PELABELAN TITIK DAN SISI $L(2,1)$ PADA GRAF *SPARKLE*

SKRIPSI

OLEH
HUSNUL YAQIN
NIM. 14610093

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2020

PELABELAN TITIK DAN SISI $L(2,1)$ PADA GRAF *SPARKLE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Husnul Yaqin
NIM. 14610093

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2020

PELABELAN TITIK DAN SISI $L(2,1)$ PADA GRAF *SPARKLE*

SKRIPSI

Oleh
HUSNUL YAQIN
NIM. 14610093

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Oktober 2019

Pembimbing I,

Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Pembimbing II,

Ach. Nasichuddin, MA
NIP. 19730705 200003 1002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PELABELAN TITIK DAN SISI $L(2,1)$ PADA GRAF SPARKLE

SKRIPSI

Oleh
HUSNUL YAQIN
NIM. 14610093

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Mat)
Tanggal 4 Desember 2019

Penguji Utama	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nasichuddin, MA	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Husnul Yaqin

NIM : 14610093

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Pelabelan Titik dan Sisi $L(2,1)$ pada Graf *Sparkle*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 Oktober 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
0128BAFF126295070
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Husnul Yaqin
NIM. 14610093

MOTO

تبسُّمك في وجه أخيك لك صدقة

"*Senyummu di depan saudaramu adalah sedekah*"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, ayahanda tercinta Marsudi dan ibunda tercinta Rafi'ah, segenap keluarga, penulis yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai kepada penulis, dan sahabat-sahabat penulis yang senantiasa menemani di kala senang dan sedih.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin, MA. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.

7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
8. Bapak Marsudi dan ibu Rafi'ah yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 (MATH EIGEN) yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moral maupun materi.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 18 Oktober 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$V(G)$	: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf G
$Se(n,r)$	: Graf sparkle berorde n dan r
$\lambda_{2,1}(Se(n,r))$	: Nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(n,r)$
$\lambda'_{2,1}(Se(n,r))$	: Nilai minimal label terbesar dari pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(n,r)$
$N_G(v)$ atau $N(v)$	: Himpunan tetangga dari titik v
C_n	: Graf Sikel
$K_{1,n}$	: Graf Bintang
K_n	: Graf Lengkap

ABSTRAK

Yaqin, Husnul. 2019. Pelabelan Titik dan Sisi $L(2,1)$ pada Graf Sparkle. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, (II) Ach. Nasichuddin, MA.

Kata Kunci: Pelabelan Titik $L(2,1)$, Pelabelan Sisi $L(2,1)$, Graf Sparkle.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimal label terbasar pada pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle. Langkah yang digunakan adalah memberi label pada setiap titik dan sisi pada graf sperkle $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$, dengan aturan pelabelan $L(2,1)$. Kemudian dari pelabelan tersebut ditemukan beberapa pola, dan dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema beserta bukti.

Hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$ adalah

Pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf sparkle:

$$\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 6 & \text{jika } r = 2 \\ r+3 & \text{jika } n = 2k; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \\ r+4 & \text{jika } n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle:

$$\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 7 & \text{jika } n = \text{ganjil}, r = 2 \\ 2r+2 & \text{jika } \begin{cases} n = \text{ganjil}, r \geq 3; r,n \in \mathbb{N} \\ n = \text{genap}, r \geq 2; r,n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan mengunakan pelabelan $L(3,2,1)$ atau varian lain dari pelabelan $L(2,1)$.

ABSTRACT

Yaqin, Husnul. 2019. $L(2,1)$ Vertex and Edge Labeling on Sparkle Graph. Thesis. Department of Mathematicts, Faculty of Science and Technology, State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor (I) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M. Pd., (II) Ach. Nasichuddin, MA.

Keywords: $L(2,1)$ Vertex Labeling, $L(2,1)$ Edge Labeling, Sparkle Graph

The purpose of this research is to determine the pattern $L(2,1)$ vertex and edge labeling on sparkle graph. The steps are to label each of vertices and edges of the Sparkel graph $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$ with labeling $L(2,1)$ rules. Then from the patterns found, then a conjecture is formulated into a theorem which is proved.

The results of this study can be concluded that the minimum value label of $L(2,1)$ vertex and edge labeling in the sparkle graph $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$ is:

$L(2,1)$ Vertex labeling on sparkle graph:

$$\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 6 & \text{if } r = 2 \\ r+3 & \text{if } n = 2k; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \\ r+4 & \text{if } n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$L(2,1)$ Edge labeling on sparkle graph:

$$\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 7 & \text{if } n = \text{odd}, r = 2 \\ 2r+2 & \text{if } \begin{cases} n = \text{odd}, r \geq 3; r,n \in \mathbb{N} \\ n = \text{even}, r \geq 2; r,n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

For the next research it is suggested to develop this research using $L(3,2,1)$ labeling or other varieties of $L(2,1)$ labeling.

مستخلص البحث

اليقين، حسن. ٢٠١٩. وسم *النقطة والحافة* L (٢،١) *في الرسم البياني سفرقل*. البحث العلمي، قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف : (١) الدكتور وحي هنق إراوان الحاج الماجستير. (٢) أحمد ناصح الدين الماجستير.

الكلمة المفتاحية : وسم النقطة L(٢،١) ، وسم الحافة L(٢،١)، الرسم البياني سفرقل.

إن الغرض من هذا البحث تعيين أكبر الوسم من أصغر القيمة في وسم النقطة والحافة L(٢،١) الرسم البياني سفرقل. والخطوة المستخدمة هي وسم كل النقطة والحافة في الرسم البياني سفرقل $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$ بقواعد الوسم L(٢،١). و من هذا الوسم، ينكشف به عدة أنماط، وصنع التخمين الذى يصنع منه نظرية بالدليل.

ونتائج هذا البحث العلمي يستنتج من خلاله أن أكبر الوسم من أصغر القيمة لوسم النقطة والحافة L(٢،١) في الرسم البياني سفرقل $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$ هو :

وسم النقطة L (٢،١) في الرسم البياني سفرقل :

$$\lambda_{٢,١}(Se(n,r)) = \begin{cases} ٦ & \text{إذا } r = ٢ \\ r + ٣ & \text{إذا } n = ٢k; k \geq ٢, r > ٢; k \in \mathbb{N} \\ r + ٤ & \text{إذا } n = ٢k - 1; k \geq ٢, r > 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

وسم الحافة L (٢،١) في الرسم البياني سفرقل :

$$\lambda'_{٢,١}(Se(n,r)) = \begin{cases} ٧ & \text{إذا } n = \text{فردي}, r = ٢ \\ ٢r + ٢ & \text{إذا } \begin{cases} n = \text{فردي}, r \geq ٣; r,n \in \mathbb{N} \\ n = \text{زوجي}, r \geq ٢; r,n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

يُرجى للبحث القادم أن يرقي هذا البحث العلمي باستعمال وسم L(3،2،1) أو النوع الآخر من وسم L(2،1).

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang mempunyai banyak diterapan dalam kehidupan, salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf di bidang aljabar. Graf sering digunakan untuk merepresentasikan sebuah objek dan hubungannya dengan objek lain. Sejarah teori graf bermula saat ahli matematika Swiss yang bernama Leonhard Euler memecahkan masalah jembatan Königsberg. Masalah jembatan Königsberg adalah teka-teki lama mengenai kemungkinan menemukan jalan setapak di tujuh jembatan yang membentang di sepanjang sebuah sungai bercabang yang melewati sebuah pulau tapi dengan tanpa melewati jembatan dua kali. Euler memecahkan masalah tersebut dengan teori graf yang pertama kali (Carlson, 2017).

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Untuk menegaskan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, biasanya V dinotasikan sebagai $V(G)$ dan E dinotasikan sebagai $E(G)$ (Chartrand, dkk, 2016:3). Graf digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk mempermudah menyelesaikan berbagai macam persoalan yang sulit diselesaikan dengan perhitungan dan pertimbangan biasa, misalnya dalam pembuatan trayek perjalanan angkutan. Pengaturan jadwal, pengaturan jaringan listrik, dan lain-lain. Graf sparkle yang dinotasikan $Se(n,r)$ adalah graf yang diperoleh dari $C_n \odot \overline{K_{r-1}}$ dengan mensubdivisi setiap sisi-sisi siklus yang dihasilkan dari operasi tersebut.

Banyak topik-topik bahasan yang belum terpecahkan yang membuat para ilmuan yang ingin menggunakan teori atau teorema tentang suatu pembahasan tersebut menjadi terhambat. Karena tidak mungkin menggunakan ilmu yang belum jelas kebenarannya. Seperti yang dijelaskan dalam firman Allah surat al-Isra' (17) ayat 36 yang berbunyi:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُولَٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ﴿٣٦﴾

Artinya:

> *"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya." (QS. al-Isra': 36)*

Pelabelan pada suatu graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970) (Chartrand, dkk. 2016).

Pelabelan $L(2,1)$ adalah pelabelan graf dengan titik atau sisi yang terhubung langsung harus memiliki selisi label minimal dua, sedangkan titik atau sisi yang terhubung oleh lintasan dengan panjang dua harus memiliki label yang berbeda dengan selisih minimal satu (Hale, 1980). Berdasarkan pemaparan tersebut, maka penelitian ini dimaksudkan untuk mencari nilai minimal label terbesal dari pelabelan titik dan sisi $L(2.1)$ pada graf *sparkle*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(n,r)$.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(n,r)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat penelitian ini adalah untuk memudahkan dalam mencari nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis mengunakan metode studi pustaka, yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data-data maupun informasi dengan bantuan berbagai macam material seperti buku, catatan, dokumen, jurnal, artikel, dan sebagainya yang berkaitan dengan pembahasan. Penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengindentifikasi graf sparkle $Se(n,r)$; $n,r \in \mathbb{N}$.
2. Memberi label pada setiap titik dan sisi pada graf sparkle $Se(n,r)$ dengan aturan pelabelan $L(2,1)$.

3. Membuat konjektur (dugaan awal) berdasarkan pola yang ditemukan pada pelabelan titik dan dan sisi pada graf sparkle $Se(n, r)$, dengan aturan pelabelan $L(2,1)$.
4. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
5. Menghasilkan teorema tentang pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle yang dilengkapi dengan bukti.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, agar memudahkan dalam pemahaman maka penulis membagi menjadi empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab-subbab. Adapun sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini, penulis menjelaskan tantang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan, dan menjelaskan tentang kajian graf dalam al-Quran.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang konsep atau dasar teori yang mendukung bagian pembahasan yang meliputi definisi, teorema, dan sifat-sifat serta contoh yang berhubungan dengan pembahasan.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini, menjelaskan tentang pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle.

Bab IV Penutup

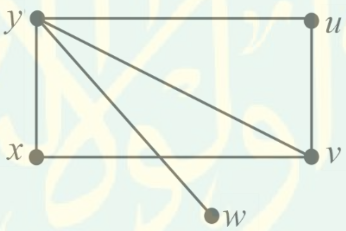
Pada bab ini, menyimpulkan hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat dijadikan sebagai acuan penelitian selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan Vadalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Untuk menegaskan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G, biasanya V dinotasikan sebagai $V(G)$ dan E dinotasikan sebagai $E(G)$ (Chartand, dkk, 2016:3). Sebagai contoh, graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{uv, uy, vx, vy, wy, xy\}$ bisa dilihat pada Gambar 2.1 di bawah ini:



Gambar 2.1 Contoh Graf

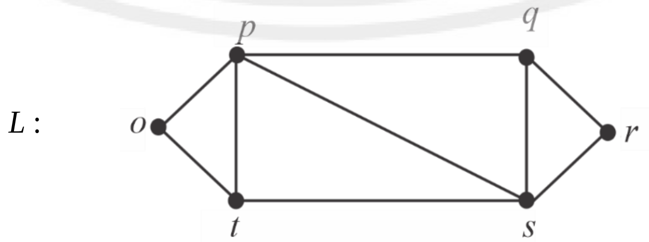
Jika $e = uv$ adalah sisi dari graf G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung. Dua titik yang terhubung langsung bisa disebut tetangga. Himpunan tetangga dari titik v adalah lingkungan terbuka dari v dan di lambangkan dengan $N_G(v)$ atau $N(v)$. Himpunan $N|v| = N(v) \cup \{v\}$ disebut lingkungan tertutup dari v. Jika uv dan vx disebut terkait langsung *(incident)*, maka uv dan vw sisi yang terhubung langsung. Titik u dan sisi uv adalah terkait langsung, sama halnya titik v dan sisi uv (Chartrand, dkk. 2016).

Pada graf G pada Gambar 2.1, titik u dan v adalah terhubung langsung di G, sementara titik u dan x tidak terhubung langsung di G. Sisi uv dan vx terhubung langsung di G, sementara sisi vx dan wy tidak terhubung langsung di G. Titik v terkait langsung dengan sisi uv tetapi tidak terkait dengan sisi wy (Chartrand, dkk. 2016).

2.1.2 Jalan dan Lintasan

Misalkan G adalah graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (tidak harus berbeda). Jalan $u - v$ pada G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i, | i = 1,2,3, \dots, n$ adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009:49). Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u - v$ dapat ditulis menjadi $W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$ (Abdussakir, dkk, 2009:50). Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009:51).

Perhatikan graf L pada Gambar 2.2 sebagai berikut.



Gambar 2.2 Jalan dan Lintasan pada Graf L

Berdasarkan Gambar 2.2, maka $W_1 = o, p, q, r, s, p, t, o$ dan $W_2 = o, p, q, r, s, p, t$ adalah jalan di L. W_1 adalah jalan tertutup dan W_2 adalah jalan terbuka. W_1 mempunyai panjang 7 dan W_2 mempunyai panjang 6. $W_3 = o, p, q, r, s, t$ adalah lintasan di L karena semua titiknya berbeda.

2.1.3 Jarak pada Graf

Jika u dan v adalah titik yang berbeda pada graf terhubung G, maka terdapat suatu lintasan $u - v$ di G. Sehingga, bisa jadi terdapat beberapa lintasan $u - v$ di G dengan kemungkinan panjang yang berbeda. Jarak $d_G(u, v)$ dari titik u ke titik v pada graf terhubung G merupakan panjang terkecil dari suatu lintasan $u - v$ di G. Jarak dari titik u ke titik v pada suatu graf G biasanya dinotasikan dengan $d(u,v)$ (Chartrand, dkk, 2016:44). Jika e_i dan e_j adalah sisi yang berbeda pada graf terhubung G, terdapat suatu lintasan $e_i - e_j$ di G. Sehingga, bisa jadi terdapat beberapa lintasan $e_i - e_j$ di G dengan kemungkinan panjang yang berbeda. Jarak $d(e_i, e_j)$ dari sisi e_i ke sisi e_j pada graf terhubung G merupakan panjang terkecil dari suatu lintasan $e_i - e_j$ di G. Jarak dari sisi e_i ke sisi e_j pada suatu graf G biasanya dinotasikan dengan $d(e_i, e_j)$ (Huilgol dan Ulla, 2014).

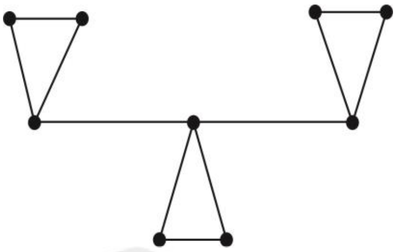
2.2 Graf Korona

Definisi 2.2.1

Misal G, H adalah graf berturut-turut berorder n dan m.

Korona dari graf G dan H, dinotasikan dengan $G \odot H$, didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari gabungan satu salinan G dan n salinan H dan kemudian setiap titik salinan H terhubung langsung satu persatu ke titik salinan G (Cuivilas, Arnel, 2014).

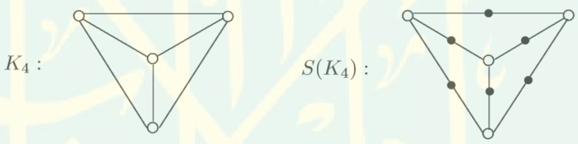
Dari definisi di atas maka $P_3 \odot P_2$ dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf $P_3 \odot P_2$

2.3 Graf Subdivisi

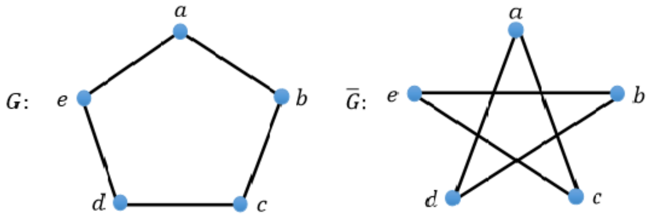
Graf subdivisi dari graf G dinotasikan dengan $S(G)$, adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan mengganti tiap sisi $e = uv$ di G dengan satu titik baru w_e dan dua sisi baru uw_e dan vw_e. Graf subdivisi dari K_4 seperti pada Gambar 2.4 berikut:



Gambar 2.4 Contoh Subdivisi

2.4 Komplemen dari Graf

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Komplemen dari graf G, ditulis $\bar{G}$ adalah garf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik akan terhubung langsung di $\bar{G}$ jika hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jadi, diperoleh bahwa $V(\bar{G}) = V(G)$ dan $(u, v) \in E(\bar{G})$ jika dan hanya jika $(u, v) \notin E(G)$. Jika G adalah graf dengan order n dan ukuran m, maka graf $\bar{G}$ mempunyai order n dan ukuran $\bar{m}$ dangan $\bar{m} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Abdussakir, dkk, 2009:29). Suatu graf G dan komplemennya di tunjukkan pada Gambar 2.5 sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf G dan $\bar{G}$

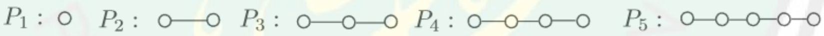
2.5 Subgraf

Suatu graf H dikatakan subgraf dari graf G jika hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka bias dinotasikan $H \subseteq G$. Jika graf H adalah subgraf dari graf G, maka graf G adalah supergraf dari graf H (Chartrand, dkk, 2016:10).

2.6 Jenis-jenis Graf

1. Graf Lintasan

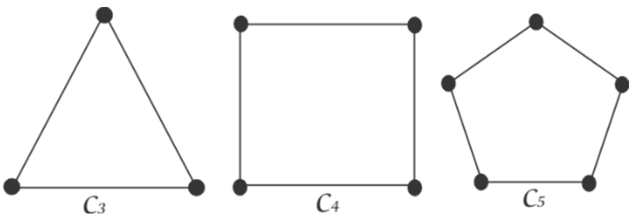
Graf lintasan P_n adalah graf dengan order n dan ukuran $n-1$ yang memiliki himpunan titik $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} | i = 1,2,3. \dots, n-1\}$ (Chartrand, dkk, 2016:5).



Gambar 2.6 Graf Lintasan

2. Graf Sikel

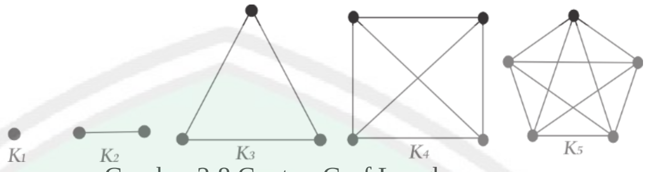
Graf sikel C_n adalah graf dengan order n dan ukuran n yang memiliki himpunan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan himpunan sisi $E(C_n) = \{v_1 v_n, v_1 v_{i+1} | i = 1,2,3. \dots, n-1\}$ (Chartrand, dkk, 2016:5).



Gambar 2.7 Contoh Graf Sikel

3. Graf Lengkap

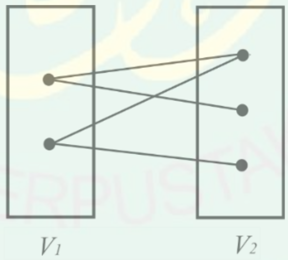
Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda terhubung langsung dengan tepat satu sisi. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan K_n (Siang, 2009: 227).



Gambar 2.8 Conton Graf Lengkap

4. Graf Biparti

Suatu graf G disebut biparti jika $V(G)$ dapat di partisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan suatu titik di V_1 dan suatu titik di V_2. Dengan kata lain, graf biparti adalah suatu graf yang himpunan titiknya dapat di partisi menjadi dua bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisinya mempunyai titik ujung di V_1 dan titik ujung lain di V_2(Chartrand, dkk, 2016:13)..



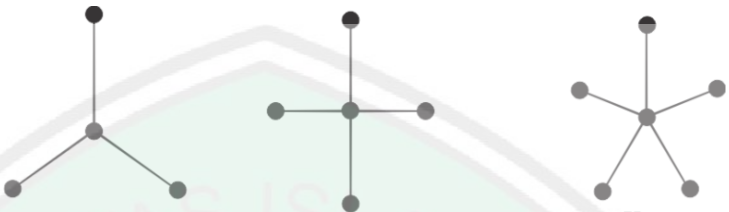
Gambar 2.9 Contoh Graf Biparti

5. Graf Bintang

Graf bintang bisa disebut dengan graf biparti $K_{1,n}$.

