^2 - 2(m_2 - m_1 \mu_1) - q^2 e^{-2\mu_2\tau}) \\ f_2 &= (m_2 - m_1 \mu_1)^2 + 2m_2 \mu_1 (m_1 - \mu_1) - 2q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1^2 \\ f_3 &= m_2^2 \mu_1^2 - q^2 e^{-2\mu_2\tau} \mu_1^4 \end{aligned}$$

Jika $z = \omega^2$, maka persamaan (3.29) menjadi

$$z^3 + f_1 z^2 + f_2 z + f_3 = 0$$

maka,

$$\begin{aligned} f_1 &= p^2 + 2\mu_1^2 + 2p\mu_1 > 0 \\ f_2 &= p^2 q^2 e^{-2\mu_2\tau} + 2p\mu_1 q^2 e^{-2\mu_2\tau} + (\sigma^2 + p^2 + \mu_1^2 + 2p\mu_1) \mu_1^2 > 0 \\ f_3 &= \mu_1^2 (m_2 + q e^{-\mu_2\tau} \mu_1) p q e^{-\mu_2\tau} > 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan penerapan Wei, dkk (2008) dalam jurnalnya menyatakan bahwa tidak terdapat nilai z positif begitu pula dengan nilai ω , serta tidak terdapat akar imajiner murni dalam sistem (3.7). Karena semua akar memiliki bilangan real negatif, maka titik kesetimbangan E^* dalam sistem (3.7) stabil asimtotik lokal.

Teorema 3.4. Jika $R_0 > 1$, $\tau = 0$, maka titik kesetimbangan endemik E^* pada sistem (3.7) stabil asimtotik global di Ω_2 .

Bukti:

Didefinisikan fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$V = V_1 + V_2$$

$$\text{Misalkan, } \begin{cases} V_1 = \omega_1 \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) \\ V_2 = \omega_2 \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \end{cases}.$$

dengan $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ bilangan real dan fungsi tersebut bernilai positif.

Selanjutnya, hitung solusi turunan V pada sistem (3.7), maka diperoleh

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

Substitusikan $A = \mu_1 S^* + \beta S^* I^*, \sigma = \beta S^*$, menjadi

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} \\ &= \omega_1 \left(\frac{dS}{dt} - S^* \cdot \frac{1}{S^*} \cdot \frac{S^* dS}{S dt} \right) + \omega_2 \left(\frac{dI}{dt} - I^* \cdot \frac{1}{I^*} \cdot \frac{I^* dI}{I dt} \right) \\ &= \omega_1 \left(A - \mu_1 S - \beta SI - \frac{S^*}{S} (A - \mu_1 S - \beta SI) \right) + \omega_2 \left(\beta SI - \sigma I - \right. \\ &\quad \left. - \frac{I^*}{I} (\beta SI - \sigma I) \right) \\ &= \omega_1 \left(\mu_1 S^* + \beta S^* I^* - \mu_1 S - \beta SI - \frac{S^*}{S} (\mu_1 S^* + \beta S^* I^* - \mu_1 S - \right. \\ &\quad \left. \beta SI) \right) + \omega_2 \left((\beta SI - (\beta S^*) I) - \frac{I^*}{I} (\beta SI - (\beta S^*) I) \right) \end{aligned}$$

$$= \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \mu_1 S - \omega_1 \beta S I - \omega_1 \frac{\mu_1 (S^*)^2}{S} - \omega_1 \frac{\beta (S^*)^2 I^*}{S} - \\ \omega_1 \mu_1 S^* - \omega_1 \beta S^* I + \omega_2 \beta S I - \omega_2 \beta S^* I - \omega_2 \beta S I^* + \omega_2 \beta S^* I^*$$

dengan $\omega_1 = \omega_2$ maka $\dot{V} \leq 0$. Berdasarkan perhitungan diatas, $\dot{V} = 0$ jika dan hanya jika $S = S^*, E = E^*, I = I^*$.

$$\dot{V} = \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \mu_1 S - \omega_1 \beta S I - \omega_1 \frac{\mu_1 (S^*)^2}{S} - \omega_1 \frac{\beta (S^*)^2 I^*}{S} + \\ \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I + \omega_2 \beta S I - \omega_2 \beta S^* I - \omega_2 \beta S I^* + \omega_2 \beta S^* I^* \\ \dot{V} = \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \mu_1 S^* - \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \frac{\mu_1 (S^*)^2}{S^*} - \\ \omega_1 \frac{\beta (S^*)^2 I^*}{S^*} + \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I^* + \omega_2 \beta S^* I^* - \omega_2 \beta S^* I^* - \\ \omega_2 \beta S^* I^* + \omega_2 \beta S^* I^* \\ \dot{V} = 0$$

Terbukti bahwa $\dot{V} = 0$, menunjukkan bahwa E^* merupakan himpunan invarian terbesar yang termuat dalam $\{(S, E, I) : V = 0\}$. Berdasarkan prinsip invarian LaSalle diperoleh titik kesetimbangan endemik E^* pada sistem (3.7) stabil asimtotik global pada waktu $\tau = 0$.

Teorema 3.5. Jika $R_0 > 1$, $\tau \neq 0$, maka titik kesetimbangan endemik E^* pada sistem (3.7) stabil asimtotik global di Ω_2 .

