STUDI SOLUSI BINTANG ANISOTROPIK UNTUK RUANG-WAKTU TOLMAN IV MENGGUNAKAN METODE *GRAVITATIONAL DECOUPLING*

SKRIPSI

Oleh:
FITHROTUL AZIZAH
NIM. 16640034

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

STUDI SOLUSI BINTANG ANISOTROPIK UNTUK RUANG-WAKTU TOLMAN IV MENGGUNAKAN METODE *GRAVITATIONAL DECOUPLING*

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FITHROTUL AZIZAH
NIM. 16640034

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2020

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI SOLUSI BINTANG ANISOTROPIK UNTUK RUANG-WAKTU TOLMAN IV MENGGUNAKAN METODE *GRAVITATIONAL DECOUPLING*

SKRIPSI

Oleh:
Fithrotul Azizah
NIM. 16640034

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Pada tanggal: 18 November 2020

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Abdul Basid, M.Si	Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19650504 199003 1 003	NIP. 19900905 201903 1 018

Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI SOLUSI BINTANG ANISOTROPIK UNTUK RUANG-WAKTU TOLMAN IV MENGGUNAKAN METODE *GRAVITATIONAL DECOUPLING*

SKRIPSI

Oleh:
Fithrotul Azizah
NIM. 16640034

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji
Dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada tanggal, 10 Desember 2020

Penguji Utama	:	Erna Hastuti, M.Si NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji	:	Muhammad Taufiqi, M.Si	
Sekertaris Penguji	:	Drs. Abdul Basid, M.Si NIP. 19650504 199003 1 003	
Anggota Penguji	:	Arista Romadani, M.Sc NIP. 19900905 201903 1 018	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Fithrotul Azizah
NIM	:	16640034
Jurusan	:	Fisika
Fakultas	:	Sains Dan Teknologi
Judul Penelitian	:	Studi Solusi Bintang Anisotropik untuk Ruang-Waktu Tolman IV Menggunakan Metode *Gravitational Decoupling*

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 November 2020

Yang Membuat Pernyataan

METERAI TEMPEL 6F448AEF498414106 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Fithrotul Azizah

NIM. 16640034

MOTTO

“Bila kamu tak tahan lelahnya belajar, maka kamu akan merasakan perihnya kebodohan.” (Imam Syafi’i)

“*Susah memang belajar lagi dari nol. Tapi, kapan akan menemui titik akhir jika enggan menjalani dari awal?*”

HALAM PERSEMBAHAN

Dengan segala Puji Syukur kepada Allah SWT, penulis mempersembahakan karya ini kepada keluarga tercinta,

Ibu Dian Srimitayani, Bapak Karyono dan adik Imatuzzahro

yang paling berjasa dan paling berharga dalam kehidupan penulis. Terima kasih atas segala limpahan do'a, restu, kata maaf dan dukungan yang terus mengalir tiada henti.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim, segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan segala rahmat dan nikmatnya berupa kesehatan, kesempatan, kekuatan, keinginan, serta kesabaran, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **"Studi Solusi Bintang Anisotropik untuk Ruang-Waktu Tolman IV menggunakan Metode *Gravitational Decoupling*"**. Sholawat serta salam penulis panjatkan kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menuntun manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman yang pencerahan dan penuh dengan ilmu pengetahuan yang luar biasa saat ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya bantuan dari pihak-pihak yang terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Khususnya penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Drs. Abdul Basid, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Erna Hastuti, M. Si., selaku dosen penguji 1 Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Muhammad Taufiqi, M. Si., selaku dosen penguji 2 Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Arista Romadani, M.Sc., selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
7. Erika Rani, M.Si., selaku dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran mengenai fisika teori.
8. Seluruh dosen, laboran dan staf administrasi Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik dan membimbing penulis.

9. Dr. Achmad Khudori Soleh, M. Ag., selaku pengasuh Pondok Pesantren Al-Azkiya’ beserta seluruh ustadz/ustadzah Pondok Pesantren Al-Azkiya’ yang telah mendidik dan membimbing penulis.
10. Keluarga tercinta, khususnya Ibu, Ayah dan Adik yang selama ini selalu memberikan dukungan, do’a serta semangat agar penulis senantiasa diberikan kemudahan dalam setiap langkahnya.
11. Candrasyah Muhammad, M.S., High. Grad. Dip sebagai tutor yang memberi arahan penulis untuk memulai menyusun skripsi ini.
12. Sahabat-sahabat santriwati Pondok Pesantren Al-Azkiya’, terutama teman-teman kamar B303 yang selalu mendoakan dan memberikan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
13. Sahabat-sahabat bidang minat fisika teori, terutama Squad Teori 2016 yang selalu mendoakan dan memberikan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
14. Sahabat dan teman-teman jurusan Fisika angkatan 2016 yang telah menemani dan mewarnai masa studi S1 penulis.
15. Serta terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan mereka dengan nikmat yang berlipat ganda baik di dunia maupun di akhirat kelak, aamiin. Penulisan berharap semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi penulis dan semua pihak yang membaca, dalam menambah wawasan ilmiah dan memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan, oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat konstruktif sangat penulis harapkan demi kebaikan bersama.

Malang, 18 November 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Azizah, Fithrotul. 2020. **Studi Solusi Bintang Anisotropik untuk Ruang-Waktu Tolman IV menggunakan Metode *Gravitational Decoupling***. Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si (II) Arista Romadani, M.Sc

Kata Kunci: *Solusi Anisotropik, Tolman IV, Gravitational Decoupling.*

Pada penelitian ini dilakukan perluasan solusi persamaan medan Einstein dengan simetri bola statis dan fluida sempura isotropik dari ruang-waktu Tolman IV menuju ke domain anisotropik. Untuk itu digunakan metode gravitational decoupling dengan pendekatan deformasi geometrik minimal. Untuk pemodelan karakteristik solusi anisotropik digunakan data bintang neutron LMC X-4. Hasil dari persamaan matematis dan analisis grafis menunjukkan bahwa model yang diperoleh telah memenuhi semua kriteria untuk menjadi solusi anisotropik yang diterima oleh persamaan medan Einstein. Secara khusus, telah dilakukan analisis terhadap keteraturan dari suku anisotropik, densitas efektif, tekanan radial dan tangensial efektif yang ada di dalam bintang neutron dan kondisi energi.

ABSTRACT

Azizah, Fithrotul. 2020. **Study of Anisotropic Solution for Tolman IV Space-time by Gravitational Decoupling**. Thesis. Physics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si (II) Arista Romadani, M.Sc

Keywords: *Anisotropic Solution, Tolman IV, Gravitational Decoupling*

In this research, we have extended the isotropic solution of static spherically symmetric perfect fluid Einsteins field equations from Tolman IV space-time to the anisotropic domain. To do so, we used gravitational decoupling method with a minimal geometric deformation approach. Neutron star LMC X-4 data is used to representing the model of anisotropic solution. The results of mathematical and graphical analysis shown that the obtained model fulfills all the criteria to be an anisotropic solution and accepted by Einstein's field equations. In particular, an analysis has been carried out of the regularity of the anisotropic term, effective density, radial pressure and effective tangential in the neutron star and energy conditions.

الملخص

العزيزة، فطرة. ٢٠٢٠. **دراسة محلول متباين الخواص لوقت الفضاء Tolman IV عن طريق فصل الجاذبية**. البحث الجامعى. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا في جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفة: (I) عبد الباسط، الماجستير، (II) و أريستا رمضاني ، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: محلول متباين الخواص ، Tolman IV، فصل الجاذبية

في هذا البحث ، قمنا بتوسيع الحل الخواص لمعادلات حقل آينشتاين للسوائل المثالية المتماثلة كرويًا من Tolman IV إلى **المجال** متباين الخواص. للقيام بذلك ، استخدمنا طريقة فصل الجاذبية مع نهج الحد الأدنى من التشوه الهندسي. تُستخدم بيانات النجم **النيوتروني** LMC X-4 لتمثيل نموذج محلول متباين الخواص. أظهرت نتائج التحليل الرياضي والرسوم البيانية أن النموذج الذي تم الحصول **عليه يفي** بجميع المعايير ليكون حلاً متباين الخواص ومقبولًا بواسطة معادلات المجال لأينشتاين. على وجه الخصوص ، تم إجراء تحليل **لانتظام** المصطلح متباين الخواص ، والكثافة الفعالة ، والضغط الشعاعي والماسي الفعال في النجم النيوتروني وظروف الطاقة.

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori relativitas umum (TRU) oleh Einstein merupakan salah satu capaian intelektual terbesar umat manusia. TRU ditempatkan menjadi pilar fisika modern bersama dengan standar model karena prediksi dari TRU telah dikonfirmansi melalui penemuan gelombang gravitasi dan lubang hitam. Dalam menyelesaikan persamaan medan Einstein pada TRU banyak fisikawan yang masih berpedoman dalam model ideal teoretis, padahal tidak ada yang sempurna (fisis) dalam alam semesta ini. Maka diperlukan pencarian mengenai solusi fuida anisotropik simetri bola untuk lebih memahami megenai sifat anisotropik pada objek-objek astrofisika kompak.

Kajian mengenai keberadaan objek-objek astrofisika termasuk bintang masif dalam alam semesta telah termaktub dalam Al-Qur'an surat At-Takwiir ayat 15-16, dimana Allah bersumpah atas bintang masif tersebut:

فَلَا أُقْسِمُ بِالْخُنَّسِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنَّسِ (١٦)

"Sungguh, Aku bersumpah dengan bintang-bintang, yang beredar dan terbenam," (QS. At-Takwiir [81]: 15-16).

Mayoritas ulama menafsirkan *al-khunnas* (dari verba khanasa "bersembunyi diam-diam") dengan "bintang". Baiquni (2014) menafsirkan *al-khunnas* secara astronomis sebagai materi gelap, karena kriteria *al-kunnas* (sesuatu yang pulang ke asal). Sebab, partikel-partikel materi gelap ini diciptakan dan dihasilkan dalam keseimbangan dinamis. Kalau memang *al-khunnas* artinya hanya bintang, mengapa Allah tidak langsung saja bersumpah dengan *nujuum*? Oleh karena itu, istilah *al-khunnas* cukup misterius, sebab hanya ada dalam surah At-Takwiir. Hal ini tidak lain karena Allah menyuruh kita berpikir, sehingga Al-Qur'an harus terus diselidiki sampai akhir zaman (Baiquni, 2014).

Distribusi bintang telah dipelajari semenjak solusi pertama dari persamaan medan Einstein untuk bagian interior dari objek astrofisika kompak telah diselesaikan oleh Schwarzschild pada tahun 1916. Schwarzschild telah menyelesaikan persamaan medan untuk bagian interior menggunakan asumsi fluida sempurna dan bagian luar merupakan bagian vakum. Untuk solusi interior yang memiliki geometri bola tiga dimensi, diselesaikan oleh Weyl pada tahun 1919 (Eddington, 1923). Pencarian solusi eksak isotropik dan anisotropik dengan menggunkan solusi persamaan Einstein untuk kasus distribusi simetri bola statik menarik perhatian banyak fisikawan. Akan tetapi, sedikit sekali solusi eksak isotropik dan anisotropik dari persamaan medan Einstein yang memenuhi kondisi fisik umum dari bagian interior suatu bintang. Fodor (2000) mengajukan sebuah algoritma untuk menghasilkan sejumlah solusi interior isotropik untuk kasus distribusi simetri bola statik. Begitu juga Schmidt dan Homman (2000) mendiskusikan solusi numerik untuk persamaan medan Einstein yang mendeskripiskan bintang foton dengan kasus simetri bola statik.

Pada tahun 1974, Bowers dan Liang menemukan penyelesaian dari persamaan anisotropik lokal dalam relativitas umum, sejak saat itu ada banyak literatur terkait studi solusi anisotropik dari persamaan medan Einstein. Mak dan Harko (2002) juga telah menunjukkan bahwa materi nuklir bisa dikategorikan anisotropik dalam keadaan densitas yang tinggi. Mereka berargumen bahwa bagian dalam suatu bintang harus memenuhi kondisi fisik umum yang menggambarkan dengan jelas mengenai solusi isotropik atau solusi anisotropik. Investigasi secara teoritis mengenai model bintang yang lebih realistis telah terlebih dahulu dilakukan Ruderman (1972), hasilnya menunjukkan bahwa materi nuklir bisa dikategorikan dalam anisotropik dalam rentang densitas yang sangat tinggi yaitu ($\rho > 10^{17}$ kg/m^3), dimana reaksi nuklir dianggap relativistik. Sifat anisotropiknya muncul ketika tekanan terpecah menjadi dua kontribusi yang berbeda, yaitu tekanan radial dan tekanan tangensial.

Sifat anisotropik pada umumnya timbul akibat adanya campuran dari berbagai jenis fluida, rotasi, viskositas, keberadaan inti padat dan keberadaan tipe superfluida 3A (Kippenham, 1990), adanya berbagai jenis dari transisi fase dan akibat dari medan magnet (Sokolov, 1980). Sumber anisotropi telah banyak dipelajari, khususnya untuk objek astrofisika yang sangat kompak dalam konteks empat-dimensi (Maurya, 2016) dan dalam konteks solusi *braneworld* yang memiliki dimensi lebih tinggi (Germani dan Maartens, 2001). Dalam penelitian terbaru, Ovalle (2017) mengembangkan suatu metode sederhana yang sistematis dan memuat pendekatan langsung untuk memisahkan sumber-sumber gravitasi dalam teori relativitas umum sehingga memperoleh metrik anisotropik. Metode ini dinamakan *gravitational decoupling*, terispirasi dari metode *minimal geometric deformation* (MGD) yang telah berhasil digunakan untuk menemukan solusi bintang baru pada teori *braneworld* (Ovalle, 2008 dan Ovalle, 2010).

Hasil dari metode *gravitational decoupling* adalah solusi isotropik yang terdeformasi menghasilkan solusi baru yang anisotropik dan tetap mempertahankan simetri bola. Karena itu, metode *gravitational decoupling* hanya bisa digunakan pada solusi isotropik simetri bola yang memiliki kriteria fisis (Ovalle, 2017). Mengenai hal ini, Delagty dan Lake (1998) telah melakukan kajian mengenai solusi isotropik dimana terdapat 127 metrik SSSPF (*Static Spherically Symmetric Perfect Fluid*) yang diajukan, hanya ada 16 solusi SSSPF yang bertahan dari serangkaian tes pengujian kriteria fisis. Karena persamaan medan Einstein adalah non-linier, maka metode *gravitational decoupling* merupakan sebuah terobosan dalam pencarian dan analisis dari solusi anisotropik, terutama ketika situasi yang terlibat adalah interior sistem gravitasi-diri (*self-gravitating*) yang didominasi oleh sumber gravitasi yang lebih realistis dibandingkan dengan fluida sempurna (Lake, 2003 dan Boonserm, 2005).

Ovalle (2017) pertama kali memperkenalkan metode *gravitational decoupling* menggunakan solusi isotropik Tolman IV dan berhasil mendapatkan solusi anisotropiknya. Penelitian mengenai pencarian solusi anisotropik menggunakan metode *gravitational decoupling* kemudian dikembangkan pada solusi SSSPF lainnya. Diantaranya metode *gravitational decoupling* telah digunakan oleh Heras dan Leon (2018) pada solusi isotropik Finch-Skeas, Graterol (2018) pada solusi isotropik Buchdahl, Estrada dan Ortiz (2018) pada solusi isotropik Heint IIa, Hens dan Stuchlík (2019) pada solusi isotropik Tolman VII.

Solusi bintang anisotropik memiliki aplikasi sangat luas dalam bidang astrofisika, karena pemahaman teoritis terkait model ideal objek-objek astrofisika kompak seperti bintang neutron membutuhkan pengetahuan tentang solusi anisotropik pada rentang kepadatan tinggi (Bowers dan Liang, 1974). Pada tahap selanjutnya, solusi anisotropik memperkenalkan beberapa fitur baru dalam distribusi materi, seperti adanya faktor anisotropi positif yang menimbulkan konfigurasi bintang mengalami gaya tolak yang menjadi pengganti gradien gravitasi (Maurya dan Ortiz, 2019).

Metode *gravitational decoupling* adalah metode sederhana untuk mendeformasi solusi isotropik menjadi anisotropik, sehingga metode ini sangat perlu didalami untuk memahami karakteristik bintang anisotropik. Pada penelitian ini digunakan salah satu solusi isotropik simetri bola yang terkenal dan sederhana yaitu ruang-waktu Tolman IV. Solusi Tolman IV ini dapat menggambarkan model relativistik umum yang eksak dan sederhana dari bintang neutron (Tolman, 1939).

Oleh karena itu, penelitian ini akan berfokus pada studi solusi anisotropik ruang-waktu Tolman IV berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif menggunakan metode *gravitational decoupling*. Setelah itu dilakukan pengkajian atas interpretasi fisis dari perubahan densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif pada ruang-waktu Tolman IV dengan digunakan kondisi pembanding yang diperoleh dari solusi eksterior Schwarzschild.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang diatas, berikut rumusan masalah untuk penelitian ini:

1. Bagaimana solusi fluida anisotropik berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif menggunakan metode *gravitational decoupling*?
2. Bagaimana karakteristik dari solusi fluida anisotropik berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif tersebut?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Memperoleh solusi fluida anisotropik berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif menggunakan metode *gravitational decoupling*.
2. Memperoleh karakteristik dari solusi fluida anisotropik berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif tersebut.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Untuk memperluas pengetahuan dan pemahaman mengenai TRU tingkat lanjut, terutama dalam mengubah solusi isotropik menjadi solusi anisotropik menggunakan metode *gravitational decoupling*.
2. Sebagai dasar untuk penelitian tingkat selanjutnya, dimana metode *gravitational decoupling* dan metode MGD dapat diaplikasikan kedalam sistem dengan sumber gravitasi yang lebih kompleks dan lebih relistis dibandingkan fluida sempurna, seperti pada sistem Einstein--Klein--Gordon.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Perhitungan solusi bintang anisotropik untuk ruang-waktu Tolman IV digunakan konstrain mimik untuk tekanan hingga didapat persamaan densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif yang anisotropik.

2. Interpretasi fisis yang ditinjau adalah solusi bintang anisotropik pada ruang-waktu Tolman IV dengan digunakan kondisi pembanding yang diperoleh dari solusi eksterior Schwarzschild.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Relativitas Umum

Einstein menghasilkan teori relativitas umum (TRU) di tahun 1915, dimana dia mengemukakan saran bahwa gravitasi adalah efek dari kelengkungan ruang-waktu akibat dari penyebaran masa dan energi di dalam ruang-waktu tersebut. TRU dibangun atas asas kesetaraan dan kovariansi umum, dimana Einstein memperoleh hasil tersebut dari percobaan angan-angan. Adapun asas kesetaraan berbunyi "Tidak ada percobaan yang dapat dilakukan dalam daerah kecil (lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara.". Adapun asas kovariansi umum berbunyi "Hukum alam harus memiliki bentuk yang tetap terhadap sebarang pemilihan transformasi koordinat." (Purwanto, 2009 dan Anugraha, 2018).

Untuk menjelaskan asas kesetaraan, dimisalkan ada sebuah benda yang diletakkan didalam roket, kemudian benda tersebut akan ditinjau dalam dua keadaan. Keadaan pertama, benda berada di dalam roket, yang mana roket diam pada landasannya di permukaan bumi, roket berada dalam pengaruh gravitasi pada permukaan bumi yang bernilai 9,8 m/s^2. Keadaan kedua benda dijatuhkan dengan posisi roket di ruang angkasa (dengan medan gravitasi yang dapat diabaikan) roket bergerak dipercepat ke atas sebesar 9,8 m/s^2, sehingga benda di dalam roket merasakan gravitasi bernilai 9,8 m/s^2. Maka dapat disimpulkan bahwa kedua percobaan angan-angan tersebut memberikan hasil yang sama (Anugraha, 2018).

Untuk menjelaskan asas kovariansi umum, dimisalkan ada sebuah kotak yang diikat pada mesin yang mempercepat kotak tersebut. Jika pengamat menjatuhkan dua benda yang terpisah sejauh jarak kecil *r* dan pengamat juga merasa menekan lantai kotak. Pengamat tidak akan bisa membedakan antara situasi ini dan pengalaman di dalam pengaruh gaya gravitasi. Sepanjang eksperimen dilakukan di daerah kecil, efek yang dihasilkan oleh gaya gravitasi tidak dapat dibedakan dari keberadaannya di dalam kerangka acuan dipercepat. Jika jarak cukup jauh dan kotak cukup besar maka keadaan dapat dibedakan, jarak dua benda tetap bagi kotak dipercepat tapi jarak berubah bagi gravitasi (Purwanto, 2009).

2.2.1 Teori Relativitas Umum dalam Kajian Islam

Teori relativitas umum (TRU) oleh Einstein merupakan salah satu capaian intelektual terbesar umat manusia. TRU ditempatkan menjadi pilar fisika modern bersama dengan standar model karena prediksi dari TRU telah dikonfirmansi melalui penemuan gelombang gravitasi dan lubang hitam. Kajian mengenai keberadaan objek-objek astrofisika kompak termasuk bintang masif dalam alam semesta telah termaktub dalam Al-Qur'an surat At-Takwiir ayat 15-16, dimana Allah bersumpah atas bintang masif tersebut:

فَلَا أُقْسِمُ بِالْخُنَّسِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنَّسِ (١٦)

"Sungguh, Aku bersumpah dengan bintang-bintang, yang beredar dan terbenam," (QS. At-Takwiir [81]: 15-16).

Ayat (15) dan (16) surah ini sangat terkait secara redaksional. *Fa laa uqsimu bi al-kunnas* ("Maka, Aku bersumpah dengan bintang-bintang"), dan lanjutannya *al-jawaaril khunnas* ("yang beredar dan terbenam"). Rutinitas bangun tidur ternyata bukan hanya milik manusia dan hewan. Segenap makhluk di bumi, bahkan bumi ini sendiri pun, "bangun" dan "tidur" setiap hari. Detik-detik menabjubkan ketika bumi dan seisinya "bangun" di waktu subuh, dipotret sedemikian rupa dalam Al-Qur'an Surah Al-Takwiir bagian pertengahan sampai akhir. Dalam ayat (15), *Fa laa uqsimu bi al-khunnas* ("Betapa tidak, Aku bersumpah dengan yang diam-diam bersembunyi"), terdapat kata *al-khunnas*. Sedangkan pada ayat (16) *Al-jawaar al-khunnas* ("yang mengalir, yang pulang ke asal"), terdapat kata *al-jawaar* (Baiquni, 2014).

Kebanyakan ulama menafsirkan *al-khunnas* (dari verba khanasa "bersembunyi diam-diam") dengan "bintang". Namun, bintang-bintang terlihat nyata, bukan sesuatu yang tersembunyi. Baiquni (2014) menafsirkan *al-khunnas* secara astronomis ditafsirkan sebagai materi gelap secara kolektif disebut *weakly interacting massive particle* atau WIMPs. Materi gelap juga memenuhi kriteria *al-kunnas* (sesuatu yang pulang ke asal). Sebab, partikel-partikel materi gelap ini diciptakan dan dihasilkan dalam keseimbangan dinamis. Kalau memang artinya hanya bintang, mengapa Allah tidak langsung saja bersumpah dengan *nujuum*? Dalam berbagai ayat Al-Qur'an, bertebaran istilah yang menyebut benda-benda langit seperti *nujuum*, *kaukab*, *buruuj*, dll. Istilah-istilah tersebut sering disebut berulang-ulang sehingga dapat ditelusuri artinya. Namun, istilah *al-khunnas* dan *al-kunnas* cukup misterius, sebab hanya ada dalam Surah Al-Takwiir. Hal ini tidak lain karena Allah menyuruh kita berpikir, sehingga Al-Qur'an harus terus diselidiki sampai akhir zaman (Baiquni, 2014).