Graf G disebut graf bipartit jika $V(G)$ (himpunan titik dari graf G) dapat dipartisi menjadi dua bagian U dan W sedemikian sehingga setiap sisi dari G menghubungkan suatu titik di U dan suatu titik di W (Chartrand, dkk, 2016:14).

.

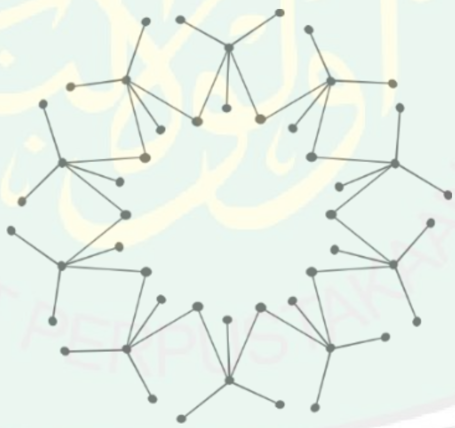


$K_{1,3}$ $K_{1,4}$ $K_{1,5}$

Gambar 2.10 Contoh Graf Bintang

6. Graf Sparkle

Graf Sparkle $Se(n,r)$ adalah graf yang diperoleh dari $C_n \odot \overline{K_{r-1}}$ dengan mensubdivisi setiap sisi-sisi sikel yang dihasilkan dari operasi tersebut. Graf sparkle $Se(n,r)$ meniliki order $n \geq 3$ dan $r \geq 2$ dengan $n,r \in \mathbb{N}$.



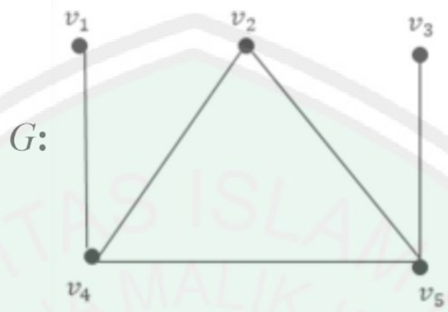
Gambar 2.11 Contoh $Se(10,4)$

2.7 Pelabelan Graf

Pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan yang memasangkan setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (edge) atau himpunan titik (vertex) ke bilangan-bilangan bulat positif, yang disebut label. Jika domainnya adalah titik, maka disebut pelabelen titik, jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelen sisi, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (Budiasti, 2010).

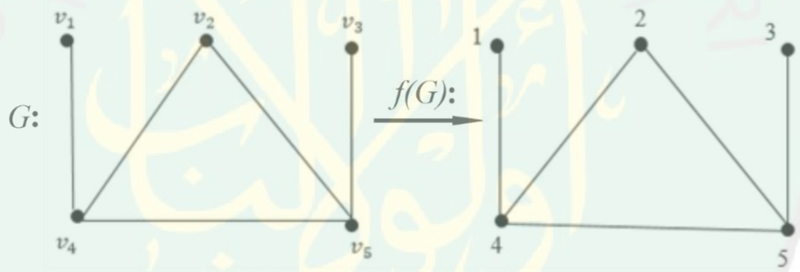
Contoh: Pelabelan titik

Diberikan graf G sebagai berikut.



Gambar 2.12 Graf G

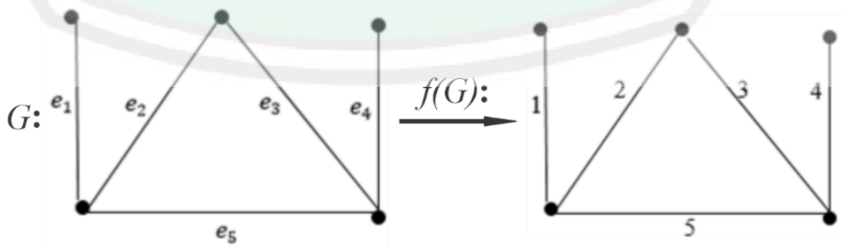
Didefinisikan $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(V_4) = 4, f(v_5) = 5$



Gambar 2.13 Pelabelan Titik pada Graf

Contoh: Pelabelan sisi

Didefinisikan $f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$

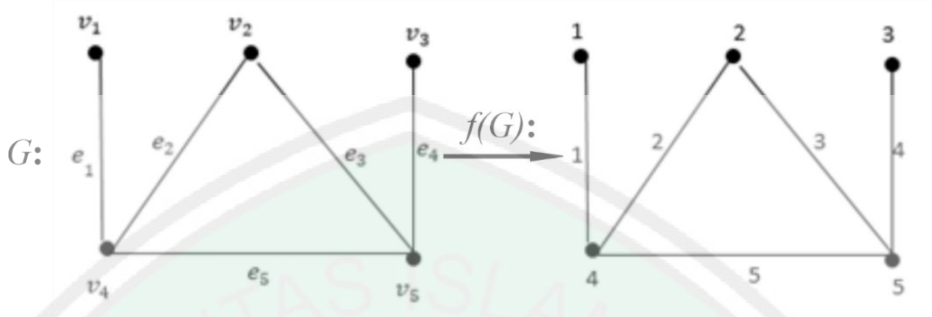


Gambar 2.14 Pelabelan Sisi pada Graf

Contoh: Pelabelan total

Didefinisikan $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(V_4) = 4, f(v_5) = 5$

$$f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$$



Gambar 2.15 Pelabelan Total pada Graf

2.8 Pelabelan $L(2,1)$

Konsep pelabelan titik dengan syarat berjarak dua, pertama kali dikemukakan oleh Griggs Roberts pada tahun 1992, yang diperoleh karena adanya permasalahan dari penetapan *transmitter* saluran yang dikemukakan oleh Hale pada tahun 1980. Misal diberikan sejumlah *transmitter* yang harus ditetapkan saluranya pada masing-masing *transmitter*, dalam masalah ini tidak boleh adanya frekuensiyang tumpang tindih. Untuk mengurangi tumpang tindih frekuensi, maka dua buah *transmitter* yang sangat dekat harus diberi saluran dengan minimal dua. *Transmitter-transmitter* tersebut direpresentasikan menjadi titik-titik graf dan terdapat sisi-sisi yang menghubungkan dua *transmitter*. Dua *transmitter* disebut dekat jika titik-titik yang mempresentasikan dua *transmitter* tersebut minimal dua (Agnarsson dan Halldorsson, 2003).

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G adalah fungsi f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan semua bilangan bulat non-negatif sedemikian sehingga $|f(u) - f(v)| \geq 2$ jika $d(u,v) = 1$ dan $|f(u) - f(v)| \geq 1$ jika $d(u,v) = 2$. Pelabelan titik $L(2,1)$

pada graf G dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Griggs dan Yeh, 1995). Pelabelan sisi $L(j,k)$ dengan j dan $k \in \mathbb{N}$; $j \geq k$, sedemikian sehingga pelabelan sisi $L(j,k)$ pada sebuah graf G adalah fungsi f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan semua bilangan bulat non-negatif sehingga $|f(e_1) - f(e_2)| \geq j$ jika $d(e_1, e_2) = k$ dan $|f(e_1) - f(e_2)| \geq k$ jika $d(u,v) = j$. Adapun pelabelan sisi $L(2,1)$ dengan mengikuti definisi dari pelabelan sisi $L(j,k)$ sehingga bisa di tulis pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf G adalah fungsi f dari himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan semua bilangan bulat non-negatif sehingga $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 2$ jika $d(e_1, e_2) = 1$ dan $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 1$ jika $d(u,v) = 2$. Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf G dinotasikan dengan $\lambda'_{2,1}(G)$ (He dan Lin, 2014).

2.9 Beberapa Hasil Pelabelan $L(2,1)$ pada Beberapa Graf

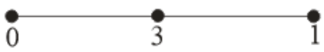
2.9.1 Graf Lintasan

Berikut ini akan dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf lintasan sebagai berikut.

Gambar 2.16 Pelabelan $L(2,1)$ pada P_2

Dimulai dengan melakukan pelabelan pada salah satu titik dengan label 0. Maka titik berikutnya dilabeli label paling minimal yang mungkin, yaitu 2. Berdasarkan Gambar 2.16 dapat diketahui bahwa $\lambda_{2,1}(P_2) = 2$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada P_3 sebagai berikut.



Gambar 2.17 Pelabelan $L(2,1)$ pada P_3

Pada Gambar 2.17, dapat diberi label dengan titik yang paling kiri dengan label 0, kemudian yang tengah dengan label 3, dan yang terakhir yang paling kanan dengan label 1. Sehingga $\lambda_{2,1}(P_3) \leq 3$. Label 1 tidak dapat digunakan dimanapun karena akan bertetangga dengan 0, 1 atau 2, dimana semua kemungkinan tersebut bertentangan dengan syarat pelabelan $L(2,1)$. Sehingga lebel yang tersedia hanyalah label 0 dan 2 untuk melabeli tiga titik. Dengan prinsip sarang merpati, dua dari tiga titik tersebut pasti memiliki label yang sama (Lum, 2007).

Sebelum membahas pelabelan $L(2,1)$ pada P_4, diperhatikan lemma berikut.

Lemma 1. Jika H adalah subgraf dari G, maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Bukti. Misal $\lambda_{2,1}(G) = m$ dengan pelabelan sebagai berikut $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$. maka $g: V(H) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$, yang didefinisikan sebagai $g(v) = f(v)$ untuk setiap $v \in V(H)$ adalah suatu pelabelan H yang mengunakan label tidak lebih dari m. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(H) \leq m = \lambda_{2,1}(G)$. Maka dapat dilakukan pelabelan terhadap H dengan menggunakan pelabelan dari G pada titik-titik yang bersesuaian (Lum, 2007).

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada P_4 yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.

Gambar 2.18 Pelabelan $L(2, 1)$ pada P_4

Karena P_3 adalah subgraf dari P_4, maka dari lemma 1 dapat diketahui bahwa $\lambda_{2,1}(P_4) \geq \lambda_{2,1}(P_3) = 3$. P_4 dapat diberi label dengan susuna label $2 - 0 - 3 - 1$. Sehingga $\lambda_{2,1}(P_4) \geq 3$, artinya $\lambda_{2,1}(P_4) = 3$.

Teorema 1. $\lambda_{2,1}(P_n) = 4, \forall n \geq 5$.

Bukti. Sebelumnya ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(P_5) = 4. P_5$ dapat diberi label dengan susuna label $2 - 0 - 3 - 1 - 4$, sehingga $\lambda_{2,1}(P_5), \leq 4.$ Diklaim bahwa P_5 tidak dapat diberi label dengan $0, 1, 2,$ dan 3. Label 1 dan 2 tidak dapat digunakan untuk memberi label titik-titik yang ujung (titik-titik yang berderajat satu) tanpa melanggar syarat pelabelan $L(2,1)$. Maka $\lambda_{2,1} P_5 = 4$.

Selanjutnya ditunjukkan $\lambda_{2,1}(P_n) = 4$ untuk $n > 5$. Misal P_n adalah suatu lintasan dengan panjang lebih dari 5. Karena P_n adalah subgraf dari lintasan tersebut, maka $\lambda_{2,1}(P_n) \geq \lambda_{2,1}(P_5) = 4$. P_n dapat diberi label dengan susunan label seperti pada P_5 dan dapat diulang-ulang $(2, 0, 3, 1, 4, 2, 0, 3, \dots)$ tanpa melanggar syarat pelabelan $L(2,1)$. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(P_n) \leq 4$, sehingga dari dua ketaksamaan tersebut diperoleh $\lambda_{2,1}(P_n) = 4, \forall n \geq 5$ (Lum, 2007).

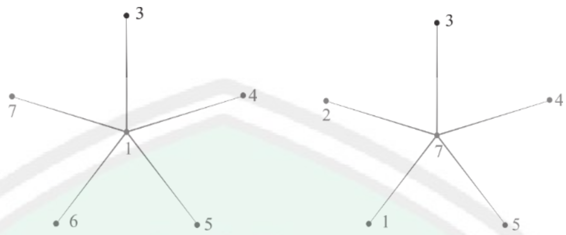
2.9.2 Graf Lengkap

Teorema 2. $\lambda_{2,1}(K_n) = 2n - 2$

Bukti. Misal diberikan suatu K_n dengan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$, fungsi $f: V(G) \to \{0,1,2, \dots, 2n - 2\}$ yang didefinisikan sebagai $f(v_i) = 2i - 2$ merupakan suatu pelabelan $L(2,1)$ dari K_n. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(K_n) \leq 2n - 2$. Diklaim bahwa K_n tidak dapat diberi label dengan label-label $0,1,2, \dots, 2n - 3$. Dimiliki $2n - 2$ label yang akan digunakan untuk memberi label n titik. Dapat digambarkan kondisi ini sebagai $n - 1$ pasangan *disjoint* dari label berurutan dimana n titik harus diberi label dengan label-label tersebut. Dengan menggunakan asas sarang merpati, satu dari pasangan-pasangan tersebut pasti memuat dua titik. Dengan demikian, karena Dua titik tersebut terhubung langsung di K_n, maka kondisi tersebut bertentangan dengan syarat pelabelan $L(2,1)$. Sehingga, $\lambda_{2,1}(K_n) = 2n - 2$ (Lum, 2007).

2.9.3 Graf Bintang

Teorema 3. Nilai λ dari suatu graf bintang $K_{1,\Delta} = \Delta + 2$ di mana Δ adalah derajat maksimum (Griggs dan Yeh, 1993)



Gambar 2.19 Pelabelan $L(2,1)$ Graf Bintang

2.10 Kajian Graf dalam Perspektif Islam

Graf adalah pasangan himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi. Jika tedapat sisi antara dua titik yang berbeda maka dapat dikatakan kedua titik tersebut terhubung langsung. Sehingga terdapat keterhubungan antara kedua titik tersebut. Ada banyak macam graf diantaranya adalah graf bintang yang mana semua titik hanya terhubung ke satu titik pusat. Seperti halnya orang-orang muslim yang hanya berdoa kepada Allah, sebagai mana yang dijelaskan dalam al-Quran tentang do'a.

Doa secara bahasa adalah "seruan", sedangkan pengertian doa menurut istilah adalah suatu permohonan atau permintaan dan ucapan dalam hati kepada Allah SWT sebagai tuhan semesta alam. Beroda diwajibkan bagi setiap manusia yang hidup di dunia ini, karena memang mahkluk tak akan ada apa-apanya jika dengan Allah SWT sang pemilik alam semesta. Ayat yang menjelaskan tenteng berdoa kepada Allah di antaranya dalam surat Albaqarah [2] Ayat 186:

وَإِذَا سَأَلَكَ عِبَادِي عَنِّي فَإِنِّي قَرِيبٌ أُجِيبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ إِذَا دَعَانِ فَلْيَسْتَجِيبُوا۟ لِي

وَلْيُؤْمِنُوا۟ بِي لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُونَ﴿١٨٦﴾

Artinya:

"Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu tentang Aku, maka (jawablah), bahwasanya Aku adalah dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila ia memohon kepada-Ku, maka hendaklah mereka itu memenuhi (segala perintah-Ku) dan hendaklah mereka berima kepada-Ku, agar mereka selalu berada dalam kebenaran," (QS al- Baqarah: 186).

Ayat di atas menjelaskan bahwa barang siapa yang berdoa kepada Allah, maka akan dikabulkan. Tetapi dalam berdoa ada beberapa syarat yang harus terpenuhi, seperti yang ditulis oleh *Imam Ahmad bin Muhammad As-Shawi Al-Maliki* dalam kitabnya, *Hasyiatus Shawi ala Tafsiril Jalalain* menjelaskan:

أجيب: بان الدعاء له شروط, فإذا تخلف بعضها تخلف الإجابة

Artinya:

"Sungguh, doa itu memiliki beberapa syarat agar terkabul. Maka ketika salah satu syarat tidak terpenuhi, doa pun tak kunjung diijabah."

Imam As-Shawi menyebutkan syarat beberapa syarat sebagai berikut:

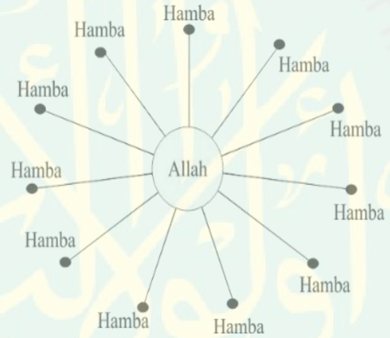
1. keutuhan seorang hamba menghadap baik lahir dan batin, yaitu sekiranya tidak terbersit dalam hatinya segala sesuatu apapun kecuali Allah semata.
2. Do'a tidak berisi segala sesuatu dalam rangka keburukan.
3. Tidak boleh berdo'a dalam rangka meminta untuk memutuskan tali persaudaraan, kekerabatan, maupun tali kasih sayang antar sesama manusia.
4. Tidak tergesa-gesa dalam meminta dikabulkan.

Simpulan dalam hal ini terangkum dalam hadits yang dijadikan Imam As-Shawi dalam menjelaskan syarat-syarat doa terkabul sebagai berikut:

"ما من رجل يدعو الله تعالى بدعاء إلا إستجيب له, فإما ان يجعل له في الدنيا, و إما انيؤخر له في الأخرة. و إما ان يكفر عنه من ذنوبه بقدر ما دعا, ما لم يدعو بإثم او قطيعة رحم او يستعجل. قالوا: يا رسول الله و كيف يستعجل؟ قال: يقول: دعوت فما ستجب لي".

Artinya:

> *"Tidak ada seseorang yang berdoa kepada Allah ta'ala dengan serangkaian doa kecuali Allah mengabulkannya. Maka ada kalanya doa tersebut terkabul di dunia. Ada pula doa yang memang diakhirkan terkabulnya di akhirat. Ada juga doa tersebut untuk menghapus dosa-dosa hamba sesuai dengan kadar doanya. Dengan syarat, selagi doa tersebut tidak dipanjatkan dalam rangka meminta sesuatu yang berdosa, memutus tali silaturahmi, atau hamba tersebut tergesa-gesa.' Para sahabat bertanya, 'Ya rasulullah, lalu bagaimanakah (gambaran) hamba yang tergesa-gesa?' Rasul menjawab, 'Adalah hamba yang berkata, 'Aku telah berdoa, namun mengapa tak kunjung dikabulkan."*



Gambar 2.20 Representasi Graf Bintang

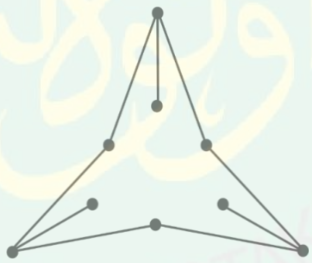
BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf Sparkle

Pada bab ini, akan dijelaskan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(n,r)$. Untuk mempermudah dalam penyelesaian pada kasus ini, maka akan dibagi lima pembahasan. Pertama pelabelan titik $L(2,1)$ untuk $Se(k,2), k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, kedua pelabelan titik $L(2,1)$ untuk $Se(2k,4);\ k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, ketiga pelabelan titik $L(2,1)$ untuk $Se(2k-1,4);\ k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, keempat pelabelan titik $L(2,1)$ untuk $Se(4,k);\ k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, dan kelima pelabelan titik $L(2,1)$ untuk $Se(3,k);\ k \geq 3, k \in \mathbb{N}$.