Bukti:

Didefinisikan fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$V = V_1 + V_2$$

untuk $\tau > 0$.

$$\text{Misalkan, } \begin{cases} V_1 = \omega_1 \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + \omega_2 e^{\mu_2 \tau} \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \\ V_2 = \omega_2 \beta \int_{t-\tau}^t \left(S(\theta) I(\theta) - S^* I^* - S^* I^* \ln \frac{S(\theta) I(\theta)}{S^* I^*} \right) d\theta \end{cases}$$

dengan $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ bilangan real. Selanjutnya, hitung solusi turunan V pada sistem (3.7), maka diperoleh

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

Substitusikan $A = \mu_1 S^* + \beta S^* I^*, \sigma = \beta S^*$, menjadi

untuk \dot{V}_1 diperoleh,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \omega_1 \left(\frac{dS}{dt} - S^* \cdot \frac{1}{S^*} \cdot \frac{S^* dS}{S dt} \right) + \omega_2 e^{\mu_2 \tau} \left(\frac{dI}{dt} - I^* \cdot \frac{1}{I^*} \cdot \frac{I^* dI}{I dt} \right) \\ &= \omega_1 \left(A - \mu_1 S - \beta SI - \frac{S^*}{S} (A - \mu_1 S - \beta SI) \right) + \omega_2 e^{\mu_2 \tau} \left(\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - \sigma I - \frac{I^*}{I} (\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - \sigma I) \right) \\ &= \omega_1 \left(\mu_1 S^* + \beta S^* I^* - \mu_1 S - \beta SI - \frac{S^*}{S} (\mu_1 S^* + \beta S^* I^* - \mu_1 S - \beta SI) \right) + \omega_2 e^{\mu_2 \tau} \left((\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\beta S^*) I) - \frac{I^*}{I} (\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\beta S^*) I) \right) \\ &= \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \mu_1 S - \omega_1 \beta SI - \omega_1 \frac{\mu_1 (S^*)^2}{S} - \omega_1 \frac{\beta (S^*)^2 I^*}{S} + \omega_1 \mu_1 S^* + \omega_1 \beta S^* I + \omega_2 \beta S(t - \tau) I(t - \tau) - \omega_2 \beta S^* I - \frac{\omega_2 \beta S(t - \tau) I(t - \tau) I^*}{I} + \omega_2 \beta S^* I^* \\ &= \omega_1 \left(2\mu_1 S^* - \mu_1 S - \frac{\mu_1 S^*}{S} \right) + \omega_1 \beta S^* I^* - \frac{\omega_1 \beta (S^*)^2 I^*}{S} + \omega_1 \beta S^* I + \omega_2 \beta S(t - \tau) I(t - \tau) - \omega_2 \beta S^* I - \frac{\omega_2 \beta S(t - \tau) I(t - \tau) I^*}{I} + \omega_2 \beta S^* I^* \end{aligned}$$

Untuk \dot{V}_2 diperoleh,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \omega_2 \beta \left(SI - S(t - \tau) I(t - \tau) + S^* I^* \ln \frac{S(t - \tau) I(t - \tau)}{SI} \right) \\ &= \omega_2 \beta SI - \omega_2 \beta S(t - \tau) I(t - \tau) + \omega_2 \beta S^* I^* \ln \frac{S(t - \tau) I(t - \tau)}{SI} \end{aligned}$$

Jadi,

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \omega_1 \left(2\mu_1 S^* - \mu_1 S - \frac{\mu_1 S^*}{S} \right) + \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \beta S I - \frac{\omega_1 \beta (S^*)^2 I^*}{S} + \\ & \omega_2 \beta S^* I - \omega_2 \beta S (t - \tau) I (t - \tau) - \omega_2 \beta S^* I - \frac{\omega_2 \beta S (t - \tau) I (t - \tau) I^*}{I} + \\ & \omega_2 \beta S^* I^* + \omega_2 \beta S I - \omega_2 \beta S (t - \tau) I (t - \tau) + \omega_2 \beta S^* I^* \ln \frac{S(t - \tau) I (t - \tau)}{S I} \\ & 2\mu_1 S^* - \mu_1 S - \frac{\mu_1 S^*}{S} \leq 0 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \beta S I - \frac{\omega_1 \beta (S^*)^2 I^*}{S} + \omega_1 \beta S^* I + \omega_2 \beta S I \\ & + \omega_2 \beta S^* I^* \ln \frac{S(t - \tau) I (t - \tau)}{S^* I} + \omega_2 \beta S^* I^* \\ & - \frac{\omega_2 \beta I^* S (t - \tau) I (t - \tau)}{I} + \omega_2 \beta S^* I^* \ln \frac{S^*}{I^*} + \omega_2 \beta S^* I^* \\ & - \frac{\omega_2 \beta (S^*)^2 I^*}{S} - 2\omega_2 \beta S^* I^* + \frac{\omega_2 \beta (S^*)^2 I^*}{S} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & (\omega_2 \beta S - \omega_2 \beta S^* + \omega_1 \beta S^* - \omega_1 \beta S) I + \frac{\omega_2 \beta (S^*)^2 I^*}{S} - \omega_2 \beta S^* I^* \\ & + \omega_1 \beta S^* I^* - \frac{\omega_1 \beta (S^*) I^*}{S} \end{aligned}$$