2.2 Persamaan Medan Einstein

Persamaan medan Einstein didapat dengan meninjau potensial gravitasi Newton. Di dalam teori gravitasi non-relativistik Newton, potensial skalar ϕ memenuhi persamaan Poisson, yaitu (Anugraha, 2018)

$$\nabla^2\phi = 4\phi G\rho, \tag{2.1}$$

dengan G tetapan gravitasi Newton dan ρ kerapatan massa sumber gravitasi.

Dengan digunakannya geometri Reimman, persamaan (2.1) harus diperluas dan diubah. Potensial gravitasi diperluas menjadi kelengkungan ruang-waktu yang ada di dalam tensor Einstein, yaitu (Anugraha, 2018)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{2.2}$$

Adapun rapat masa yang menimbulkan potensial medan gravitasi diperluas menjadi tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ dengan rapat massa-energi termasuk salah satu komponen di dalam tensor tersebut.

Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa potensial medan gravitasi sebanding dengan massa sumber medan, sehingga kelengkungan ruang-waktu sebanding dengan tensor energi-momentum yang dirumuskan sebagai berikut (Anugraha, 2018)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa^2 T_{\mu\nu}. \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) menunjukkan persamaan medan Einstein dengan $\kappa^2 = 8\pi$. Terdapat dua bentuk variasi dari persamaan (2.3), yaitu bentuk persamaan tensor kontravarian dan tensor campuran yang dirumuskan sebagai berikut (Anugraha, 2018)

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa^2 T^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

dan

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R = -\kappa^2 T^{\mu}_{\nu}. \tag{2.5}$$

δ^{μ}_{ν} adalah bentuk delta kronecker dimana $\delta^{\mu}_{\nu} = 1$ jika $\mu = \nu$ dan bernilai 0 jika $\mu \neq \nu$.

Salah satu keunggulan dari TRU adalah teori kovarian yang akan tereduksi menjadi hukum gravitasi Newton pada medan gravitasi lemah. Sifat ini dinamakan sebagai asas korespondensi. Dalam ruang-waktu yang berisi medan gravitasi, geometri yang digunakan adalah geometri Reimann. Dalam ruang-waktu tanpa medan gravitasi, geometri yang digunakan adalah geometri Ecluid (Anugraha, 2018).

R dalam persamaan (2.2) disebut sebagai skalar Ricci, didefinisikan sebagai (Schutz, 2009) :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

dimana $R_{\mu\nu}$ didefinisikan sebagai

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}, \tag{2.7}$$

$R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ disebut sebagai tensor kurvatur Riemann, diberikan dalam

$$R^{\nu}{}_{\alpha\beta\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \partial_{\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\rho}_{\beta\mu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu}\Gamma^{\nu}_{\beta\rho}, \tag{2.8}$$

$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ disebut sebagai koneksi Christoffel, yakni

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}\right). \tag{2.9}$$

Teori relativitas secara umum mengasumsikan dua kondisi, dimana tensor metrik $g_{\mu\nu}$ dan koneksi $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ memenuhi

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \text{ (bebas torsi)}, \\ \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} &= 0 \text{ (kompabilitas metrik)}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan ∇_{α} adalah turunan kovarian yang bekerja pada tensor, diberikan oleh, misalkan untuk tensor berderajat (2,2)

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \partial_\lambda T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} T^{\sigma\nu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma} T^{\mu\sigma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\alpha} T^{\mu\nu}{}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\beta} T^{\mu\nu}{}_{\alpha\sigma}, \quad (2.11)$$

dan seterusnya untuk tensor berderajat sembarang.

2.3 Solusi Persamaan Medan Einstein dengan Simetri Bola Statis dan Fluida Sempurna

Persamaan medan Einstein merupakan sebuah set yang terdiri dari beberapa persamaan diferensial parsial yang saling berkaitan. Sehingga, untuk menemukan solusi persamaan medan Einstein perlu diajukan jenis kesimetrian ruang-waktu dan dispesifikasikan materi sumber medan gravitasinya. Kasus yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis solusi persamaan medan Einstein dengan simetri bola statis dan fluida sempurna (*static spherically symmetric perfect fluid*) atau bisa disingkat SSSPF. Jenis solusi ini biasa dipakai untuk pemodelan ideal objek-objek astrofisika kompak seperti bintang neutron dan bintang katai putih.

Untuk mendapatkan solusi persamaan Einstein SSSPF maka perlu diketahui metrik dari geometri ruang-waktu yang memenuhi simetri bola. Metrik tersebut kemudian harus memenuhi persamaan medan Einstein, dimana komponen tensor yang digunakan adalah komponen tensor fluida sempurna. Berikut adalah penjelasan mengenai metrik simetri bola dan tensor fluida sempurna.

2.3.1 Koordinat untuk Geometri Ruang-Waktu Simetri Bola Statis

Untuk elemen garis dari ruang Minkowski, didefinisikan dalam koordinat umum (r, θ, ϕ) yaitu sebagai berikut (Schutz, 2009)

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.12)$$

dimana

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2. \tag{2.13}$$

Anggap ada dua bola dengan jari-jari r dan $r + dr$, masing-masing memiliki sistem koordinat (θ, ϕ), dibayangkan bahwa terdapat dua kutub bola, yaitu r di satu sisi dan $r + dr$ di sisi lain, maka dapat dikatakan bahwa garis θ = konstan, ϕ = konstan, ortogonal ke dua bidang. Menurut definisi, garis seperti itu memiliki garis singgung, karena vektor $\vec{e}_\theta$ dan $\vec{e}_\phi$ terletak di dalam bola, kita anggap $\vec{e}_r . \vec{e}_\theta = \vec{e}_r . \vec{e}_\phi = 0$. Hal ini berarti $g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$, sehingga definisi dari elemen jarak simetri bola yang baru adalah

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + 2g_{00}d\theta dt + 2g_{0\phi}d\phi dt + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.14}$$

Perlu diperhatikan bahwa tidak hanya *t* = konstan, tetapi juga seluruh ruang waktu dalam simetri bola, r = konstan, θ = konstan dan ϕ = konstan. Hal ini juga berarti $\vec{e}_t$ ortogonal pada $\vec{e}_\theta$ dan $\vec{e}_\phi$ atau $g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$, sehingga kita memiliki metrik umum dari ruang waktu simetri bola yaitu

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2.15}$$

Situasi fisik paling sederhana yang dapat digambarkan adalah lubang hitam dalam sistem statis, dimana koordinat waktu *t* digambarkan dalam dua keadaan (Schutz, 2009):

i. Semua komponen metrik tidak bergantung pada *t*.

ii. Geometri tidak berubah akibat pembalikan waktu, $t \rightarrow -t$.

Kondisi kedua memiliki implikasi dimana koordinat transformasi $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$ memiliki $\Lambda^{\tilde{0}}{}_0 = -1$, $\Lambda^i{}_j = \delta^i{}_j$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} g_{\tilde{0}\tilde{0}} &= \left(\Lambda^0{}_{\tilde{0}}\right)^2 g_{00} = g_{00}, \\ g_{\tilde{0}\tilde{r}} &= \Lambda^0{}_{\tilde{0}}\Lambda^r{}_{\tilde{r}} g_{0r} = -g_{0r}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$g_{\tilde{r}\tilde{r}} = (\Lambda^{r}{}_{\tilde{r}})^2 g_{rr} = g_{rr}.$$

Karena geometri tidak berubah, ($g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = g_{\alpha\beta}$), maka didapatkan $g_{0r} \equiv 0$. Maka, untuk geometri ruang-waktu yang memenuhi simetri bola statis metriknya diberikan oleh :

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2), \qquad (2.17)$$

dimana $\nu = \nu(r)$ dan $\lambda = \lambda(r)$ adalah fungsi dari jari-jari r, yang dimulai dari $r = 0$ (inti bintang) ke titik $r = R$ (bagian permukaan bintang).

2.3.2 Fluida Sempurna

Pada umumnya, pemodelan di dalam fisika dimulai dari konsep paling sederhana, demikian pula untuk medan materi di dalam jagad raya skala besar dianggap mempunyai sifat fluida sempurna. Selain itu, medan materi juga dianggap terdiri dari materi inkoheren dan tidak saling berinteraksi satu dengan lainnya dan dicirikan oleh (Purwanto, 2009)

i. Medan skalar kerapatan materi ρ yang diukur pengamat yang ikut bergerak bersama materi.
ii. Medan vektor-empat aliran fluida u^μ. Jika gerak elemen materi fluida dalam ruang-waktu dapat dinyatakan sebagai $x^\mu(s)$ maka berlaku $dx^\mu/ds=u^\mu$. Jika u kecil, keadaan ini disebut sebagai keadaan aproksimasi nonrelativitsik.
iii. Medan skalar tekanan p cukup kecil sehingga kerapatan energi elastik dalam fluida tidak perlu diperhitungkan.

Akan tetapi asumsi fluida sempurna hanya relevan dalam skala besar yaitu skala di atas 100 Mpc. Asumsi materi sebagai fluida memiliki implikasi pada penerimaan kelestarian energi dan materi dalam skala besar maupun skala kecil.

Fluida sempurna dalam ranah teori relativitas memiliki arti yang luas, fluida sempurna mencakup air, gas, radiasi bahkan juga energi vakum. Fluida dikatakan sempurna apabila tidak memiliki viskositas dan konduksi panas (Purwanto, 2009).

Fluida dapat dikarakterisasikan oleh kecepatan-empat u dan dua dari kuantitas-kuantitas skalar berikut: densitas ρ, kerapatan isotropik p, temperatur T, entropi spesifik s, entalpi spesifik $w = (\rho + p)/n$ yang mana n adalah kerapatan jumlah baryon. Tensor energi-momentum untuk fluida sempurna diberikan oleh (Purwanto, 2009)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

dimana ρ adalah rapat massa atau densitas dan p adalah tekanan isotropik, u_μ adalah empat-kelajuan fluida yang memenuhi $u_\mu u^\mu = u_0 u^0 = 1$.

Friedmann mengajukan solusi pertama dari persamaan medan yang menggambarkan jagad raya non-statik, dimana dia mengasumsikan galaksi sebagai fluida ideal yang dikarakterisasi oleh densitas rata-rata ρ dan tekanan internal rata-rata p. Keduanya tidak bergantung pada posisi tetapi bergantung pada waktu dalam ruang. Asumsi ini menyajikan bentuk sederhana bagi tensor energi-momentum untuk fluida sempurna yaitu (Purwanto, 2009)

$$T_\nu^{\mu(m)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

di dalam kerangka bergerak bersama (*comoving frame*) yang mana kecepatan-empat diberikan oleh $dx^\mu/ds = (1, 0, 0, 0)$.

Dengan memanfaaatkan geometri ruang-waktu yang memenuhi simetri bola statis pada persamaan (2.17) dan tensor energi momentum untuk fluida sempurna pada persaman (2.18), dapat dihitung solusi persamaan Einstein untuk komponen (00), (11) dan (22) secara berurutan, hingga didapatkan (lampiran A)

$$\kappa^2\rho = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{2.20}$$

$$-\kappa^2 p = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{2.21}$$

$$-\kappa^2 p = -\frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + \frac{2(\nu'-\lambda')}{r}\right). \tag{2.22}$$

dimana tanda aksen ($'$) adalah turunan terhadap r. Terdapat empat variabel peubah atau variabel independen $(\nu,\ \lambda,\ \rho,\ p)$ untuk tiga persamaan independen ((2.20), (2.21), (2.22)). Tiga persamaan independen yang berasal dari tensor energi-momentum fluida statis ini juga harus memenuhi persamaan konservasi (kelestarian energi) yaitu

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.23}$$

Persamaan konservasi (2.23), juga merupakan sebuah kombinasi linear dari persamaan (2.20) – (2.22), yang menghasilkan (lampiran B)

$$p' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + p). \tag{2.24}$$

Kemudian, untuk mendapatkan solusi persamaan Einstein dengan simetri bola statis dan fluida sempurna (solusi SSSPF) tidak cukup hanya dengan mengetahui kombinasi linear dari tiga persamaan independen. Untuk menyelesaikan variabel independen $(\nu,\ \lambda,\ \rho,\ p)$ dibutuhkan satu persamaan independen tambahan, yaitu persamaan keadaan (*equation of state*), yang memberikan hubungan antara ρ dan p. Persamaan keadaan ini perlu dispesifikkan, agar didapat ungkapan $(\nu,\ \lambda,\ \rho,\ p)$ dalam bentuk r.

2.4 Jenis-Jenis Solusi Persamaan Medan Einstein dengan Simetri Bola Statis dan Fluida Sempurna

Kasus yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis solusi persamaan medan Einstein dengan simetri bola statis dan fluida sempurna (*static spherically symmetric perfect fluid*) atau bisa disingkat SSSPF. Suatu solusi SSSPF yang paling sederhana adalah Schwarzschild interior. Schwarzschild mengajukan satu persamaan keadaan sederhana yaitu ρ bernilai konstan untuk menyelesaikan persamaan independen (2.20), (2.21), (2.22). Selain solusi Schwarzschild interior, ada banyak sekali solusi SSSPF yang ditemukan dan dipelajari oleh para fisikawan, banyak diantaranya mampu menyelesaikan solusi eksak dari persamaan medan Einstein. Akan tetapi, sedikit sekali solusi eksak ini memenuhi kondisi fisik umum dari bagian interior suatu bintang. Pada tahun 1998, Delagty dan Lake melakukan kajian mengenai solusi isotropik dimana terdapat 127 metrik SSSPF yang diajukan, hanya ada 16 solusi SSSPF yang bertahan dari serangkaian tes pengujian kriteria fisis. Kriteria-kriteria fisis yang diajukan adalah sebagai berikut (Delagty dan Lake, 1998)

i. Solusi metrik tersebut harus SSSPF, yaitu komponen dari tensor Einstein memenuhi $G_r^r = G_\theta^\theta = G_\phi^\phi$

ii. Reguler di inti, yakni untuk

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)r^2 d\Omega^2,$$

dimana

$d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$

harus terpenuhi bahwa

$$A(0) = \text{konstan}\,; B(0) = C(0) = 1$$

dan

$$A'(0) = B'(0) = C'(0) = 0$$

iii. Baik p maupun ρ disyaratkan positif definit dalam inti

iv. Agar terisolasi, disyaratkan bahwa $p \to 0$ pada suatu batas radius r_b

v. Baik p maupun ρ diisyaratkan untuk nilainya berkurang secara monotonik pada batas tertentu

vi. Disyaratkan memiliki kecepatan suara subluminal,

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} < 1$$

Diantara 127 solusi hanya ada 16 solusi yang bertahan dari rangkaian tes diatas. Metrik SSSPF yang lolos uji fisis diberikan sebagaimana berikut (Delagty dan Lake, 1998):

1. Tolman IV

$$ds^2 = -B^2\left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)dt^2 + \frac{1 + 2\frac{r^2}{A^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \qquad (2.25)$$

2. Tolman VII

$$ds^2 = -B^2 sin^2 ln\sqrt{\frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} + 4\frac{r^2}{A^2}} + 2\frac{r^2}{A^2} - \frac{1}{4}\frac{A^2}{r^2}}{C}}dt^2$$

$$+\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + 4\frac{r^2}{A^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \qquad (2.26)$$

3. Patwardhan-Vaidya IIa

Untuk $b > c$

$$ds^2 = \left(A\cos\left[\frac{\operatorname{arcsinh}}{2}\left(\frac{b^2r^2 - c}{\sqrt{b^2 - c}}\right) + d\right]\right.$$

$$\left. + B\sin\left[\frac{\operatorname{arcsinh}}{2}\left(\frac{b^2r^2 - c}{\sqrt{b^2 - c}}\right) + d\right]\right)^2 dt^2$$

$$+(b^2r^4 - 2cr^2 + 1)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.27)$$

4. Wyman IIa

Untuk $n \neq 2$ dan $n \neq \sqrt{2}$

$$ds^2 = -(Ar^{1-n} - Br^{1+n})^2dt^2$$

$$+\left(\frac{1}{2 - n^2} + ar^b[A(2-n) - B(2+n)r^{2n}]^c\right)^{-1} dr^2 \quad (2.28)$$

$$+ r^2d\Omega^2.$$

5. Nariai IV

$$ds^2 = -A\cos^2\left(a - \frac{\sqrt{2}M}{4}r^2\right)\cos^{-2}\left(b - \frac{M}{4}r^2\right)dt^2$$

$$+A\cos^{-2}\left(b + \frac{M}{4}r^2\right)(dr^2 + r^2d\Omega^2). \quad (2.29)$$

6. Buchdahl1

$$ds^2 = -A\left[(1 + Cr^2)^{3/2} + B\sqrt{2 - Cr^2}(5 + 2Cr^2)\right]^2 dt^2$$

$$+\frac{2(1 + Cr^2)}{2 - Cr^2}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.30)$$

7. Mehra

$$ds^2 = -\left[\sqrt{1 - \frac{16\pi a^2\rho_c}{15}}\cos\left(\frac{z_1 - z}{2}\right) - \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{2\pi\rho_c}{5}}\sin\left(\frac{z_1 - z}{2}\right)\right]^2 dt^2$$

$$+\left[1 - \frac{8\pi\rho_c}{15}\left(5r^2 - \frac{3r^4}{a^2}\right)\right]^{-1} dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.31)$$

dimana

$$a^2 < \frac{9}{10\pi\rho_c}, z = ln\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{5}{6} + \sqrt{\frac{r^4}{a^4} - \frac{5r^2}{3a^2} + \frac{5}{8\pi a^2\rho_c}}\right),$$

$$z_1 = ln\left(\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{5}{8\pi a^2\rho_c} - \frac{2}{3}}\right).$$

8. Kuchowicz2 III

$$ds^2 = -Be^{\frac{Ar^2}{2}}dt^2 + \left(1 + r^2 e^{-\frac{Ar^2}{2}}\left[C - \frac{A}{2e}Ei\left(1 + \frac{Ar^2}{2}\right)\right]\right)^{-1} dr^2$$
$$+r^2 d\Omega^2. \tag{2.32}$$

9. Heintzmann IIa

$$ds^2 = -A^2(1 + ar^2)^3 dt^2 + \left(1 - \frac{3ar^2}{2}\frac{1 + C(1 + 4ar^2)^{-1/2}}{1 + ar^2}\right)^{-1} dr^2$$
$$+r^2 d\Omega^2. \tag{2.33}$$

10. Goldman III

$$ds^2 = -A\left(\frac{g-1}{g+1}\right)dt^2 + B\left(1 + \frac{1}{g}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \tag{2.34}$$

dimana $g = cosh(a + br^2)$

11. Matese-Withman I

$$ds^2 = -\left(1 + a\frac{r^2}{R^2}\right)(Asinz + Bcosz)^2 dt^2 + \left(1 + 2a\frac{r^2}{R^2}\right)dr^2$$
$$+ r^2 d\Omega^2. \tag{2.35}$$

dimana

$$z = \sqrt{1 + 2a\frac{r^2}{R^2}} - tan^{-1}\sqrt{1 + 2a\frac{r^2}{R^2}}.$$

12. Durgapal IV

$$ds^2 = -A(1 + Cr^2)^4 dt^2$$

$$\left(\frac{7-10Cr^2-C^2r^4}{7(1+Cr^2)^2}+\frac{KCr^2}{(1+Cr^2)^2(1+5Cr^2)^{2/5}}\right)^{-1}dr^2 \qquad (2.36)$$

$$+r^2d\Omega^2.$$

13. Durgapal V

$$ds^2=-A(1+Cr^2)^5dt^2$$

$$+\left(\frac{1-\dfrac{Cr^2(309+53Cr^2+8C^2r^4)}{112}+\dfrac{KCr^2}{\sqrt[3]{1+6Cr^2}}}{(1+Cr^2)^3}\right)^{-1}dr^2$$

$$+r^2d\Omega^2. \qquad (2.37)$$

14. Whitman II

$$ds^2=-\left(A^2\left(1+a\frac{r^2}{R^2}\right)\right.$$

$$+B\frac{r}{R\sqrt{2a}}sinh\beta\left[1\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R^2+2ar^2}{2ar^2}\left(1-\sqrt{10a}\frac{r}{\sqrt{R^2+2ar^2}}coth\beta\right)\right]\right)dt^2$$

$$+B^2\left(1+2a\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$x\left(A^2\left(1+a\frac{r^2}{R^2}\right)+B\frac{r}{R\sqrt{2a}}sinh\beta\left[1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R^2+2ar^2}{2ar^2}\left(1-\sqrt{10a}\frac{r}{\sqrt{R^2+2ar^2}}coth\beta\right)\right]\right)^{-1}dr^2$$

$$+r^2d\Omega^2, \qquad (2.38)$$

dimana

$$\beta=\sqrt{5}arcsinh\sqrt{\frac{R^2}{2ar^2}}.$$

15. Whitman IV

$$ds^2=-fdt^2+\frac{a}{f}\left(1-b\frac{r^2}{R^2}\right)^3dr^2+r^2d\Omega^2, \qquad (2.39)$$

dimana

$$f = \frac{r^2}{R^2}(g_p + g_h), g_p = a\frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{br^2}{R^2} - \frac{3}{4}\frac{b^2r^4}{R^4} + \frac{1}{2}\frac{b^3r^6}{R^6}\right),$$

$$g_h = C\left(1 - b\frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4}\frac{cos\beta}{\left(1 - b\frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2}} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{sin\beta}{\left(1 - b\frac{r^2}{R^2}\right)\sqrt{\frac{br^2}{R^2}}}\right.$$

$$\left. - 3R^2\frac{cos\beta}{br^2\sqrt{1 - \frac{br^2}{R^2}}}\right),$$

$$\beta = 2\sqrt{3}arcsin\sqrt{\frac{br^2}{R^2}}.$$

16. Finch-Skea

$$ds^2 = -D^2\left(\left[B - A\sqrt{1 + Cr^2}\right]cos\sqrt{1 + Cr^2}\right.$$

$$\left. + \left[A + B\sqrt{1 + Cr^2}\right]sin\sqrt{1 + Cr^2}\right)^2 dt^2$$

$$+(1 + Cr^2)dr^2 + r^2d\Omega^2. \qquad (2.40)$$

BAB III
METODE *GRAVITATIONAL DECOUPLING*

3.1 Solusi Anisotropik

Fluida sempurna merupakan model ideal teoritis yang diasumsikan oleh fisikawan, akan tetapi tidak ada yang sempurna (fisis) dalam alam semesta. Bintang-bintang dan objek langit lain secara alamiah adalah anisotropik. Anisotropik berarti terdapat perbedaan sifat fisik (seperti konduktivitas, elastisitas dan densitas daya) apabila terdapat perbedaan arah, yang mana sifatnya berlawanan dengan isotropik.