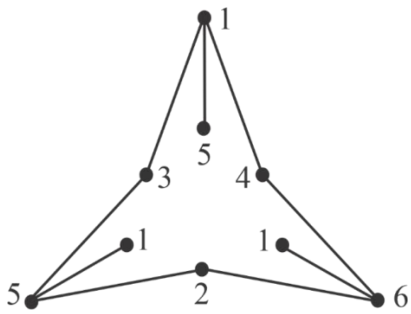
1.1.1 Pelabelan Titik $L(2,1)$ untuk Graf $Se(k,2), k \geq 3, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,2)$, contoh gambar dari $Se(3,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf $Se(3,2)$

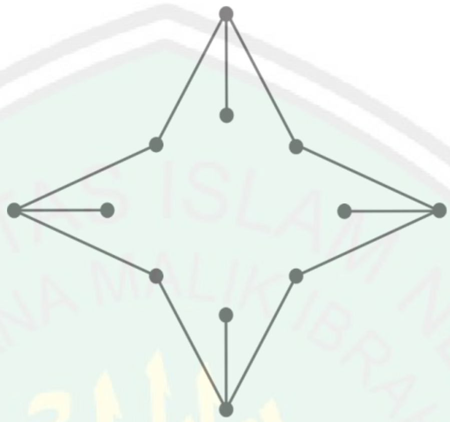
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,2)$ sebaga berikut:



Gambar 3.2Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,4)$

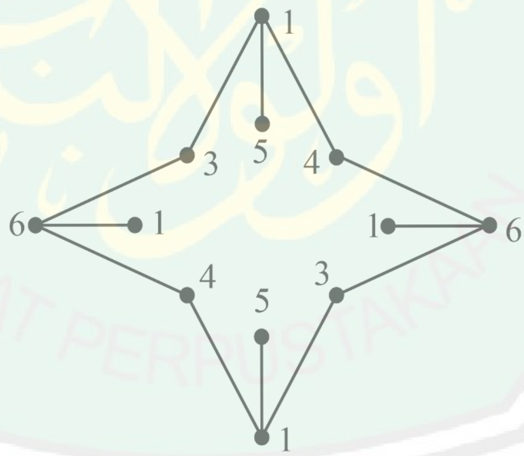
Berdasarkan Gambar 3.2 dapat diketahui nilai minimal label terbesar menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,2) \leq 6$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}\big(Se(3,2)\big) \leq 6$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,2)$, contoh gambar dari $Se(4,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf $Se(4,2)$

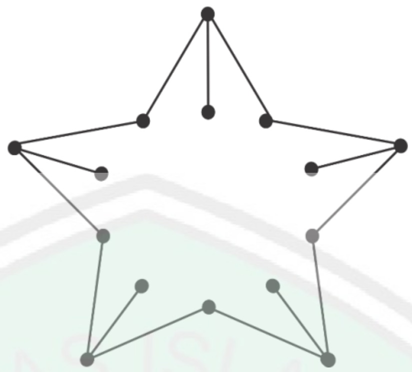
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.4 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,2)$

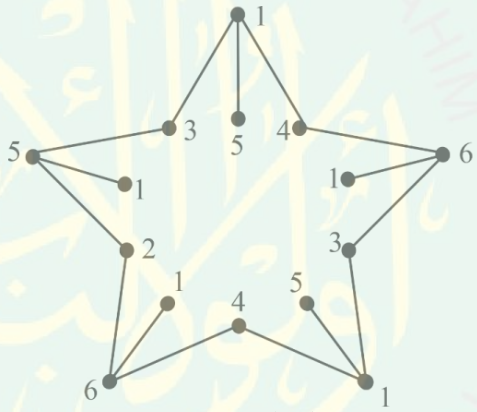
Berdasarkan Gambar 3.4 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,2) \leq 6$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}\big(Se(4,2)\big) \leq 6$

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(5,2)$ contoh gambar dari $Se(5,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf $Se(5,2)$

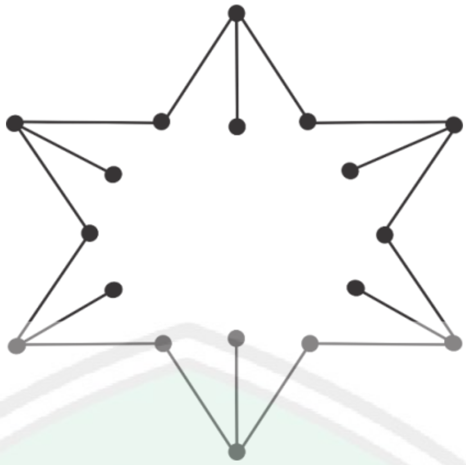
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(5,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.6 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(5,2)$

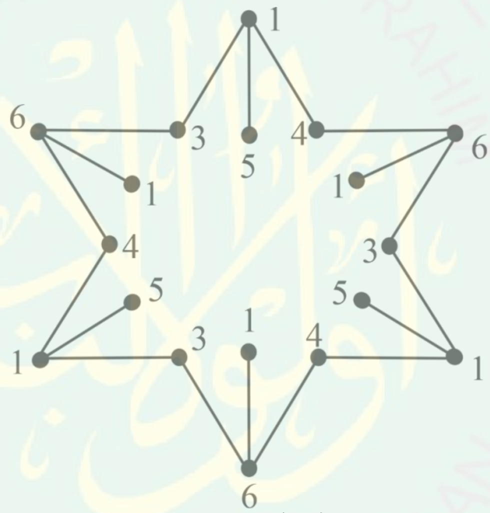
Berdasarkan Gambar 3.6 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(5,2) \leq 6$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(5,2)) \leq 6$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(6,2)$, contoh gambar dari $Se(6,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf $Se(6,2)$

Pelabelan titik $L(2, 1)$ pada $se(6, 2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.8 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(6,2)$

Berdasarkan Gambar 3.8 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(6,2) \leq 6$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(6,2)) \leq 6$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(k, 2)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1 Tabel Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada $Se(k,2)$

$Se(k,2)$
$\lambda_{2,1}(Se(3,2)) \leq 6$
$\lambda_{2,1}(Se(4,2)) \leq 6$
$\lambda_{2,1}(Se(5,2)) \leq 6$
$\lambda_{2,1}(Se(6,2)) \leq 6$

Berdasarkan pada Tabel 3.1 di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda_{2,1}(Se(k,2)) \leq 6\,, k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

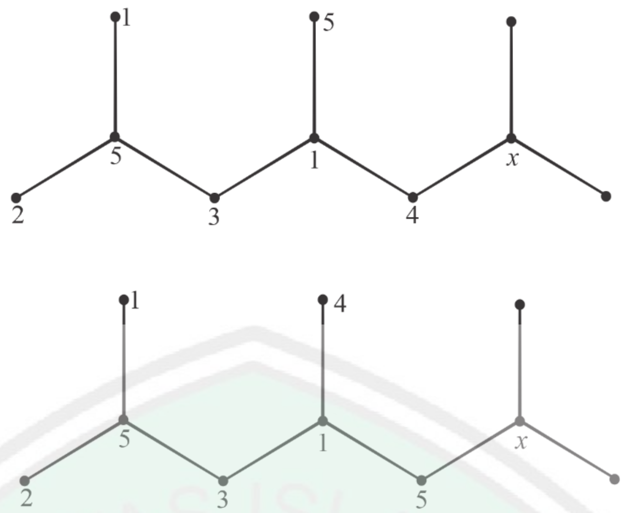
Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1.1 Untuk sebarang graf $Se(k,2), k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan titik $L(1,2)$ adalah $\lambda_{2,1}(Se(k,2)) = 6$

Bukti :

Diketahui $K_{1,3} \subseteq Se(k,2)$, dan $\lambda_{2,1}(K_{1,3}) = 5$.

Jika titik pusat (v_c) pada $K_{1,3}$ diberi label 1 atau 5, maka nilai minimal label terbesar pada $K_{1,3} = 5$ karana terdapat satu angka dari 1 sampai 5 yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,3}$. dan jika $v_c \neq 1$ atau $v_c \neq 5$ maka akan ada dua angka yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,3}$ yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $K_{1,3} = 6$.

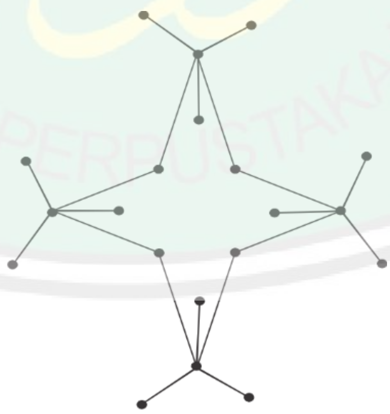


Gambar 3.9 Subgraf dari Graf $Se(k,2)$

Dilihat dari Gambar 3.9, titik x tidak bias diberi labek dengan label 5 jika mengikuti aturan pelabelan $L(2,1)$, sehingga nilai minimal label terbesar pada $Se(k,2) = 6$, dan ditulis $\lambda_{2,1}\big(Se(k,2)\big) = 6$.

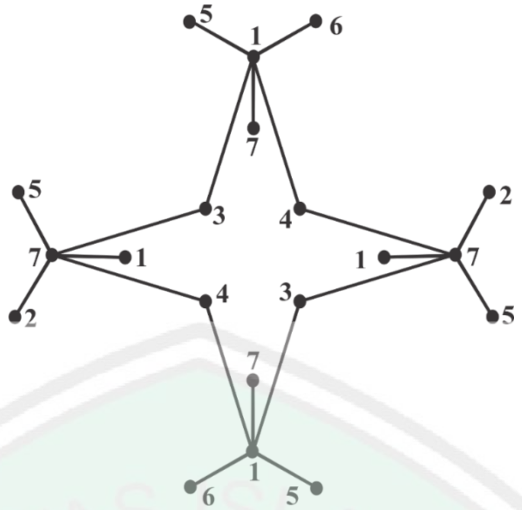
1.1.2 Pelabelan Titik $L(2,1)$ untuk Graf $Se(2k,4)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$, contoh gambar dari $Se(4,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf $Se(4,3)$

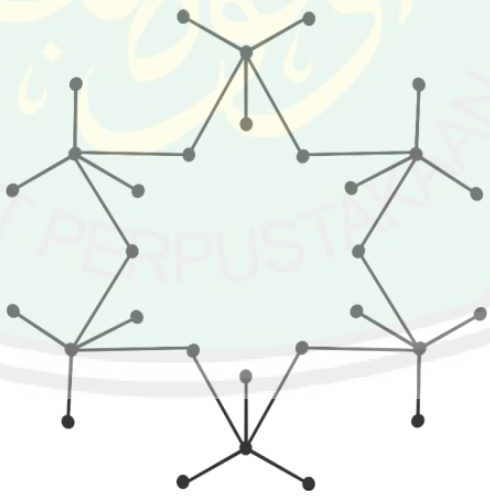
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$ sebaga berikut:



Gambar 3.11 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,4)$

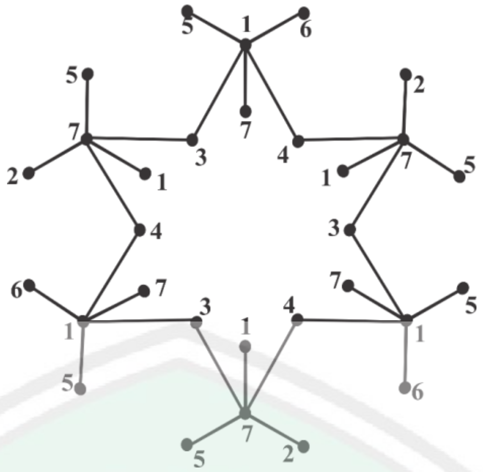
Berdasarkan Gambar 3.11 dapat diketahui minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,4) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 7$

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(6,4)$ contoh gambar dari $Se(6,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf $Se(6,4)$

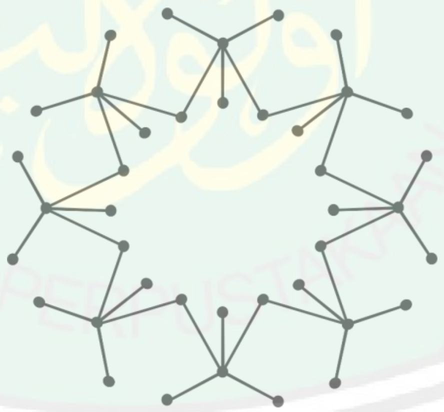
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(6,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.13 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(6,4)$

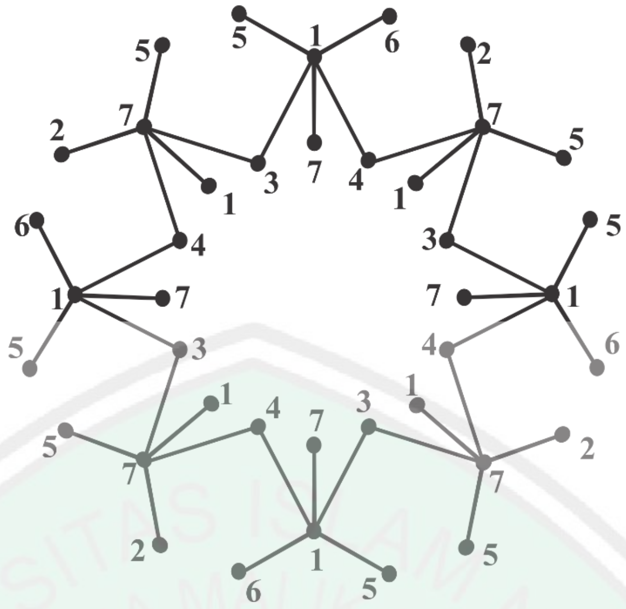
Berdasarkan Gambar 3.13 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan $L(2,1)$ titik pada $Se(6,4) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(6,4)) \leq 7$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(8,4)$ contoh gambar dari $Se(8,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3. 14 Graf $Se(8,4)$

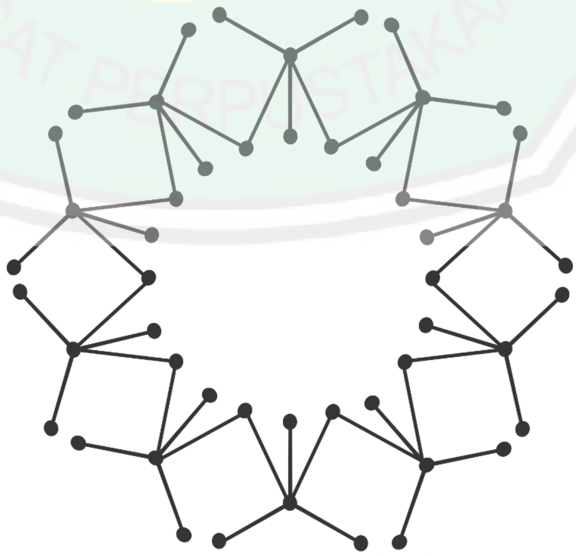
Pelabelan titik $L(2, 1)$ pada $Se(8,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.15 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(8,4)$

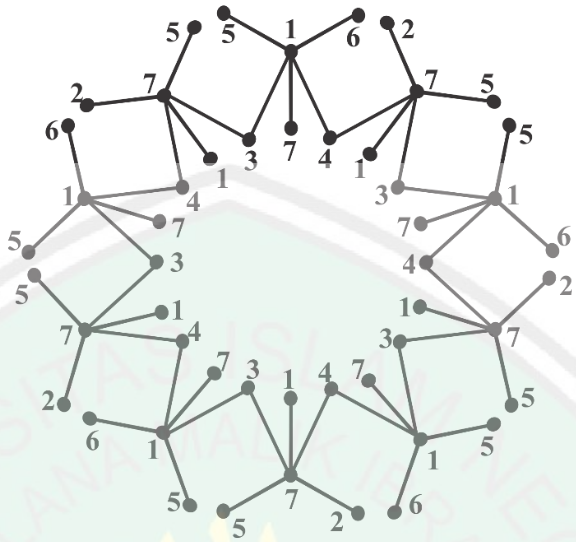
Berdasarkan Gambar 3.15 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Se(8,4) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(8,4)) \leq 7$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(10,4)$ contoh gambar dari $Se(10,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.16 Graf $Se(10,4)$

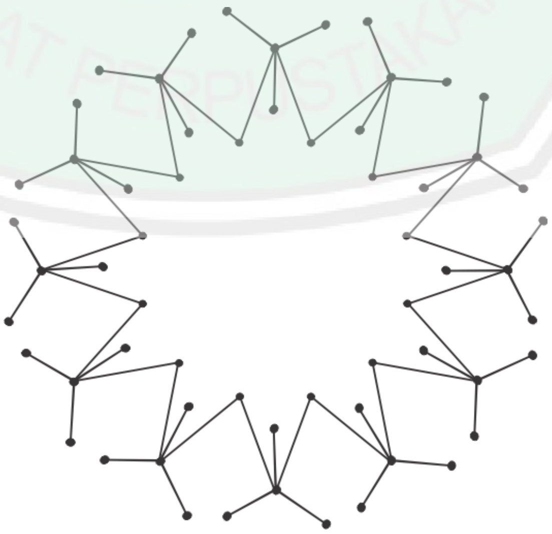
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(10,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.17 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(10,4)$

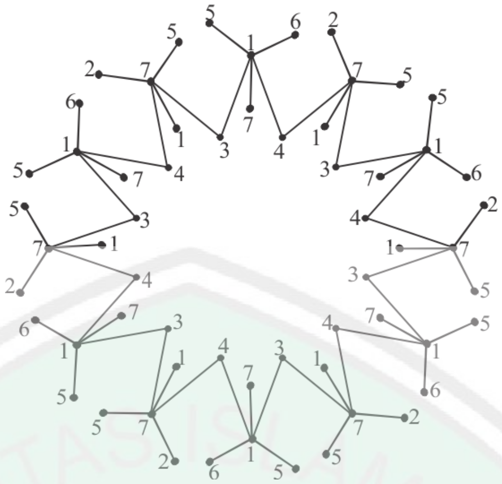
Berdasarkan Gambar 3.17 dapat diketahui minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(10,4) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(10,4)) \leq 7$

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(12,4)$, contoh gambar dari $Se(12,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.18 Graf $Se(12,4)$

Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(12,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.19 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(12,4)$

Berdasarkan Gambar 3.19 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(6,4) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(6,4)) \leq 7$.

Beberapa kemungkinan dari hasil pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(2k,4)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.2 berikut:

Tabel 3.2 Tabel Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada $Se(2k,4)$

$Se(2k,4), k \geq 2$
$\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 7$
$\lambda_{2,1}(Se(6,4)) \leq 7$
$\lambda_{2,1}(Se(8,4)) \leq 7$
$\lambda_{2,1}(Se(10,4)) \leq 7$

Berdasarkan pelabelan titik $L(2,1)$ di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda_{2,1}(Se(2k,4)) \leq 7; k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1.2 Untuk sebarang graf $Se(2k, 4), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan titik $L(1, 2)$ adalah $\lambda_{2,1}\big(Se(2k, 4)\big) = 7$

Bukti:

Dari percobaan di atas dapat diperoleh dugaan bahwa:

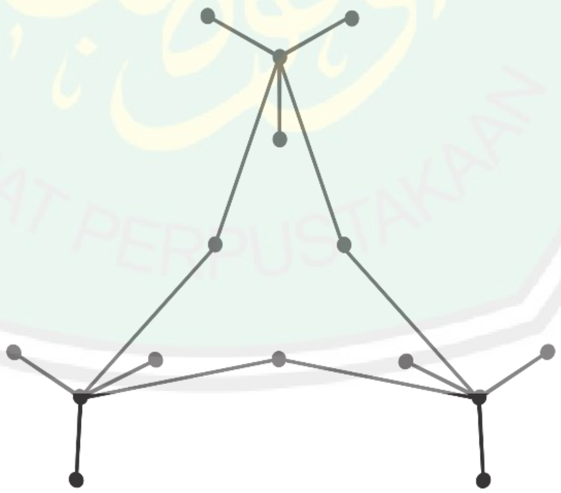
$$\lambda_{2,1}\big(Se(2k, 4)\big) \leq 7; k \geq 2, k \in \mathbb{N}.$$

Diketahui $K_{1,5} \subseteq Se(2k, 4)$, dan $\lambda_{2,1}\big(K_{1,5}\big) = 7$.