dengan $\omega_2 = \omega_1$ maka $\dot{V} \leq 0$. Berdasarkan perhitungan diatas, $\dot{V} = 0$ jika dan hanya jika $S = S^*, E = E^*, I = I^*$.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & (\omega_2 \beta S^* - \omega_2 \beta S^* + \omega_1 \beta S^* - \omega_1 \beta S^*) I^* + \frac{\omega_2 \beta (S^*)^2 I^*}{S^*} - \omega_2 \beta S^* I^* + \\ & \omega_1 \beta S^* I^* - \frac{\omega_1 \beta (S^*) I^*}{S^*} \end{aligned}$$

$$\dot{V} \leq \omega_2 \beta S^* I^* - \omega_2 \beta S^* I^* + \omega_1 \beta S^* I^* - \omega_1 \beta S^* I^* + \frac{\omega_2 \beta (S^*)^2 I^*}{S^*} -$$

$$\omega_2 \beta S^* I^* + \omega_1 \beta S^* I^* - \frac{\omega_1 \beta (S^*) I^*}{S^*}$$

$$\dot{V} \leq 0$$

Terbukti bahwa $\dot{V} = 0$, menunjukkan bahwa E^* merupakan himpunan invarian terbesar yang termuat dalam $\{(S, E, I): V = 0\}$. Berdasarkan prinsip invarian LaSalle diperoleh titik kesetimbangan endemik E^* pada sistem (3.7) stabil asimtotik global pada waktu $\tau \neq 0$.

3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini diberikan ilustrasi mengenai beberapa solusi numerik dari sistem (3.7). Simulasi numerik dilakukan untuk menggambarkan pengaruh dari waktu tunda yang diterapkan pada terinfeksi penyakit menular dengan periode laten serta memprediksi laju nilai-nilai parameter tiap kompartemen yang diinterpretasikan sebagai periode laten yang diterapkan. Berdasarkan nilai-nilai parameter pada simulasi memenuhi syarat keberadaan suatu titik tetap, yaitu semua nilai kesetimbangan tersebut adalah bilangan bulat positif. Nilai kesetimbangan tersebut adalah titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0\right)$

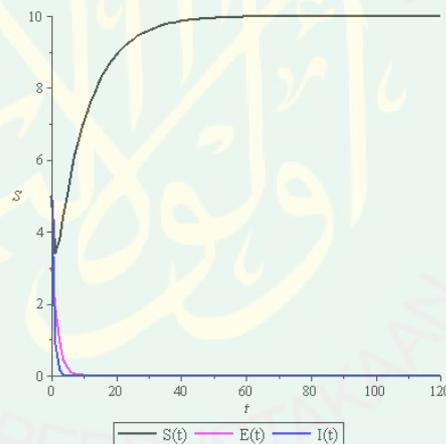
dan titik kesetimbangan endemik $E^* = \left(\frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}, \frac{\sigma(1-e^{-\mu_2 \tau})I^*}{e^{-\mu_2 \tau}(\mu_2 + k_1 + k_3)}, \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta}\right)$.

Diberikan nilai awal berbeda-beda dan nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

Tabel 3.3 Nilai Parameter Model yang digunakan dalam Simulasi Numerik

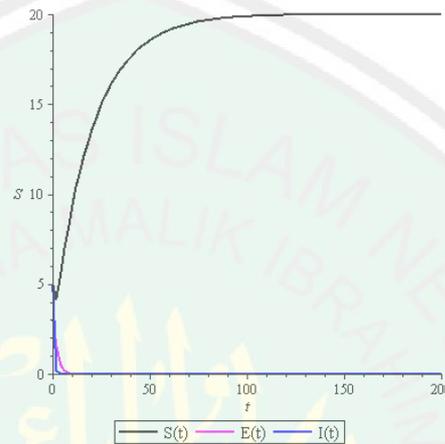
Parameter	Simulasi				
	Ke-1	Ke-2	Ke-3	Ke-4	Ke-5
β	0.2	0.2	0.2	0.2	0.8
A	1	1	2	2	2
μ_1	0.1	0.05	0.04	0.04	0.04
μ_2	0.15	0.1	0.1	0.1	0.1
μ_3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1
α	0.6	0.6	0.6	0.6	0.25
k_1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
k_2	0.8	0.8	0.6	0.6	0.6
k_3	0.2	0.2	0.001	0.95	0.1
ν	0.3	0.3	0.5	0.5	0.5
τ	3	10	11	11	0.1

Berdasarkan nilai awal dan nilai parameter yang diberikan didapat grafik hasil simulasi dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dengan menggunakan aplikasi Maple sebagai berikut:

**Gambar 3.2** Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 < 1$ dengan $\tau = 3$

Gambar 3.2 merupakan solusi dari sistem (3.7) dengan nilai awal $S(0) = 5, E(0) = 3, I(0) = 5$ yang diambil disekitar titik tetap E_0 dengan waktu tunda 3 selama 120 hari. Ketika $R_0 < 1$, setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit rata-rata kurang dari satu individu rentan. Dengan diberikannya waktu tunda terlihat bahwa populasi *Susceptible* meningkat mencapai kestabilan sekitar t ke 58. Meningkatnya populasi individu yang rentan disebabkan adanya