Anisotropik muncul ketika suatu sistem berada dalam tekanan yang tidak homogen. Ketidakhomogenan tersebut pada umumnya timbul akibat adanya campuran dari berbagai jenis fluida, rotasi, viskositas, keberadaan inti padat dan keberadaan tipe superfluida 3A (Kippenham, 1990), adanya berbagai jenis dari transisi fase dan akibat dari medan magnet (Sokolov, 1980). Berdasarkan penelitian Bowers dan Liang (1974) tidak ada objek astrofisika kompak yang merupakan fluida sempurna, karena nilai densitas dan tarikan gravitasi yang sangat tinggi menyebabkan jumlah anisotropik lebih besar dibandingkan bintang pada umumnya. Gagasan pertama mengenai tekanan fluida anisotropik adalah oleh Ruderman (1972), hasil penelitiannya menunjukkan bahwa sifat anisotropik muncul dalam rentang densitas yang tinggi sehingga tekanan terpecah menjadi dua kontribusi yang berbeda, yaitu tekanan radial dan tekanan tangensial.

Berdasarkan penelitian Rago (1991), untuk mendapatkan solusi anisotropik dari persamaan medan Einstein adalah dengan menggunakan faktor anisotropik ($\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r$) dimana sifat anisotropik muncul ketika tekanan berubah dalam kondisi ekstrim, dimana tekanan terpecah menjadi dua komponen yaitu tekanan radial dan tekanan tangensial. Dari pernyataan faktor anisotopik dapat dilihat bahwa ketika tekanan tangensial lebih besar dari tekanan radial maka faktor anisotropik bernilai positif, sehingga menghasilkan gaya kerja keluar bagian bintang. Sebaliknya, ketika faktor anisotropik bernilai negatif yaitu tekanan radial lebih besar dari tekanan tangensial maka menghasilkan gaya kerja kedalam bagian bintang, ini berarti bintang mengalami kehancuran.

Maurya (2018) menjelaskan bahwa kemungkinan adanya sifat anisotropik pada bintang kompak karena interaksi antar partikel dalam bintang kompak jauh lebih relativitsik. Karena gerak partikel yang relativistik ini, gerakan partikel menjadi terlalu acak untuk melakukan distribusi seragam ke seluruh wilayah bintang kompak. Sifat anisotropik ini juga dipengaruhi oleh densitas yang sangat tinggi dari bagian dalam bintang, kemudian keadaan tersebut menghasilkan gaya anisotropik yang bernilai positif. Gaya anisotropik yang bernilai positif tersebut menghasilkan gaya kerja ke luar bagian bintang, sehingga membuat bintang menjadi lebih kompak jika dibandingkan dengan kondisi isotropik.

Apabila kembali kepada persamaan (2.20), (2.21) dan (2.22), untuk kasus anisotropiknya akan menjadi

$$\kappa^2\rho = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{3.1}$$

$$-\kappa^2 p_r = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{3.2}$$

$$-\kappa^2 p_t = -\frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + \frac{2(\nu'-\lambda')}{r}\right). \tag{3.3}$$

Dimana variabel tambahan adalah adanya tekanan radial (p_r) dan tekanan tangensial (p_t). Karena adanya variabel tambahan ini, maka akan sulit untuk mencari persamaan keadaaan yang tetap memenuhi persamaan kelestarian energi sebagai kombinasi linier dari ketiga persamaan tersebut. Ovalle (2017) menemukan sebuah metode generik yang merupakan suatu pendekatan sederhana dan langsung untuk memperoleh metrik anisotropik berdasarkan solusi persamaan medan Einstein dengan simetri bola statis dan fluida sempurna (SSSPF). Metode ini dinamakan *gravitational decoupling*, yang mana terinspirasi oleh metode *minimal geometric deformation* (MGD) yang sukses menemukan solusi bintang baru pada teori *braneworld* (Ovalle, 2008 dan Ovalle, 2010).

Bagian utama dan paling penting dari pendekatan *gravitational decoupling* ini dimulai dari sumber gravitasi simetri bola sederhana, yaitu $\hat{T}_{\mu\nu}$ dan menambahkan sumber gravitasi yang lebih kompleks kedalamnya (dengan syarat tetap memenuhi persamaan konservasi dari sumber gravitasi simetri bola sederhana). Sumber gravitasi $\hat{T}_{\mu\nu}$ yang baru bisa dituliskan (Ovalle, 2017):

$$\hat{T}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \alpha^{(1)} T^{(1)}_{\mu\nu}, \tag{3.4}$$

dan kemudian diulangi proses tersebut dengan lebih banyak sumber tambahan, seperti

$$\tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{T}^{(2)}_{\mu\nu} = \tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu} + \alpha^{(2)} T^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

dan seterusnya. Dengan cara yang sama, konsep ini dapat diperluas pada solusi persamaan Einstein yang berkaitan dengan sumber gravitasi sederhana $\hat{T}_{\mu\nu}$ ke dalam domain dari sumber gravitasi yang lebih rumit $T_{\mu\nu} = \tilde{T}^{(n)}_{\mu\nu}$, secara bertahap dan sistematis. Perlu diperhatikan bahwa metode ini akan bekerja selama sumber gravitasinya tidak mengalami pertukaran dengan energi-momentum, yaitu

$$\nabla_\nu \hat{T}_{\mu\nu} = \nabla_\nu T^{(1)\mu\nu} = \cdots = \nabla_\nu T^{(n)\mu\nu} = 0, \tag{3.6}$$

yang mana selanjutnya mengklarifikasi bahwa komponen yang ditunjukkan dalam persamaan (3.4) hanya dapat berpasangan melalui gravitasi.

Untuk menemukan sebuah solusi persamaan medan Einstein dengan tensor energi-momentum simetri bola kompleks, $T_{\mu\nu}$ awal dapat dipecah kedalam komponen yang lebih sederhana, misalkan $T_{\mu\nu}^{(i)}$, dan menyelesaikan persamaan Einstein untuk masing-masing bagian tersebut. Karenanya, akan didapatkan solusi sebanyak kontribusi $T_{\mu\nu}^{(i)}$ dalam tensor energi-momentum yang asli. Pada akhirnya, dengan kombinasi langsung dari keseluruhan solusi, akan mendapatkan solusi persamaan Einstein terkait dengan tensor energi-momentum asli $T_{\mu\nu}$ (Ovalle, 2018).

Apabila diringkas, prosedur sederhana untuk metode *gravitational decoupling* adalah sebagai berikut. Pertama, diberikan dua sumber gravitasi A dan B, pertama sumber gravitasi A diselesaikan menggunakan persamaan standar Einstein, dan kemudian sumber gravitasi B diselesaikan menggunkan persamaan kuasi-Einstein sederhana. Akhirnya, dua solusi dapat dikombinasikan untuk mendapatkan solusi lengkap berupa gabungan sistem $A \cup B$ (Ovalle, 2018). Karena persamaan medan Einstein adalah non-linear, maka prosedur metode *gravitational decoupling* merupakan sebuah terobosan dalam pencarian dan analisis dari solusi anisotropik, terutama ketika situasi yang terlibat adalah interior sistem gravitasi-diri (*self-gravitating*) yang didominasi oleh sumber gravitasi yang lebih realistis dibandingkan dengan fluida sempurna (Lake, 2003 & Boonserm, 2005).

Untuk mengetahui kebenaran dari solusi anisotropik baru yang didapatkan dari metode *gravitational decoupling*, terdapat beberapa persyaratan yang harus dipenuhi oleh solusi anisotropik tersebut. Salah satunya adalah solusi anisotropik baru harus memenuhi kondisi energi yang diajukan untuk relativitas umum. Pengertian kondisi energi dalam konteks teori ruang-waktu (termasuk teori relativitas umum), adalah suatu hubungan yang mengharuskan tensor energi-tekanan dari suatu materi memenuhi gagasan bahwa energi harus bernilai positif (Curiel, 2014). Berdasarkan Kontou (2020) kondisi energi sangat diperlukan dalam karakterisasi suatu solusi bintang, karena dalam persamaan medan Einstein tidak melibatkan sifat dari materi. Dalam persamaan medan Einstein hanya melibatan tensor tegangan, disini kondisi energi memungkinkan analisis terhadap perilaku dari sistem gravitasi tanpa perlu detail dari perilaku materi. Kondisi energi juga digunakan untuk memperoleh fitur umum dari berbagai jenis materi, sehingga didapat gagasan untuk "materi normal" yang valid.

Ovalle (2015) mengajukan empat kondisi energi yang harus dipenuhi oleh suatu solusi anisotropik, yaitu:

a) Kondisi Energi Null (*Null Energy Condition*), $T_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu} \geq 0$ dimana vektor null (*light-like*) K^{μ} dapat dituliskan sebagai $K^{\mu} = e^{-\nu/2}\delta_0^{\mu} + e^{-\lambda/2}\delta_1^{\mu}$, menghasilkan $T_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu} = e^{\nu}\tilde{\rho}K^0K^0 + e^{\lambda}\tilde{p}_rK^1K^1 = \tilde{\rho} + \tilde{p}_r \geq 0$.

b) Kondisi Energi Lemah (*Weak Energy Condition*), $T_{\mu\nu}K^{\mu}K^{\nu} \geq 0$ untuk setiap vektor bak-waktu (*time-like*), menghasilkan $\tilde{\rho} \geq 0$, $\tilde{\rho} + \tilde{p}_r \geq 0$ dan $\tilde{\rho} + \tilde{p}_t \geq 0$.

c) Kondisi Energi Dominan (*Dominant Energy Condition*), $T^{\mu}{}_{\nu}X^{\nu} = -Y^{\mu}$, untuk setiap vektor bak-waktu (*time-like*) menghasilkan $\tilde{\rho} \geq \tilde{p}_r$ dan $\tilde{\rho} \geq \tilde{p}_t$.

d) Kondisi Energi Kuat (*Strong Energy Condition*), $\left(T_{\mu\nu}\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)X^{\mu}X^{\nu} \geq 0$, untuk setiap vektor bak-waktu (*time-like*) mengarah ke $\tilde{\rho} + \tilde{p}_r + 2\tilde{p}_t \geq 0$.

Dimana vektor null (*light-like*) dalam kondisi energi NEC adalah lintasan cahaya dalam vakum selalu berada pada daerah permukaan kerucut cahaya ($ds = 0$). Kemudian, semua objek lain yang kelajuannya lebih rendah dari kecepatan cahaya (c) selalu berada di dalam kerucut cahaya ($ds > 0$) yang mana disebut daerah bak-waktu (*time-like*) (Gautama, 2016).

Interpretasi dari bentuk kondisi energi null (NEC) adalah untuk pengamat yang ada di bagian geodesik null. Dimana pengamat bergerak dalam ruang dengan kecepatan cahaya, sehingga lintasan pengamat berada dalam ruang-waktu geodesik null (*time-like geodesic*). Dalam NEC, ukuran alami dari densitas dan tekanan dari segala arah ruang-waktu dapat bernilai negatif (sebagaimana ditentukan oleh pengamat yang melintasi bagian geodesik null) sehingga salah satu nilai dari tekanan atau nilai dari densitas harus lebih besar agar NEC bernilai positif (Curiel, 2014).

Kondisi energi lemah (WEC) mensyaratkan bahwa nilai dari densitas yang diukur oleh pengamat manapun pada kurva bak-waktu (*time-like*) harus bernilai tidak negatif. Kondisi energi dominan (DEC) mensyaratkan bahwa fluks momentum energi yang diukur oleh pengamat bersifat sama yang diukur oleh pengamat manapun pada kurva bak-waktu (*time-like*). Kondisi energi kuat (SEC) mensyaratkan bahwa energi densitas efektif secara negatif tidak bisa didominasi oleh jumlah tekanan (fluks momentum) yang diukur oleh pengamat manapun pada kurva bak-waktu (*time-like*) (Curiel, 2014).

Selain itu Estrada dan Ortiz (2018) juga mengajukan dua syarat yang harus dipenuhi oleh solusi anisotropik. Syarat pertama adalah nilai dari densitas efektif dan nilai dari tekanan radial efektif harus bernilai positif ketika berada di bagian dalam bintang. Syarat kedua adalah nilai dari tekanan radial efektif harus menghilang $(\tilde{p}_r = 0)$ ketika berada di bagian permukaan bintang $(r = R)$, akan tetapi untuk nilai dari tekanan tangensial efektif tidak boleh menghilang $(\tilde{p}_t \neq 0)$ ketika berada di bagian permukaan bintang $(r = R)$. Rago (1991) mensyaratkan faktor anisotropik $(\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r)$ bernilai positif, yaitu ketika tekanan tangensial lebih besar dari tekanan radial.

3.2 Persamaan Einstein untuk Sumber Ganda

Menggunakan persamaan medan Einstein dalam bentuk persamaan tensor campuran diberikan oleh (Anugraha, 2018)

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R = -\kappa^2 T^{\mu(\mathrm{tot})}_{\nu}, \tag{3.7}$$

δ^{μ}_{ν} adalah bentuk delta kronecker dimana $\delta^{\mu}_{\nu} = 1$ jika $\mu = \nu$ dan bernilai 0 jika $\mu \neq \nu$. Kemudian untuk tensor energi-momentum $T^{\mu(\mathrm{tot})}_{\nu}$ pada persamaan (3.7) didefinisikan oleh (Ovalle, 2017)

$$T^{\mu(\mathrm{tot})}_{\nu} = T^{\mu(\mathrm{m})}_{\nu} + \alpha\theta^{\mu}_{\nu}, \tag{3.8}$$

dimana $T^{\mu(\mathrm{m})}_{\nu}$ adalah tensor energi-momentum untuk fluida sempurna, dalam bentuk persamaan tensor campuran diberikan oleh

$$T^{\mu(\mathrm{m})}_{\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu}_{\nu}, \tag{3.9}$$

dimana ρ adalah rapat massa atau densitas dan p adalah tekanan isotropik, u_{μ} adalah 4-kelajuan fluida. θ^{μ}_{ν} pada persamaan (3.8) mendeskripsikan sumber tambahan yang mengalami *coupling* terhadap sumber gravitasi yang lebih proporsional, yaitu $\alpha.\ \theta_\nu^\mu$ adalah sumber yang menyebabkan fluida sempurna isotropik menjadi anisotropik. Sumber tambahan ini bisa berisi medan skalar, medan vektor dan medan tensor, dan secara umum akan menghasilkan anisotropi dalam sistem gravitasi diri (*self-gravitating*).

Metrik simetri bola pada persamaan (2.17) harus memenuhi persamaan medan Einstein pada persamaan (3.7). Dengan memanfaatkan persamaan (2.20), (2.21) dan (2.22), maka persamaan medan Einstein untuk sumber ganda menjadi

$$\kappa^2 T_0^{0(\mathrm{tot})} = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2},$$

$$\kappa^2 T_1^{1(\mathrm{tot})} = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2},$$

$$\kappa^2 T_2^{2(\mathrm{tot})} = k^2 T_3^{3(\mathrm{tot})} = -\frac{1}{4} e^{-\lambda}\left(2\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r}\right).$$

Dengan menggunakan bentuk sederhana bagi tensor energi-momentum pada fluida sempurna yaitu (Purwanto, 2009)

$$T_\nu^{\mu(m)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Maka penjabaran dari persamaan (3.8) untuk komponen (00), (11), (22) adalah

$$T_0^{0(\mathrm{tot})} = \rho + \alpha\theta_0^0,$$

$$T_1^{1(\mathrm{tot})} = -p + \alpha\theta_1^1,$$

$$T_2^{2(\mathrm{tot})} = -p + \alpha\theta_2^2,$$

Sehingga penyelesaian persamaan medan Einstein untuk sumber ganda dengan memanfaatkan tensor energi-momentum untuk fluida sempurna adalah

$$-\kappa^2(\rho + \alpha\theta_0^0) = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right), \tag{3.10}$$

$$-\kappa^2(-p + \alpha\theta_1^1) = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right), \tag{3.11}$$

$$-\kappa^2(-p + \alpha\theta_2^2) = \frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r}\right). \tag{3.12}$$

Tiga persamaan diatas juga harus memenuhi persamaan konservasi (kelestarian energi), yaitu persamaan konservasi (2.23), yang menghasilkan (lampiran C)

$$-p' + \alpha(\theta_1^1)' - \frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2 - \theta_1^1) - \frac{\nu'}{2}(\rho + p) - \frac{\nu'}{2}\alpha(\theta_0^0 - \theta_1^1) = 0. \tag{3.13}$$

dimana tanda aksen ($'$) adalah turunan terhadap r. Dapat dicermati bahwa persamaan (3.13) akan kembali pada persamaan konservasi fluida sempurna (2.24) untuk $\alpha \to 0$.

Di dalam sistem (3.10) – (3.12) terdapat tujuh fungsi yang belum diketahui, yaitu dua variabel fisik, densitas $\rho(r)$, tekanan $p(r)$; dua fungsi geometrik, fungsi metrik temporal $\nu(r)$ dan fungsi metrik radial $\lambda(r)$; dan tiga komponen independen dari θ_ν^μ. Oleh karena itu persamaan (3.10) – (3.12) ini membentuk sistem yang tidak terbatas. Dalam kasus tertentu dimana θ_ν^μ hanya bergantung pada densitas dan tekanan, maka hanya perlu menentukan persamaan tambahan untuk menyelesaikan persamaan (3.10)– (3.12), seperti yang telah dilakukan untuk fluida sempurna dalam relativitas umum standar. Namun, pada tahap ini harus ditekankan bahwa tidak cukup mengetahui geometri ruang-waktu untuk menentukan sumber gravitasi $\{\rho, p, \theta_\nu^\mu\}$ secara umum (Ovalle, 2018).

Maka dari persamaan (3.10) – (3.12), dapat diidentifikasikan densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif secara berurutan, yaitu

$$\tilde{\rho} = \rho + \alpha\theta_0^0, \tag{3.14}$$

$$\tilde{p}_r = p - \alpha\theta_1^1, \tag{3.15}$$

$$\tilde{p}_t = p - \alpha\theta_2^2. \tag{3.16}$$

Definisi tersebut secara jelas mengilustrasikan bahwa sumber gravitasi θ_ν^μ memiliki faktor anisotropik

$$\Delta \equiv \tilde{p}_r - \tilde{p}_t = \alpha(\theta_1^1 - \theta_2^2), \tag{3.17}$$

disini dapat diperhatikan bahwa sumber gravitasi tambahan θ_ν^μ membangkitkan sifat anisotropik.

3.3 Metode *Gravitational Decoupling* oleh *Minimal Geometric Deformation*

Transformasi MGD (*minimal geometric deformation*) perlu digunakan untuk menyelesaikan persamaan (3.10) – (3.13). Pada pendekatan ini, sistem yang ada akan ditransformasikan sedemikian rupa sehingga persamaan medan yang terkait dengan sumber gravitasi θ_ν^μ akan memenuhi "Kuasi-Einstein efektif". Transformasi MGD dimulai dengan menghitung solusi untuk persamaan (3.10) – (3.13) dengan nilai $\alpha = 0$ yaitu, sebuah solusi SSSPF dengan variabel $\{\xi, \mu, \rho, p\}$, dimana ξ dan μ adalah fungsi metrik yang sama atau bersesuaian. Maka metrik simetri bola statis dari persamaan (2.17) menjadi (Ovalle, 2017)

$$ds^2 = e^{\xi(r)}dt^2 - \frac{dr^2}{\mu(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{3.18}$$

dimana

$$\mu(r) \equiv 1 - \frac{\kappa^2}{r}\int_0^r x^2\rho\, dx = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \tag{3.19}$$

$\mu(r)$adalah persamaan umum dari teori relativitas yang memuat fungsi *m*. Kemudian parameter α kembali digunakan untuk menghitung efek dari sumber gravitasi θ^{μ}_{ν} pada solusi SSSPF dengan variabel $\{\xi, \mu, \rho, p\}$. Efek ini dapat dikodekan melalui deformasi geometrik dengan variabel geometri fluida sempurnanya adalah $\{\xi, \mu\}$. Sehingga dalam persamaan (3.18) variabel $\{\xi, \mu\}$ dapat dijabarkan sebagai berikut (Ovalle, 2017)

$$\xi \longmapsto \nu = \xi + \alpha g, \tag{3.20}$$

$$\mu \longmapsto e^{-\lambda} = \mu + \alpha f, \tag{3.21}$$

dimana g dan f adalah deformasi yang dialami oleh komponen metrik temporal dan radial, secara berurutan. Diantara seluruh kemungkinan deformasi untuk persamaan (3.20) dan persamaan (3.21) yang disebut sebagai deformasi geometrik minimal (MGD) adalah sebagai berikut (Ovalle, 2017)

$$g \longmapsto 0, \tag{3.22}$$

$$f \longmapsto f^{*}. \tag{3.23}$$

Pada kasus ini, metrik dalam persamaan (3.18) adalah hasil deformasi minimal dari θ^{μ}_{ν} dan komponen metrik radialnya menjadi (Ovalle, 2017)

$$\mu(r) \longmapsto e^{-\lambda(r)} = \mu(r) + \alpha f^{*}(r), \tag{3.24}$$

dimana $f^{*}(r)$ adalah fungsi MGD yang akan ditentukan, $\mu(r)$ adalah komponen g^{rr} dari metrik SSSPF, sedangkan komponen metrik temporal e^{ν} tetap tidak berubah. Maka persamaan (3.24) dimasukkan kembali ke dalam solusi persamaan Einstein pada persamaan (3.10) – (3.12). Dimana sistem yang akan dihasilkan terpisah menjadi dua set sistem yaitu (Ovalle, 2018):

(i) Pada bagian pertama, diberikan persamaan Einstein untuk fluida sempurna dengan nilai $\alpha = 0$, yang mana digunakan metrik pada persamaan (3.18) dengan $\xi(r) = \nu(r)$. Maka solusinya menjadi

$$-\kappa^2\rho = -\frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r}, \tag{3.25}$$

$$\kappa^2 p = -\frac{1}{r^2} + \mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right), \tag{3.26}$$

$$\kappa^2 p = \frac{\mu}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + \frac{\mu'}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right). \tag{3.27}$$

Bersama dengan persamaan konservasi ($\nabla_\nu T^{(m)\mu\nu} = 0$) dengan nilai $\alpha = 0$, maka kombinasi linier dari persamaan (3.25) – (3.27) menghasilkan (lampiran D)

$$p' + \frac{\nu'}{2}(\rho + p) = 0. \tag{3.28}$$

Dari hasil kombinasi linier pada persamaan (3.28) dapat dibuktikan bahwa ketika nilai $\alpha = 0$, maka sifatnya akan kembali pada pemodelan fluida sempurna.

(ii) Pada bagian kedua memuat sumber gravitasi θ^μ_ν, sehingga persamaannya menjadi:

$$-\kappa^2\theta^0_0 = \frac{f^*}{r^2} + \frac{f^{*\prime}}{r}, \tag{3.29}$$

$$-\kappa^2\theta^1_1 = f^*\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right), \tag{3.30}$$

$$-\kappa^2\theta^2_2 = \frac{f^*}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + \frac{f^{*\prime}}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right). \tag{3.31}$$

Bersama dengan persamaan konservasi yaitu $\nabla_\nu \theta^{\mu\nu} = 0$, maka kombinasi linier dari persamaan (3.29) – (3.31) menghasilkan (lampiran E)

$$(\theta^1_1)' - \frac{2}{r}(\theta^2_2 - \theta^1_1) - \frac{\nu'}{2}(\theta^0_0 - \theta^1_1) = 0. \tag{3.32}$$

Dari persamaan (3.28) dan persamaan (3.32) berarti bahwa disini tidak ada perpindahan energi-momentum diantara fluida sempurna dan sumber gravitasi θ_ν^μ, sehingga interaksi yang terjadi pada kasus ini murni gravitasi.