Sehingga diperoleh $\lambda_{2,1}\big(Se(2k, 4)\big) = 7$

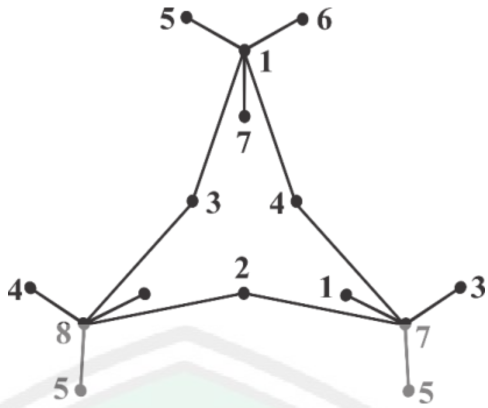
3.1.3 Pelabelan Titik $L(2, 1)$ untuk Graf $Se(2k-1, 4)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$, contoh gambar dari $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.20 Graf $Se(3,4)$

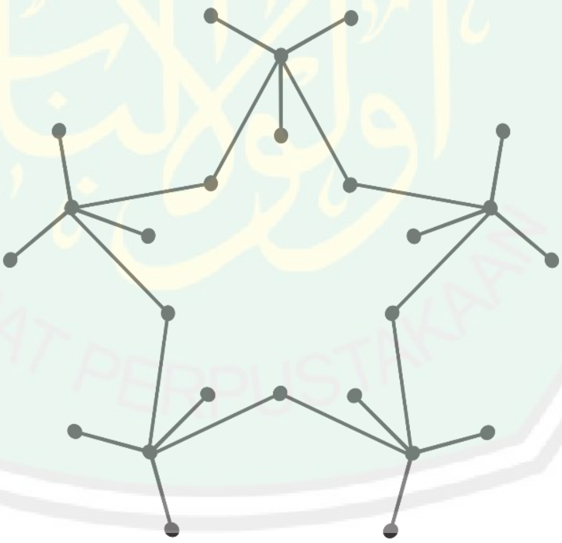
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.21 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,4)$

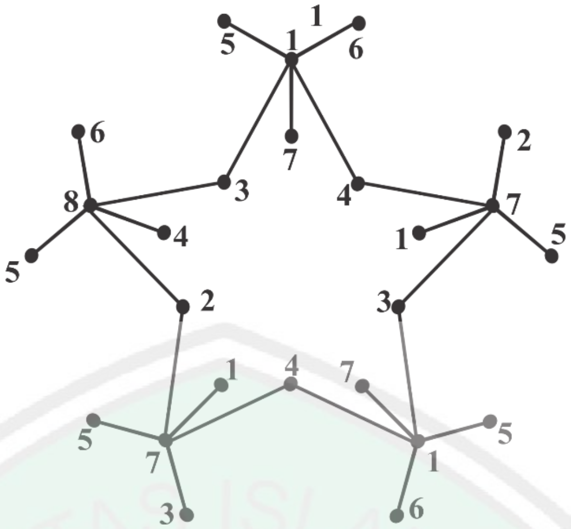
Berdasarkan Gambar 3.21, dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,4) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(3,4)) \leq 8$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(5,4)$, contoh gambar dari $Se(5,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.22 Graf $Se(5,4)$

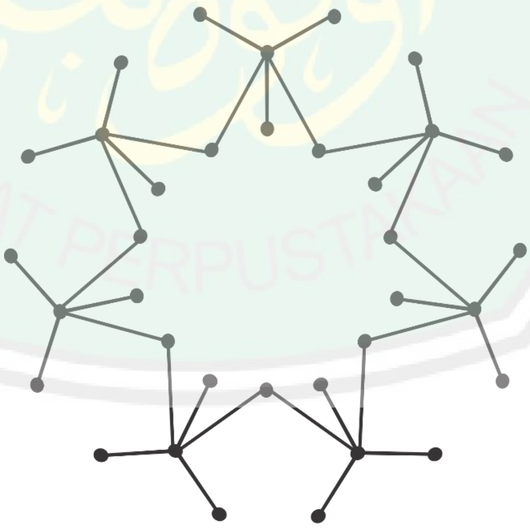
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(5,4)$ sebagai berikut:



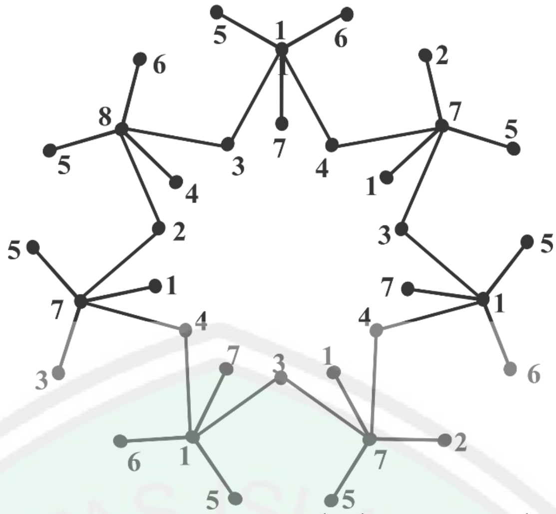
Gambar 3.23 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(5,4)$

Berdasarkan Gambar 3.23 dapat diketahui nilai minimal label terbesar menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(5,4) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}\big(Se(5,4)\big) \leq 8$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(7,4)$, contoh gambar dari $Se(7,4)$ sebagai berikut:


Gambar 3.24 Graf $Se(7,4)$

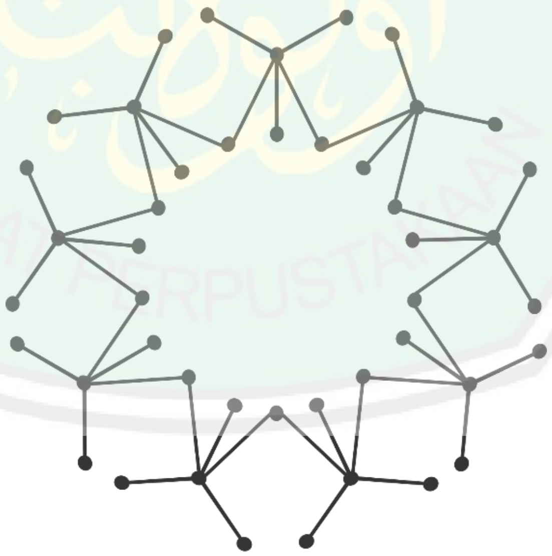
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(7,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.25 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(7,4)$

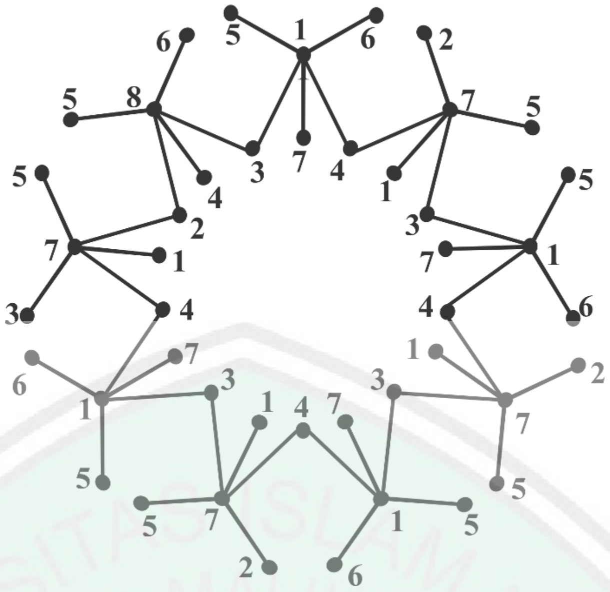
Berdasarkan Gambar 3.25 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(7,4) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(7,4)) \leq 8$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Se(9,4)$, contoh gambar dari $Se(9,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.26 Graf $Se(9,4)$

Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(9,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.27 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(9,4)$

Berdasarkan Gambar 3.27 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(9,4) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}\big(Se(9,4)\big) \leq 8$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(2k-1,4)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.3 berikut:

Tabel 3.3 Tabel Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(2k-1,4)$

$Se(2k-1,4), k \geq 2$
$\lambda_{2,1}\big(Se(3,4)\big) \leq 8$
$\lambda_{2,1}\big(Se(5,4)\big) \leq 8$
$\lambda_{2,1}\big(Se(7,4)\big) \leq 8$
$\lambda_{2,1}\big(Se(9,4)\big) \leq 8$

Berdasarkan data pada Tabel 3.3, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda_{2,1}\,\big(Se(2k-1,3)\big) \leq 8; k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1.3 Untuk sebarang graf $Se(2k-1,4), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ adalah $\lambda_{2,1}\big(Se(2k-1,4)\big) = 8$

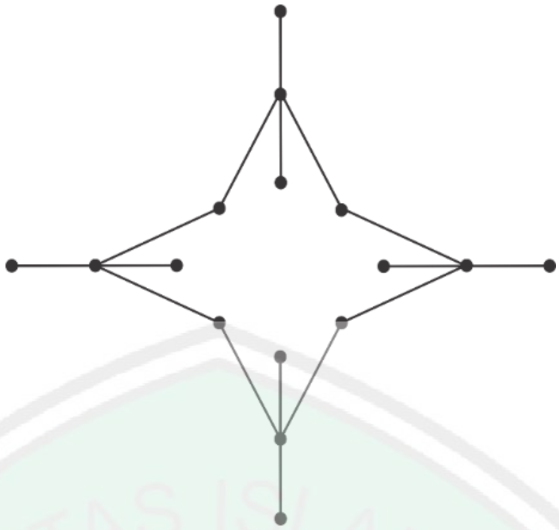
Bukti:

Diketahui $K_{1,5} \subseteq Se(2k,4)$, dan $\lambda_{2,1}(K_{1,5}) = 7$. Jika titik pusat (v_c) pada graf bintang diberi label 1 atau 7, maka nilai minimal label terbesar pada $K_{1,5} = 7$ karana terdapat satu bilangan dari 1 sampai 7 yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,5}$. dan jika $v_c \neq 1$ atau $v_c \neq 7$ maka akan ada dua bilangan yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,5}$ yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $K_{1,5} = 8$. Dan titik v_c dari $K_{1,5} \subseteq Se(2k-1,4)$ terdapat pada setiap titik pada di C_{2k-1}, dan C_{2k-1} disubdivisi yang mengakibatkan setiap titik yang terhubung langsung pada C_{2k-1} akan berjarak dua di $S(C_{2k-1})$, sehingga titik-titik C_{2k-1} bisa diberi label 1 dan 7 secara bergantian. Karena C_{2k-1} memiliki titik berjumlah ganjil maka terdapat satu titik yang tidak dapat diberi label 1 dan 7 yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $Se(2k-1,4) = 8$

Sehingga diperoleh $\lambda_{2,1}\big(Se(2k-1,4)\big) = 8$

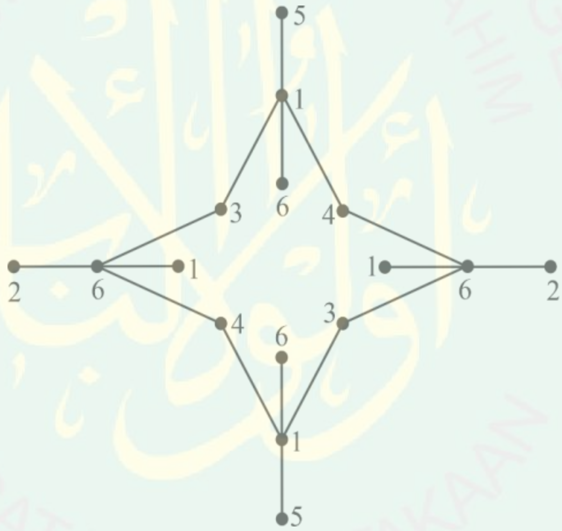
3.1.4 Pelabelan Titik $L(2,1)$ untuk Graf $Se(4,k)$; $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(4,3)$, contoh gambar dari $Se(4,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.28 Graf $Se(4,3)$

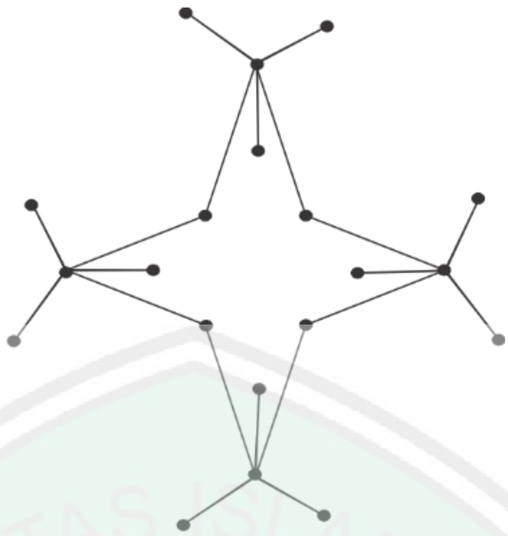
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,3)$ berikut:



Gambar 3.29 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,3)$

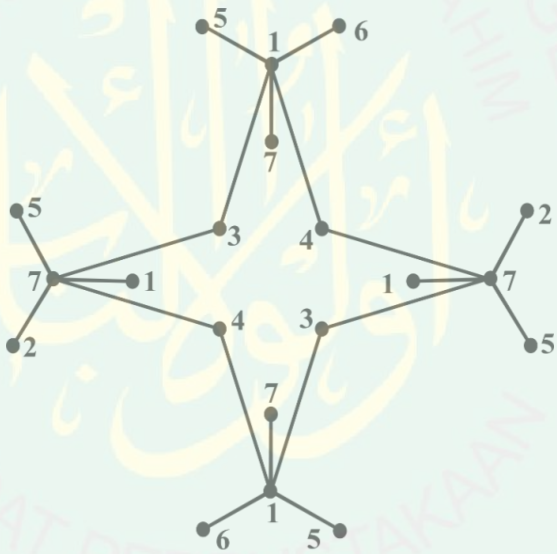
Berdasarkan Gambar 3.29 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(4,3) \leq 6$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 6$.

Selajutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$, contoh gambar dari $Se(4,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.30 Graf $Se(4,4)$

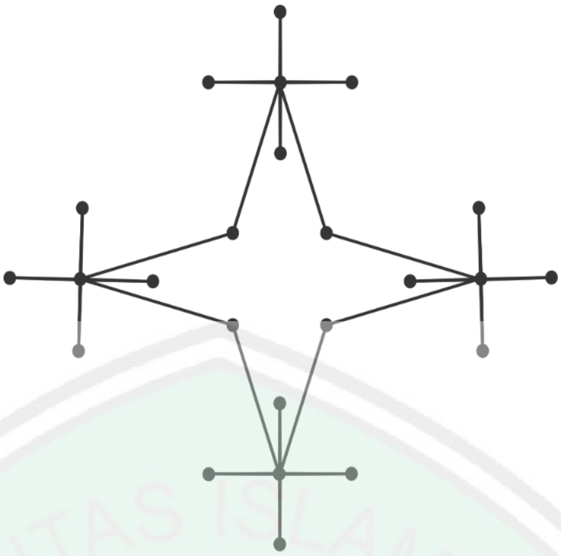
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$ berikut:



Gambar 3.31 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,4)$

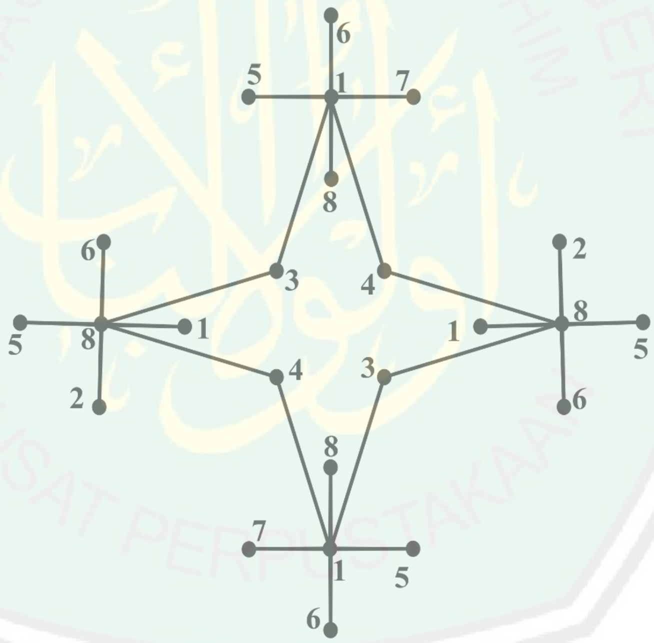
Berdasarkan Gambar 3.31 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,4) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 7$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(4,5)$, contoh gambar dari $Se(4,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.32 Graf $Se(4,5)$

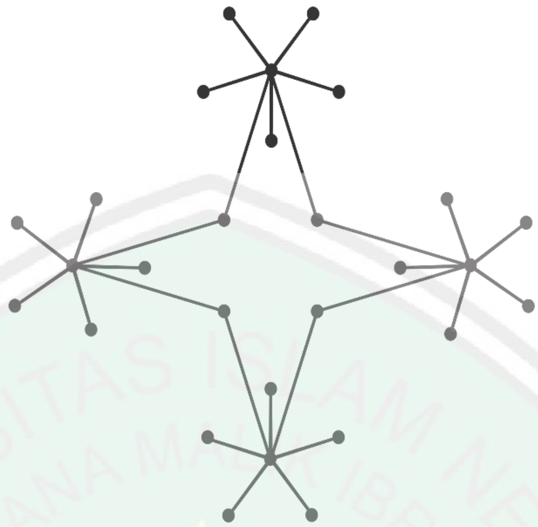
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.33 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,5)$

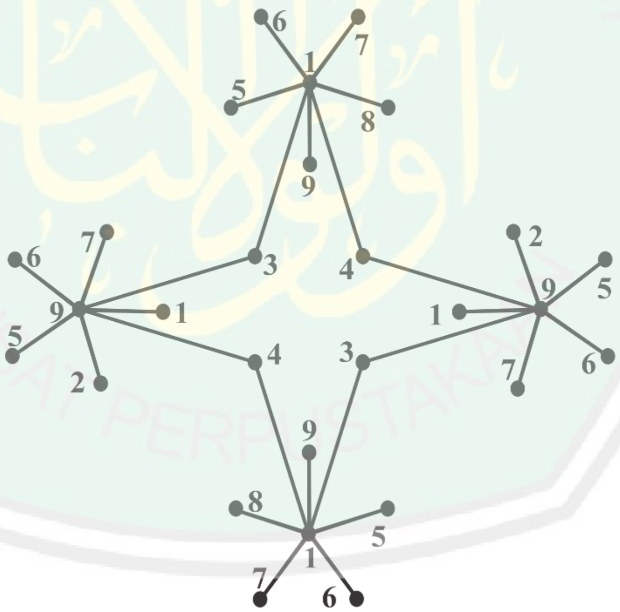
Berdasarkan Gambar 3.33 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,5) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(4,5)) \leq 8$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(4,6)$, contoh gambar dari $Se(4,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.34 Graf $Se(4,6)$

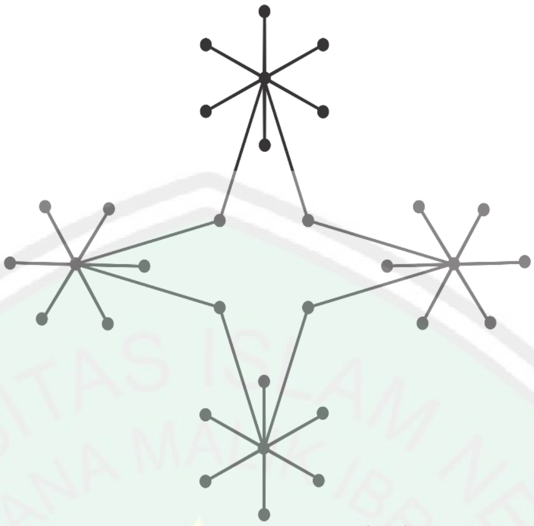
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.35 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,6)$

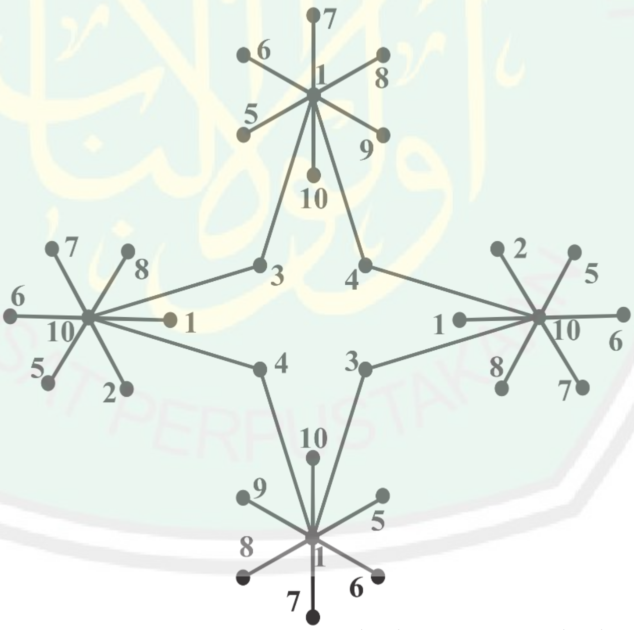
Berdasarkan Gambar 3.35 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,6) \leq 9$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(4,6)) \leq 9$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Se(4,7)$, contoh gambar dari $Se(4,7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.36 Graf $Se(4,7)$

Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.37 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,7)$

Berdasarkan Gambar 3.37 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,7) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(4,7)) \leq 10$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,k)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.4 berikut:

Tabel 3.4 Tabel Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,k)$; $k \geq 3$

$Se(4,k), k \geq 3$
$\lambda_{2,1}(Se(4,3)) \leq 6$
$\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 7$
$\lambda_{2,1}(Se(4,5)) \leq 8$
$\lambda_{2,1}(Se(4,6)) \leq 9$
$\lambda_{2,1}(Se(4,7)) \leq 10$

Berdasarkan pelabelan titik $L(2,1)$ di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda_{2,1}(Se(4,k)) \leq k+3\,; k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1.4 Untuk sebarang graf $Se(4,k) k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan titik $L(1,2)$ adalah $\lambda_{2,1}(Se(4,k)) = k+3$

Bukti:

Dari percobaan di atas dapat diperoleh dugaan bahwa:

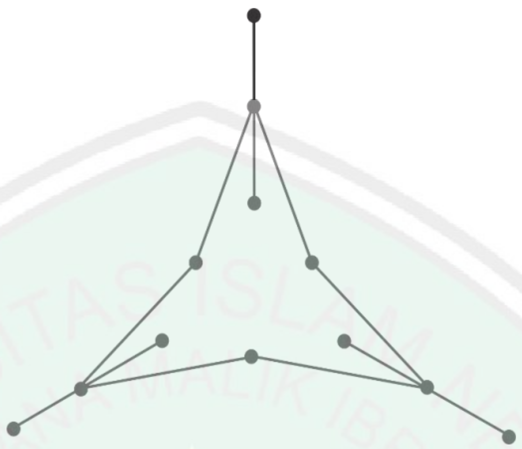
$$\lambda_{2,1}(Se(4,k)) \leq k+3; k \geq 3, k \in \mathbb{N}.$$

Diketahui $K_{1,k+1} \subseteq Se(4,k)$, dan $\lambda_{2,1}(K_{1,k+1}) = k+3$.