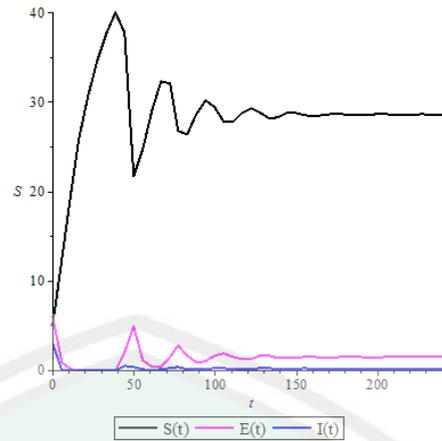
penambahan individu-individu dimana daya tahan tubuhnya menurun sehingga rentan terhadap penyakit. Populasi *Exposed* dan *Infected* menurun menuju nol, untuk *Exposed* stabil sekitar pada t ke 4 dan untuk *Infected* stabil sekitar pada t ke 7. Hal ini dikarenakan laju kematian alami dan terinfeksi individu secara laten serta tidak adanya perawatan pada individu yang terinfeksi.



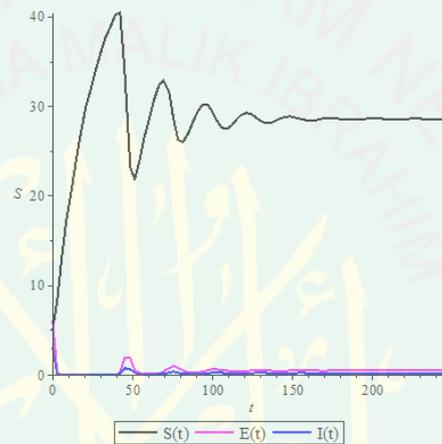
Gambar 3.3 Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 < 1$ dengan $\tau = 10$

Gambar 3.3 merupakan solusi dari sistem (3.7) dengan waktu tunda 10 selama 200 hari yang diambil disekitar titik tetap E_0 . Dari grafik tersebut terlihat bahwa populasi *Susceptible* mencapai kestabilan sekitar t ke 114, sedangkan populasi *Exposed* dan *Infected* menuju nol, untuk *Exposed* stabil sekitar pada t ke 4 dan untuk *Infected* stabil sekitar pada t ke 7.

Berdasarkan gambar 3.3 dan gambar 3.4 dengan pemberian waktu tunda masing-masing $\tau = 3$ dan $\tau = 10$ untuk titik kesetimbangan bebas penyakit menunjukkan bahwa terdapat perbedaan dalam mencapai keadaan stabil, semakin besar waktu tunda yang diberikan mengakibatkan model SEI tersebut lama untuk mencapai keadaan stabil.

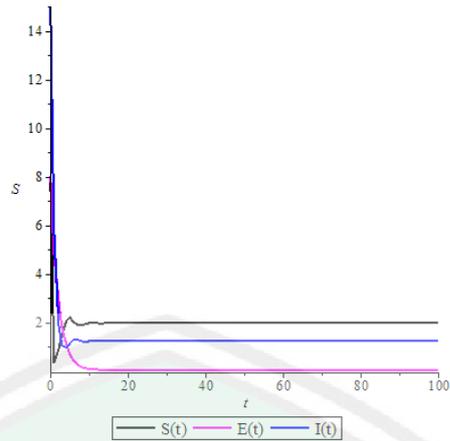


Gambar 3.4 Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 11$ dan $k_3 = 0.001$

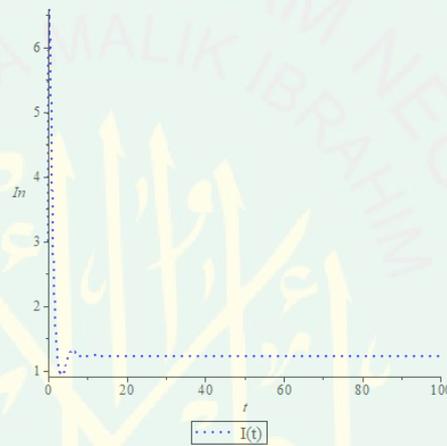


Gambar 3.5 Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 11$ dan $k_3 = 0.95$

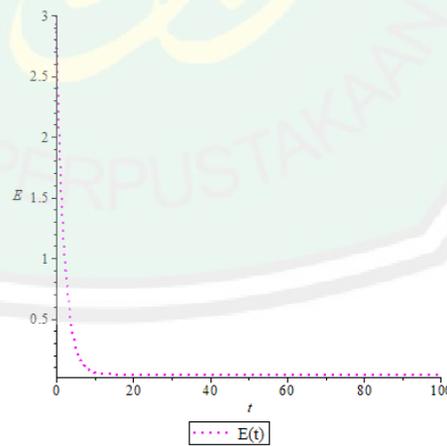
Gambar 3.4 dan gambar 3.5 merupakan solusi dari sistem (3.7) dengan nilai awal $S(0) = 5, E(0) = 6, I(0) = 3$ yang diambil disekitar titik tetap E^* dengan waktu tunda $\tau = 11$ selama 550 hari. Berdasarkan gambar 3.5 dapat dikatakan bahwa individu yang sembuh terhadap *Exposed* menunjukkan populasi individu terinfeksi secara laten terjadi penurunan dan mengalami gelombang beberapa kali hingga mencapai titik stabil. Terdapat perbedaan tidak terlalu besar ketika laju individu yang sembuh 0.001 dan 0.95, menunjukkan bahwa semakin besar laju kesembuhan individu yang terinfeksi maka semakin kecil kemungkinan individu terinfeksi akan tetap dan menjadi endemik.