Persamaan (3.29) – (3.31) terlihat sangat mirip dengan persamaan medan Einstein SSSPF untuk fluida anisotropik dengan tensor energi momentum θ_ν^μ, yaitu $\{\rho = \theta_0^0\ ;\ p_r = -\theta_1^1\ ;\ p_t = -\theta_2^2\}$ dan ini merepresentasikan persamaan konservasi. Akan tetapi, hal ini tidak dapat diidentifikasikan secara resmi sebagai persamaan medan Einstein SSSPF dengan adanya komponen metrik radian f^*, sebab sisi sebelah kanan dalam persamaan (3.29) dan (3.30) tidak memiliki ekspresi standar untuk komponen tensor G_0^0 dan G_1^1 (tidak ada $-1/r^2$ di kedua bagian sisi kanan pada persamaan (3.29) dan (3.30)). Meskipun demikian, sistem pada persamaan (3.29) – (3.32) bisa diidentifikasikan secara resmi sebagai persamaan medan Einstein untuk sistem anisotropik dengan tensor energi momentum $\theta_\nu^{*\mu}$ yang mana $\tilde{\rho}$ sebagai densitas energi efektif, $\tilde{p}_r$ sebagai tekanan radial efektif dan $\tilde{p}_t$ sebagai tekanan tangensial efektif, diberikan oleh (Ovalle, 2018)

$$\tilde{\rho} = \theta_0^{*0} = \theta_0^0 + \frac{1}{\kappa^2 r^2}, \tag{3.33}$$

$$\tilde{p}_r = \theta_1^{*1} = \theta_1^1 + \frac{1}{\kappa^2 r^2}, \tag{3.34}$$

$$\tilde{p}_t = \theta_2^{*2} = \theta_2^2 = \theta_3^{*3} = \theta_3^3, \tag{3.35}$$

yang bisa dituliskan lebih jelas dalam persamaan berikut

$$\kappa^2 \theta_\nu^{*\mu} = \kappa^2 \theta_\nu^\mu + \frac{1}{r^2}\left(\delta_\nu^0 \delta_0^\mu + \delta_\nu^1 \delta_1^\mu\right), \tag{3.36}$$

dengan mengikuti persamaan konservasi pada persamaan (3.32) maka didapatkan

$$(\theta_1^{*1})' - \frac{2}{r}(\theta_2^{*2} - \theta_1^1) - \frac{\nu'}{2}(\theta_0^{*0} - \theta_1^1) = 0 \tag{3.37}$$

dan metriknya adalah

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - \frac{dr^2}{f^*(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{3.38}$$

dan oleh karena itu, interpretasi dari persamaan (3.29) – (3.32) sebagai persamaan Einstein dengan simetri bola standar untuk sumber gravitasi $\theta_\nu^{*\mu}$ dalam persamaan (3.33) – (3.35) telah terpenuhi (Ovalle, 2018).

Semenjak persamaan (3.29) dan (3.30) tidak memuat komponen tensor Einstein standar, harus dikatakan pula bahwa persamaan konservasi (3.32) untuk sumber gravitasi θ_ν^μ tidak lagi sebuah kombinasi linier dari sistem (3.29) – (3.31). akan tetapi, persamaan (3.32) tetaplah sebuah kombinasi linier dari sistem (3.29) – (3.31). sebagai konsekuensinya, dibawah metode MGD, memulai dengan sistem (3.10) – (3.12) dan mengakhiri dengan kumpulan persamaan untuk fluida sempurna $\{\nu, \mu, \rho, p\}$, ditambahkan dengan empat fungsi yang belum diketahui yaitu $\{f^*, \theta_0^0, \theta_1^1, \theta_2^2\}$ yang berkaitan dengan tiga persamaan (3.29) – (3.31) [dalam hal ini dianggap telah menemukan solusi fluida sempurna, yaitu ν], atau sistem anisotropik ekuivalen dari persamaan (3.33) – (3.35). Bagaimanapun juga, sistem (3.10) – (3.12) telah berhasil di*coupling*kan.

Metode MGD-*decoupling* dapat dirangkum dalam cara yang lebih formal yaitu sebagai berikut. Berdasarkan sumber gravitasi bola simetris statis $T_{\mu\nu}$ memuat satu fluida sempurna isotropik $\hat{T}_{\mu\nu}$ dan sumber tambahan gravitasi $T_{\mu\nu}^{(i)}$ berjumlah *n* yaitu (Ovalle, 2018)

$$T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_{\mu\nu}^{(i)}, \tag{3.39}$$

kemudian metrik diagonalnya adalah $g_{\mu\nu}$, dimana solusi persamaan Einstein $G_{\mu\nu} = -\kappa^2 T_{\mu\nu}$ adalah

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(i)} \text{ untuk } \mu = \nu \neq 1, \tag{3.40}$$

$$g^{11} = \hat{g}^{11} + \alpha_1 g^{(1)11} + \cdots + \alpha_n g^{(n)11}. \tag{3.41}$$

Metrik $g_{\mu\nu}$ ini ditemukan oleh solusi pertama persamaan Einstein untuk sumber $\hat{T}_{\mu\nu}$ yaitu

$$\hat{G}_{\mu\nu} = -\kappa^2 \hat{T}_{\mu\nu}, \nabla_\nu \hat{T}^{\mu\nu} = 0, \tag{3.42}$$

dan kemudian dengan menyelesaikan n persamaan quasi-Einstein yang tersisa untuk sumber gravitasi $T_{\mu\nu}^{(i)}$ yaitu

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(1)} = -\kappa^2 T_{\mu\nu}^{(1)}, \nabla_\nu T^{(1)\mu\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^{(n)} = -\kappa^2 T_{\mu\nu}^{(n)}, \nabla_\nu T^{(n)\mu\nu} = 0, \tag{3.43}$$

dimana divergensi-bebas tensor quasi-Einstein $\tilde{G}_{\mu\nu}$ berhubungan dengan tensor standar $G_{\mu\nu}$, yang ditunjukkan dalam

$$\tilde{G}_\nu^\mu = G_\nu^\mu + \Gamma_\nu^\mu(g), \tag{3.44}$$

dengan $\Gamma_\nu^\mu(g)$ sebuah tensor yang tergantung secara eksklusif pada $g_{\mu\nu}$ untuk memastikan kondisi divergensi-bebasnya. Dalam representasi simetri bola dituliskan sebagai berikut

$$\Gamma_\nu^\mu = \frac{1}{r^2}\left(\delta_\nu^0 \delta_0^\mu + \delta_\nu^1 \delta_1^\mu\right). \tag{3.45}$$

3.4 Kondisi Pencocokan untuk Distribusi Bintang

Aspek penting untuk mempelajari distribusi bintang adalah terkait dengan kondisi pencocokan geometri ruang-waktu di setiap bagian bintang tersebut. Geometri ruang-waktu di bagian permukaan bintang adalah $r = R$, diantara bagian dalam bintang adalah $r < R$ dan di bagian luar bintang adalah $r > R$. Dalam kasus yang dikaji pada penelitian ini, berikut adalah geometri bintang bagian dalam yang diberikan oleh metrik MGD (Ovalle, 2018)

$$ds^2 = e^{\nu^-(r)}dt^2 - \left(1 - \frac{2\tilde{m}(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2), \qquad (3.46)$$

dimana fungsi massa bagian dalam $\tilde{m}(r)$ diberikan oleh

$$\tilde{m}(r) = m(r) - \frac{r}{2}\alpha f^*(r). \qquad (3.47)$$

Dengan $m(r)$ diberikan oleh persamaan umum dari teori relativitas di persamaan (3.19) dan $f^*(r)$ adalah fungsi MGD yang belum ditentukan dalam persamaan (3.24).

Metrik bagian dalam di persamaan (3.46) harus dilakukan kondisi pencocokan dengan geometri bagian luar yang mana di bagian luar ini tidak ada kehadiran fluida isotropik, yaitu $p^+ = \rho^+ = 0$. Di bagian luar $(r > R)$, bagaimanapun, tidak lagi bisa dinyatakan sebagai bagian vakum, karena secara umum telah ada penambahan medan sektor baru yang dideskripsikan oleh $\theta_{\mu\nu}$. Persamaan umum untuk metrik bagian luar dapat dituliskan sebagai berikut (Ovalle, 2018)

$$ds^2 = e^{\nu^+(r)}dt^2 - e^{\lambda^+(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2). \qquad (3.48)$$

Dimana bentuk eksplisit dari fungsi $\nu^+(r)$ dan $\lambda^+(r)$ didapatkan dengan menyelesaikan persamaan Einstein bagian luar 4-dimensi yang efektif, yaitu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^{\alpha}_{\alpha} g_{\mu\nu} = \alpha\theta_{\mu\nu}. \tag{3.49}$$

MGD akan mereduksi persamaan Einstein untuk bagian luar (3.49) menuju sistem pada persamaan (3.29) – (3.31), dimana fungsi geometrik $\nu(r)$ diberikan oleh solusi Schwarzschild (lampiran F) sebagai ganti dari solusi fluida sempurna.

Kemudian untuk bentuk fundamental pertama pada permukaan bintang Σ didefinisikan oleh $r = R$, yaitu (Ovalle, 2018)

$$[ds^2]_{\Sigma} = 0, \tag{3.50}$$

dimana $[F]_{\Sigma} \equiv F(r \to R^+) - F(r \to R^-) \equiv F_R^+ - F_R^-$, untuk setiap fungsi $F = F(r)$, yang menghasilkan

$$\nu^-(R) = \nu^+(R) \tag{3.51}$$

dan

$$1 - \frac{2M_0}{R} + \alpha f_R^* = e^{-\lambda^+(R)}, \tag{3.52}$$

dimana $M_0 = m(R)$ dan f_R^* adalah bentuk fungsi deformasi geometrik minimal (MGD) pada bagian permukaan bintang.

Demikian pula, kelanjutan dari bentuk fundamental kedua, yaitu (Ovalle, 2018)

$$[G_{\mu\nu} r^{\nu}]_{\Sigma} = 0, \tag{3.53}$$

dimana r^{ν} adalah satuan vektor radial. Menggunakan persamaan (3.53) dan persamaan umum dari medan Einstein (3.7), maka akan mendapatkan

$$\left[T_{\mu\nu}^{(tot)} r^{\nu}\right]_{\Sigma} = 0,$$

$$[p - \alpha\theta_1^1]_{\Sigma} = 0. \tag{3.54}$$

Persamaan (3.54) ini membawa bentuk akhir, yaitu

$$p_R - \alpha(\theta_1^1)_R^- = -\alpha(\theta_1^1)_R^+, \tag{3.55}$$

dimana $p_R \equiv p^-(R)$. Kondisi dalam persamaan (3.55) adalah pernyataan umum untuk bentuk fundamental kedua yang terkait dengan persamaan Einstein yang diberikan oleh persamaan (3.7).

Dengan menggunakan persamaan (3.30) untuk geometri bagian dalam pada kondisi (3.55), bentuk fundamental kedua dapat dituliskan sebagai berikut (Ovalle, 2018)

$$p_R + \alpha \frac{f_R^*}{\kappa^2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\nu_R'}{R}\right) = -\alpha(\theta_1^1)_R^+, \tag{3.56}$$

dimana $\nu_R' \equiv \partial_r \nu^-|_{r=R}$. Tambahan, dengan menggunakan persamaan (3.30) untuk geometri bagian luar pada persamaan (3.56), akan menghasilkan

$$p_R + \alpha \frac{f_R^*}{\kappa^2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\nu_R'}{R}\right) = \alpha \frac{g_R^*}{\kappa^2}\left[\frac{1}{R^2} + \frac{2\mathrm{M}}{R^3}\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)}\right], \tag{3.57}$$

dimana g_R^* adalah bentuk deformasi geometrik minimal pada bagian luar, dimana untuk solusi Schwarzschild bagian luar yang disebabkan oleh sumber $\theta_{\mu\nu}$, adalah

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \alpha g^*(r)\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{3.58}$$

Persamaan (3.51), (3.52) dan (3.57) adalah kondisi yang diperlukan untuk melakukan pencocokan metrik MGD bagian dalam di persamaan (3.46), sedangkan untuk simetri bola bagian luar yang "vakum" dijelaskan oleh metrik Schwarzschild yang terdeformasi di persamaan (3.58). Perlu diperhatikan bahwa, bagian luar dapat diisi oleh medan yang terdapat di dalam sumber $\theta_{\mu\nu}$.

Kondisi kesebandingan (3.57) memberikan sebuah hasil penting, yaitu apabila geometri bagian luar diberikan oleh metrik Schwarzschild eksak, salah satunya harus memiliki $g^*(r) = 0$ di persamaan (3.58), yang kemudian mengarah ke kondisi berikut ini (Ovalle, 2018)

$$\tilde{p}_R \equiv p_R + \alpha \frac{f_R^*}{\kappa^2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\nu_R'}{R}\right) = 0. \tag{3.59}$$

Penting untuk diperhatikan bahwa bintang akan berada pada titik setimbang dalam kondisi yang benar-benar vakum (kondisi Schwarzschild) hanya jika tekanan efektif (secara umum tekanan anisotropik radial) di bagian permukaan menghilang. Secara khusus, jika deformasi geometris bagian dalam $f^*(r < R)$ bernilai positif dan melemahkan medan gravitasi [lihat di persamaan (3.47)], maka bagian luar Schwarzschild vakum hanya dapat kompetibel dengan bagian dalam yang mana nilai $\theta_{\mu\nu}$ tidak menghilang. Hal tersebut akan terpenuhi jika materi bintang isotropik memiliki nilai $p_R < R$ di bagian permukaan bintang. Keadaan ini dapat diartikan sebagai materi biasa dengan bagian permukaan yang keras dan padat. Sebaliknya, kondisi $p_R = 0$ dapat diperoleh dengan memberlakukan persyaratan sisi kanan dari persamaan (3.59) sebanding dengan p_R, yaitu, $\alpha(\theta_1^1)_R^- \sim p_R$ dalam persamaan (3.55), yang mana menyebabkan fungsi deformasi bagian dalam menghilang $f_R^* = 0$.

BAB IV
SOLUSI INTERIOR : DARI FLUIDA SEMPURNA MENUJU FLUIDA ANISOTROPIK

4.1 Solusi Interior Isotropik : Solusi Tolman IV

Pada bagian ini akan dicari penyelesaian persamaan medan Einstein (3.10) – (3.12) untuk bagian dalam dari sistem anisotropik gravitasi-diri (*self-gravitating*) menggunakan metode MGD-*decoupling*. Variabel fisik $\{\tilde{\rho}, \tilde{p}_{r,} \tilde{p}_t\}$ didefinisikan oleh persamaan (3.14) – (3.16) dan dua komponen radial $\{\nu, \lambda\}$ di persamaan (2.17) akan dijabarkan secara lebih terperinci. Untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein pada bintang bagian dalam, langkah pertama adalah mengabaikan fungsi α untuk menemukan solusi persamaan Einstein untuk fluida sempurna di persamaan (3.25) – (3.27). Secara khusus, pada penelitian ini akan digunakan ruang-waktu Tolman IV yang terkenal untuk fluida sempurna. Berikut ini adalah metrik dari ruang-waktu Tolman IV

$$ds^2 = B^2\left(1+\frac{r^2}{A^2}\right)dt^2 - \frac{1+\frac{2r^2}{A^2}}{\left(1-\frac{r^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)}dr^2 - r^2 d\Omega^2. \qquad (4.1)$$

Dari metrik (4.1) tersebut akan kita dapatkan penjabaran komponen radial $\{\nu, \lambda\}$, yaitu

$$e^{\nu(r)} = B^2\left(1+\frac{r^2}{A^2}\right), \qquad (4.2)$$

$$e^{-\lambda(r)} = \mu(r) = \frac{\left(1-\frac{r^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)}{1+\frac{2r^2}{A^2}}. \qquad (4.3)$$

Kemudian untuk variabel fisik $\{\rho, p\}$ didapatkan dengan mensubtitusikan persamaan (4.2) dan persamaan (4.3) ke dalam persamaan (3.25) dan persamaan

(3.26). Sehingga akan didapatkan densitas dari ruang-waktu Tolman IV dan tekanan dari ruang-waktu Tolman IV seperti yang akan dijabarkan berikut ini

$$\frac{d}{dr}e^{\nu(r)} = \frac{d}{dr}B^2\left(1+\frac{r^2}{A^2}\right)$$

$$\nu' e^{\nu(r)} = B^2\frac{2r}{A^2}$$

$$\nu'(r) = \frac{2r}{A^2+r^2}$$

$$\frac{d}{dr}\mu(r) = \frac{d}{dr}\frac{\left(1-\frac{r^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)}{1+\frac{2r^2}{A^2}}$$

$$\mu'(r) = \frac{-2A^2C^2r-2A^4r-4A^2r^3-4r^5}{C^2(A^2+2r^2)^2}.$$

Densitas dari ruang-waktu Tolman IV yaitu

$$\kappa^2\rho = \frac{1}{r^2}-\frac{\mu}{r^2}-\frac{\mu'}{r}$$

$$\kappa^2\rho = \frac{1}{r^2}-\frac{\left(1-\frac{r^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)}{r^2\left(1+\frac{2r^2}{A^2}\right)}+\frac{2A^2C^2r+2A^4r+4A^2r^3+4r^5}{rC^2(A^2+2r^2)^2}$$

$$\rho(r) = \frac{3A^4+A^2(3C^2+7r^2)+2r^2(C^2+3r^2)}{\kappa^2C^2(A^2+2r^2)^2}. \qquad (4.4)$$

Tekanan dari ruang-waktu Tolman IV yaitu

$$\kappa^2 p = -\frac{1}{r^2}+\mu\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)$$

$$\kappa^2 p = -\frac{1}{r^2}+\frac{\left(1-\frac{r^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)}{r^2\left(1+\frac{2r^2}{A^2}\right)}+\frac{2r\left(1-\frac{r^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{A^2}\right)}{r(A^2+r^2)\left(1+\frac{2r^2}{A^2}\right)}$$

$$p(r) = \frac{C^2-A^2-3r^2}{\kappa^2C^2(A^2+2r^2)}. \qquad (4.5)$$

Konstanta A, B dan C yang disebutkan pada persamaan (4.2) – (4.5) ditentukan dari kondisi pencocokan dalam persamaan (3.50) dan persamaan (3.53) antara solusi interior ruang-waktu Tolman IV dan metrik eksterior ruang-waktu Schwarschild. Kondisi pencocokan tersebut menghasilkan persamaan berikut

$$\frac{A^2}{R^2} = \frac{R - 3M_0}{M_0}, \tag{4.6}$$

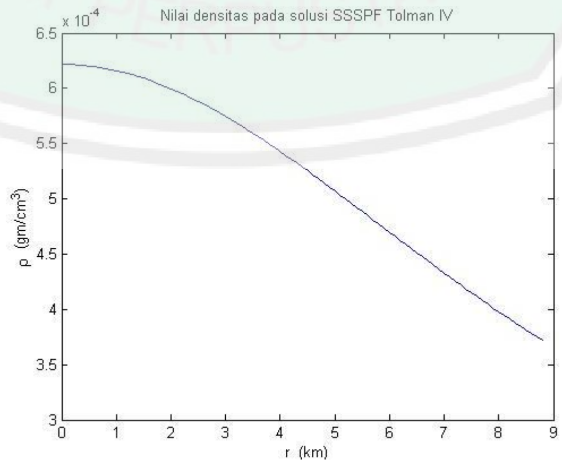
$$B^2 = 1 - \frac{3M_0}{R}, \tag{4.7}$$

$$\frac{C^2}{R^2} = \frac{R}{M_0}, \tag{4.8}$$

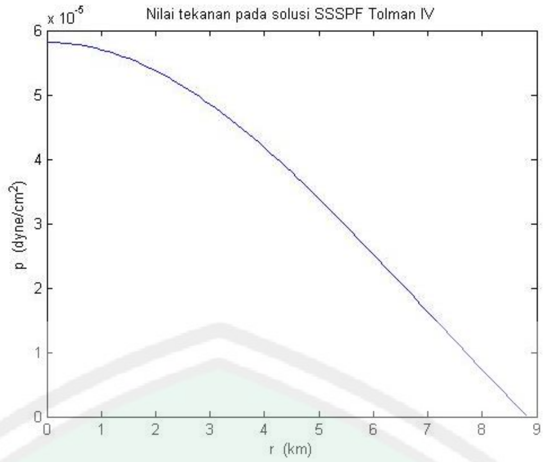
dengan nilai kekompakan $M_0/R < 4/9$ dan $M_0 = m(R)$ adalah massa total yang didefinisikan pada persamaan (3.19). Pernyataan pada persamaan (4.6) – (4.8) memastikan kontinuitas geometrik pada $r = R$ dan akan berubah sebanding dengan bertambahnya sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$.

Langkah kedua untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein pada bintang bagian dalam adalah dengan memasukkan kembali fungsi α. Komponen metrik temporal dan radial secara berturut-turut diberikan oleh persamaan (4.2) dan persamaan (3.24), dimana fungsi deformasi interior yaitu $f^*(r)$ dan sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$ dihubungkan melalui persamaan (3.29) – (3.31). Sehingga, harus ditentukan informasi tambahan agar bisa mendapatkan satu set sistem persamaan tertutup dari persamaan (3.29) – (3.31). Ada beberapa alternatif untuk mendapatkan sistem persamaan tertutup, salah satunya adalah dengan menerapkan persamaan kedaan untuk sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$ atau memberikan batasan fisik pada fungsi $f^*(r)$. Dimana ketika memberikan batasan fisik tetap harus berhati-hati dalam menjaga akseptabilitas fisik dari solusi yang dihasilkan, yang mana untuk menjaga akseptabilitas fisik bukan masalah yang sederhana. Pada penelitian ini diajukan mimik konstrain (alur batas) untuk mendapatkan sistem persamaan yang tertutup. Dimana dari mimik konstrain tersebut akan didapatkan persamaan keadaan untuk sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$ yang bersesuaian dengan tekanan isotropik Tolman IV dan akan didapatkan batasan fisik pada fungsi $f^*(r)$.

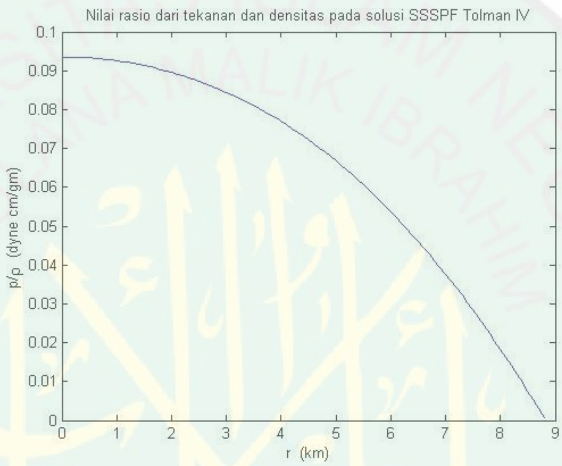
Kemudian terkait kondisi dari akseptabilitas fisik untuk solusi interior isotropik dari ruang-waktu Tolman IV dapat diidentifikasi melalui parameter fisiknya, yaitu melalui tekanan (p), densitas (ρ) dan rasio dari tenakan dan densitas (p/ρ). Pada penelitian ini digunakan definisi massa M dan jari-jari R dari data pengamatan bintang neutron *LMC X-4*. Nilai parameter fisik dari bintang neutron *LMC X-4* yaitu nilai massa M $= 1.29\ M_{\odot}$ (dimana $M_{\odot}$ adalah massa Matahari) dan perkiraan radius $R = 8.831$ km (Gangopadhyay, 2013). Menggunakan nilai-nilai tersebut, maka tekanan (p), densitas (ρ) dan rasio dari tenakan dan densitas (p/ρ) dapat disimulasikan dalam bentuk kurva dua dimensi dengan menggunakan program Matlab. Hasil pemodelan kurva menggunakan program Matlab ditampilkan pada gambar 4.1 sampai gambar 4.3.