Sehingga diperoleh $\lambda_{2,1}(Se(4,k)) = k+3$

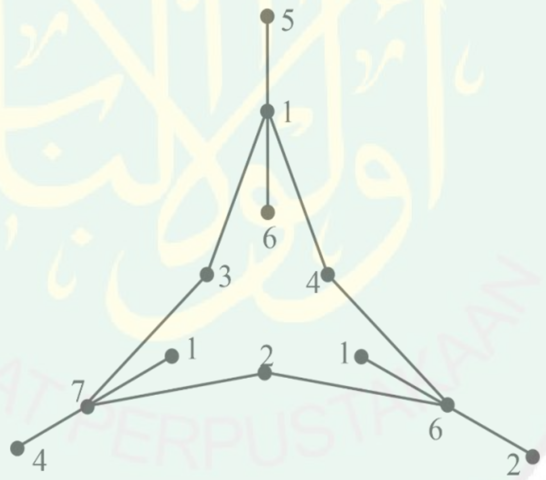
3.1.5 Pelabelan Titik $L(2,1)$ untuk Graf $Se(3,k)$; $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,3)$, contoh gambar dari $Se(3,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.38 Graf $Se(3,3)$

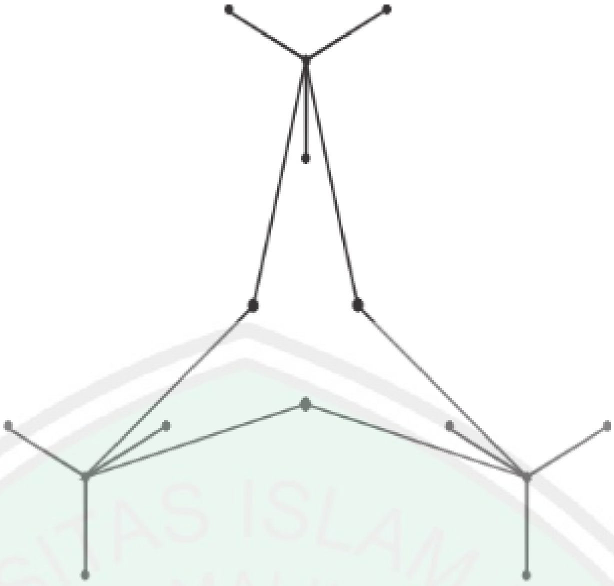
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.39 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,3)$

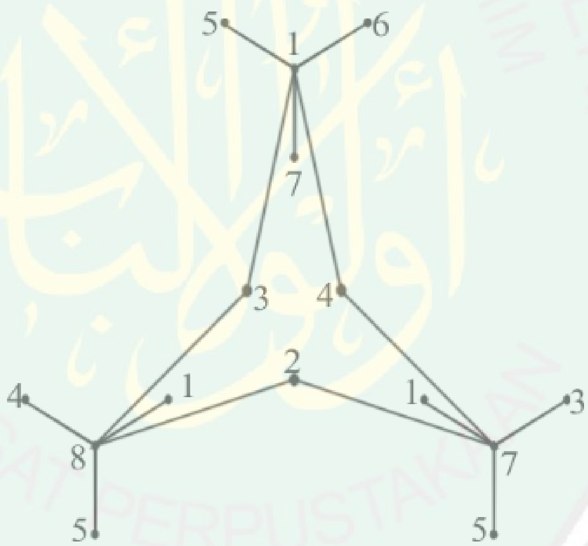
Berdasarkan Gambar 3.39 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf $Se(3,3) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(3,4)) \leq 7$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$, contoh gambar dari $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.40 Graf $Se(3,4)$

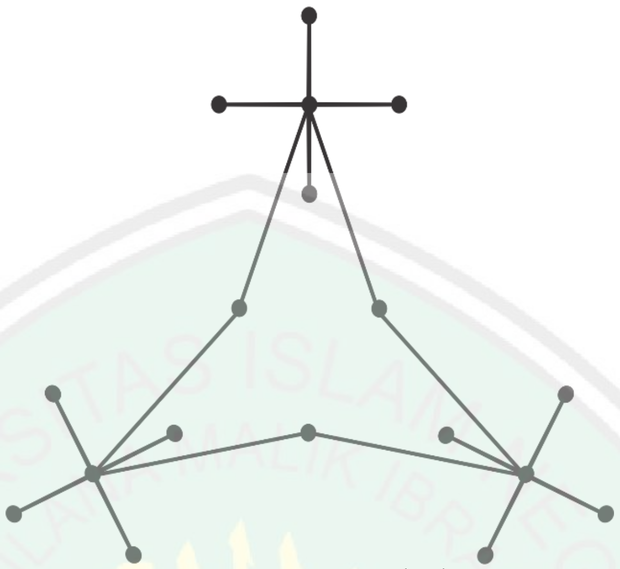
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.41 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,4)$

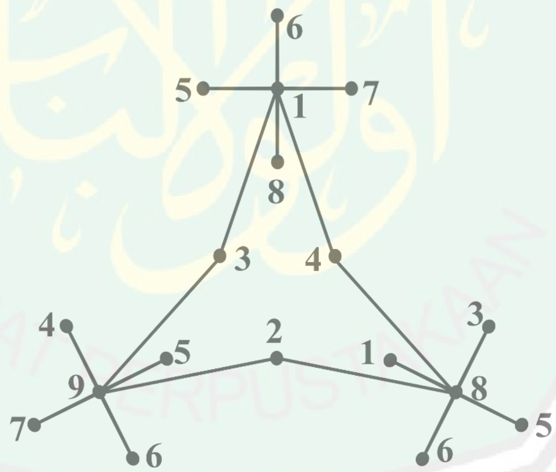
Berdasarkan Gambar 3.41 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,4) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(3,4)) \leq 8$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,5)$, contoh gambar dari $Se(3,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.42 Graf $Se(3,5)$

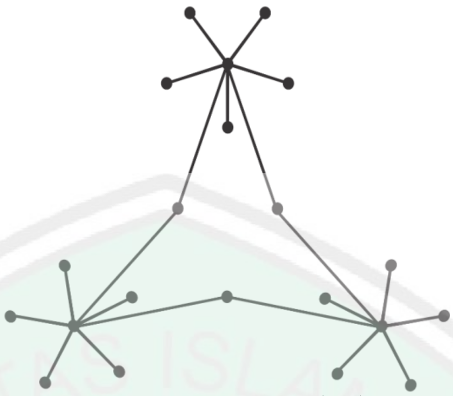
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.43 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,5)$

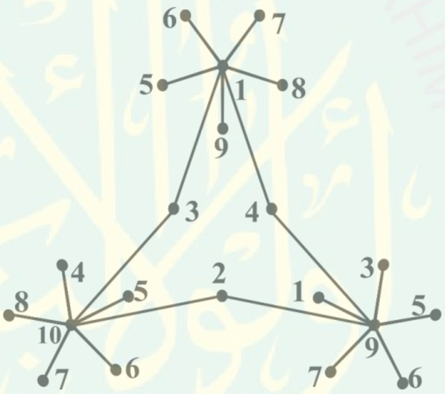
Berdasarkan Gambar 3.43 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,5) \leq 9$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}\big(Se(3,5)\big) \leq 9$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,6)$, contoh gambar dari $Se(3,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.44 Graf $Se(3,6)$

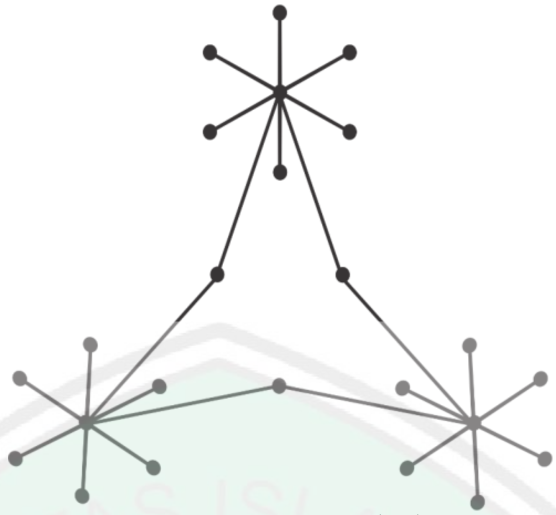
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.45 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,6)$

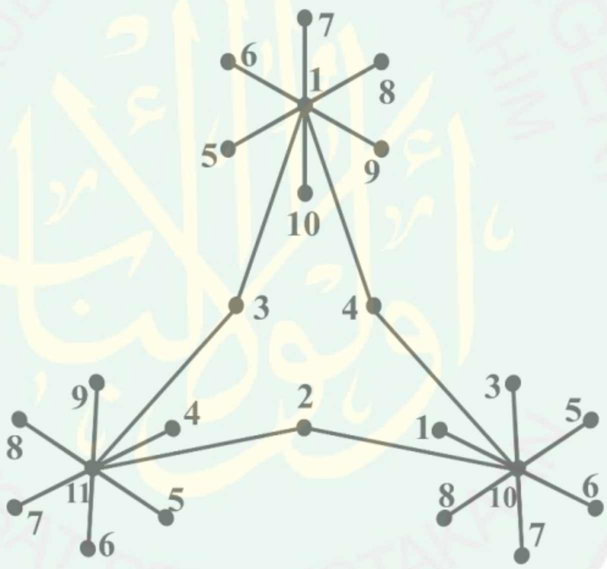
Berdasarkan Gambar 3.45 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,6) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(3,6)) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,7)$ yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut:



Gambar 3.46 Graf $Se(3,7)$

Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(4,7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.47 Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,7)$

Berdasarkan Gambar 3.47 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,7) \leq 11$, dan bisa ditulis $\lambda_{2,1}(Se(3,7)) \leq 11$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,k)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.5 berikut:

Tabel 3.5 Tabel Pelabelan Titik $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,k), k \geq 3$

$Se(3,k), k \geq 3$
$\lambda_{2,1}(Se(3,3)) \leq 7$
$\lambda_{2,1}(Se(3,4)) \leq 8$
$\lambda_{2,1}(Se(3,5)) \leq 9$
$\lambda_{2,1}(Se(3,6)) \leq 10$
$\lambda_{2,1}(Se(3,7)) \leq 11$

Berdasarkan Table 3.5, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda_{2,1}(Se(3,k)) \leq k + 4; k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut, dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1.5 Untuk sebarang graf $Se(3,k); k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ adalah $\lambda_{2,1}(Se(3,k)) = k + 4$

Bukti:

Diketahui $K_{1,k+1} \subseteq Se(3,k)$, dan $\lambda_{2,1}(K_{1,k+1}) = k + 3$. Jika titik pusat (v_c) pada graf bintang diberi label 1 atau $k + 3$, maka nilai minimal label terbesar pada $K_{1,k+1} = k + 3$ karana terdapat satu bilangan dari 1 sampai $k + 3$ yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,k+1}$. dan jika $v_c \neq 1$ atau $v_c \neq k + 3$ maka akan ada dua bilangan yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,k+1}$ yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $K_{1,k+1} = k + 4$. Titik v_c dari $K_{1,k+1} \subseteq Se(3,k)$ terdapat pada setiap titik pada di C_3, dan C_3 disubdivisi yang mengakibatkan setiap titik yang terhubung langsung pada C_3 akan berjarak dua di $S(C_3)$, sehingga titik-titik C_3 bisa diberi label 1 dan $k+3$ secara bergantian. Karena C_3 memiliki titik berjumlah ganjil, maka terdapat satu titik yang tidak dapat diberi label 1 dan $k+3$ yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $Se(3,k) = k+4$

Sehingga diperoleh $\lambda_{2,1}(Se(3,k)) = k+4$

3.1.6 Pelabelan Titik $L(2,1)$ untuk Graf $Se(n,r)$, $n, r \in \mathbb{N}$

Dari pembahasan di atas, dapat diperoleh pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(n,r)$ sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Pelabelan Titik $L(2,1)$ Graf pada $Se(n,r)$

$Se(2k,4), k \geq 2$	$Se(2k,4), k \geq 2$	$Se(2k-1,4), k \geq 2$
$\lambda_{2,1}(Se(3,2)) \leq 6$	$\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 7$	$\lambda_{2,1}(Se(3,4)) \leq 8$
$\lambda_{2,1}(Se(4,2)) \leq 6$	$\lambda_{2,1}(Se(6,4)) \leq 7$	$\lambda_{2,1}(Se(5,4)) \leq 8$
$\lambda_{2,1}(Se(5,2)) \leq 6$	$\lambda_{2,1}(Se(8,4)) \leq 7$	$\lambda_{2,1}(Se(7,4)) \leq 8$
$\lambda_{2,1}(Se(6,2)) \leq 6$	$\lambda_{2,1}(Se(10,4)) \leq 7$	$\lambda_{2,1}(Se(9,4)) \leq 8$
$Se(4,k), k \geq 3$	$Se(3,k), k \geq 3$	
$\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 7$	$\lambda_{2,1}(Se(4,4)) \leq 8$	
$\lambda_{2,1}(Se(4,5)) \leq 8$	$\lambda_{2,1}(Se(4,5)) \leq 9$	
$\lambda_{2,1}(Se(4,6)) \leq 9$	$\lambda_{2,1}(Se(4,6)) \leq 10$	
$\lambda_{2,1}(Se(4,7)) \leq 10$	$\lambda_{2,1}(Se(4,7)) \leq 11$	

Berdasarkan Tabel 3.6 di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 6 & \text{jika } r = 2 \\ r+3 & \text{jika } n = 2k; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \\ r+4 & \text{jika } n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1.6 Untuk sebarang graf $Se(n,r)$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan titik $L(2,1)$ adalah :

$$\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 6 & \text{jika } r = 2 \\ r+3 & \text{jika } n = 2k; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \\ r+4 & \text{jika } n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = 6; n \geq 3; r = 2; r, n \in \mathbb{N}$ telah dibuktikan pada subbab 3.1.1, yang menjelaskan tentang pelabelan titik $L(2,1)$ untuk $Se(k,2), k \geq 3, k \in \mathbb{N}$.

Untuk $\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = r+3, n = 2k; k \geq 2, r > 2; n, r \in \mathbb{N}$ telah dibuktikan pada subbab 3.1.2 dan 3.1.4. Diketahui bahwa $K_{1,r+1} \subseteq Se(n,r)$, dan $\lambda_{2,1}(K_{1,r+1}) = r+3$. Sehingga diperoleh $\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = r+3$

Dan untuk $\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = r+4; n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k, r \in \mathbb{N}$ telah dibuktikan pada subbab 3.1.3 dan 3.1.5. Diketahui $K_{1,r+1} \subseteq Se(3,k)$, dan $\lambda_{2,1}(K_{1,r+1}) = r+3$, $\quad jika \;\; n = 2k; k \geq 2, r > 2; k, r \in \mathbb{N}$. Jika titik pusat (v_c) pada graf bintang $(K_{1,r+1})$ diberi label 1 atau $r+3$, maka nilai minimal label terbesar pada $K_{1,r+1} = r+3$, karana terdapat satu bilangan dari 1 sampai $r+3$ yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,r+1}$. dan jika $v_c \neq 1$ atau $v_c \neq r+3$ maka akan ada dua bilangan yang tidak dapat dimasukkan pada pelabelan $K_{1,r+1}$ yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $K_{1,r+1} = r+4$. Dan titik v_c

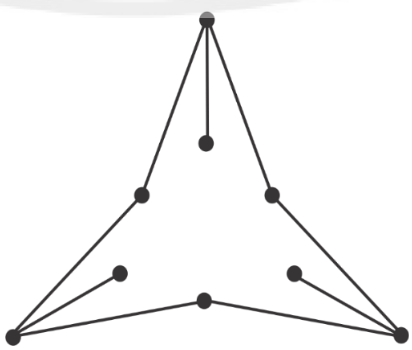
dari $K_{1,r+1} \subseteq Se(n,r)$ terdapat pada setiap titik pada di C_n, dan C_n disubdivisi yang mengakibatkan setiap titik yang terhubung langsung pada C_n akan berjarak dua di $S(C_n)$, sehingga titik-titik C_n bisa diberi label 1 dan $r+3$ secara bergantian. Karena $C_n(n = 2k-1)$ memiliki titik berjumlah ganjil, maka terdapat satu titik yang tidak dapat diberi label 1 dan $r+3$ yang menyebabkan nilai minimal label terbesar pada $Se(n,r) = r+4$. Sehingga diperoleh $\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = r+4$; Jika $n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k, r \in \mathbb{N}$

3.2 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf Sparkle.

Pada bab ini, akan dijelaskan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle $(Se(m,n))$, sebagai mana dalam menentukannya akan dibagi lima pembahasan. Pertama pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(2k-1,2)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, kedua pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(2k,4)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, ketiga pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(2k-1,4)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, keempat pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(4,k), k \in \mathbb{N}$, dan kelima pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(3,k), k \in \mathbb{N}$, keenam pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(n,r); n, r \in \mathbb{N}$.

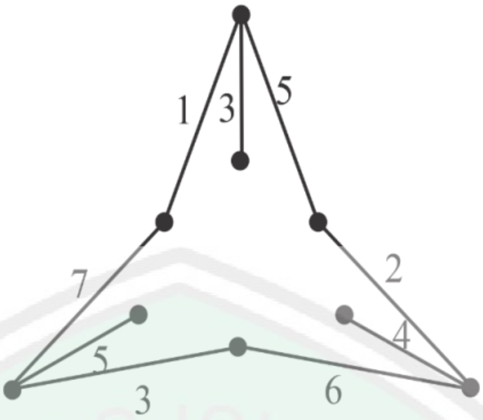
3.2.1 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ untuk Graf $Se(2k-1,2)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,2)$, contoh gambar dari $Se(3,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.48 Graf $Se(4,4)$

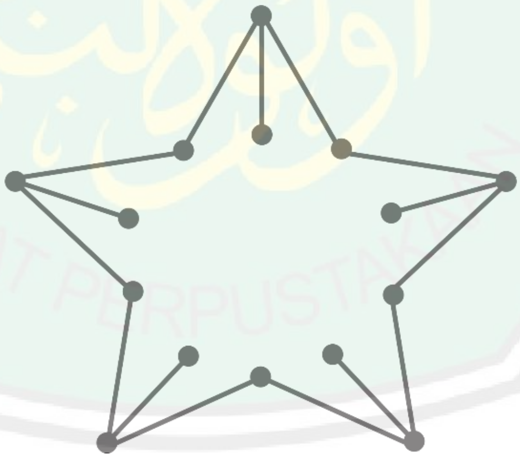
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,2)$ sebagai berikut:



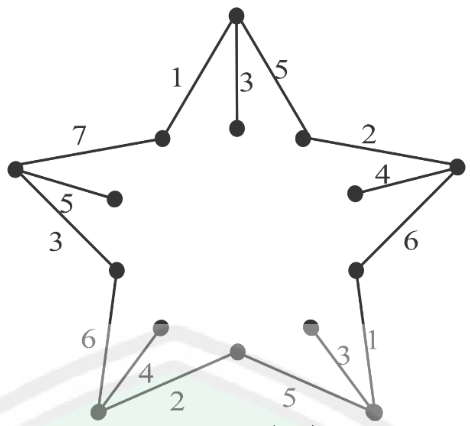
Gambar 3.49 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,2)$

Berdasarkan Gambar 3.49 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,2) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}\big(Se(3,2)\big) \leq 7$

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(5,2)$, contoh gambar dari $Se(5,2)$ sebagai berikut:


Gambar 3.50 Graf $Se(5,2)$

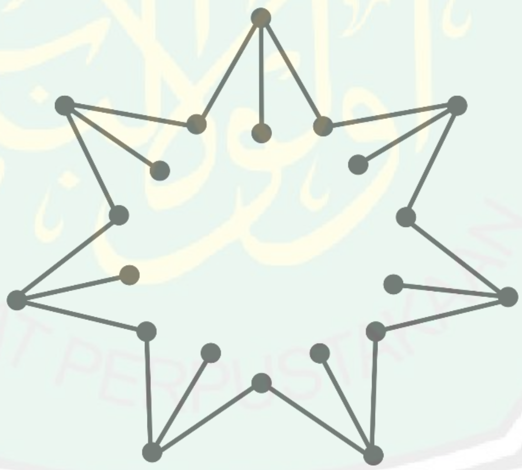
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(5,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.51 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(5,2)$