Gambar 3.6 Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$



Gambar 3.7 Simulasi pada I untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$



Gambar 3.8 Simulasi pada E untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$

Gambar 3.7 dan gambar 3.8 adalah gabungan dari gambar 3.6. Gambar 3.6 merupakan solusi dari sistem (3.7) dengan nilai awal $S(0) = 8, E(0) = 8, I(0) =$

15 yang diambil disekitar titik tetap E^* dengan waktu tunda 0.1 selama 100 hari. Jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik. Dari gambar tersebut dapat dilihat populasi mencapai kestabilan dalam waktu yang cukup singkat yaitu pada t ke 10 untuk populasi *Susceptible*, untuk populasi *Exposed* mengalami penurunan menuju nol sehingga mencapai kestabilan, dan untuk populasi *Infected* mencapai keadaan stabil pada t ke 10.

Berdasarkan grafik hasil simulasi yang diperoleh diatas dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan perilaku masing-masing populasi terhadap waktu dengan diberikannya waktu tunda yaitu 3,10,11, dan 0.1. Semakin besar waktu tunda mengakibatkan model SEI tersebut lama untuk mencapai kestabilan dan sebaliknya semakin kecil waktu tunda yang diberikan maka semakin cepat mencapai kestabilan.

3.6 Model SEIQR dengan Periode Laten dalam Pandangan Islam

Islam merupakan agama yang telah mengatur segala aspek berhubungan dengan kehidupan manusia yang memiliki aturan dan tuntunan yang jelas dalam berbagai hal khususnya masalah kesehatan. Menurut pandangan agama Islam, kesehatan mencakup jasmani dan rohani. Dengan ini Islam mengajarkan kepada setiap manusia untuk selalu menjaga kesehatan baik dari segi kebersihan diri sendiri, kebersihan rumah, dan lingkungan sekitarnya.

“Kesehatan adalah salah satu hak bagi tubuh manusia” demikian sabda Nabi Muhammad SAW. Islam sebagai agama yang sempurna dan lengkap dengan menetapkan prinsip-prinsip dalam penjagaan keseimbangan tubuh manusia. Semuanya telah diatur dengan sebaik-baiknya sesuai dengan kekuasaannya, sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur’an surah Yunus ayat 57 yang berbunyi:

“Hai manusia, sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman”. Penyakit disini merupakan suatu keadaan dimana terjadinya ketidakseimbangan fungsi normal tubuh manusia, sehingga munculnya gejala, keadaan yang dirasakan, dan menurunnya kemampuan dalam beraktivitas. Semua manusia tentunya tidak ingin mengalaminya, maka apabila sakit hendaklah berobat sebab Allah turunkan penyakit sekaligus turunkan pula obatnya.

Model karantina terhadap individu yang terinfeksi penyakit merupakan perawatan yang dilakukan untuk memutus penyebaran terinfeksi penyakit menular. Seseorang dikarantina dalam selang waktu tertentu sehingga benar-benar dinyatakan sembuh. Hal ini tergantung masa infeksi penyakit di dalam tubuh seseorang. Jadi semakin lama waktu infeksi maka semakin lama pula waktu sembuhnya. Sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an surah An-Nisa' ayat 7 yang berbunyi: *“Dan Sesungguhnya di antara kamu ada orang yang sangat berlambatlambat (ke medan pertempuran). Maka jika kamu ditimpa masibah ia berkata: “Sesungguhnya Tuhan telah menganugerahkan nikmat kepada saya karena saya tidak ikut berperang bersama mereka”*. Oleh karena itu, sudah seharusnya sebagai umat manusia harus banyak bersyukur atas anugerah yang telah Allah SWT berikan kepadanya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

1. Model SEIQR dengan waktu tunda menjelaskan tentang penyebaran penyakit menular. Model ini terdiri dari lima kelas yaitu *Susceptible (S)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Quarantine (Q)*, dan *Recovered (R)*. Misalkan Populasi rentan sebagian diantaranya melakukan kontak dengan populasi menular, maka ketika itu sebagian populasi rentan telah dikatakan terinfeksi. Populasi yang terinfeksi tadi masuk ke dalam kelas *E*. Populasi yang berada di kelas *E* akan tetap berada di kelas sampai selang waktu tertentu dan akan berpindah ke kelas *I* jika sistem kekebalan tubuh lemah. Dengan melakukan proses pengobatan atau karantina *Q*, mungkin populasi tersebut akan sembuh *R*. Sehingga model persamaan yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - \mu_1 S - \beta SI$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \beta S^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S^{-\mu_2 \tau} S(t - \tau) I(t - \tau) - (\mu_3 + \alpha + v + k_2) I$$

$$\frac{dQ}{dt} = k_1 E + k_2 I - (\mu_4 + \gamma) Q$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma Q + v I + k_3 E - \mu_5 R$$

2. Analisis kestabilan model SEIQR dengan waktu tunda adalah sebagai berikut:
- Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{A}{\mu_1}, 0, 0 \right)$$

Jika $R_0 < 1$ maka E_0 stabil asimtotik lokal dan global.