Gambar 4.1 Nilai Densitas pada Solusi SSSPF Tolman IV



Gambar 4.2 Nilai Tekanan pada Solusi SSSPF Tolman IV



Gambar 4.3 Nilai Rasio dari Tekanan dan Densitas pada Solusi SSSPF Tolman IV

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa nilai dari densitas isotropik berkurang secara monotonik pada batas $0 < r \leq R$. Gambar 4.2 menunjukkan bahwa solusi isotropik SSSPF Tolman IV adalah solusi yang terisolasi karena nilai tekanan isotropik menghilang $(p = 0)$ saat mencapai batas permukaan bintang $(r = R)$. Gambar 4.2 juga menunjukkan bahwa nilai dari densitas isotropik berkurang secara monotonik pada batas $0 < r \leq R$. Gambar 4.3 menunjukkan bahwa solusi isotropik SSSPF Tolman IV memenuhi syarat dari kecepatan suara subluminal karena nilai rasio dari tekanan dan densitas adalah kurang dari satu $(p/\rho < 1)$.

4.2 Solusi Interior Anisotropik oleh *Gravitational Decoupling*

Dari kondisi pencocokan (3.59) didapatkan kesimpulan bahwa solusi eksterior Schwarzschild akan kompatibel dengan materi bagian dalam bintang secara umum apabila memenuhi syarat $\alpha(\theta_1^1)_R^- \sim p_R$. Pilihan paling sederhana yang memenuhi persyaratan kritis tersebut adalah

$$\theta_1^1(r) = p(r), \tag{4.9}$$

yang mana apabila persamaan (4.9) disubtitusikan pada persamaan (3.26), didapat hasil sebagai berikut

$$\kappa^2\theta_1^1 = -\frac{1}{r^2} + \mu(r)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'(r)}{r}\right). \tag{4.10}$$

Dari persamaan (3.30) dapat dianalisis bahwa "mimik" konstrain dalam persamaan (4.9) setara dengan

$$\kappa^2\theta_1^1 = -f^*(r)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'(r)}{r}\right)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \mu(r)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'(r)}{r}\right) = -f^*(r)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'(r)}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r^2} = \left(f^*(r) + \mu(r)\right)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'(r)}{r}\right)$$

$$f^*(r) + \mu(r) = \frac{1}{1 + r\nu'(r)}$$

$$f^*(r) = -\mu(r) + \frac{1}{1 + r\nu'(r)}. \tag{4.11}$$

Kemudian komponen metrik radial $\{\lambda\}$ yang baru akan didapatkan dengan mensubtitusikan persamaan (4.11) ke dalam persamaan (3.24) dan digunakan pula pernyataan dalam persamaan (4.2). Berikut adalah kompoen metrik radial $\{\lambda\}$ yang akan didapatkan dari subtitusi tersebut

$$\mu(r) \longmapsto e^{-\lambda(r)} = \mu(r) + \alpha f^*(r)$$

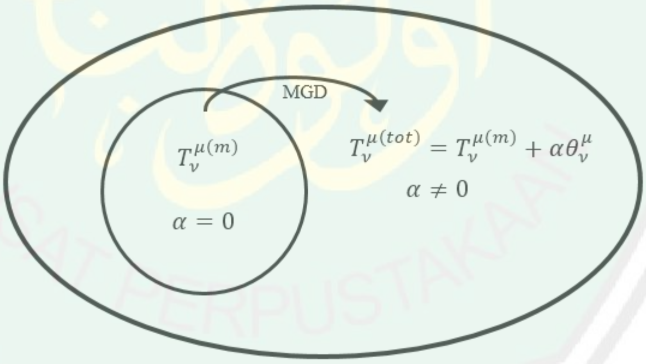
$$e^{-\lambda(r)} = \mu(r) + \alpha\left(\mu(r) + \frac{1}{1 + r\nu'(r)}\right)$$

$$e^{-\lambda(r)} = (1-\alpha)\mu(r) + \alpha\left(\frac{1}{1 + r\nu'(r)}\right)$$

$$e^{-\lambda(r)} = (1-\alpha)\mu(r) + \alpha\left(\frac{1}{1 + r\left(\frac{2r}{A^2 + r^2}\right)}\right)$$

$$e^{-\lambda(r)} = (1-\alpha)\mu(r) + \alpha\left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right). \qquad (4.12)$$

Fungsi metrik interior yang digunakan oleh persamaan (4.2) dan (4.12) mewakili solusi Tolman IV yang telah mengalami deformasi minimal oleh sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$. Kemudian apabila dalam persamaan (4.12) diberikan nilai $\alpha \rightarrow 0$ maka hasilnya akan mengarah kembali kepada solusi standar Tolman IV untuk sistem fluida sempurna. Hal ini direpresentasikan oleh gambar 4.4 berikut



Gambar 4.4 Solusi Fluida Sempurna Apapun Secara Konsisten Diperluas ke Domain Anisotropik Melalui Metode MGD-*Decoupling*

Tahap selanjutnya adalah dilakukan pencocokan metrik interior di persamaan (2.17) dengan fungsi metrik pada persamaan (4.2). Kemudian dilakukan pencocokan metrik interior di persamaan (4.12) dengan solusi Schwarzschild eksterior di persamaan (3.58) dengan nilai fungsi deformasi eksterior $g^*(r) = 0$.

Berikut adalah solusi Schwarzschild eksterior dengan nilai fungsi deformasi eksterior $g^{*}(r) = 0$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{4.13}$$

Kemudian berikut adalah metrik Tolman IV yang telah terdeformasi, dimana persamaan (4.12) disubtitusikan kedalam metrik pada persamaan (4.1) sehingga akan menghasilkan

$$ds^2 = B^2\left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)dt^2 - \left((1-\alpha)\mu(r) + \alpha\left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right)\right)^{-1} dr^2$$
$$-r^2 d\Omega^2. \tag{4.14}$$

Dari persamaan (4.14) dapat dianalisis bahwa, untuk distribusi massa M_0 dan jari-jari R tertentu, terdapat empat parameter yang belum diketahui, yaitu $\{A, B, C\}$ yang berasal dari solusi interior pada persamaan (4.2) dan persamaan (4.12), untuk parameter terakhir yang belum diketahui yaitu massa M yang berasal dari persamaan (4.13).

Pada bab 3 telah disebutkan tiga kondisi pencocokan, yaitu pada persamaan (3.51), (3.52) dan (3.55). Ketiga persamaan tersebut merupakan kondisi pencocokan di bagian permukaan bintang, dan ketiga persamaan tersebut merupakan sistem persamaan tidak tertutup. Untuk menutup sistem persamaan tersebut, perlu diajukan nilai $B = 1$ dalam persamaan (4.2), yang mana nilai tersebut bersesuaian dengan penskalaan waktu (*time-rescaling*) $t \rightarrow \tilde{t} = Bt$. Akan tetapi pada penelitian kali ini nilai dari konstanta B perlu dipertahankan untuk mendapatkan gambaran yang jelas dari efek yang ditimbulkan oleh sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$. Oleh karena itu, pada penelitian ini konstanta B tidak diajukan bernilai 1, konstanta B akan disesuaikan dengan konstanta $\{A, C, \mu\}$. Untuk itu dilakukan peninjauan terhadap kontinuitas dari bentuk fundamental pertama, kemudian dilakukan peninjauan terhadap kontinuitas dari bentuk fundamental kedua, seperti yang dijabarkan lebih jauh di bawah.

Kontinuitas dari bentuk fundamental pertama diberikan oleh persamaan (3.51) dan persamaan (3.52). Dalam menjabarkan persamaan (3.51) dan persamaan (3.52) berlaku kontinuitas geometrik $r = R$, hal ini dikarenakan tidak ada penambahan sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$. Untuk menjabarkan persamaan (3.51), diperlukan analisis terhadap solusi Schwarzschild interior yang digeneralisasikan terhadap ruang-waktu Tolman IV dan analisis terhadap solusi Schwarzschild eksterior. Metrik Schwarzschild interior diberikan oleh persamaan

$$ds^2 = e^{\nu^-(r)}dt^2 - e^{\lambda^-(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{4.15}$$

Metrik pada persamaan (4.15) kemudian digeneralisasikan terhadap ruang-waktu Tolman IV, sehingga metrik pada persamaan (4.15) akan menjadi

$$ds^2 = B^2\left(1 + \frac{r^2}{A^2}\right)dt^2 - \frac{1 + \frac{2r^2}{A^2}}{\left(1 - \frac{r^2}{C^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{A^2}\right)}dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{4.16}$$

Dari persamaan (4.15) dan persamaan (4.16) didapatkan nilai komponen radial $\{\nu\}$ yaitu

$$e^{\nu^-(R)} = B^2\left(1 + \frac{R^2}{A^2}\right). \tag{4.17}$$

Kemudian metrik Schwarzschild eksterior diberikan oleh persamaan

$$ds^2 = e^{\nu^+(r)}dt^2 - e^{\lambda^+(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{4.18}$$

Metrik di persamaan (4.16) kemudian digeneralisasikan terhadap solusi Schwarzschild yaitu

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \qquad (4.19)$$

Dari persamaan (4.18) dan persamaan (4.19) didapatkan nilai komponen radial $\{\nu\}$ yaitu

$$e^{\nu^+(R)} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right). \qquad (4.20)$$

Kemudian persamaan (4.16) dan persamaan (4.19) disubtitusikan ke dalam persamaan (3.51) sehingga akan mendapatkan persamaan berikut

$$B^2\left(1 + \frac{R^2}{A^2}\right) = \left(1 - \frac{2M}{R}\right). \qquad (4.21)$$

Untuk menjabarkan persamaan (3.52), diperlukan analisis terhadap solusi Schwarzschild eksterior dan komponen metrik radial $\{\lambda\}$ yang didefinisikan oleh metrik Tolman IV. Berikut ini adalah komponen metrik radial $\{\lambda\}$ dalam solusi Schwarzschild eskterior yang didapatkan dari analisis pada persamaan (4.18) dan persamaan (4.19)

$$e^{-\lambda^+(R)} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right). \qquad (4.22)$$

Perlu diperhatikan bahwa bagian kiri dari persamaan (3.52) memuat pernyataan dari persamaan (3.19) dan juga memuat definisi nilai $f^*(R)$ dari persamaan (4.11). Kemudian persamaan (4.22) disubtitusikan ke dalam persamaan (3.52), sehingga akan mendapatkan persamaan berikut

$$1 - \frac{2M_0}{R} + \alpha f_R^* = e^{-\lambda^+(R)},$$

$$\mu(R) + \alpha\left(-\mu(R) + \frac{1}{1 + r\nu'(R)}\right) = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)$$

$$\mu(R) - \alpha\mu(R) + \alpha\left(\frac{A^2 + R^2}{A^2 + 3R^2}\right) = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)$$

$$(1-\alpha)\mu(R)+\alpha\left(\frac{A^2+R^2}{A^2+3R^2}\right)=\left(1-\frac{2M}{R}\right). \tag{4.23}$$

Kemudian, dilakukan penjabaran terhadap kontinuitas dari bentuk fundamental kedua yang diberikan oleh persamaan (3.55). Untuk menjabarkan persamaan (3.55), diperlukan analisis terhadap variabel $(\theta_1^1)_R^+$ pada solusi Schwarzschild eksterior. Definisi dari variabel $(\theta_1^1)_R^+$ didefinisikan oleh persamaan berikut

$$(\theta_1^1)_R^+=-\frac{g_R^*}{\kappa^2}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{(\nu^+)'}{R}\right), \tag{4.24}$$

dimana nilai $(\nu^+)'$ adalah diferensial dari persamaan (4.20) yaitu

$$(\nu^+)'=\frac{2M}{R^2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}. \tag{4.25}$$

Sehingga variabel $(\theta_1^1)_R^+$ dituliskan sebagai berikut

$$(\theta_1^1)_R^+=-\frac{g_R^*}{\kappa^2}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2M}{R^3}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\right). \tag{4.26}$$

Akan tetapi perlu diperhatikan kembali bahwa kondisi kesetimbangan akan dicapai apabila geometri anisotropik bagian luar yang diberikan oleh metrik Schwarzschild eksterior tidak memiliki nilai $(g_R^*=0)$. Sehingga penjabaran dari persamaan (3.55) diberikan oleh persamaan berikut

$$p_R-\alpha(\theta_1^1)_R^-=0. \tag{4.27}$$

Kemudian dengan menggunakan mimik konstrain di persamaan (4.9) pada kondisi yang diberikan oleh persamaan (4.27) akan didapatkan persamaan berikut

$$p_R=0. \tag{4.28}$$

Kemudian persamaan (4.28) ini disubtitusikan ke dalam persamaan (4.5) sehingga akan mengarah ke persamaan berikut

$$C^2 = A^2 + 3R^2. \tag{4.29}$$

Di sisi lain, untuk mendapatkan massa Schwarzschild diperlukan penjabaran pada persamaan (4.23). Dimana variabel $\mu(R)$ dalam persamaan (4.23) didefinisikan dengan persamaan berikut

$$\mu(R) = 1 - \frac{2M_0}{R}. \tag{4.30}$$

Sehingga didapatkan persamaan untuk massa Schwarzschild, yang dituliskan dalam persamaan berikut

$$(1-\alpha)\left(1-\frac{2M_0}{R}\right) + \alpha\left(\frac{A^2+R^2}{A^2+3R^2}\right) = \left(1-\frac{2M}{R}\right)$$

$$1-\frac{2M_0}{R} - \alpha + \alpha\frac{2M_0}{R} + \alpha\left(\frac{A^2+R^2}{A^2+3R^2}\right) = 1-\frac{2M}{R}$$

$$\frac{2M}{R} = \frac{2M_0}{R} + \alpha\left(1-\frac{2M_0}{R}\right) - \alpha\left(\frac{A^2+R^2}{A^2+3R^2}\right). \tag{4.31}$$

Akhirnya, dengan menggunakan pernyataan di persamaan (4.31) dalam kondisi pencocokan di persamaan (4.21), akan didapatkan persamaan berikut

$$B^2\left(1+\frac{R^2}{A^2}\right) = (1-\alpha)\left(1-\frac{2M_0}{R}\right) + \alpha\left(\frac{A^2+R^2}{A^2+3R^2}\right) \tag{4.32}$$

Persamaan (4.29), (4.31) dan (4.32) adalah kondisi yang diperlukan dan cukup untuk mencocokkan solusi interior ruang-waktu Tolman IV dengan ruang-waktu Schwarzschild eksterior. Dengan menggunakan mimik konstrain pada persamaan (4.9) beserta persamaan (4.29), akan didapatkan perubahan tekanan radial efektif $(\tilde{p}_r)$ pada persamaan (3.15), perubahan yang terjadi dituliskan sebagai berikut

$$\tilde{p}_r = p - \alpha\theta_1^1$$

$$\tilde{p}_r(r,\alpha) = \frac{C^2 - A^2 - 3r^2}{\kappa^2 C^2 (A^2 + 2r^2)} - \alpha\left(\frac{C^2 - A^2 - 3r^2}{\kappa^2 C^2 (A^2 + 2r^2)}\right)$$

$$\tilde{p}_r(r,\alpha) = \frac{(1-\alpha)(C^2 - A^2 - 3r^2)}{\kappa^2 C^2 (A^2 + 2r^2)}$$

$$\tilde{p}_r(r,\alpha) = \frac{(1-\alpha)(A^2 + 3R^2 - A^2 - 3r^2)}{\kappa^2 (A^2 + 3R^2)(A^2 + 2r^2)}$$

$$\tilde{p}_r(r,\alpha) = \frac{3(1-\alpha)(R^2 - r^2)}{\kappa^2 (A^2 + 3R^2)(A^2 + 2r^2)}. \tag{4.33}$$

Untuk mengetahui perubahan pada densitas efektif ($\tilde{\rho}$) pada persamaan (3.14) diperlukan definisi sumber gravitasi anisotropik θ_0^0 yang memuat nilai fungsi MGD $f^*(r)$ pada persamaan (4.11), yaitu

$$\theta_0^0 = -\frac{f^*}{\kappa^2 r^2} - \frac{f^{*\prime}}{\kappa^2 r}$$

$$\theta_0^0 = \frac{\mu + \left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right)}{\kappa^2 r^2} + \frac{\mu' + \left(\frac{4A^2 r}{(A^2 + 3r^2)^2}\right)}{\kappa^2 r}.$$

Kemudian definisi sumber gravitasi anisotropik θ_0^0 dan definisi densitas biasa pada persamaan (3.25) disubtitusikan ke dalam definisi densitas efektif pada persamaan (3.14), seperti yang akan dijabarkan berikut ini

$$\rho = \frac{1}{\kappa^2 r^2} - \frac{\mu}{\kappa^2 r^2} - \frac{\mu'}{\kappa^2 r}$$

$$\tilde{\rho} = \rho + \alpha \theta_0^0$$

$$\tilde{\rho}(r,\alpha) = \frac{1}{\kappa^2 r^2} - \frac{\mu}{\kappa^2 r^2} - \frac{\mu'}{\kappa^2 r} + \frac{\alpha\left(\mu - \left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right)\right)}{\kappa^2 r^2}$$

$$+ \frac{\alpha\left(\mu' - \left(\frac{4A^2 r}{(A^2 + 3r^2)^2}\right)\right)}{\kappa^2 r}$$

$$\tilde{\rho}(r,\alpha) = \left(\frac{1}{\kappa^2 r^2} - \frac{\mu}{\kappa^2 r^2} - \frac{\mu'}{\kappa^2 r}\right) + \left(-\frac{\alpha}{\kappa^2 r^2} + \frac{\alpha\mu}{\kappa^2 r^2} + \frac{\alpha\mu'}{\kappa^2 r}\right)$$

$$+\frac{\alpha}{\kappa^2 r^2}\left(1 - \left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right) + \left(\frac{4A^2 r^2}{(A^2 + 3r^2)^2}\right)\right)$$

$$\tilde{\rho}(r,\alpha) = (1-\alpha)\rho + \frac{\alpha}{\kappa^2 r^2}\left(\frac{6A^2 + 6r^4}{(A^2 + 3r^2)^2}\right)$$

$$\tilde{\rho}(r,\alpha) = (1-\alpha)\rho + \frac{6\alpha(A^2 + r^2)}{\kappa^2 (A^2 + 3r^2)^2}. \tag{4.34}$$

Untuk mengetahui perubahan pada tekanan tangensial efektif $(\tilde{p}_t)$ pada persamaan (3.16) diperlukan definisi sumber gravitasi anisotropik θ_2^2 yang memuat nilai fungsi MGD $f^*(r)$ pada persamaan (4.11), yaitu

$$\theta_2^2 = -\frac{f^*}{4\kappa^2}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) - \frac{f^{*\prime}}{4\kappa^2}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right)$$

$$\theta_2^2 = \frac{\mu - \left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right)}{4\kappa^2}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + \frac{\mu' - \left(\frac{4A^2 r}{(A^2 + 3r^2)^2}\right)}{4\kappa^2}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right)$$

Dimana komponen radial $\{\nu, \mu\}$ didefinisikan pada persamaan (4.2) dan persamaan (4.3). Kemudian definisi sumber gravitasi anisotropik θ_2^2 dan definisi tekanan biasa pada persamaan (3.27) disubtitusikan ke dalam definisi tekanan tangensial efektif pada persamaan (3.16), seperti yang akan dijabarkan berikut ini

$$p = \frac{\mu}{4\kappa^2}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + \frac{\mu'}{4\kappa^2}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right)$$

$$\tilde{p}_t = p - \alpha\theta_2^2$$

$$\tilde{p}_t(r,\alpha) = \frac{\mu}{4\kappa^2}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + \frac{\mu'}{4\kappa^2}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) - \frac{\alpha\mu}{4\kappa^2}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$+\frac{\alpha\mu'}{4\kappa^2}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) + \frac{\alpha}{4\kappa^2}\left(\frac{A^2 + r^2}{A^2 + 3r^2}\right)\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{4\kappa^2}\left(\frac{4A^2r}{(A^2+3r^2)^2}\right)\left(\nu'+\frac{2}{r}\right)$$

$$\tilde{p}_t(r,\alpha)=(1-\alpha)p+\frac{\alpha}{4\kappa^2}\left(\frac{A^2+r^2}{A^2+3r^2}\right)\left(2\nu''+\nu'^2+\frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{4\kappa^2}\left(\frac{4A^2r}{(A^2+3r^2)^2}\right)\left(\nu'+\frac{2}{r}\right).$$

Perlu diperhatikan kembali ketika mimik konstrain pada persamaan (4.9) disubtitusikan ke dalam tekanan radial efektif ($\tilde{p}_r$) pada persamaan (3.15) maka akan menghasilkan pengertian berikut

$$\tilde{p}_r=(1-\alpha)p.$$

Sehingga tekanan tangensial efektif ($\tilde{p}_t$) akan dijabarkan berikut ini

$$\tilde{p}_t(r,\alpha)=\tilde{p}_r+\frac{\alpha}{4\kappa^2}\left(\frac{A^2+r^2}{A^2+3r^2}\right)\left(2\nu''+\nu'^2+\frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{4\kappa^2}\left(\frac{4A^2r}{(A^2+3r^2)^2}\right)\left(\nu'+\frac{2}{r}\right)$$

$$\tilde{p}_t(r,\alpha)=\tilde{p}_r+\frac{\alpha}{\kappa^2}\left(\frac{2A^2+r^2}{(A^2+3r^2)(A^2+r^2)}\right)-\frac{\alpha}{\kappa^2}\left(\frac{2A^4+4A^2r^2}{(A^2+3r^2)^2(A^2+r^2)}\right)$$

$$\tilde{p}_t(r,\alpha)=\tilde{p}_r+\frac{\alpha}{\kappa^2}\left(\frac{3r^2(A^2+3r^2)}{(A^2+3r^2)^2(A^2+r^2)}\right)$$

$$\tilde{p}_t(r,\alpha)=\tilde{p}_r+\frac{3\alpha r^2}{\kappa^2(A^2+3r^2)^2}. \tag{4.35}$$

Persamaan (4.33) – (4.35) secara berturut-turut adalah solusi fluida anisotropik berupa tekanan radial efektif, densitas efektif dan tekanan tangensial efektif menggunakan metode *gravitational decoupling*. Persamaan (4.2) dan persamaan (4.12) beserta dengan persamaan (4.33) – (4.35) mewakili solusi analitik ruang-waktu Tolman IV yang tepat dan tertutup untuk sistem persamaan (3.10) – (3.12) yang telah dideformasi minimal oleh sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$.