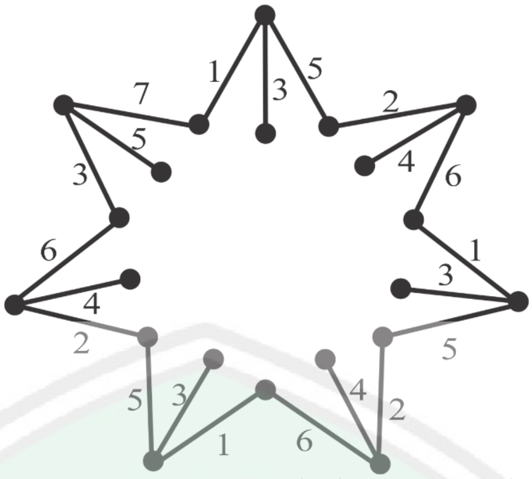
Berdasarkan Gambar 3.51 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(5,2) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}\big(Se(5,2)\big) \leq 7$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(7,2)$, contoh gambar dari $Se(7,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.52 Graf $Se(7,2)$

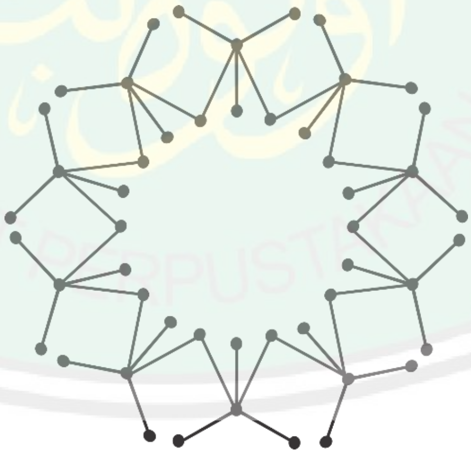
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(7,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.53 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(7,2)$

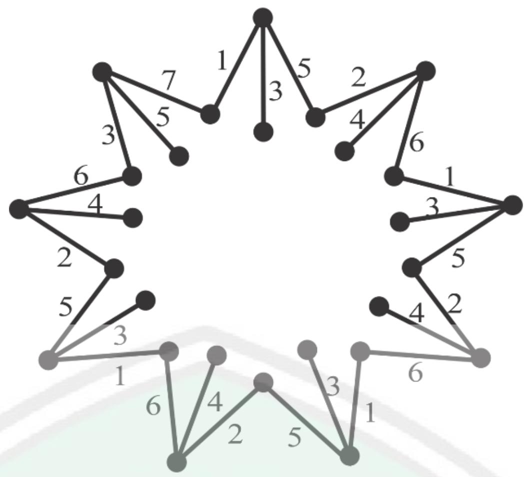
Berdasarkan Gambar 3.53 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(7,2) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(7,2)) \leq 7$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(9,2)$, contoh gambar dari $Se(9,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.54 Graf $Se(92,4)$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(9,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.55 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(9,2)$

Berdasarkan Gambar 3.55 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(9,2) \leq 7$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(9,2)) \leq 7$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan sisi $L(2,1)$ untuk $Se(2k-1,2)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.7 berikut:

Tabel 3.7 Tabel Pelabelan Sisi pada Graf $Se(2k-1,2)$

$Se(2k-1,2), k \geq 2$
$\lambda'_{2,1}(Se(3,2)) \leq 7$
$\lambda'_{2,1}(Se(5,2)) \leq 7$
$\lambda'_{2,1}(Se(7,2)) \leq 7$
$\lambda'_{2,1}(Se(9,2)) \leq 7$

Berdasarkan Tabel 3.7 di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda'_{2,1}(Se(2k-1,2)) \leq 7; k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2.1 Untuk sebarang graf $Se(2k-1,2), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ adalah $\lambda'_{2,1}\big(Se(2k-1,2)\big) = 7$

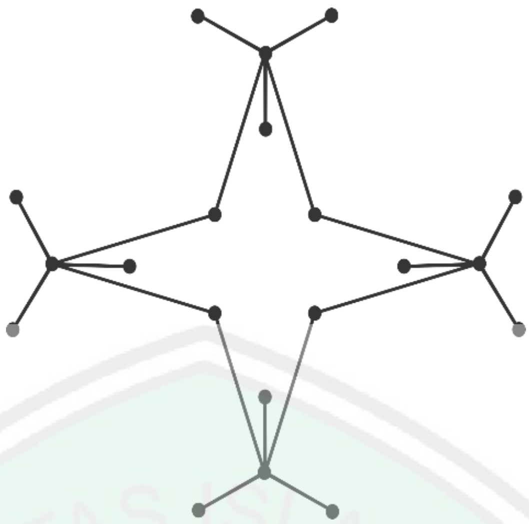
Bukti:

Graf $Se(2k-1,2)$ yang terbentuk dari graf siklus $C_{2k-1}(k = 2,3,4 \ldots, n)$ dan graf komplit $\overline{K_{2-1}^{c}}$. Terdapat $e_i(i = 1,2,3)$ adalah sisi dari $K_{1,3} \subseteq Se(2k-1,2)$, Karena setiap sisi pada graf bintang terhubung langsung maka pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf bintang mempunyai selisih 2 sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}(K_{1,3}) = 5$, karena terdapat dua graf $K_{1,3}$ yang salah satu sisinya terhubung langsung, sehingga mengakibatan nilai minimal label terbesar pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $\lambda'_{2,1}(K_{1,3}) = 6$. Jika graf $Se(2k-1,2)$ dibagi dalam beberapa graf $K_{1,3}$, maka akan memilik graf $K_{1,3}$ sebanyak $2k-1$ (ganjil), yang mengakibatkan terdapat $K_{1,3}$ diantara $\lambda'_{2,1}(K_{1,3}) = 5$ dan $\lambda'_{2,1}(K_{1,3}) = 6$, sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}(Se(2k-1,2)) = 7$.

Maka diperoleh $\lambda'_{2,1}(2k-1,2) = 7$

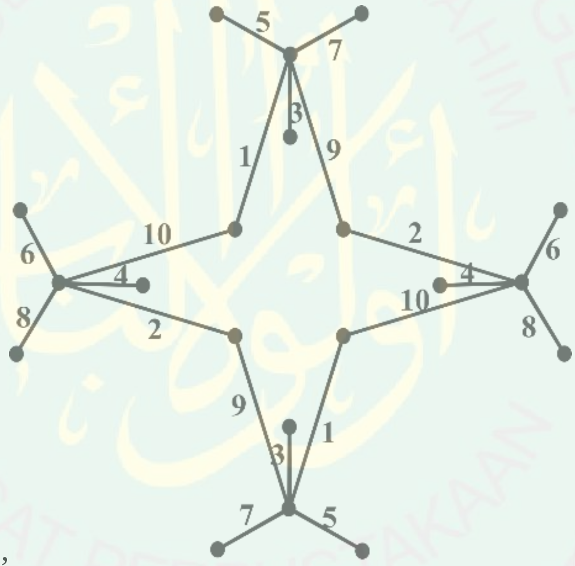
3.2.2 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ untuk Graf $Se(2k,4)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$, contoh gambar dari $Se(4,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.56 Graf $Se(4,4)$

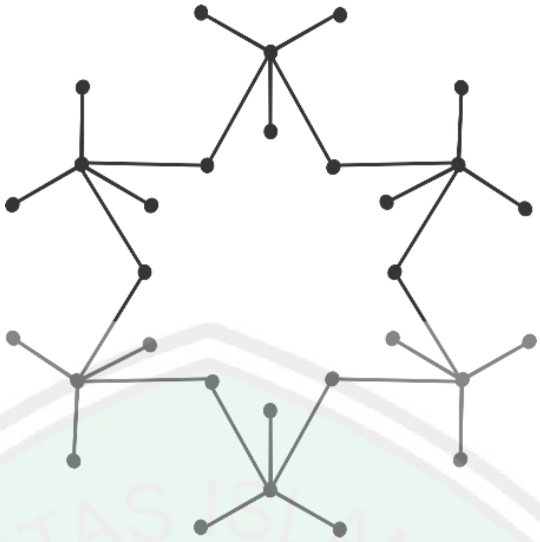
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$ sebagai berikut:



,
Gambar 3.57 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,4)$

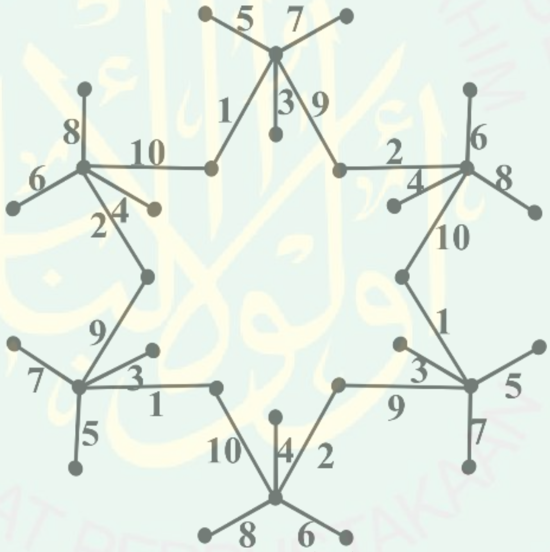
Berdasarkan Gambar 3.57 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(4,4)) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(6,4)$, contoh gambar dari $Se(6,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.58 Graf $Se(6,4)$

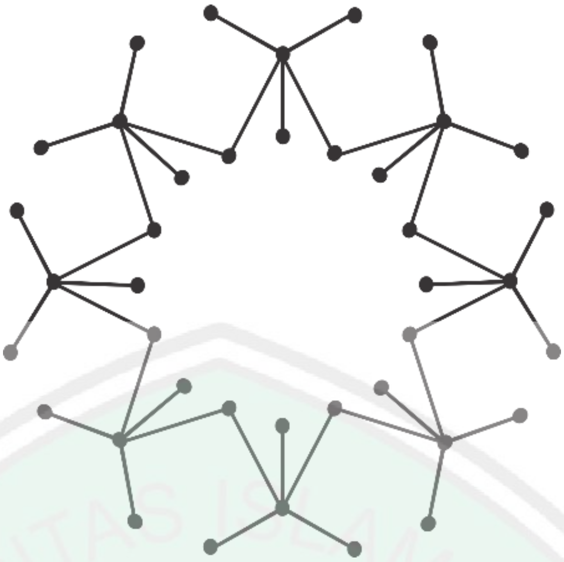
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(6,4)$ sebagai berikut.



Gambar 3.59 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(6,4)$

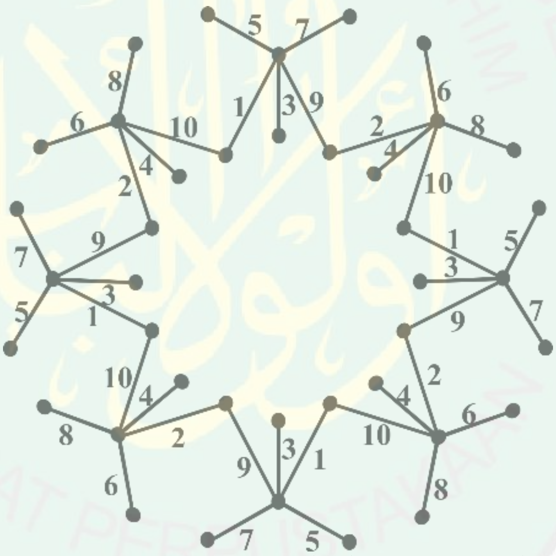
Berdasarkan Gambar 3.59 dapat diketahui nilai minimal label terbasar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(6,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(6,4)) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(8,4)$, contoh gambar dari $Se(8,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.60 Graf $Se(8,4)$

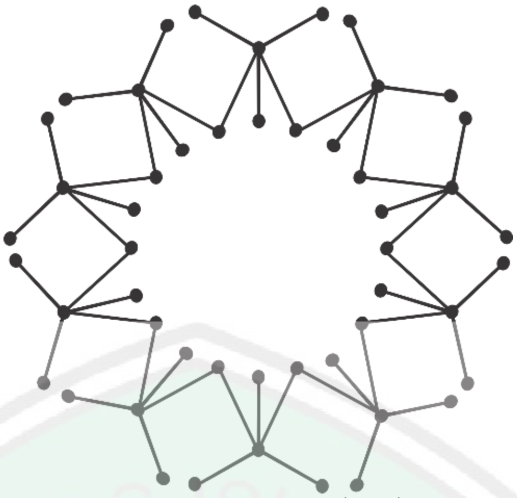
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(8,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.61 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(8,4)$

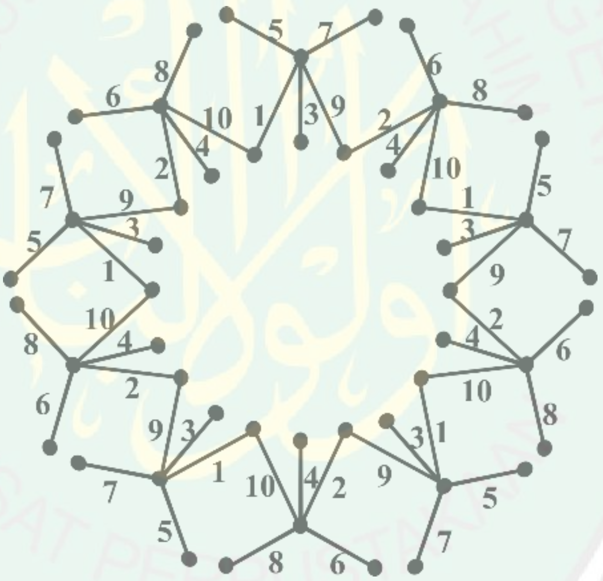
Berdasarkan Gambar 3.61 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(8,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}\big(Se(8,4)\big) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(10,4)$, contoh gambar dari $Se(10,4)$ sebagai berikut.



Gambar 3.62 Graf $Se(10,4)$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(10,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.63 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(10,4)$

Berdasarkan Gambar 3.63 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(10,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(10,4)) \leq 10$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(2k,4)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.8 berikut:

Tabel 3.8 Tabel Pelabelan Sisi pada $Se(2k,4)$

$Se(2k,4), k \geq 2$
$\lambda'_{2,1}\left(Se(4{,}4)\right) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\left(Se(6{,}4)\right) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\left(Se(8{,}4)\right) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\left(Se(10{,}4)\right) \leq 10$

Berdasarkan tabel di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda'_{2,1}\left(Se(2k,4)\right) \leq 10\,; k \geq 2\,, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

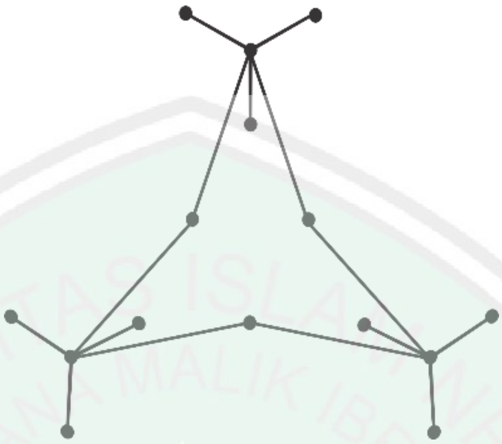
Teorema 3.2.2 Untuk sebarang graf $Se(2k,4), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan sisi $L(2{,}1)$ adalah $\lambda'_{2,1}\left(Se(2k,4)\right) = 10$

Bukti :

Graf $Se(2k,4)$ yang terbentuk dari graf siklus $C_{2k}(k = 2{,}3{,}4 \ldots, n)$ dan graf komplit K^c_{4-1}. Terdapat $e_i(i = 1{,}2{,}3{,}4{,}5)$ adalah sisi dari $K_{1,5} \subseteq Se(2k,4)$, Karena setiap sisi pada graf bintang terhubung langsung maka pelabelan sisi $L(2{,}1)$ pada graf bintang mempunyai selisih 2 sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}\left(K_{1,5}\right) = 9$, karena terdapat dua graf $K_{1,5}$ yang salah satu sisinya terhubung langsung sehingga mengakibatan nilai minimal label terbesar pelabelan sisi $L(2{,}1)$ pada graf $Se(2k,4) = 10$. Maka diperoleh $\lambda'_{2,1}(2k,4) = 10$

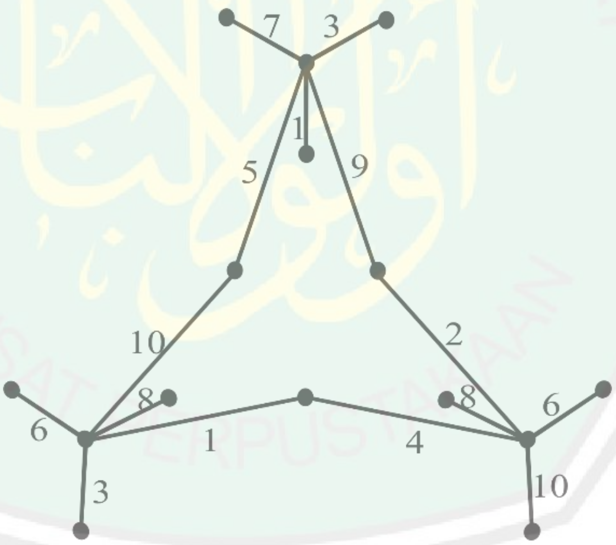
3.2.3 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ untuk Graf $Se(2k-1,4)$; $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$, contoh gambar dari $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.64 Graf $Se(3,4)$

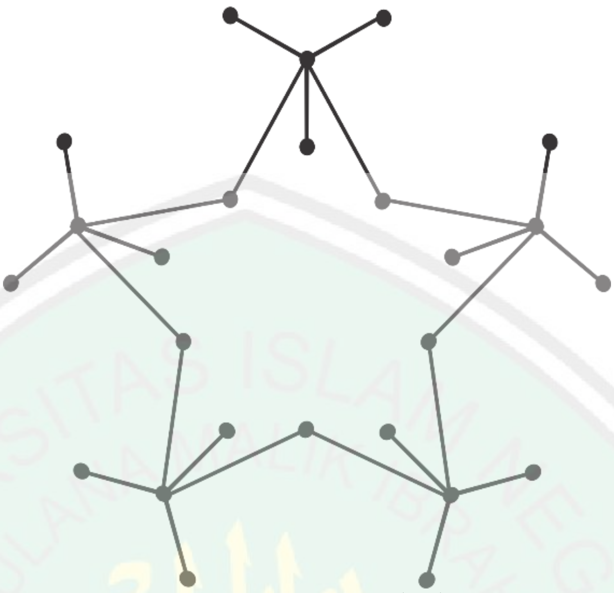
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.65 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,4)$

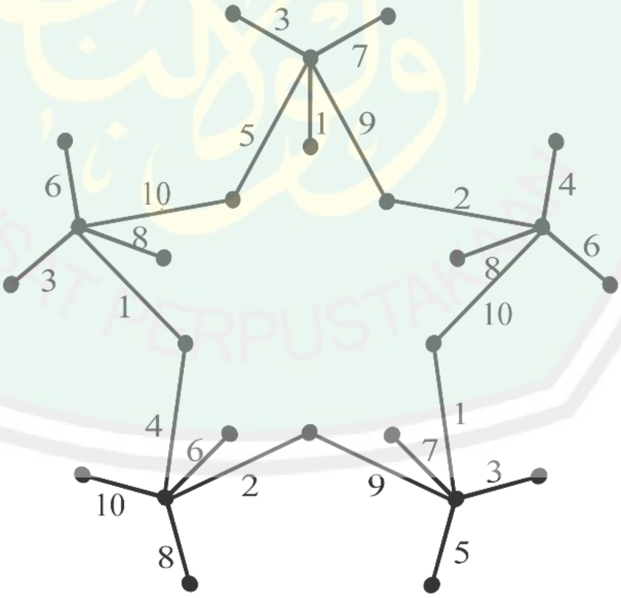
Berdasarkan Gambar 3.65 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(3,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(3,4)) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2{,}1)$ pada $Se(5{,}4)$, contoh gambar dari $Se(5{,}4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.66 Graf $Se(5{,}4)$

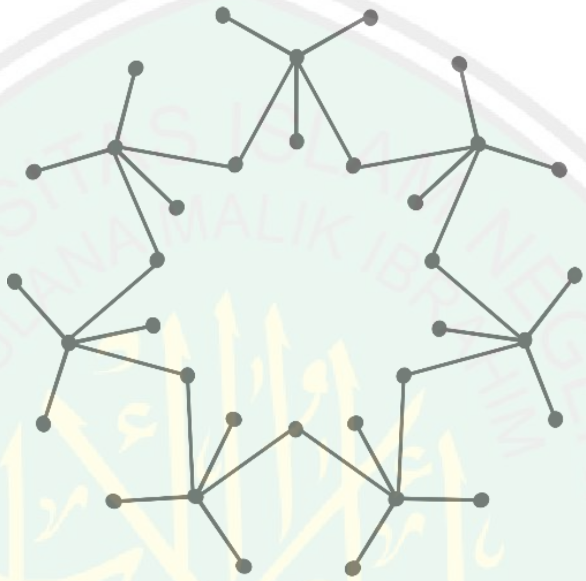
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(5,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.67 Pelabelan Sisi $L(2{,}1)$ pada Graf $Se(5{,}4)$