- Kestabilan titik kesetimbangan endemik

$$E^* = \left(\frac{\sigma}{\beta e^{-\mu_2 \tau}}, \frac{\sigma(1 - e^{-\mu_2 \tau})I^*}{e^{-\mu_2 \tau}(\mu_2 + k_1 + k_3)}, \frac{\beta e^{-\mu_2 \tau} A - \sigma \mu_1}{\sigma \beta} \right)$$

Jika $R_0 > 1$ maka E^* stabil asimtotik lokal dan global.

4.2 Saran

Pada penelitian ini membahas mengenai model penyebaran penyakit menular menggunakan model SEIQR dengan periode laten. Model dianalisis kestabilan secara global dari titik kesetimbangan menggunakan metode Lyapunov dan simulasi numerik menggunakan program Maple. Oleh karena itu, penulis menyarankan pada penelitian selanjutnya untuk memperoleh kestabilan titik kesetimbangan menggunakan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Arizona, P. dan Fuad. (2014). Analisis Stabilitas Model Sel Imun-Tumor dengan Tundaan Waktu. *MATHunesa*, 3(2).
- Baiduri. (2002). *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W. dan DiPrima (2000). *ODE Architect Companion*. New York: John Willey and Sons Inc.
- Edwards, C. dan Panney (2008). *Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice hall Inc.
- Finizio, N. dan Ladas (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Gao, S. dan Chen, L. (2008). Pulse Vaccination of an SEIR epidemic model with time delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. (9), 599-607.
- Irwan. (2017). *Epidemiologi Penyakit Menular*. Yogyakarta: Absolute Media.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Leon, C. V. (2009). Constructions of Lyapunov Functions for Classic SIS, SIR, and SIRS Epidemic models with Variable Population Size. August 29. pp. 1-12.
- Li, T. dan Xue (2013). Global Stability Analysis of a Delayed SEIQR Epidemic Model with Quarantine and Latent. *Applied Mathematics*, 109-117.
- Putra, R. T. (2016). Kestabilan Model Epidemi Seir dengan Matriks Hurwitz. *Poli Rekayasa*, 11(2), 74-82.
- Shihab, M. Q. (2001). *Wawasan Al-Qur'an*. Bandung: Mizan.
- Side, S. d. (2015). *Pemodelan Matematika dan Solusi Numerik untuk Penularan Demam Berdarah*. Makassar: Perdana Publishing.
- Sihombing, S. dan Dahlia (2018). Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dan Dua disertai Nilai Awal dengan menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Fehlberg (RKF45). *Jurnal Matematika Integratif*, 14(1), 51-60.
- Strauss, W. (2007). *Partial Diffrential Equation an Introduction*. Providence: Brown University.

- Sulisti, H. N. (2014). Analisis Kestabilan Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)* , 235-244.
- Toaha, S. (2008). Model dengan Tundaan Waktu. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, 4(2), 66-75.
- Waluya, S. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Wei, H. M. (2008). An Epidemic Model of a Vector-Borne Disease with Direct Transmission and Time Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 342(2), 895-908.
- Widowati dan Sutimin. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Yongzhen, P. (2009). A Delayed SEIQR Epidemic Model with Pulse Vaccination and The Quarantine Measure. *Computers and Mathematics with Applications* .
- Yulida, Y. dan Ahsar. (2011). Analisis Kestabilan Global Model Epidemik SIRS menggunakan Fungsi Lyapunov. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 5(2), 19-30.
- Zulaikha, T. (2017). Kontrol Optimal pada Model Epidemik SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. *Prosiding SI MaNis (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)*, 1(1), 41-51.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Program Maple Model SEI untuk $R_0 < 1$ dengan $\tau = 3$

```

> restart : with(plots) :
>

$$\beta := 0.2 : A := 1 : \mu_1 := 0.1 : \mu_2 := 0.15 : \mu_3 := 0.2 : k_1 := 0.3 : k_2 := 0.8 : k_3 := 0.2 : \nu := 0.3 : \tau := 3 :$$

>  $\alpha := 0.6 : \mu_2 := -\beta \cdot \exp(-\mu_2 \tau) S(t) In(t)$ 

$$0.15$$


$$-0.1275256303 S(t) In(t)$$

>
sistem := diff(S(t), t) = -In(t)S(t)  $\beta$  - S(t)  $\mu_1$  + A, diff(E(t), t) =  $\beta$  S(t) In(t)
-  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E(t)$ , diff(In(t), t) =  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_3 + \alpha + \nu + k_2) In(t)$ ;
variabel := {S(t), E(t), In(t)};

sistem :=  $\frac{d}{dt} S(t) = -0.2 S(t) In(t) - 0.1 S(t) + 1$ ,  $\frac{d}{dt} E(t) = 0.0724743697 S(t) In(t) - 0.65 E(t)$ ,  $\frac{d}{dt} In(t) = 0.1275256303 S(t) In(t) - 1.9 In(t)$ 
variabel := {E(t), In(t), S(t)}
>
Plot1 := dsolve({ sistem, S(0) = 5, E(0) = 3, In(0) = 5}, variabel, type = numeric, method = classical) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, S(t)], color = black, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..120, legend = ["S(t)", numpoints = 100);
f2 := odeplot(Plot1, [t, E(t)], color = magenta, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..120, legend = ["E(t)", numpoints = 100);
f3 := odeplot(Plot1, [t, In(t)], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..120, legend = ["I(t)", numpoints = 100);
display(f1, f2, f3)