Secara khusus, menurut persamaan (3.17), sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$ menghasilkan faktor anisotopik yang diberikan oleh persamaan berikut

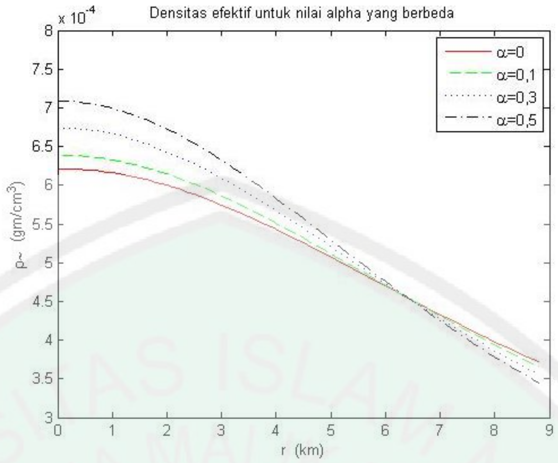
$$\Delta(r,\alpha) \equiv \tilde{p}_r - \tilde{p}_t = \frac{3\alpha r^2}{\kappa^2(A^2+3r^2)^2}. \qquad (4.36)$$

4.3 Karakterstik Solusi Fluida Anisotropik

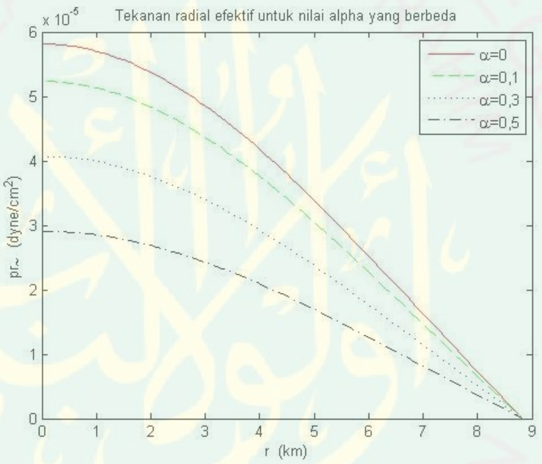
Untuk mengetahui kebenaran dari solusi anisotropik baru yang ditunjukkan pada persamaan (4.33) – (4.35), akan dilakukan analisis fisik dengan cara disimulasikan dalam bentuk kurva dua dimensi yang disimulasikan dengan menggunakan program Matlab. Pada penelitian ini digunakan definisi massa M dan jari-jari R dari data pengamatan bintang neutron *LMC X-4*. Nilai parameter fisik dari bintang neutron *LMC X-4* yaitu nilai massa M $= 1.29\ M_{\odot}$ (dimana $M_{\odot}$ adalah massa Matahari) dan perkiraan radius $R = 8.831$ km (Gangopadhyay, 2013). Kemudian digunakan nilai yang berbeda untuk konstanta kopeling (α) hal ini bertujuan untuk menyelidiki pengaruh konstanta kopeling terhadap perilaku fisik dari solusi anisotropik. Untuk mempermudah karakterisasi dari solusi fluida anisotropik, analisis fisik dibagi menjadi dua keadaan yang dijelaskan berikut ini.

4.3.1 Sektor Materi

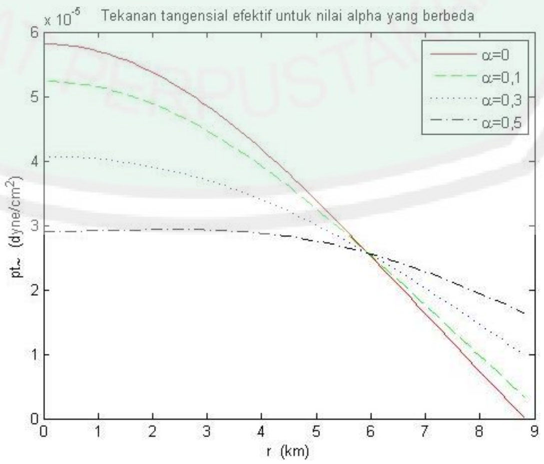
Persyaratan pada sektor materi untuk memastikan solusi anisotropik dapat diterima secara fisis adalah nilai dari densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif harus bernilai positif ketika berada pada bagian dalam bintang. Kemudian dalam analisis sektor materi, tekanan maupun densitas dari solusi anisotropik harus memenuhi sifat dasar dari solusi SSSPF yaitu diisyaratkan untuk nilainya berkurang secara monotonik pada batas tertentu. Pada gambar 4.5 sampai gambar 4.7 akan ditunjukkan perilaku fisis dari densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif.



Gambar 4.5 Densitas Efektif untuk Nilai Alpha yang Berbeda



Gambar 4.6 Tekanan Radial Efektif untuk Nilai Alpha yang Berbeda



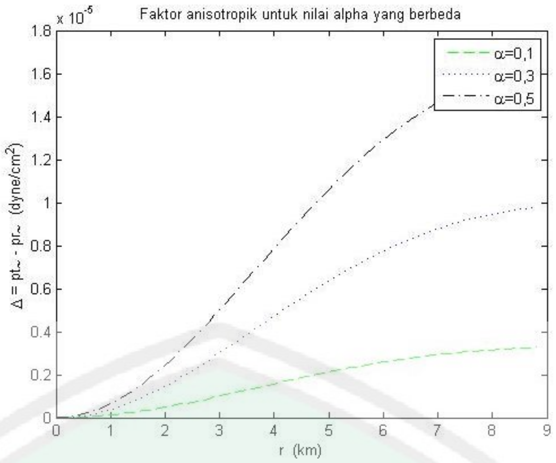
Gambar 4.7 Tekanan Tangensial Efektif untuk Nilai Alpha yang Berbeda

Dalam gambar 4.5 sampai gambar 4.7 adalah nilai densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif yang diplot untuk nilai $\alpha = 0$ (garis merah), $\alpha = 0{,}1$ (garis hijau), $\alpha = 0{,}3$ (garis biru) dan $\alpha = 0{,}5$ (garis hitam). Untuk garis merah (nilai $\alpha = 0$) merepresentasikan bahwa solusi anisotropik akan kembali kepada solusi isotropik ketika nilai konstanta kopeling dihilangkan. Dari gambar 4.5 sampai gambar 4.7 dapat dilihat bahwa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif bernilai positif ketika berada di bagian dalam bintang. Gambar 4.5 sampai gambar 4.7 juga menunjukkan bahwa nilai dari densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif mencapai nilai maksimum di bagian inti bintang $(r = 0)$ dan berkurang secara monotonik pada batas $0 < r \leq R$.

Dari gambar 4.5 dapat dilihat bahwa nilai dari konstanta kopeling tidak menentukan nilai densitas efektif pada suatu bintang anisotropik. Hal ini karena pada kurva densitas efektif, pola dan nilai penurunan secara monotonik serupa dari konstanta kopeling yang berbeda. Dari gambar 4.6 dapat dilihat bahwa nilai dari konstanta kopeling menentukan nilai tekanan radial efektif pada suatu bintang anisotropik. Hal ini karena sumber gravitasi tambahan $\theta_{\mu\nu}$ menurunkan nilai tekanan radial efektif di bagian dalam bintang seiring bertambahnya nilai konstanta kopeling (α). Gambar 4.6 juga menunjukkan bahwa nilai dari tekanan radial efektif menghilang $(\tilde{p}_r = 0)$ ketika berada di bagian permukaan bintang $(r = R)$.

Dari gambar 4.7 dapat dilihat bahwa nilai dari konstanta kopeling menentukan nilai tekanan tangensial efektif pada suatu bintang anisotropik. Dalam kasus tekanan tangensial efektif di bagian dalam bintang, sumber gravitasi tambahan $\theta_{\mu\nu}$ hanya menurunkan nilai tekanan tangensial efektif di bagian inti bintang $(r = 0)$ seiring bertambahnya nilai konstanta kopeling (α). Dari gambar 4.6 dan gambar 4.7 dapat dilihat bahwa nilai tekanan radial efektif pada bagian inti bintang $(r = 0)$ sama dengan nilai tekanan tangensial efektif di bagian inti bintang $(r = 0)$, hal ini berarti tekanan pada bagian inti bintang anisotropik sama dengan tekanan yang ada di bagian inti bintang isotropik. Hal yang menjadi ciri dari bintang anisotropik adalah nilai tekanan tangensial efektif akan mengalami titik balik ketika menuju permukaan bintang. Hal tersebut dikarenakan adanya tekanan tangensial ke dalam bagian bintang, agar bintang menghasilkan gaya kerja keluar bintang. Kemudian, dari gambar 4.7 dapat dilihat bahwa nilai tekanan tangensial efektif tidak menghilang $(\tilde{p}_t \neq 0)$ ketika berada di bagian permukaan bintang $(r = R)$.

Persyaratan tambahan pada sektor materi untuk memastikan solusi bintang anisotropik dapat diterima secara fisis adalah kondisi dimana tekanan tangensial efektif bernilai lebih besar dibandingkan dengan tekanan radial efektif $(\tilde{p}_t > \tilde{p}_r)$. Kondisi tersebut berarti bahwa faktor anisotropik $(\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r)$ bernilai positif , sehingga gaya anisotropik menghasilkan gaya kerja keluar bagian bintang, gaya kerja keluar tersebut menjadi indikasi dari tingkat kekompakan suatu bintang anisotropik. Kondisi tersebut ditunjukkan dengan gambar 4.8 berikut.



Gambar 4.8 Faktor Anisotropik untuk Nilai Alpha yang Berbeda

Dalam gambar 4.8 faktor anisotropik ($\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r$) diplot untuk nilai $\alpha =$ 0,1 (garis hijau), $\alpha =$ 0,3 (garis biru) dan $\alpha =$ 0,5 (garis hitam). Dari gambar 4.8 dapat dilihat bahwa faktor anisotropik ($\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r$) bernilai nol di titik $r = 0$, hal ini dikarenakan pada bagian inti bintang nilai tekanan radial efektif dan nilai tekanan tangensial efektif sama. Pada gambar 4.8 dapat dilihat bahwa nilai dari faktor anisotropik ($\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r$) meningkat seiring dengan bertambahnya nilai r, hal ini berarti bahwa sifat anisotropi meningkat ke arah permukaan bintang. Dari gambar 4.8 juga dapat dilihat bahwa pada bagian permukaan bintang ($r = R$), nilai faktor anisotropik ($\Delta = \tilde{p}_t - \tilde{p}_r$) meningkat seiring bertambahnya nilai konstanta kopeling (α). Hal ini menunjukkan bahwa nilai konstanta kopeling (α) memiliki peran untuk menentukan nilai kekompakan suatu bintang anisotropik.

4.3.2 Kondisi Energi

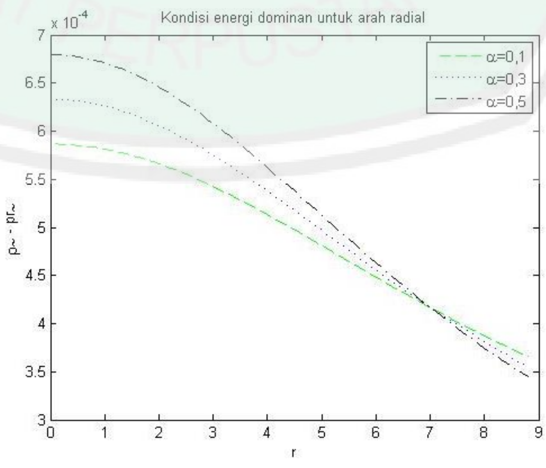
Dalam kerangka relativitas umum, kondisi energi adalah pemodelan yang berkaitan dengan tensor energi-momentum yang bernilai positif pada bagian dalam bintang. Kondisi energi memiliki tujuan untuk membuktikan bahwa energi yang ada di dalam bintang tidak bernilai negatif, karena kondisi energi yang bernilai negatif membuat kondisi bagian dalam sistem bintang tidak stabil. Dalam kondisi energi terdapat hubungan linier antara energi densitas dan tekanan dari materi dengan mematuhi batasan tertentu. Terdapat empat jenis kondisi yang harus dipenuhi tensor energi-momentum untuk memastikan solusi anisotropik dapat diterima secara fisis, yaitu kondisi energi dominan (*dominant energy condition*), kondisi energi kuat (*strong energy condition*), kondisi energi null (*null energy condition*) dan kondisi energi lemah (*weak energy condition*).

Pertama, bagian dalam bintang harus memenuhi kondisi energi dominan (DEC), dimana dalam kondisi DEC ini berarti bahwa fluks momentum energi yang diukur oleh pengamat bersifat sama yang diukur oleh pengamat manapun pada kurva bak-waktu (*time-like*). Kondisi tersebut diartikan dalam dua persamaan berikut ini

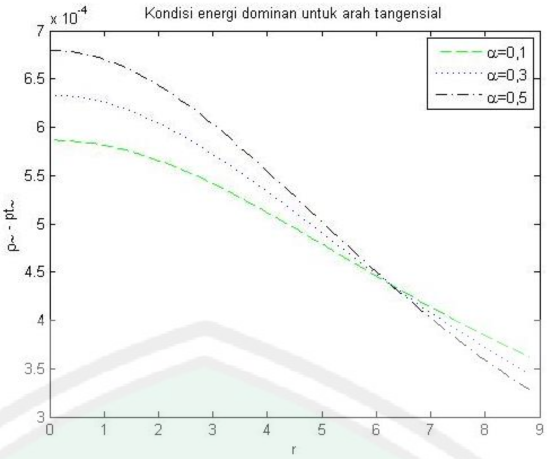
$$\tilde{\rho}-\tilde{p}_r \geq 0, \tag{4.37}$$

$$\tilde{\rho}-\tilde{p}_t \geq 0. \tag{4.38}$$

Persamaan (4.37) menunjukkan syarat kondisi enegri dominan pada arah radial, dan persamaan (4.38) menunjukkan sayarat kondisi energi dominan pada arah tangensial. Kondisi energi dominan (DEC) ditunjukkan dengan gambar 4.9 dan gambar 4.10 berikut ini.



Gambar 4.9 Kondisi Energi Dominan untuk Arah Radial



Gambar 4.10 Kondisi Energi Dominan untuk Arah Tangensial

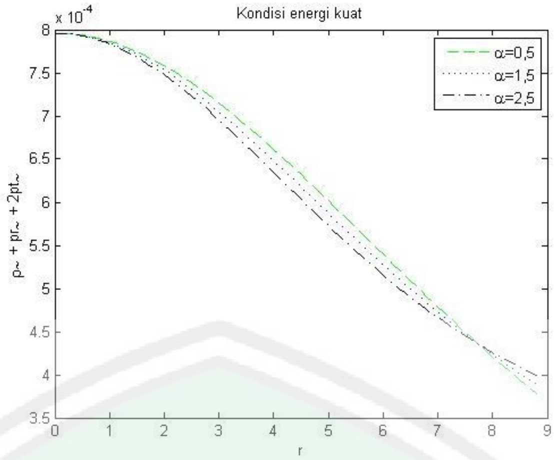
Dalam gambar 4.9 dan gambar 4.10 kondisi energi dominan diplot untuk nilai $\alpha = 0{,}1$ (garis hijau), $\alpha = 0{,}3$ (garis biru) dan $\alpha = 0{,}5$ (garis hitam). Dari gambar 4.9 dapat dilihat bahwa kondisi energi dominan memiliki nilai positif sehingga terbukti bahwa densitas efektif bernilai lebih besar dibandingkan dengan tekanan radial efektif ($\tilde{\rho} \geq \tilde{p}_r$). Dari gambar 4.10 dapat dilihat bahwa kondisi energi dominan memiliki nilai positif sehingga terbukti bahwa densitas efektif bernilai lebih besar dibandingkan dengan tekanan tangensial efektif ($\tilde{\rho} \geq \tilde{p}_t$).

Kondisi kedua adalah solusi anisotropik harus memenuhi kondisi energi kuat (SEC), dimana energi densitas efektif secara negatif tidak bisa didominasi oleh jumlah tekanan (fluks momentum) yang diukur oleh pengamat manapun pada kurva bak-waktu (*time-like*). Kondisi tersebut diartikan dalam persamaan berikut ini

$$\tilde{\rho} + \sum_i \tilde{p}_i \geq 0,$$

$$\tilde{\rho} + \tilde{p}_r + 2\tilde{p}_t \geq 0. \tag{4.39}$$

Kondisi energi kuat (SEC) ditunjukkan dengan gambar 4.11 berikut ini.



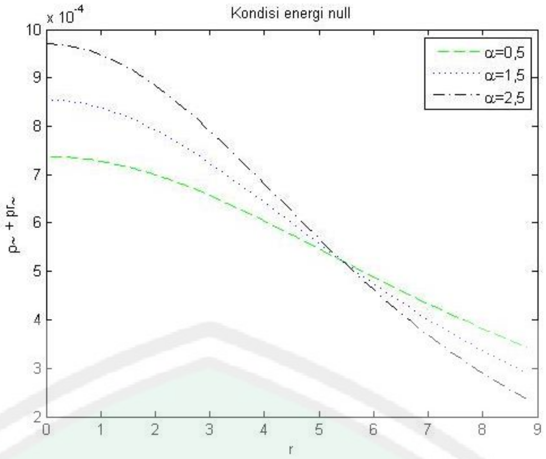
Gambar 4.11 Kondisi Energi Kuat

Dalam gambar 4.11 kondisi energi kuat diplot untuk nilai $\alpha = 0{,}1$ (garis hijau), $\alpha = 0{,}3$ (garis biru) dan $\alpha = 0{,}5$ (garis hitam). Dari gambar 4.11 dapat dilihat bahwa kondisi energi kuat terbukti memiliki nilai positif $(\tilde{\rho} + \tilde{p}_r + 2\tilde{p}_t \geq 0)$.

Kondisi ketiga adalah solusi anisotropik harus memenuhi kondisi energi null (NEC), dimana salah satu nilai dari tekanan atau nilai dari densitas harus lebih besar bagi pengamat yang ada di bagian geodesik null, hal ini agar NEC bernilai positif. Dalam kondisi energi null ini, pengamat bergerak dalam ruang dengan kecepatan cahaya, sehingga lintasan pengamat berada dalam ruang-waktu geodesik null (*time-like geodesic*). Kondisi tersebut diartikan dalam persamaan berikut ini

$$\tilde{\rho} + \tilde{p}_r \geq 0. \tag{4.40}$$

Kondisi energi null (NEC) ditunjukkan dengan gambar 4.12 berikut ini.



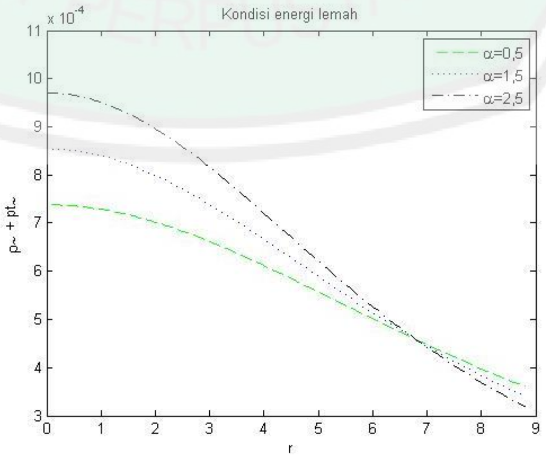
Gambar 4.12 Kondisi Energi Null

Dalam gambar 4.12 kondisi energi null diplot untuk nilai $\alpha = 0{,}1$ (garis hijau), $\alpha = 0{,}3$ (garis biru) dan $\alpha = 0{,}5$ (garis hitam). Dari gambar 4.12 dapat dilihat bahwa kondisi energi null yaitu jumlah dari nilai total dari densitas efektif dan tekanan radial efektif terbukti memiliki nilai positif $(\tilde{\rho} + \tilde{p}_r \geq 0)$.

Kondisi terakhir adalah solusi anisotropik harus memenuhi kondisi energi lemah (WEC), dimana dalam kondisi WEC ini berarti bahwa nilai dari densitas yang diukur oleh pengamat manapun pada kurva bak-waktu (*time-like*) harus bernilai tidak negatif. Kondisi tersebut diartikan dalam persamaan berikut ini

$$\tilde{\rho} + \tilde{p}_t \geq 0. \tag{4.41}$$

Kondisi energi lemah (WEC) ditunjukkan dengan gambar 4.13 berikut ini.



Gambar 4.13 Kondisi Energi Lemah

Dalam gambar 4.13 kondisi energi lemah diplot untuk nilai $\alpha = 0{,}1$ (garis hijau), $\alpha = 0{,}3$ (garis biru) dan $\alpha = 0{,}5$ (garis hitam). Dari gambar 4.13 dapat dilihat bahwa kondisi energi lemah yaitu jumlah dari nilai total dari densitas efektif dan tekanan tangensial efektif terbukti memiliki nilai positif $(\tilde{\rho} + \tilde{p}_t \geq 0)$.

Gambar 4.9 sampai dengan gambar 4.13 telah memperlihatkan bahwa seluruh tensor energi-momentum yang ada dalam persamaan bintang anisotropik Tolman IV bernilai positif. Hal ini berarti bahwa keseluruhan kondisi energi telah terpenuhi dan menjamin viabilitas fisik dari solusi anisotropik Tolman IV.

Adanya gambar 4.5 sampai dengan gambar 4.13 menunjukkan bahwa persamaan (4.33) – (4.35) dapat diakui sebagai solusi fluida anisotropik dari ruang-waktu Tolman IV karena telah memenuhi seluruh kondisi yang disyaratkan. Hal ini berarti bahwa metode *gravitatonal decoupling* telah berhasil untuk memperluas solusi interior isotropik menjadi solusi anisotropik yang tetap memenuhi simetri bola. Telah ditunjukkan bahwa seluruh solusi anisotropik mewarisi akseptabilitas fisik dari solusi interior isotropik yang asli. Khususnya, telah ditunjukkan bahwa sumber gravitasi tambahan $\theta_{\mu\nu}$ menurunkan nilai tekanan radial efektif di dalam sistem gravitasi diri (*self-gravitating*).

Metode *gravitational decoupling* ini bisa menjadi metode yang efisien untuk menyelesaikan masalah fisik yang lebih kompleks. Sebagai contoh, untuk memperluas solusi anisotropik dari solusi relativitas umum ke solusi sistem Einstein--Klein--Gordon (dalam sistem seperti ini maka sumber gravitasi anisotropik $\theta_{\mu\nu}$ didefinisikan sebagai medan skalar Klein--Gordon).

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi fluida anisotropik berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif dari ruang-waktu Tolman IV dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tilde{\rho}(r,\alpha) = (1-\alpha)\rho + \frac{6\alpha(A^2+r^2)}{\kappa^2(A^2+3r^2)^2}$$

$$\tilde{p}_r(r,\alpha) = \frac{3(1-\alpha)(R^2-r^2)}{\kappa^2(A^2+3R^2)(A^2+2r^2)}$$

$$\tilde{p}_t(r,\alpha) = \tilde{p}_r + \frac{3\alpha r^2}{\kappa^2(A^2+3r^2)^2}$$

2. Solusi fluida anisotropik dari ruang-waktu Tolman IV berupa densitas efektif, tekanan radial efektif dan tekanan tangensial efektif telah memenuhi seluruh kondisi sektor materi dan kondisi energi yang disyaratkan. Hal ini berarti bahwa metode *gravitatonal decoupling* telah berhasil untuk memperluas solusi interior isotropik menjadi solusi anisotropik yang tetap memenuhi simetri bola.