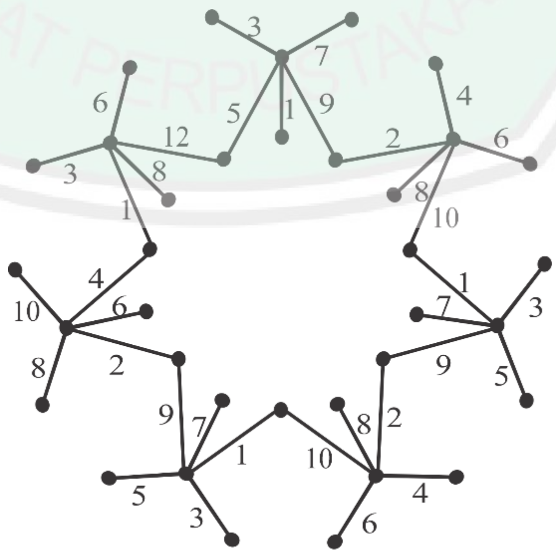
Berdasarkan Gambar 3.67 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(5,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}(Se(5,4)) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(7,4)$, contoh gambar dari $Se(7,4)$sebagai berikut:



Gambar 3.68 Graf $Se(7,4)$

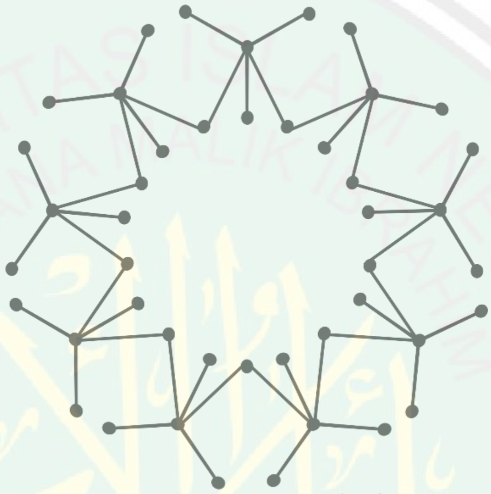
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(7,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.69 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(7,4)$

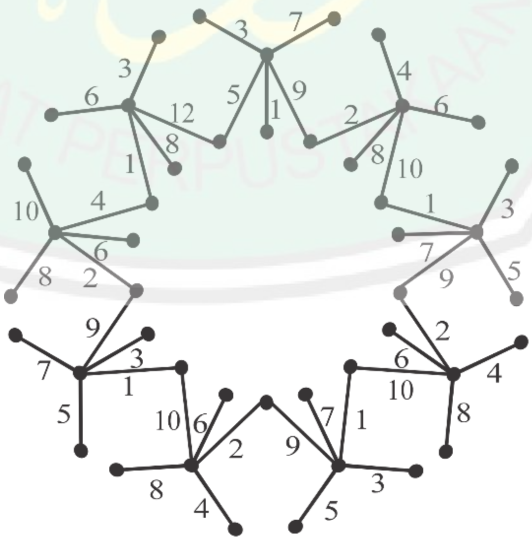
Berdasarkan Gambar 3.69 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(7,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}\big(Se(7,4)\big) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(9,4)$, contoh gambar dari $Se(9,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.70 Graf $Se(9,4)$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(9,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.71 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(9,4)$

Berdasarkan Gambar 3.71 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(9,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda'_{2,1}\big(Se(9,4)\big) \leq 10$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(2k-1,4)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.9 berikut:

Tabel 3.9 Tabel Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(2k-1,4)$

$Se(2k-1,4), k \geq 2$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(3,4)\big) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(5,4)\big) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(7,4)\big) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(9,4)\big) \leq 10$

Berdasarkan Tabel 3.9 di atas, maka diperoleh bahwa:

$$\lambda'_{2,1}\left(Se(2k-1,3)\right) \leq 10\,; k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2.3 Untuk sebarang graf $Se(2k-1,4), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ adalah $\lambda'_{2,1}\big(Se(2k-1,4)\big) = 11$

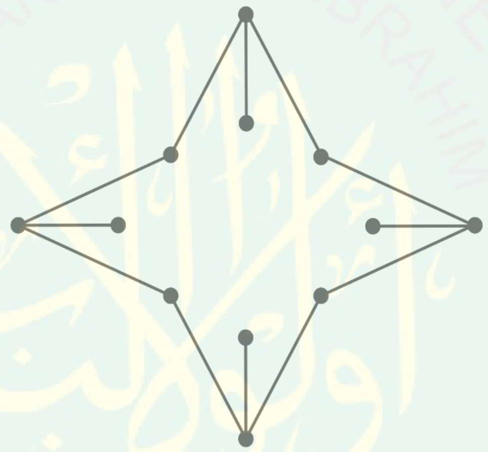
Bukti:

Graf $Se(2k-1,4)$ yang terbentuk dari graf siklus $C_{2k-1}(k = 2,3,4 \dots, n)$ dan graf komplit K^c_{4-1}. Terdapat $e_i(i = 1,2,3,4,5)$ adalah sisi dari $K_{1,5} \subseteq Se(2k-1,4)$, Karena setiap sisi pada graf bintang terhubung langsung maka pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf bintang mempunyai selisih dua sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}(K_{1,5}) = 9$, karena terdapat dua graf $K_{1,5}$ yang salah satu sisinya terhubung langsung, sehingga mengakibatkan nilai minimal label terbesar pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(2k-1,4) = 10$

Maka diperoleh $\lambda'_{2,1}(2k,4) = 10$.

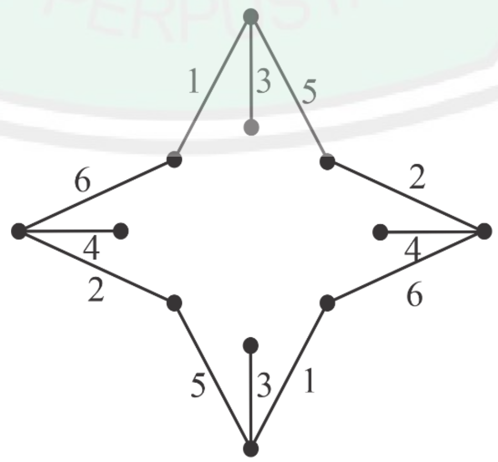
3.2.4 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ untuk Graf $Se(4,k), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,2)$, contoh gambar dari $Se(4,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.72 Graf $Se(4,3)$

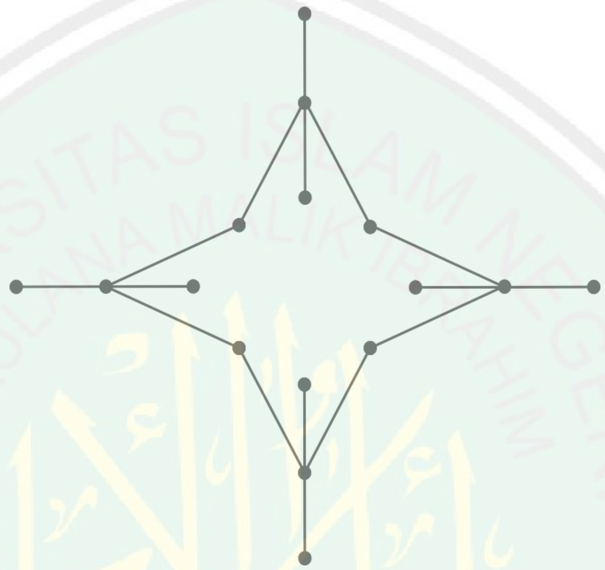
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,2)$ sebagai berikut:



Gambar 3.73 Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,3)$

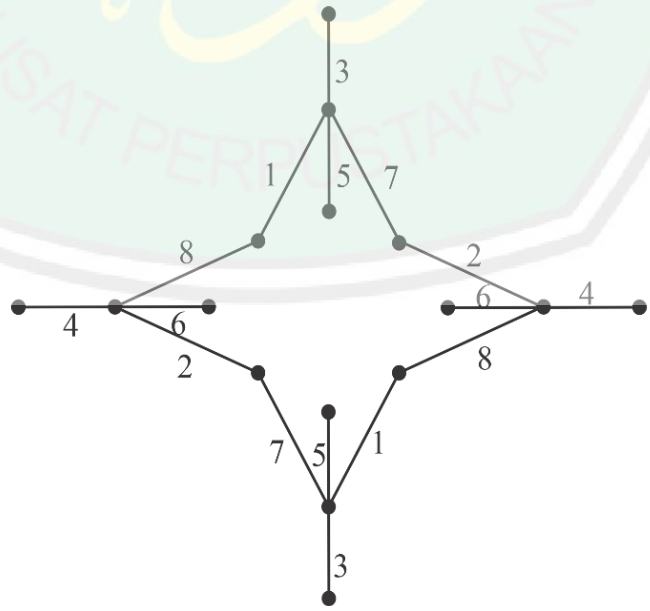
Berdasarkan Gambar 3.73 dapat diketahui nilai minimal label terbesar menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(4,2) \leq 6$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}(Se(4,2)) \leq 6$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,3)$, contoh gambar dari $Se(4,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.74 Graf $Se(4,3)$

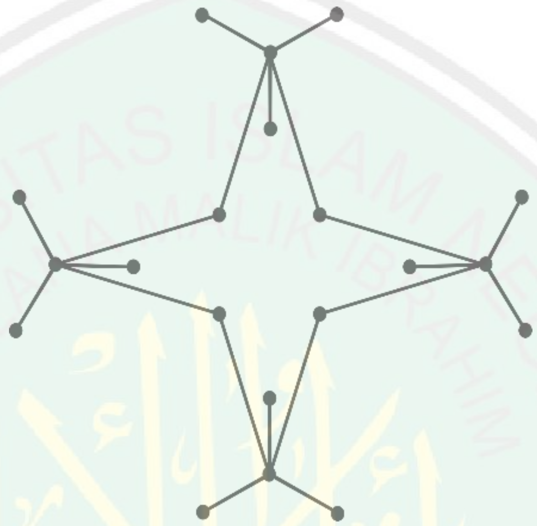
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.75 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,3)$

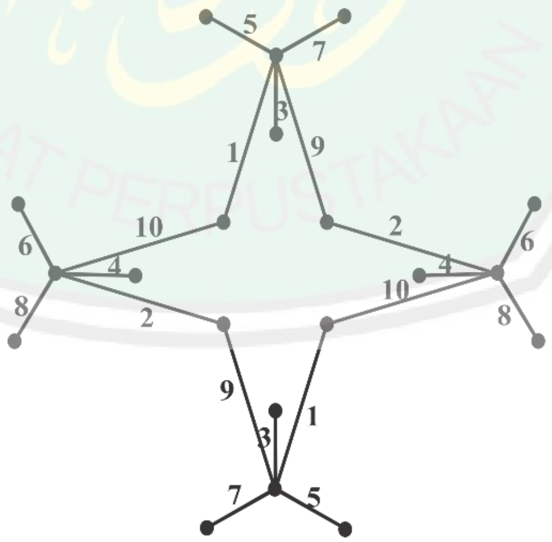
Berdasarkan Gambar 3.75 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(4,3) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}\big(Se(4,3)\big) \leq 8$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle $Se(4,4)$, contoh gambar dari $Se(4,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.76 Graf $Se(4,4)$

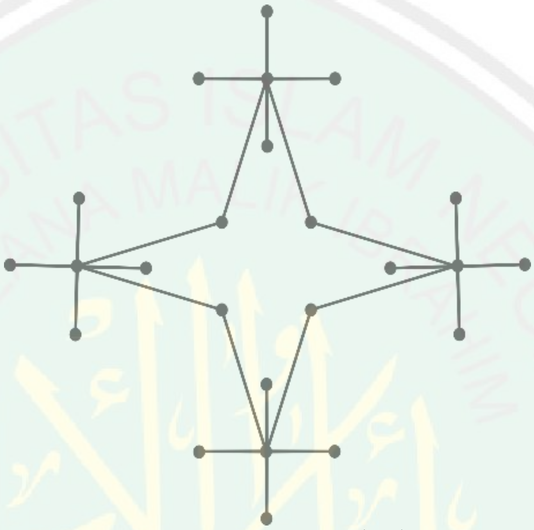
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.77 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,4)$

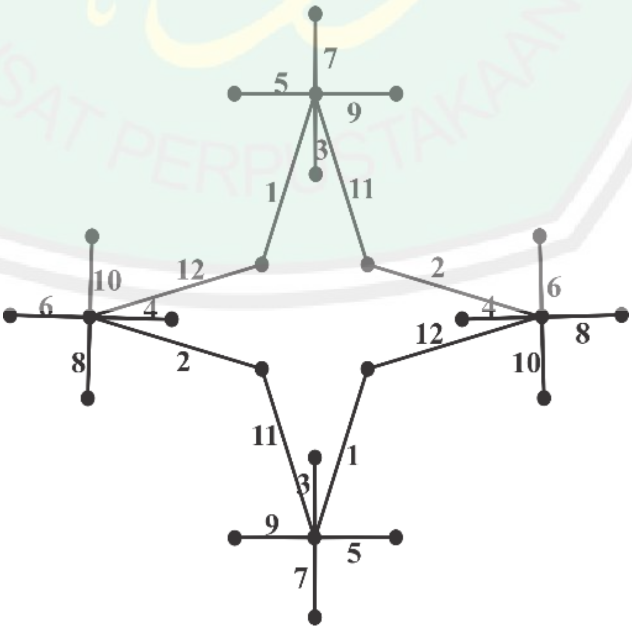
Berdasarkan Gambar 3.77 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(4,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}(Se(4,4)) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,5)$, contoh gambar dari $Se(4,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.78 Graf $Se(4,5)$

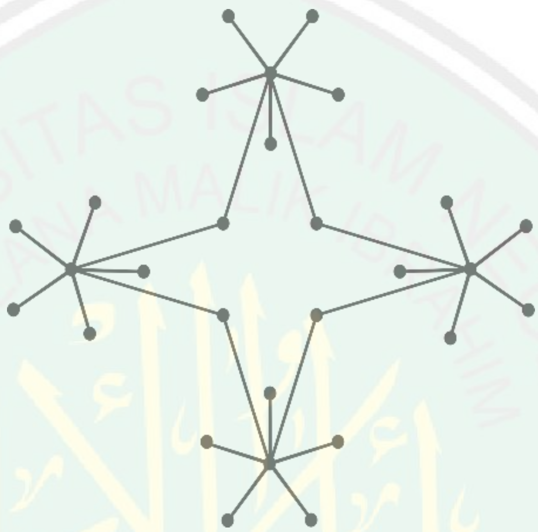
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.79 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,5)$

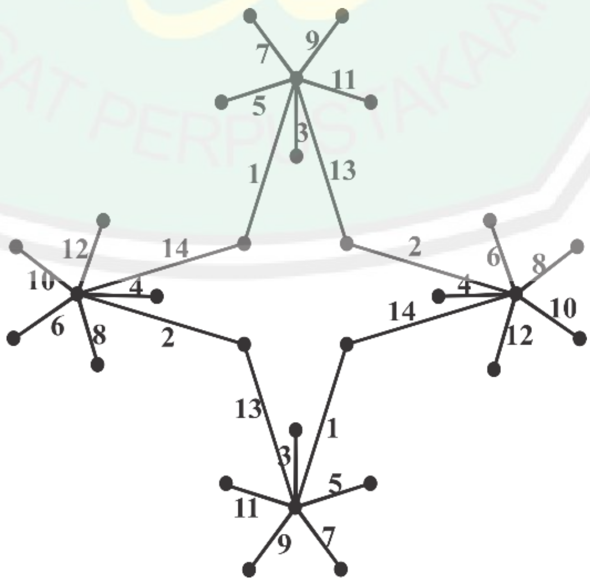
Berdasarkan Gambar 3.79 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(4,5) \leq 12$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}(Se(4,5)) \leq 12$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(4,6)$, contoh gambar dari $Se(4,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.80 Graf $Se(4,6)$

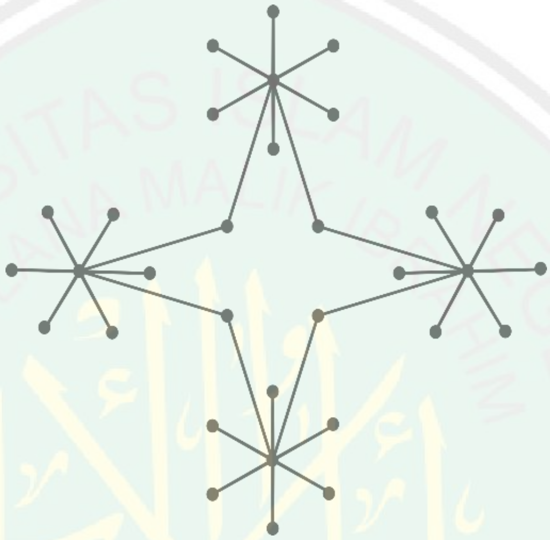
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.81 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,6)$

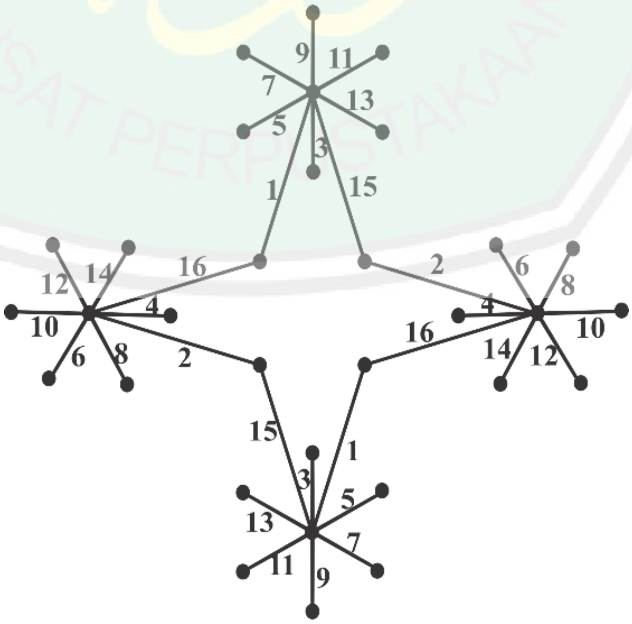
Berdasarkan Gambar 3.81 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(4,6) \leq 14$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}(Se(4,6)) \leq 14$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(4,7)$, contoh gambar dari $Se(4,7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.82 Graf $Se(4,7)$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.83 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,7)$

Berdasarkan Gambar 3.83 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(4,7) \leq 16$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}\big(Se(4,7)\big) \leq 16$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4,k)$yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.10 berikut:

Tabel 3.10 Tabel Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,k)$

$Se(4,k), k \geq 3$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,2)\big) \leq 6$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,3)\big) \leq 8$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,4)\big) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,5)\big) \leq 12$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,6)\big) \leq 14$
$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,7)\big) \leq 16$

Berdasarkan Tabel 3.10, maka diperoleh dugaan sebagai berikut:

$$\lambda'_{2,1}\big(Se(4,k)\big) = 2k + 2 \,; k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2.4 Untuk sebarang graf $Se(4,k), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal label terbesar dengan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ adalah $\lambda'_{2,1}\big(Se(4,k)\big) = 2k + 2$

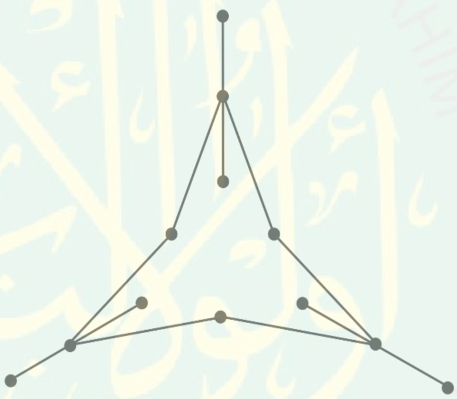
Bukti:

Graf $Se(4,k)$ yang terbentuk dari graf siklus C_4 dan graf lengkap K^c_{k-1}. Terdapat $e_i(i = 1,2,3, \dots, k+1)$ adalah sisi dari $K_{1,k+1} \subseteq Se(4,k)$, Karena setiap sisi pada graf bintang terhubung langsung maka pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf bintang mempunyai selisih 2 sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}(K_{1,k+1}) = 2k + 1$, karena terdapat dua graf $K_{1,k+1}$ yang salah satu sisinya terhubung langsung, sehingga mengakibatkan nilai minimal label terbesar pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(4, k) = 2k + 2$

Maka diperoleh $\lambda'_{2,1}(4, k) = 2k + 2$.