```

Lampiran 2: Program Maple Model SEI untuk $R_0 < 1$ dengan $\tau = 10$

```

> restart : with(plots) :
>
 $\beta := 0.2 : A := 1 : \mu_1 := 0.05 : \mu_2 := 0.1 : \mu_3 := 0.2 : k_1 := 0.3 : k_2 := 0.8 : k_3 := 0.2 : \nu$ 
 $:= 0.3 : \tau := 10 :$ 
>  $\alpha := 0.6 : \mu_2 := -\beta \cdot \exp(-\mu_2 \tau) S(t) In(t)$ 
 $0.1$ 
 $-0.07357588824 S(t) In(t)$ 
>
sistem := diff(S(t), t) = -In(t)S(t)  $\beta - S(t) \mu_1 + A$ , diff(E(t), t) =  $\beta S(t) In(t)$ 
 $-\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E(t)$ , diff(In(t), t) =  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_3 + \alpha + \nu$ 
 $+ k_2) In(t)$ ;
variabel := {S(t), E(t), In(t)};

sistem :=  $\frac{d}{dt} S(t) = -0.2 S(t) In(t) - 0.05 S(t) + 1$ ,  $\frac{d}{dt} E(t) = 0.1264241118 S(t) In(t)$ 
 $- 0.6 E(t)$ ,  $\frac{d}{dt} In(t) = 0.07357588824 S(t) In(t) - 1.9 In(t)$ 
variabel := {E(t), In(t), S(t)}
>
Plot1 := dsolve({ sistem, S(0) = 5, E(0) = 3, In(0) = 5}, variabel, type = numeric, method
= classical) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, S(t)], color = black, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..200, legend
= ["S(t)", numpoints = 100];
f2 := odeplot(Plot1, [t, E(t)], color = magenta, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..200, legend
= ["E(t)", numpoints = 100];
f3 := odeplot(Plot1, [t, In(t)], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..200, legend
= ["I(t)", numpoints = 100];
display(f1, f2, f3)

```

Lampiran 3: Program Maple Model SEI untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 11$ dan $k_3 = 0.001$

```

> restart : with(plots) :
>

$$\beta := 0.2 : A := 2 : \mu_1 := 0.04 : \mu_2 := 0.1 : \mu_3 := 0.2 : k_1 := 0.3 : k_2 := 0.6 : k_3 := 0.001 : \nu := 0.5 : \tau := 11 :$$

>  $\alpha := 0.6 : \mu_2; -\beta \cdot \exp(-\mu_2 \tau) S(t) In(t)$ 
0.1
-0.06657421674 S(t) In(t)
>
sistem := diff(S(t), t) = -In(t) S(t)  $\beta$  - S(t)  $\mu_1$  + A, diff(E(t), t) =  $\beta$  S(t) In(t)
-  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E(t)$ , diff(In(t), t) =  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_3 + \alpha + \nu + k_2) In(t)$ ;
variabel := {S(t), E(t), In(t)};

sistem :=  $\frac{d}{dt} S(t) = -0.2 S(t) In(t) - 0.04 S(t) + 2$ ,  $\frac{d}{dt} E(t) = 0.1334257833 S(t) In(t) - 0.401 E(t)$ ,  $\frac{d}{dt} In(t) = 0.06657421674 S(t) In(t) - 1.9 In(t)$ 
variabel := {E(t), In(t), S(t)}
>
Plot1 := dsolve({ sistem, S(0) = 5, E(0) = 6, In(0) = 3}, variabel, type = numeric, method = classical) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, S(t)], color = black, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 550, legend = ["S(t)", numpoints = 100];
f2 := odeplot(Plot1, [t, E(t)], color = magenta, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 550, legend = ["E(t)", numpoints = 100];
f3 := odeplot(Plot1, [t, In(t)], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 550, legend = ["I(t)", numpoints = 100];
display(f1, f2, f3)