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penelitian dapat dikembangkan dengan menggunakan solusi SSSPF yang lainnya, atau memperluas solusi anisotropik dari solusi relativitas umum ke solusi sistem Einstein--Klein--Gordon.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan Terjemahan., 2008. Departemen Agama RI. Bandung: Diponegoro.

Anugraha, R., 2018. *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Baiquni, A., dkk, 2014. *Tafsir Salman: Tafsir Ilmiah Juz 'Ama*. Bandung: Penerbit Mizan.

Boonserm, P., Visser, M., dan Weinfurtner, S., 2005. *Generating perfect fluid spheres in general relativity*. Phys. Rev. D 71, 124037.

Bowers, R.L., dan Liang, E.P.T., 1974. *Anisotropic spheres in general relativity*. Astrophys. J. 188:675.

Curiel, E., 2014. *A primer on energy conditions*. arXiv:1405.0403v1.

Delagty, M.S.R., dan Lake, K., 1998. *Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of einstein's equations*. Comput. Phys. Commun. 115:395.

Eddington, A.S., 1923. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Estrada, M., dan Ortiz, F.T., 2018. *A new family of analytical anisotropic solutions by gravitational decoupling*. Eur. Phys. J. Plus 133, 453.

Fodor, G., 2000. *Generating spherically symmetric static perfect fluid solutions*. arXiv:gr-qc/0011040.

Gangopadhyay, T., dkk, 2013. *Strange star equation of state fits the refined mass measurement of 12 pulsars and predicts their radii*. arXiv:1303.1956.

Gautama, S.E., 2016. *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi*. Makassar: Paradoks Publisher.

Germani, C., dan Maartens, R., 2001. *Stars in the braneworld.* Phys. Rev. D 64, 124010.

Graterol, R.P., 2018. *A new anisotropic solution by mgd gravitational decoupling*. Eur. Phys. J. Plus 133:244.

Hens, R., dan Stuchlik, Z., 2019. *Anisotropic tolman vii solution by gravitational decoupling.* Eur. Phys. J. C 79, 834.

Heras, C.L., dan Leon, P., 2018. *Using mgd gravitational decoupling to extend the isotropic solutions of einstein equations to the anisotropical domain.* arXiv:1804.06874 [gr-qc].

Kippenhahn, R., Weigert, A., dan Weiss, A., 1990. *Stellar Structure and Evolution.* Berlin: Springer.

Kontou, E.A., dan Sanders, K., 2020. *Energy conditions in general relativity and quantum field theory*. Class. Quantum Grav. Vol. 37, No. 19.

Lake, K., 2003. *All static spherically symmetric perfect fluid solutions of einstein's equations.* Phy. Rev. D 67, 104015.

Mak, M.K., dan Harko, T., 2002. *An exact anisotropic quark star model.* Chin. J. Astron. Astrophys. Vol. 2, No. 3, 248–259.

Maurya, S.K., dan Ortiz, F.T., 2019. *Generalized relativistic anisotropic compact star models by gravitational decoupling.* Eur. Phys. J. C 79 no.1, 85.

Maurya, S.K., dkk, 2016. *A new model for charged anisotropic compact star.* Astrophys. Space Sci: 361, 163.

Maurya, S.K., dkk, 2018. *A generalized family of anisotropic compact object in general relativity.* arXiv:1710.02002v2.

Ovalle, J., 2008. *Searching exact solutions for compact stars in braneworld: a conjecture.* Mod. Phys. Letter. A 23, 3247-3263.

Ovalle, J., 2010. *Brane-world stars: anisotropy minimally projected onto the brane, in gravitation and astrophysics.* (ICGA9), ed J. Luo. Singapore: World Scientific.

Ovalle, J., 2015. *Brane-world stars with solid crust and vacuum exterior*. Class. Quantum Grav. 32, 045015.

Ovalle, J., 2017. *Decoupling gravitational sources in general relativity: from perfect to anisotropic fluids.* Phys. Rev. D 95, 104019.

Ovalle, J., dkk, 2018. *Anisotropic solutions by gravitational decoupling*. Eur. Phys. J. C 78 no.2, 122.

Purwanto, A., 2009. *Pengantar Kosmologi*. Surabaya: ITS Press.

Rago, H., 1991. *Anisotropic spheres in general relativity*. Astrophys. Space Sci:183, 333-338.

Ruderman, M., 1972. *Pulsars: structure and dynamics.* Ann Rev. Astron. Astrophys:10,427.

Schmidt, H.J., dan Homman, F., 2000. *Photon stars*. General Relativity and Gravitation: 32, 919.

Schutz, B., 2009. *A First Course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sokolov, A.I,. 1980. *Phase transitions in a superfluid neutron liquid*. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 79, 1137-1140.

Tolman, R.C,. 1939. *Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid*. Phy. Rev. 55, 364-373.

LAMPIRAN A
SOLUSI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

Metrik untuk geometri ruang-waktu yang memenuhi simetri bola statis diberikan oleh :

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Memberikan elemen tensor metrik dan invers tensor metrik, yaitu :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

Selanjutnya untuk semua komponen, simbol Christoffelnya mengacu pada persamaan :

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{1\sigma}(\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{10}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11})$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\left(-e^{-\lambda}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}e^{\lambda} - \frac{\partial}{\partial r}e^{\lambda} + \frac{\partial}{\partial r}e^{\lambda}\right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{e^{\lambda}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}e^{\lambda}\right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{12}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_\sigma g_{21}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{13}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_\sigma g_{31}) = 0$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{1\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{10}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00})$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\left(-\frac{\partial}{\partial r} e^{\nu}\right)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2\right)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r e^{-\lambda}$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33})$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin^2\theta\right)$$

$$\Gamma^1_{33} = -r \sin^2\theta \, e^{-\lambda}$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33})$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}(-r^{-2})\left(\frac{\partial}{\partial\theta}r^2\sin^2\theta\right)$$
$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$
$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_1 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{10})$$
$$\sigma = 0; \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{01} - \partial_0 g_{10})$$
$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\frac{\partial}{\partial r}e^{\nu}\right)$$
$$\Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}$$
$$\sigma = 1; \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{10}) = 0$$
$$\sigma = 2; \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{21} - \partial_2 g_{10}) = 0$$
$$\sigma = 3; \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{31} - \partial_3 g_{10}) = 0$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12})$$
$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$
$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$
$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12})$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}r^2\right)$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$
$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$
$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_1 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{13})$$
$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = 0$$
$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$
$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$
$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13})$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial r}r^2\sin^2\theta\right)$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2} g^{3\sigma}(\partial_2 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{23})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{30}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{31}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{32}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23})$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} r^2 \sin^2\theta\right)$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{23}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{3\sigma}(\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{30}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{31}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{32}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^{0} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma_{11}^{0} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma_{11}^{0} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma_{11}^{0} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma_{11}^{0} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^{0} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma_{22}^{0} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma_{22}^{0} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma_{22}^{0} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma_{22}^{0} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^{0} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma_{33}^{0} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{03} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma_{33}^{0} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma_{33}^{0} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma_{33}^{0} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{00}^{2} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma_{00}^{2} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma_{00}^{2} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma_{00}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_4 g_{00}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma_{00}^{2} = \frac{1}{2} g^{23}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = 0$$

$\sigma = 2; \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = 0$

$\sigma = 3; \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$

$\Gamma_{00}^{3} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$

$\sigma = 0; \quad \Gamma_{00}^{3} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0$

$\sigma = 1; \quad \Gamma_{00}^{3} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = 0$

$\sigma = 2; \quad \Gamma_{00}^{3} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{20} - \partial_2 g_{00}) = 0$

$\sigma = 3; \quad \Gamma_{00}^{3} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{30} - \partial_3 g_{00}) = 0$

$\Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{11})$

$\sigma = 0; \quad \Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{01} - \partial_0 g_{11}) = 0$

$\sigma = 1; \quad \Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = 0$

$\sigma = 2; \quad \Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) = 0$

$\sigma = 3; \quad \Gamma_{11}^{3} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{31} - \partial_3 g_{11}) = 0$

$\Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{22})$

$\sigma = 0 \quad \Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{02} - \partial_0 g_{22}) = 0$

$\sigma = 1; \quad \Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = 0$

$\sigma = 2; \quad \Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$

$\sigma = 3; \quad \Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{32} - \partial_3 g_{22}) = 0$

$\Gamma_{02}^{0} = \Gamma_{20}^{0} = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_2 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{20})$

$\sigma = 0; \quad \Gamma_{20}^{0} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{00} + \partial_0 g_{02} - \partial_0 g_{20}) = 0$

$\sigma = 1; \quad \Gamma_{20}^{0} = \frac{1}{2}g^{01}(\partial_2 g_{01} + \partial_0 g_{12} - \partial_1 g_{20}) = 0$

$\sigma = 2; \quad \Gamma_{20}^{0} = \frac{1}{2}g^{02}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{20}) = 0$

$\sigma = 3; \quad \Gamma_{20}^{0} = \frac{1}{2}g^{03}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{32} - \partial_3 g_{20}) = 0$

$\Gamma_{03}^{0} = \Gamma_{30}^{0} = \frac{1}{2}g^{0\sigma}(\partial_3 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 3} - \partial_\sigma g_{30})$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_3 g_{00} + \partial_0 g_{03} - \partial_0 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_3 g_{01} + \partial_0 g_{13} - \partial_1 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{23} - \partial_2 g_{30}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^0_{30} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^0_{12} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^0_{12} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^0_{12} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^0_{12} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma^0_{31} = \Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_1 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{13})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^0_{13} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma^0_{32} = \Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{0\sigma}(\partial_2 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{23})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{01}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{02}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^0_{23} = \frac{1}{2} g^{03}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_0 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{01})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_0 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{02})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{02} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma^1_{30} = \Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_0 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{03})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_1 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{13})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{1\sigma}(\partial_2 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{23})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{10}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{12}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{13}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_0 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{01})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{01} = \frac{1}{2} g^{23}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma^2_{20} = \Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_0 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{02})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{23}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma^2_{30} = \Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_0 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{03})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{03} = \frac{1}{2} g^{23}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{2\sigma}(\partial_1 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{13})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{20}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{01} - \partial_0 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{21}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{21} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{23}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{2\sigma}(\partial_2 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 2} - \partial_\sigma g_{23})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{20}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{02} - \partial_0 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{21}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{12} - \partial_1 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^2_{23} = \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma^3_{10} = \Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{01})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{20} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{01} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{30} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma^3_{20} = \Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{02})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{20} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{10} - \partial_1 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{20} - \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{02} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{30} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma^3_{30} = \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_0 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{03})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_0 g_{30} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{20} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{03} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{33} + \partial_3 g_{30} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}g^{3\sigma}(\partial_1 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{\sigma 1} - \partial_\sigma g_{12})$$

$$\sigma = 0; \quad \Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}g^{30}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{01} - \partial_0 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 1; \quad \Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}g^{31}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 2; \quad \Gamma^3_{12} = \frac{1}{2} g^{32}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}) = 0$$

$$\sigma = 3; \quad \Gamma^3_{12} = \frac{1}{2} g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{31} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

Kesimpulan, komponen $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ bernilai tidak nol adalah

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \qquad \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)} \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda} \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

Tensor Ricci :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$$

Untuk komponen tensor Ricci diagonal :

$$R_{\mu\mu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\mu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\mu}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}$$

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{00}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 0}$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma^1_{00} - 0 + \Gamma^1_{00}\Gamma^\beta_{\beta 1} - \left(\Gamma^0_{0\beta}\Gamma^\beta_{00} + \Gamma^1_{0\beta}\Gamma^\beta_{10}\right)$$

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10}$$

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}\right) + \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\nu'^2}{2} e^{(\nu-\lambda)}$$

$$R_{00} = \frac{\nu''}{2} e^{(\nu-\lambda)} + \frac{\nu'}{2}(\nu' - \lambda')e^{(\nu-\lambda)} + \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \frac{\nu'^2}{2} e^{(\nu-\lambda)}$$

$$R_{00} = e^{(\nu-\lambda)}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2}\right)$$

$$R_{00} = e^{(\nu-\lambda)}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)$$

$$R_{11} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{11} - \partial_1 \Gamma^\alpha_{\alpha 1} + \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 1}$$

$$R_{11} = \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^1_{11}\Gamma^\beta_{\beta 1} \\ -\left(\Gamma^0_{1\beta}\Gamma^\beta_{01} + \Gamma^1_{1\beta}\Gamma^\beta_{11} + \Gamma^2_{1\beta}\Gamma^\beta_{21} + \Gamma^3_{1\beta}\Gamma^\beta_{31}\right)$$

$$R_{11} = \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^1_{11}(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \\ -(\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31})$$

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda'}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) + \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) - \left(\frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{2}{r^2}\right)$$

$$R_{11}=\frac{\lambda''}{2}-\frac{\nu''}{2}-\frac{\lambda''}{2}+\frac{2}{r^2}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\lambda'^2}{4}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'^2}{4}-\frac{2}{r^2}$$
$$R_{11}=-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'}{r}+\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}$$
$$R_{22}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{22}-\partial_2\Gamma^\alpha_{\alpha 2}+\Gamma^\alpha_{22}\Gamma^\beta_{\beta\alpha}-\Gamma^\alpha_{2\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 2}$$
$$R_{22}=\partial_1\Gamma^1_{22}-\partial_2\Gamma^3_{32}+\Gamma^1_{22}\Gamma^\beta_{\beta 1}-\left(\Gamma^1_{2\beta}\Gamma^\beta_{12}+\Gamma^2_{2\beta}\Gamma^\beta_{22}+\Gamma^3_{2\beta}\Gamma^\beta_{32}\right)$$
$$R_{22}=\partial_1\Gamma^1_{22}-\partial_2\Gamma^3_{32}+\Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{01}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{21}+\Gamma^3_{31})$$
$$-(\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22}+\Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32})$$
$$R_{22}=\frac{\partial}{\partial r}(-e^{-\lambda})-\frac{\partial}{\partial\theta}\cot\theta+(-re^{-\lambda})\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)$$
$$-\left(-re^{-\lambda}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}re^{-\lambda}+\cot^2\theta\right)$$
$$R_{22}=-e^{-\lambda}+r\lambda' e^{-\lambda}+\frac{1}{\sin^2\theta}-re^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)+2e^{-\lambda}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$R_{22}=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-e^{-\lambda}\left(1-r\lambda'+\frac{r\nu'}{2}+2-2\right)$$
$$R_{22}=1-e^{-\lambda}\left(\frac{r(\nu'-\lambda')}{2}+1\right)$$
$$R_{33}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{33}-\partial_3\Gamma^\alpha_{\alpha 3}+\Gamma^\alpha_{33}\Gamma^\beta_{\beta\alpha}-\Gamma^\alpha_{3\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 3}$$
$$R_{33}=(\partial_1\Gamma^1_{33}+\partial_2\Gamma^2_{33})-0+\left(\Gamma^1_{33}\Gamma^\beta_{\beta 1}+\Gamma^2_{33}\Gamma^\beta_{\beta 2}\right)$$
$$-\left(\Gamma^1_{3\beta}\Gamma^\beta_{13}+\Gamma^2_{3\beta}\Gamma^\beta_{23}+\Gamma^3_{3\beta}\Gamma^\beta_{33}\right)$$
$$R_{33}=(\partial_1\Gamma^1_{33}+\partial_2\Gamma^2_{33})+\Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{01}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{21}+\Gamma^3_{31})+\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32}$$
$$-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}-\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}-(\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33}+\Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33})$$
$$R_{33}=\frac{\partial}{\partial r}(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})-\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta)-r\sin^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)$$
$$+2\sin^2\theta e^{-\lambda}-\sin\theta\cos\theta\cot\theta$$
$$R_{33}=-\sin^2\theta e^{-\lambda}+r\lambda'\sin^2\theta e^{-\lambda}+\sin^2\theta-\sin^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2}r+2\right)$$
$$R_{33}=-\sin^2\theta e^{-\lambda}\left(1-r\lambda'+\frac{\nu'+\lambda'}{2}r\right)+\sin^2\theta$$
$$R_{33}=-\sin^2\theta e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}r+1\right)+\sin^2\theta$$
$$R_{33}=\sin^2\theta\left(1-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}r+1\right)\right)$$

Sedangkan komponen non-diagonalnya

$$R_{01}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{01}-\partial_0\Gamma^\alpha_{\alpha 1}+\Gamma^\alpha_{01}\Gamma^\beta_{\beta\alpha}-\Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 1}$$

$$R_{01} = \partial_0\Gamma^0_{01} - 0 + \Gamma^0_{01}\Gamma^\beta_{\beta 0} - \Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{\alpha 1}$$
$$R_{01} = 0$$
$$R_{02} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{02} - \partial_0\Gamma^\alpha_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{02}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 2}$$
$$R_{02} = 0 - 0 + 0 - \Gamma^\alpha_{00}\Gamma^0_{\alpha 2} - \Gamma^\alpha_{01}\Gamma^1_{\alpha 2}$$
$$R_{02} = 0$$
$$R_{03} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{03} - \partial_0\Gamma^\alpha_{\alpha 3} + \Gamma^\alpha_{03}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 3}$$
$$R_{03} = 0 - 0 + 0 - \Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 3}$$
$$R_{03} = 0$$
$$R_{12} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{12} - \partial_1\Gamma^\alpha_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 2}$$
$$R_{12} = \partial_2\Gamma^2_{12} - \partial_1\Gamma^\alpha_{\alpha 2} + \Gamma^2_{12}\Gamma^\beta_{\beta 2} - (\Gamma^\alpha_{10}\Gamma^0_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^1_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^2_{\alpha 2} + \Gamma^\alpha_{13}\Gamma^3_{\alpha 2})$$
$$R_{12} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\right) - \partial_1\Gamma^3_{32} + \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{02} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{32}$$
$$R_{12} = 0 - \frac{\partial}{\partial r}(\cot\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)(\cot\theta) - 0 - 0 - 0 - \left(\frac{1}{r}\right)(\cot\theta)$$
$$R_{12} = 0$$
$$R_{13} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{13} - \partial_1\Gamma^\alpha_{\alpha 3} + \Gamma^\alpha_{13}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 3}$$
$$R_{13} = \partial_3\Gamma^3_{13} - 0 + \Gamma^3_{13}\Gamma^\beta_{\beta 3} - (\Gamma^\alpha_{10}\Gamma^0_{\alpha 3} + \Gamma^\alpha_{11}\Gamma^1_{\alpha 3} + \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^2_{\alpha 3} + \Gamma^\alpha_{13}\Gamma^3_{\alpha 3})$$
$$R_{13} = 0$$
$$R_{23} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{23} - \partial_2\Gamma^\alpha_{\alpha 3} + \Gamma^\alpha_{23}\Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{2\beta}\Gamma^\beta_{\alpha 3}$$
$$R_{23} = \partial_3\Gamma^3_{23} - 0 + \Gamma^3_{23}\Gamma^\beta_{\beta 3} - \left(\Gamma^1_{2\beta}\Gamma^\beta_{13} + \Gamma^2_{2\beta}\Gamma^\beta_{23} + \Gamma^3_{2\beta}\Gamma^\beta_{33}\right)$$
$$R_{23} = 0$$

Selanjutnya, empat tensor Ricci yang memiliki nilai tidak sama dengan nol memberikan tensor Ricci campuran sebagai berikut:

$$R^0_0 = g^{00}R_{00}$$
$$R^0_0 = e^{-\nu}e^{(\nu-\lambda)}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)$$
$$R^0_0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)$$
$$R^1_1 = g^{11}R_{11}$$
$$R^1_1 = -e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4}\right)$$
$$R^1_1 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)$$

$$R_2^2 = g^{22}R_{22}$$

$$R_2^2 = -\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\left(\frac{r(\nu' - \lambda')}{2} + 1\right)\right)$$

$$R_2^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2}\left(\frac{r(\nu' - \lambda')}{2} + 1\right)$$

$$R_3^3 = g^{33}R_{33}$$

$$R_3^3 = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\sin^2\theta - \sin^2\theta\, e^{-\lambda}\left(\frac{r(\nu' - \lambda')}{2} + 1\right)\right)$$

$$R_3^3 = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2}\left(\frac{r(\nu' - \lambda')}{2} + 1\right)$$

Komponen R_μ^μ memberi skalar kurvatur R

$$R = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3$$

$$R = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-\lambda}}{r^2}\left(\frac{r(\nu' - \lambda')}{2} + 1\right)$$

$$R = 2e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{(\nu' - \lambda')}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}$$

Menggunakan persamaan Einstein dalam bentuk persamaan tensor campuran diberikan oleh

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = -k^2 T_\nu^\mu$$

dimana tensor energi-momentum untuk fluida sempurna dalam bentuk persamaan tensor campuran diberikan oleh

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u_\mu u^\nu - p g_\nu^\mu$$

dengan bentuk sederhana bagi tensor energi-momentum pada fluida sempurna

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Sehingga didapatkan solusi persamaan Einstein untuk komponen (00), (11) dan (22) yaitu

$$k^2T_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}\delta_0^0 R$$

$$k^2\rho = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{(\nu'-\lambda')}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$k^2\rho = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} - \frac{(\nu'-\lambda')}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$k^2\rho = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$k^2T_1^1 = R_1^1 - \frac{1}{2}\delta_1^1 R$$

$$-k^2p = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4}\right)$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{(\nu'-\lambda')}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$-k^2p = e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} - \frac{(\nu'-\lambda')}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$-k^2p = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$k^2T_2^2 = -k^2T_3^3 = R_2^2 - \frac{1}{2}\delta_2^2 R = R_3^3 - \frac{1}{2}\delta_3^3 R$$

$$-k^2p = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2}\left(\frac{r(\nu' - \lambda')}{2} + 1\right)$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{(\nu'-\lambda')}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$-k^2p = e^{-\lambda}\left(\frac{(\nu' - \lambda')}{2r} + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{(\nu'-\lambda')}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$-k^2p = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{(\nu'-\lambda')}{2r}\right)$$

$$-k^2p = -\frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + \frac{2(\nu'-\lambda')}{r}\right)$$

LAMPIRAN B
KOMBINASI LINEAR DARI PENYELESAIAN PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

$$\kappa^2\rho = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{1.B}$$

$$-\kappa^2 p = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{2.B}$$

$$-\kappa^2 p = -\frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu'' - \nu'\lambda' + \nu'^2 + \frac{2(\nu'-\lambda')}{r}\right) \tag{3.B}$$

Untuk menyelesaiakan kombinasi linear dari persamaan (1.B), (2.B) dan (3.B) :

Eliminasi Persamaan (3.B) dengan persamaan (2.B)

$$0 = e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{(\nu'-\lambda')}{2r}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}$$

$$0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{(\nu'+\lambda')}{2r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4}\right)$$

$$\frac{\nu''}{2}\,e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{(\nu'+\lambda')}{2r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}$$

$$\nu'' = -\frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{(\nu'+\lambda')}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2e^{\lambda}}{r^2}$$