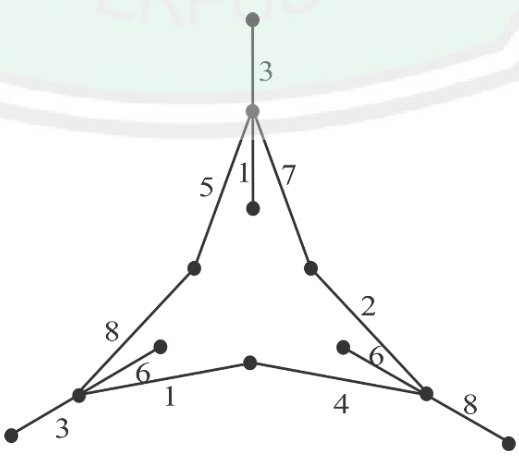
3.2.5 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ untuk Graf $Se(3, k), k \geq 3, k \in \mathbb{N}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,3)$, contoh gambar dari $Se(3,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.84 Graf $Se(3,3)$

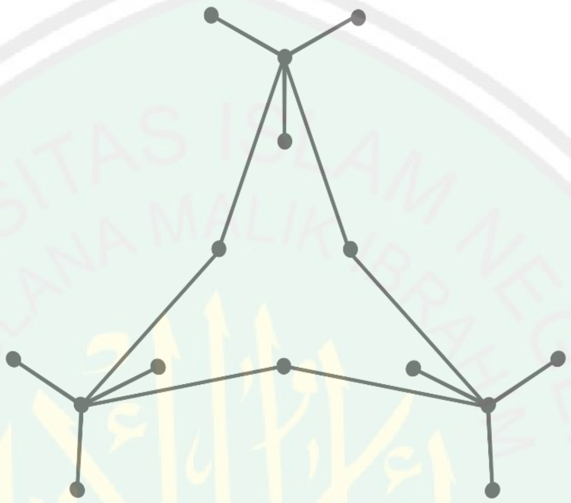
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,3)$ sebagai berikut:



Gambar 3.85 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,3)$

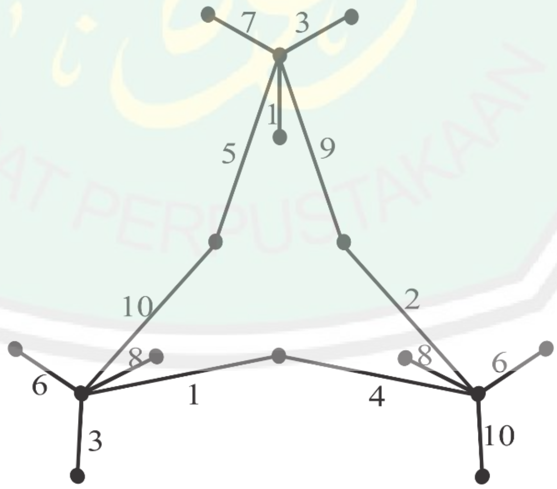
Berdasarkan Gambar 3.85 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(3,3) \leq 8$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}\big(Se(3,3)\big) \leq 8$.

Selajutnya dilakukan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$, contoh gambar dari $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.86 Graf $Se(3,4)$

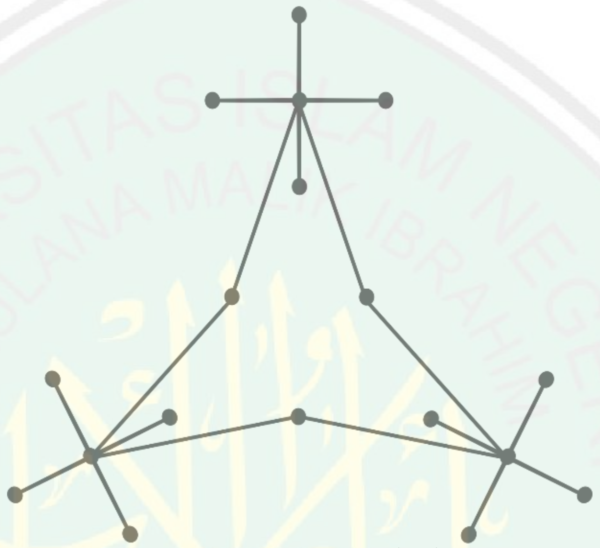
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,4)$ sebagai berikut:



Gambar 3.87 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,4)$

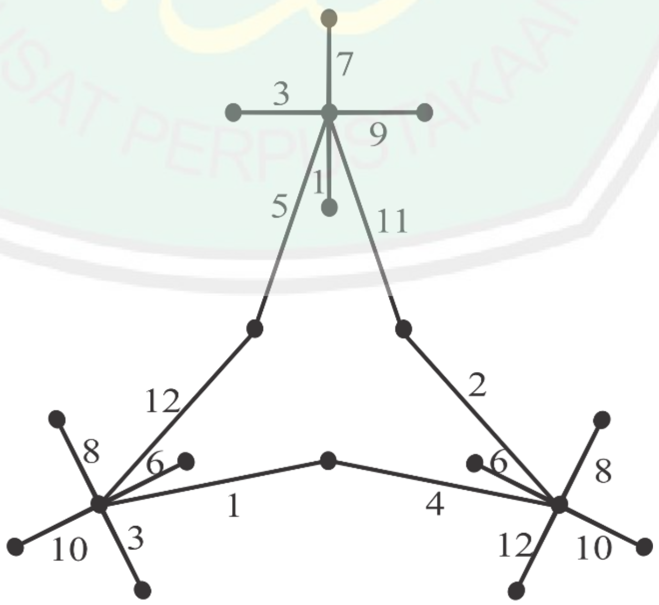
Berdasarkan Gambar 3.87 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(3,4) \leq 10$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}\big(Se(3,4)\big) \leq 10$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,5)$, contoh gambar dari $Se(3,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3.88 Graf $Se(3,5)$

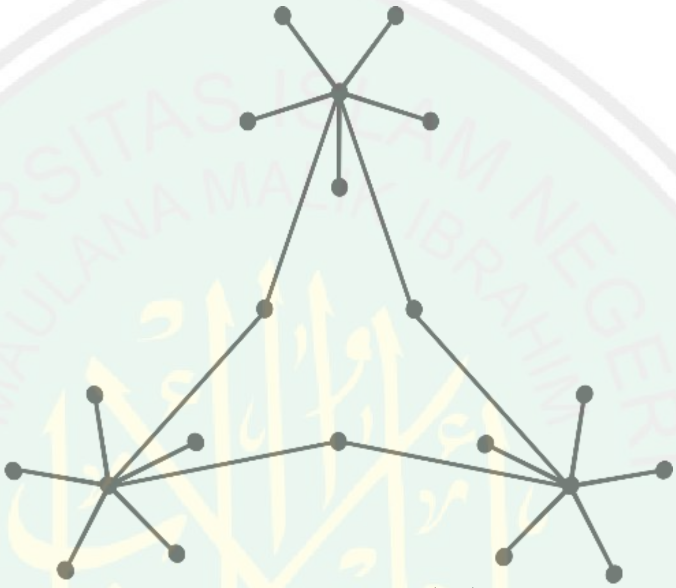
Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,5)$ sebagai berikut:



Gambar 3. 89 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(4,5)$

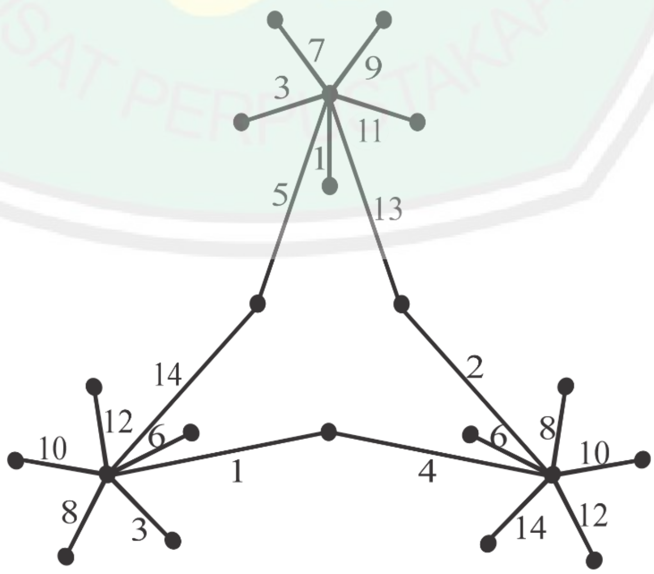
Berdasarkan Gambar 3.89 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Se(3,5) \leq 12$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}\big(Se(3,5)\big) \leq 12$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada $Se(3,6)$, contoh gambar dari $Se(3,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.90 Graf $Se(3,6)$

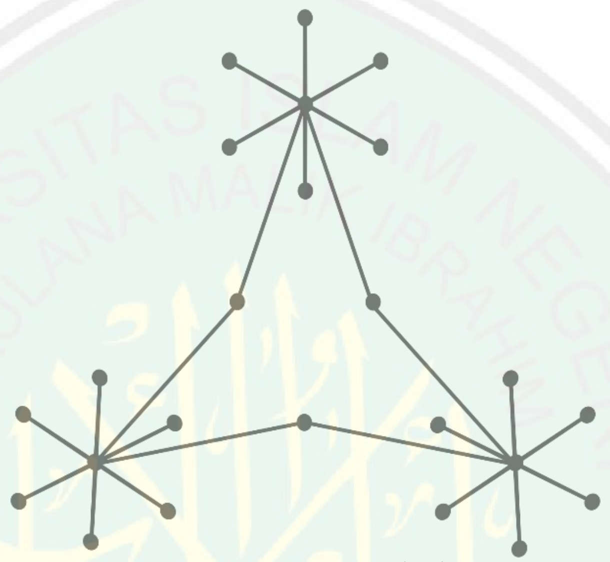
Pelabelan titik $L(2,1)$ pada $Se(3,6)$ sebagai berikut:



Gambar 3.91 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,6)$

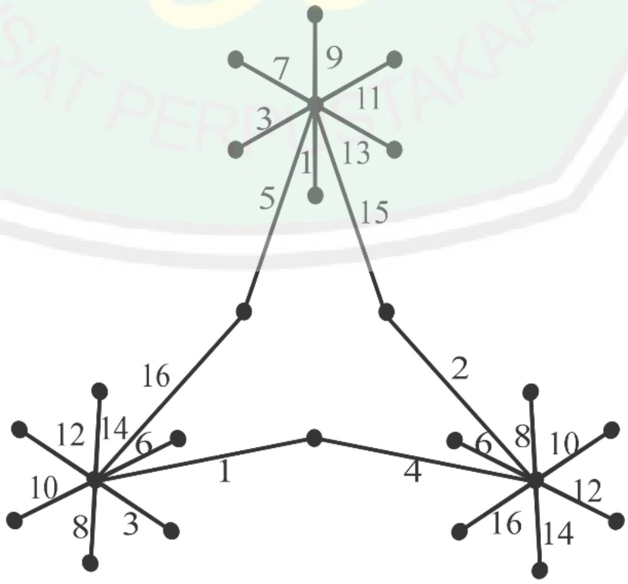
Berdasarkan Gambar 3.91 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2{,}1)$ pada graf $Se(3{,}6) \leq 14$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}\big(Se(3{,}6)\big) \leq 14$.

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2{,}1)$ pada $Se(3{,}7)$, contoh gambar dari $Se(3{,}7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.92 Graf $Se(3{,}7)$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,7)$ sebagai berikut:



Gambar 3.93 Pelabelan Sisi $L(2{,}1)$ pada Graf $Se(4{,}7)$

Berdasarkan Gambar 3.93 dapat diketahui nilai minimal label terbesar dengan menggunakan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf $Se(3,7) \leq 16$, dan bisa ditulis $\lambda s_{2,1}(Se(3,7)) \leq 16$.

Beberapa kemungkinan hasil pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,k)$ yang telah dilakukan dapat dilihat pada Tabel 3.11 berikut:

Tabel 3.11 Tabel Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(3,k)$

$Se(3,k), k \geq 3$
$\lambda s_{2,1}(Se(3,3)) \leq 8$
$\lambda s_{2,1}(Se(3,4)) \leq 10$
$\lambda s_{2,1}(Se(3,5)) \leq 12$
$\lambda s_{2,1}(Se(3,6)) \leq 14$
$\lambda s_{2,1}(Se(3,7)) \leq 16$

Berdasarkan pelabelan sisi $L(2,1)$ di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda t_{2,1}(Se(3,k)) \leq \mathbf{2}k + 2; k \geq 3, k \in \mathbb{N}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2.5 Untuk sebarang graf $Se(3,k), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal dengan aturan pelabelan sisi $L(2,1)$ adalah $\lambda s_{2,1}(Se(3,k)) = 2k + 2$

Bukti:

Graf $Se(3,k)$ yang terbentuk dari graf siklus C_4 dan graf lengkap K_{k-1}^c. Terdapat $e_i(i = 1,2,3, \dots, k + 1)$ adalah sisi dari $K_{1,k+1} \subseteq Se(3,k)$, Karena setiap sisi pada graf bintang terhubung langsung maka pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf bintang mempunyai selisih 2 sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}(K_{1,k+1}) = 2k+1$, karena terdapat dua graf $K_{1,k+1}$ yang salah satu sisinya terhubung langsung, sehingga mengakibatkan nilai minimal label terbesar pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(3,k) = 2k+2$

Maka diperoleh $\lambda'_{2,1}(3,k) = 2k+2$.

3.2.6 Pelabelan Sisi $L(2,1)$ untuk Graf $Se(n,r)$; $n,r \in \mathbb{N}$

Dari pembasan di atas, dapat diperoleh pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(n,r)$ sebagai berikut:

Tabel 3.12 Tabel Pelabelan Sisi $L(2,1)$ pada Graf $Se(n,r)$

$Se(2k,4), k \geq 2$	$Se(2k,4), k \geq 2$	$Se(2k-1,4), k \geq 2$
$\lambda'_{2,1}(Se(3,2)) \leq 7$	$\lambda'_{2,1}(Se(4,4)) \leq 10$	$\lambda'_{2,1}(Se(3,4)) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}(Se(5,2)) \leq 7$	$\lambda'_{2,1}(Se(6,4)) \leq 10$	$\lambda'_{2,1}(Se(5,4)) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}(Se(7,2)) \leq 7$	$\lambda'_{2,1}(Se(8,4)) \leq 10$	$\lambda'_{2,1}(Se(7,4)) \leq 10$
$\lambda'_{2,1}(Se(9,2)) \leq 7$	$\lambda'_{2,1}(Se(10,4)) \leq 10$	$\lambda'_{2,1}(Se(9,4)) \leq 10$
$Se(4,k), k \geq 3$	$Se(3,k), k \geq 3$	
$\lambda'_{2,1}(Se(4,4)) \leq 10$	$\lambda'_{2,1}(Se(4,4)) \leq 10$	
$\lambda'_{2,1}(Se(4,5)) \leq 12$	$\lambda'_{2,1}(Se(4,5)) \leq 12$	
$\lambda'_{2,1}(Se(4,6)) \leq 14$	$\lambda'_{2,1}(Se(4,6)) \leq 14$	
$\lambda'_{2,1}(Se(4,7)) \leq 16$	$\lambda'_{2,1}(Se(4,7)) \leq 16$	

Berdasarkan Tabel 3.12 di atas, maka diperoleh dugaan bahwa:

$$\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 7 & \text{jika } n \text{ ganjil}, r = 2 \\ 2r+2 & \text{jika } \begin{cases} n \text{ ganjil}, r \geq 3; r, n \in \mathbb{N} \\ n \text{ genap}, r \geq 2; r, n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

Sehingga dari dugaan tersebut dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2.5 Untuk sebarang graf $Se(3,k), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, maka nilai minimal pada pelabelan sisi $L(2,1)$ adalah

$$\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 7 & \text{jika } n \text{ ganjil}, r = 2 \\ 2r+2 & \text{jika } \begin{cases} n \text{ ganjil}, r \geq 3; r, n \in \mathbb{N} \\ n \text{ genap}, r \geq 2; r, n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = 7; n$ ganjil, $r = 2; n, r \in \mathbb{N}$ telah dibuktikan pada subbab 3.1.1.

Untuk $\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = 2r + 2, n\ ganjil, r \geq 3; r, n \in \mathbb{N}$ telah dibuktikan pada subbab 3.1.3 dan 3.1.5, dan untuk $\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = 2r + 2, n = genap, r \geq 2; r, n \in \mathbb{N}$ telah dibuktikan pada subbab 3.1.2 dan 3.1.4, yang pembutianya sabagai berikut: Graf $Se(n,r)$ yang terbentuk dari graf siklus C_n dan graf lengkap K^c_{r-1}. Terdapat $e_i(i = 1,2,3, \ldots, r+1)$ adalah sisi dari $K_{1,r+1} \subseteq Se(n,r)$, Karena setiap sisi pada graf bintang terhubung langsung maka pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf bintang mempunyai selisih 2 sedemikian sehingga $\lambda'_{2,1}(K_{1,r+1}) = 2r + 1$, karena terdapat dua graf $K_{1,r+1}$ yang salah satu sisinya terhubung langsung, sehingga mengakibatkan nilai minimal label terbesar pelabelan sisi $L(2,1)$ pada $Se(r,n) = 2r + 2$. Maka diperoleh $\lambda'_{2,1}(n,r) = 2r + 2$.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle $Se(n,r); n,r \in \mathbb{N}$ adalah

Pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf sparkle:

$$\lambda_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 6 & \text{jika } r = 2 \\ r+3 & \text{jika } n = 2k; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \\ r+4 & \text{jika } n = 2k-1; k \geq 2, r > 2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pelabelan sisi $L(2,1)$ pada graf sparkle:

$$\lambda'_{2,1}(Se(n,r)) = \begin{cases} 7 & \text{jika } n \text{ ganjil}, r = 2 \\ 2r+2 & \text{jika } \begin{cases} n \text{ ganjil}, r \geq 3; r,n \in \mathbb{N} \\ n \text{ genap}, r \geq 2; r,n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan mengunakan pelabelan $L(3,2,1)$ atau varian lain dari pelabelan $L(2,1)$.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.

Agnarsson, G.dan Halldorsson, M. M. 2003. *Coloring Power of Planar Graphs*. *SIAM J. Discrete Math*, 16(4):651-662.

Asmiati. 2016. *Graf dan Aplikasinya pada Jarak Terpendek*. Yogyakarta: Matematika.

Budiasti, H. 2010. *Pelabelan Total Titik Tak Beraturan pada Graf Bipartisi Lengkap*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Chen, Q dan Lin, W. 2012. *L(j,k) Labelling and L(j,k)-Edge-Labelling of Graphs*. Department of Matematics. Hal 1-12

Cuivilas, A. M. 2014. *Double Domination in Graphs Under Some Binary Operation. Applied Mathematical Science*. Vol. 8. 2014. No. 41. Hal 2015-2024.

Chartrand, G., Lesniak, L. and Zhang, P., 2016, *Graphs and Digraphs*, Sixth Edition, A Chapman and A Hall Book/CRC, Florida

Griggs, J. R. dan Roger K. Y. *Labeling Graphs with a condition at distance 2*. SIAM J. Disc. Math., Vol. 5, No. 4.(November 1992) 586-595

HE, D dan Lin, W. 2014. *On L(1,2)-Edge-Labelling Of Some Special Classes of Graphs*. Journal of Mathematical Research with Applications, 34(4): 403-413.

Huilggol M. I. dan Ulla S. A. S. 2014. *On Edge-Distance and Edge-Eccentric Graph of a Graph*. Vol. 2 No. 3. 2014. Pp.7-16

Lum, A. 2007. *Upper Bounds On the L(2,1) Labeling Number of Graphs With maximum Degree Δ*.

Siang, J. J. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta. Andi

RIWAYAT HIDUP

Husnul Yaqin, biasa dipanggil Yaqin, lahir di Gresik pada 30 Oktober 1993. Bertempat tinggal di Dusun Daun Iliran RT 02 RW 07 Daun Kecamatan Sangkapura Kebupaten Gresik. Anak dari bapak Marsudi dan ibu Rafi'ah.

Mulai menempuh pendidikan dasar di MINU 03 Daun pada tahun 2000 hingga 2006, menempuh pendidikan menengah pertama di MTs Darussalam Daun pada tahun 2006 hingga 2009, dan menempuh pendidikan menengah atasnya di MA Al-Mashduqiah Kraksaan pada tahun 2009 hingga 2013. Selanjutnya pada tahun 2014, melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Husnul Yaqin
NIM : 14610093
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan Titik dan Sisi $L(2,1)$ pada Graf Sparkle
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, MA.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	06 Feb 2019	Konsultasi BAB I, II, & III	1
2	06 Feb 2019	Konsul Keagamaan	2
3	07 Feb 2019	ACC Keagamaan	3
4	08 Feb 2019	ACC BAB I, II, & III	4
5	30 Agustus 2019	Konsultasi BAB II & III	5
6	2 September 2019	Konsultasi Ayat	6
7	3 September 2019	Konsultasi BAB III	7
8	5 September 2019	Revisi BAB III	8
9	16 September 2019	Konsultas BAB III	9
10	9 Oktober 2019	Konsultasi BAB III & IV	10
11	10 Oktober 2019	Konsultasi Keagamaan	11
12	16 Oktober	ACC Keagamaan	12
13	17 Oktober 2019	ACC Keseluruhan	13

Malang 31 Oktober 2019
Mengtahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001