```

Lampiran 4: Program Maple Model SEI untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 11$ dan $k_3 = 0.95$

```

> restart : with(plots) :
>
 $\beta := 0.2 : A := 2 : \mu_1 := 0.04 : \mu_2 := 0.1 : \mu_3 := 0.2 : k_1 := 0.3 : k_2 := 0.6 : k_3 := 0.95 : \nu := 0.5 : \tau := 11 :$ 
>  $\alpha := 0.6 : \mu_2 ; -\beta \cdot \exp(-\mu_2 \tau) S(t) In(t)$ 
0.1
-0.06657421674 S(t) In(t)
>
sistem := diff(S(t), t) = -In(t) S(t)  $\beta - S(t) \mu_1 + A$ , diff(E(t), t) =  $\beta S(t) In(t) - \beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E(t)$ , diff(In(t), t) =  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_3 + \alpha + \nu + k_2) In(t)$ ;
variabel := {S(t), E(t), In(t)};

sistem :=  $\frac{d}{dt} S(t) = -0.2 S(t) In(t) - 0.04 S(t) + 2$ ,  $\frac{d}{dt} E(t) = 0.1334257833 S(t) In(t) - 1.35 E(t)$ ,  $\frac{d}{dt} In(t) = 0.06657421674 S(t) In(t) - 1.9 In(t)$ 
variabel := {E(t), In(t), S(t)}
>
Plot1 := dsolve({ sistem, S(0) = 5, E(0) = 6, In(0) = 3}, variabel, type = numeric, method = classical) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, S(t)], color = black, linestyle = solid, thickness = 2], 0..300, legend = ["S(t)", numpoints = 100);
f2 := odeplot(Plot1, [t, E(t)], color = magenta, linestyle = solid, thickness = 2], 0..300, legend = ["E(t)", numpoints = 100);
f3 := odeplot(Plot1, [t, In(t)], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0..300, legend = ["I(t)", numpoints = 100);
display(f1, f2, f3)

```

Lampiran 5: Program Maple Model SEI untuk $R_0 > 1$ dengan $\tau = 0.1$

```

> restart : with(plots) :
>
 $\beta := 0.8 : A := 2 : \mu_1 := 0.04 : \mu_2 := 0.1 : \mu_3 := 0.2 : k_1 := 0.3 : k_2 := 0.6 : k_3 := 0.1 : \nu$ 
 $:= 0.5 : \tau := 0.1 :$ 
>  $\alpha := 0.25 : \mu_2; -\beta \cdot \exp(-\mu_2 \tau) S(t) In(t)$ 
 $0.1$ 
 $-0.7920398670 S(t) In(t)$ 
>
sistem := diff(S(t), t) = -In(t)S(t)  $\beta - S(t) \mu_1 + A$ , diff(E(t), t) =  $\beta S(t) In(t)$ 
 $-\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_2 + k_1 + k_3) E(t)$ , diff(In(t), t) =  $\beta e^{-\mu_2 \tau} S(t) In(t) - (\mu_3 + \alpha + \nu$ 
 $+ k_2) In(t)$ ;
variabel := {S(t), E(t), In(t)};

sistem :=  $\frac{d}{dt} S(t) = -0.8 S(t) In(t) - 0.04 S(t) + 2$ ,  $\frac{d}{dt} E(t) = 0.0079601330 S(t) In(t)$ 
 $- 0.5 E(t)$ ,  $\frac{d}{dt} In(t) = 0.7920398670 S(t) In(t) - 1.55 In(t)$ 
variabel := {E(t), In(t), S(t)}
>
Plot1 := dsolve({ sistem, S(0) = 8, E(0) = 3, In(0) = 3}, variabel, type = numeric, method
= classical) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, S(t)], color = black, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 100, legend
= ["S(t)", numpoints = 1000];
f2 := odeplot(Plot1, [t, E(t)], color = magenta, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 100, legend
= ["E(t)", numpoints = 1000];
f3 := odeplot(Plot1, [t, In(t)], color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 100, legend
= ["I(t)", numpoints = 1000];
display(f1, f2, f3)

```

RIWAYAT HIDUP



Rohamah, lahir di Kabupaten Bangkalan pada tanggal 03 Juni 1996, dan bisa dipanggil Roha, tinggal di Dusun Pocogan 3 RT/RW 008/003 Desa Lajing Kecamatan Arosbaya Kabupaten Bangkalan. Anak bungsu dari Bapak Senadi dan Ibu Moseh.

Pendidikan dasarnya di tempuh di SDN Lajing 5 dan lulus pada tahun 2009, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 06 Bangkalan dan lulus pada tahun 2013. Kemudian melanjutkan ke jenjang SMA di MAN Bangkalan dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya, pada tahun 2016 melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika. Selama menjadi mahasiswa, dia menjadi anggota Mathematics English Club (MEC) dan Mathematics.

Selama menempuh pendidikan tingkat dasar sampai tingkat perguruan tinggi, dia pernah meraih prestasi yaitu juara II Kompetisi Sains Madrasah (KSM) Mata Pelajaran Matematika tingkat Kabupaten Bangkalan tahun 2015.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rohamah
NIM : 16610028
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Global Model SEIQR dengan Periode Laten
Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	5 Maret 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	
2	9 Maret 2020	Konsultasi Agama Bab I	
3	12 Maret 2020	Revisi Bab I & Bab II Konsultasi Bab III	
4	13 Maret 2020	Revisi Agama Bab I & Bab II	
5	27 Maret 2020	ACC Bab I & Bab II	
6	27 Maret 2020	ACC Agama Bab I & Bab II	
7	20 April 2020	Konsultasi Agama Bab III	
8	24 April 2020	Revisi Agama Bab III	
9	21 Mei 2020	Revisi Bab III	
10	5 Juni 2020	Konsultasi Bab IV	
11	13 Juni 2020	ACC Agama Bab III	
12	16 Juni 2020	ACC Keseluruhan	
13	16 Juni 2020	ACC Agama Keseluruhan	

Malang, 24 Juli 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001