Persamaan (2.B) diturunkan terhadap r

$$-\kappa^2 p' = \lambda' e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - e^{-\lambda}\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}\right) - \frac{2}{r^3}$$

$$-p' = \frac{\lambda'}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2} - \kappa^2 p\right) - \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}\right) - \frac{2}{\kappa^2 r^3}$$

$$-p' = -\frac{2}{\kappa^2 r^3} + \frac{\lambda'}{\kappa^2 r^2} - \lambda' p - \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{2}{r^3} - \frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\nu'^2}{2r} + \frac{\nu'\lambda'}{2r} + \frac{(\nu'+\lambda')}{r^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{2e^{\lambda}}{r^3}\right)$$

$$-p' = \frac{\lambda'}{\kappa^2 r^2} - \lambda' p - \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{\lambda'}{r^2} - \frac{\nu'^2}{2r} + \frac{\nu'\lambda'}{2r}\right)$$

$$-p' = -\lambda' p - \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\nu'^2}{2r} - \frac{\nu'\lambda'}{2r}\right) + \frac{\lambda'}{\kappa^2 r^2} - \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$-p' = -\lambda' p - \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{v'^2}{2r} - \frac{\nu'\lambda'}{2r}\right) + \lambda' p$$

$$-p' = \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{v'^2}{2r} + \frac{\nu'\lambda'}{2r}\right) \qquad (4.B)$$

Kemudian eliminasi persamaan (1.B) dengan persamaan (2.B)

$$\kappa^2(\rho + p) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$(\rho + p) = \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$\frac{\nu'}{2}(\rho + p) = \frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{\nu'\lambda'}{2r} + \frac{v'^2}{2r}\right) \qquad (5.B)$$

Kemudian subtitusi persamaan (5.B) ke persamaan (4.B), didapatkan

$$p' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + p) \qquad (6.B)$$

LAMPIRAN C
KOMBINASI LINIER DARI PENYELESAIAN PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN UNTUK SUMBER GANDA

$$-\kappa^2(\rho+\alpha\theta_0^0) = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right) \tag{1.C}$$

$$-\kappa^2(-p+\alpha\theta_1^1) = -\frac{1}{r^2}+e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right) \tag{2.C}$$

$$-\kappa^2(-p+\alpha\theta_2^2)=\frac{1}{4} e^{-\lambda}\left(2\nu''-\nu'\lambda'+\nu'^2+\frac{2(\nu'-\lambda')}{r}\right) \tag{3.C}$$

Untuk menyelesaiakan kombinasi linear dari persamaan (1.C), (2.C) dan (3.C) :

Eliminasi Persamaan (2.C) dengan persamaan (3.C)

$$-\kappa^2\alpha(\theta_1^1-\theta_2^2)$$
$$= -\frac{1}{r^2}+e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)+e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{(\nu'-\lambda')}{2r}\right)$$

$$-\kappa^2\alpha(\theta_1^1-\theta_2^2) = -\frac{1}{r^2}+e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{(\nu'+\lambda')}{2r}-\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}\right)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2}\right)=e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{(\nu'+\lambda')}{2r}+\frac{1}{r^2}\right)-\kappa^2\alpha(\theta_2^2-\theta_1^1)-\frac{1}{r^2}$$

$$\nu''=-\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{(\nu'+\lambda')}{r}+\frac{2}{r^2}-2\kappa^2\alpha(\theta_2^2-\theta_1^1)e^{\lambda}-\frac{2e^{\lambda}}{r^2}$$

Kemudian Persamaan (2.C) diturunkan terhadap *r*

$$-\kappa^2(-p'+\alpha(\theta_1^1)') = \frac{2}{r^3}-\lambda' e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)+e^{-\lambda}\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{\nu''}{r}-\frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$(-p'+\alpha(\theta_1^1)') = -\frac{2}{\kappa^2r^3}+\frac{\lambda'}{\kappa^2}\left(-\kappa^2(-p+\theta_1^1)+\frac{1}{r^2}\right)$$
$$-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{\nu''}{r}-\frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)' = -\frac{2}{\kappa^2r^3}-\lambda'(-p+\theta_1^1)+\frac{\lambda'}{\kappa^2r^2}-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{2}{r^3}-\frac{\nu'}{r^2}\right)$$
$$-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2 r}\left(-2\kappa^2\alpha(\theta_2^2-\theta_1^1)e^{\lambda}-\frac{2e^{\lambda}}{r^2}-\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{2}+\frac{(\nu'+\lambda')}{r}+\frac{2}{r^2}\right)$$

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)' = -\frac{2}{\kappa^2r^3}-\lambda'(-p+\theta_1^1)+\frac{\lambda'}{\kappa^2r^2}-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{2}{r^3}-\frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$+\frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)+\frac{2}{\kappa^2 r^3}-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\nu'^2}{2r}+\frac{\nu'\lambda'}{2r}+\frac{(\nu'+\lambda')}{r^2}+\frac{2}{r^3}\right)$$

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)'=-\lambda'(-p+\theta_1^1)+\frac{\lambda'}{\kappa^2 r^2}+\frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)$$
$$-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{\lambda'}{r^2}-\frac{\nu'^2}{2r}+\frac{\nu'\lambda'}{2r}\right)$$

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)'=-\lambda'(-p+\theta_1^1)+\frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\nu'^2}{2r}-\frac{\nu'\lambda'}{2r}\right)$$
$$+\frac{\lambda'}{\kappa^2 r^2}-\frac{\lambda' e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)$$

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)'=-\lambda'(-p+\theta_1^1)+\frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\nu'^2}{2r}-\frac{\nu'\lambda'}{2r}\right)$$
$$+\lambda'(-p+\theta_1^1)$$

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)'=\frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\nu'^2}{2r}-\frac{\nu'\lambda'}{2r}\right) \quad (4.C)$$

Kemudian eliminasi persamaan (1.C) dengan persamaan (2.C)

$$-\kappa^2(\rho+p)-\kappa^2\alpha(\theta_0^0-\theta_1^1)=e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'}{r}\right)$$

$$(\rho+p)+\alpha(\theta_0^0-\theta_1^1)=-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'}{r}\right)$$

$$\frac{\nu'}{2}(\rho+p)+\frac{\nu'}{2}\alpha(\theta_0^0-\theta_1^1)=-\frac{e^{-\lambda}}{\kappa^2}\left(-\frac{\lambda'\nu'}{2r}-\frac{\nu'^2}{2r}\right) \quad (5.C)$$

Kemudian subtitusi persamaan (5.C) ke persamaan (4.C), didapatkan

$$-p'+\alpha(\theta_1^1)'=\frac{2\alpha}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)+\frac{\nu'}{2}(\rho+p)+\frac{\nu'}{2}\alpha(\theta_0^0-\theta_1^1) \quad (6.C)$$

LAMPIRAN D
KOMBINASI LINIER DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN UNTUK ($\boldsymbol{\alpha = 0}$) DENGAN $\boldsymbol{\xi(r) = \nu(r)}$

$$-\kappa^2\rho = -\frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r} \tag{1.D}$$

$$\kappa^2 p = -\frac{1}{r^2} + \mu\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) \tag{2.D}$$

$$\kappa^2 p = \frac{\mu}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + \frac{\mu'}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) \tag{3.D}$$

Untuk menyelesaiakan kombinasi linear dari persamaan (1.D), (2.D) dan (3.D) :

Eliminasi persamaan (3.D) dengan persamaan (2.D)

$$0 = \frac{\mu}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} - \frac{4}{r^2} - \frac{4\nu'}{r}\right) + \frac{\mu'}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$-\frac{\mu'}{\mu}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) - \frac{4}{r^2\mu} = 2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} - \frac{4}{r^2} - \frac{4\nu'}{r}$$

$$\nu'' = -\frac{\mu'\nu'}{2\mu} - \frac{\mu'}{\mu r} - \frac{2}{\mu r^2} - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{2}{r^2}$$

Kemudian Persamaan (2.D) diturunkan terhadap r

$$\kappa^2 p' = \frac{2}{r^3} + \mu'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \mu\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$p' = \frac{\mu'\nu'}{2\kappa^2 r} - \frac{\mu'\nu'^2}{2\kappa^2 r} \tag{4.D}$$

Kemudian eliminasi persamaan (1.D) dengan persamaan (2.D)

$$-\kappa^2(\rho + p) = \frac{\mu'}{r} - \frac{\mu\nu'}{r}$$

$$\frac{\nu'}{2}(\rho + p) = -\frac{\mu'\nu'}{2\kappa^2 r} + \frac{\mu'\nu'^2}{2\kappa^2 r} \tag{5.D}$$

Kemudian subtitusi persamaan (5.D) ke perssamaan (4.D), didapatkan

$$p' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + p) \tag{6.D}$$

LAMPIRAN E
KOMBINASI LINIER DARI PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN YANG MEMUAT SUMBER GRAVITASI $\boldsymbol{\theta_\nu^\mu}$

$$-\kappa^2\theta_0^0 = \frac{f^*}{r^2} + \frac{f^{*\prime}}{r} \tag{1.E}$$

$$-\kappa^2\theta_1^1 = f^*\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) \tag{2.E}$$

$$-\kappa^2\theta_2^2 = \frac{f^*}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r}\right) + \frac{f^{*\prime}}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) \tag{3.E}$$

Untuk menyelesaiakan kombinasi linear dari persamaan (1.E), (2.E) dan (3.E) :

Eliminasi Persamaan (2.E) dengan persamaan (3.E)

$$-\kappa^2\theta_2^2 + \kappa^2\theta_1^1 = \frac{f^*}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r}\right) + \frac{f^{*\prime}}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) - f^*\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$-\kappa^2(\theta_2^2 - \theta_1^1) = \frac{f^*}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} - \frac{4}{r^2} - \frac{4\nu'}{r}\right) + \frac{f^{*\prime}}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right)$$

$$-\kappa^2(\theta_2^2 - \theta_1^1) - \frac{f^{*\prime}}{4}\left(\nu' + \frac{2}{r}\right) - \frac{f^*}{4}\left(\nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} - \frac{4}{r^2}\right) = \frac{f^*}{2}\nu''$$

$$-\frac{2\kappa^2}{f^*}(\theta_2^2 - \theta_1^1) - \frac{f^{*\prime}}{f^*}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{2}{r^2} = \nu''$$

Kemudian Persamaan (2.E) diturunkan terhadap *r*

$$-\kappa^2(\theta_1^1)' = f^{*\prime}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + f^*\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$(\theta_1^1)' = -\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{f^*}{\kappa^2}\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2}\right)$$

$$(\theta_1^1)' = -\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{f^*}{\kappa^2}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{\nu'}{r^2}\right)$$
$$+ \frac{f^*}{\kappa^2 r}\left(\frac{2\kappa^2}{f^*}(\theta_2^2 - \theta_1^1) + \frac{f^{*\prime}}{f^*}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right) + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'}{r} - \frac{2}{r^2}\right)$$

$$(\theta_1^1)' = -\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{f^*}{\kappa^2}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{\nu'}{r^2}\right) + \frac{2}{r}(\theta_2^2 - \theta_1^1) + \frac{f^{*\prime}}{\kappa^2 r}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right)$$
$$+ \frac{\nu'^2 f^*}{2\kappa^2 r} - \frac{\nu' f^*}{\kappa^2 r^2} - \frac{2f^*}{\kappa^2 r^3}$$

$$(\theta_1^1)' = -\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)+\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2}\left(\frac{\nu'}{2r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{2}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)+\frac{f^*}{\kappa^2}\left(\frac{2}{r^3}+\frac{\nu'}{r^2}\right)$$
$$+\frac{f^*}{\kappa^2}\left(\frac{\nu'^2}{2r}-\frac{\nu'}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right)$$
$$(\theta_1^1)' = -\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2}\frac{\nu'}{2r}+\frac{2}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)+\frac{f^*}{\kappa^2}\left(\frac{\nu'^2}{2r}\right) \tag{4.E}$$

Kemudian eliminasi persamaan (1.E) dengan persamaan (2.E)

$$-\kappa^2\theta_0^0+\kappa^2\theta_1^1 = \frac{f^*}{r^2}+\frac{f^{*\prime}}{r}-f^*\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)$$
$$-\kappa^2(\theta_0^0-\theta_1^1) = \frac{f^{*\prime}}{r}-\frac{\nu' f^*}{r}$$
$$(\theta_0^0-\theta_1^1) = \frac{\nu' f^*}{\kappa^2 r}-\frac{f^{*\prime}}{\kappa^2 r}$$
$$\frac{\nu'}{2}(\theta_0^0-\theta_1^1) = \frac{\nu'^2 f^*}{2\kappa^2 r}-\frac{\nu'^2 f^{*\prime}}{2\kappa^2 r} \tag{5.E}$$

Kemudian subtitusi persamaan (5.E) ke persamaan (4.E), didapatkan

$$(\theta_1^1)' = \frac{2}{r}(\theta_2^2-\theta_1^1)+\frac{\nu'}{2}(\theta_0^0-\theta_1^1) \tag{6.E}$$

LAMPIRAN F
SOLUSI SCHWARZSCHILD

Dari lampiran A, didapatkan nilai komponen Ricci yang memiliki nilai adalah

$$R_{00} = e^{(\nu-\lambda)}\left(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}\right) \tag{1.F}$$

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'}{r}+\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'^2}{4} \tag{2.F}$$

$$R_{22} = 1-e^{-\lambda}\left(\frac{r(\nu'-\lambda')}{2}+1\right) \tag{3.F}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\left(1-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'-\lambda'}{2}r+1\right)\right) \tag{4.F}$$

Selanjutnya untuk medan gravitasi di bagian luar dan jauh dari sumber maka tensor Ricci akan memenuhi persamaan

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5.F}$$

Sehingga dari persamaan (1.F) – (4.F) memberikan

$$\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4} = 0 \tag{6.F}$$

$$\frac{\nu''}{2}-\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'^2}{4} = 0 \tag{7.F}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{r(\nu'-\lambda')}{2}+1\right)-1 = 0 \tag{8.F}$$

Kemudian eliminasi persamaan (7.F) dengan persamaan (6.F) sehingga memberikan

$$\frac{-\nu'-\lambda'}{2} = 0 \quad \text{atau} \quad \lambda'+\nu' = 0 \tag{9.F}$$

sehingga $\lambda'+\nu'$=konstan. Selanjutnya, dengan digunakan syarat batas di kejahuan yaitu $r\to\infty$, ruang adalah datar sehingga ν dan λ lenyap. Di dalam limit ini, elemen garis ds^2 akan tereduksi menjadi bentuk Minkowskian. Sehingga didapatkan

$$\lambda' + \nu' = 0 \ \rightarrow \nu = -\lambda \tag{10.F}$$

Kondisi ini membuat persamaan (8.F) menjadi

$$e^{\nu}(r\nu' + 1) = \frac{d}{dr}(re^{\nu}) = 1 \tag{11.F}$$

dengan mengintergasikan persamaan (11.F), maka akan didapat

$$\int d(re^{\nu}) = \int dr$$

$$re^{\nu} = r - 2m$$

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{12.F}$$

dengan $(-2m)$ adalah konstanta integrasi yang memiliki keterkaitan dengan massa sumber. Kemudian dari persamaan (12.F) akan didapatkan elemen garis yang baru, yaitu

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{13.F}$$

Persamaan (13.F) dikenal sebagai elemen garis Schwarzschild atau solusi Schwarzschild. Elemen garis atau metrik ini menggambarkan medan gravitasi di luar sumber yang bersimetri bola dan tidak bergantung pada distribusi materi di dalam sumber atau ρ = konstan. Metrik tersebut akan bernilai tak hingga ketika $r = 2m$, jarak $r = 2m$ ini disebut sebagai jari-jari Schwarzschild.

LAMPIRAN G
SKRIP PLOT KURVA UNTUK SOLUSI TOLMAN IV ISOTROPIK DAN ANISOTROPIK

1. Skrip plot kurva untuk nilai densitas pada solusi SSSPF Tolman IV.

```
A = 299.915759;
C = 533.875442;
r = 0;
M = [];
for i=0:0.1:8.831
N = (3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2);
M = [M; r N];
r = r+0.1;
end
M
plot (M(:,1),M(:,2))
title('Nilai densitas pada solusi SSSPF Tolman IV');
xlabel('r  (km)')
ylabel('\rho  (gm/cm^3')
```

2. Skrip plot kurva untuk nilai tekanan pada solusi SSSPF Tolman IV.

```
A = 299.915759;
C = 533.875442;
r = 0;
M = [];
for i=0:0.1:8.831
N = (C-A-(3*r^2))/(8*pi*C*(A+2*r^2));
M = [M; r N];
r = r+0.1;
end
M
plot (M(:,1),M(:,2))
title('Nilai tekanan pada solusi SSSPF Tolman IV');
xlabel('r  (km)')
ylabel('p  (dyne/cm^2)')
```

3. Skrip plot kurva untuk nilai rasio dari tekanan dan densitas pada solusi SSSPF Tolman IV.

```
A = 299.915759;
C = 533.875442;
r = 0;
M = [];
for i=0:0.1:8.831
N1 = (C-A-(3*r^2))/(8*pi*C*(A+2*r^2));
N2 = (3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2);
N = N1/N2;
M = [M; r N];
r = r+0.1;
end
M
plot (M(:,1),M(:,2))
title('Nilai rasio dari tekanan dan densitas pada solusi SSSPF Tolman IV');
xlabel('r  (km)')
ylabel('p/\rho  (dyne cm/gm)')
```

4. Skrip plot kurva untuk densitas efektif untuk nilai alpha yang berbeda.

```
a = 0; %a=alpha
A = 299.915759;
C = 533.875442;
r = 0;
M = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
M = [M; r N];
r = r+0.1;
end
M
a = 0.1;
A = 299.915759;
```

```
C = 533.875442;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 0.3;
A = 299.915759;
C = 533.875442;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 0.5;
A = 299.915759;
C = 533.875442;
R = 25;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (M(:,1),M(:,2),'r',O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Densitas efektif untuk nilai alpha yang berbeda');
xlabel('r  (km)')
ylabel('\rho\sim  (gm/cm^3)')
legend('\alpha=0','\alpha=0,1','\alpha=0,3','\alpha=0,5')
```

5. Skrip plot kurva untuk tekanan radial efektif untuk nilai alpha yang berbeda.

```
a = 0; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
M = [];
for i=0:0.1:8.831
N = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
M = [M; r N];
r = r+0.1;
end
M
a = 0.1;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
N = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 0.3;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
N = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 0.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
N = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (M(:,1),M(:,2),'r',O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Tekanan radial efektif untuk nilai alpha yang berbeda');
xlabel('r  (km)')
ylabel('pr\sim  (dyne/cm^2)')
legend('\alpha=0','\alpha=0,1','\alpha=0,3','\alpha=0,5')
```

6. Skrip plot kurva untuk tekanan tangensial efektif untuk nilai alpha yang berbeda.

```
a = 0; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
M = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
M = [M; r N];
r = r+0.1;
end
M
a = 0.1;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 0.3;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 0.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
N = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (M(:,1),M(:,2),'r',O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Tekanan tangensial efektif untuk nilai alpha yang berbeda');
xlabel('r  (km)')
ylabel('pt\sim  (dyne/cm^2)')
legend('\alpha=0','\alpha=0,1','\alpha=0,3','\alpha=0,5')
```

7. Skrip plot kurva untuk faktor anisotropik untuk nilai alpha yang berbeda.

```
a = 0.1; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m-n;
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 0.3;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m-n;
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 0.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
r = 0;
Q = [];
```

```
for i=0:0.1:8.831
m = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m-n;
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Faktor anisotropik untuk nilai alpha yang berbeda');
xlabel('r  (km)')
ylabel('\Delta = pt\sim - pr\sim  (dyne/cm^2)')
legend('\alpha=0,1','\alpha=0,3','\alpha=0,5')
```

8. Skrip plot kurva untuk kondisi energi dominan untuk persamaan 4.37.

```
a = 0.1; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m-n;
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 0.3;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m-n;
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 0.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m-n;
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Kondisi energi dominan untuk persamaan 4.37');
xlabel('r')
ylabel('\rho\sim - pr\sim')
legend('\alpha=0,1','\alpha=0,3','\alpha=0,5')
```

9. Skrip plot kurva untuk kondisi energi dominan untuk persamaan 4.38.

```
a = 0.1; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = m-n;
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 0.3;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
```

```
n = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = m-n;
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 0.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = m-n;
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Kondisi energi dominan untuk persamaan 4.38');
xlabel('r')
ylabel('\rho\sim - pt\sim')
legend('\alpha=0,1','\alpha=0,3','\alpha=0,5')
```

10. Skrip plot kurva untuk kondisi energi kuat.

```
a = 0.5; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
N1 = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N2 = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N3 = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = N1+N2+2*N3;
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 1.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
N1 = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N2 = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N3 = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = N1+N2+2*N3;
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 2.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
N1 = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N2 = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N3 = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = N1+N2+2*N3;
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Kondisi energi kuat');
xlabel('r')
ylabel('\rho\sim + pr\sim + 2pt\sim')
legend('\alpha=0,5','\alpha=1,5','\alpha=2,5')
```

11. Skrip plot kurva untuk kondisi energi null.

```
a = 0.5; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
```

```
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m+n;
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 1.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m+n;
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 2.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = (3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2));
N = m+n;
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Kondisi energi null');
xlabel('r')
ylabel('\rho\sim + pr\sim')
legend('\alpha=0,5','\alpha=1,5','\alpha=2,5')
```

12. Skrip plot kurva untuk kondisi energi lemah.

```
a = 0.5; %a=alpha
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
O = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = m+n;
O = [O; r N];
r = r+0.1;
end
O
a = 1.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
P = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = m+n;
P = [P; r N];
r = r+0.1;
end
P
a = 2.5;
A = 299.915759;
R = 77.986561;
C = 533.875442;
r = 0;
Q = [];
for i=0:0.1:8.831
m = ((1-a)*(3*A^2+A*(3*C+(7*r^2))+2*r^2*(C+(3*r^2)))/(8*pi*C*(A+2*r^2)^2))+((6*a*(A+r^2))/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
n = ((3*(1-a)*(R-r^2))/(8*pi*(A+3*R)*(A+2*r^2)))+((3*a*r^2)/(8*pi*(A+3*r^2)^2));
N = m+n;
Q = [Q; r N];
r = r+0.1;
end
Q
plot (O(:,1),O(:,2),'--g',P(:,1),P(:,2),':b',Q(:,1),Q(:,2),'-.k')
title('Kondisi energi lemah');
xlabel('r')
ylabel('\rho\sim + pt\sim')
legend('\alpha=0,5','\alpha=1,5','\alpha=2,5')
```

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana NO.50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **FITHROTUL AZIZAH**
NIM : **16640034**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/Fisika**
Judul Skripsi : **Studi Solusi Bintang Anisotropik untuk Ruang-Waktu Tolman IV menggunakan Metode *Gravitational Decoupling***
Pembimbing I : **Drs. Abdul Basid, M.Si**
Pembimbing II : **Arista Romadani, M.Sc**

No.	Hari/Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	Senin/17 Februari 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
2	Kamis/9 April 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
3	Kamis/30 April 2020	Konsultasi Bab I, II, dan III	
4	Senin/11 Mei 2020	Konsultasi Bab III dan ACC	
5	Senin/07 September 2020	Konsultasi Data Hasil Bab IV	
6	Selasa/15 September 2020	Konsultasi Bab IV	
7	Senin/21 September 2020	Konsultasi Kajian Agama	
8	Rabu/30 September 2020	Konsultasi Bab IV	
9	Rabu/07 Oktober 2020	Konsultasi Bab IV dan ACC	
10	Selasa/03 November 2020	Konsultasi semua Bab, Abstrak, dan ACC	
11	Selasa/03 November 2020	Konsultasi Integrasi dan ACC	
12	Kamis/10 Desember 2020	Konsultasi penulisan semua Bab dan ACC	

Malang, 10 Desember 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
19650504 199003 1 003