PENYELESAIAN SISTEM KONGRUENSI LINIER MENGGUNAKAN DETERMINAN MATRIKS

SKRIPSI

OLEH
RIF'ATUL SYARIFAH
NIM. 16610048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENYELESAIAN SISTEM KONGRUENSI LINIER MENGGUNAKAN DETERMINAN NNATRIKS

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh:
Rif'atul Syarifah
NIM: 16610048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENYELESAIAN SISTEM KONGRUENSI LINIER MENGGUNAKAN DETERMINAN MATRIKS

SKRIPSI

Oleh:
Rif'atul Syarifah
NIM: 16610048

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 28 Maret 2020

Dosen Pembimbing I,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP 19720604 199903 2 001

Dosen Pembimbing II

Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP 19900511 201608 011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN SISTEM KONGRUENSI LINIER MENGGUNAKAN DETERMINAN MATRIKS

SKRIPSI

Oleh
Rif'atul Syarifah
NIM. 16610048

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 15 April 2020

Penguji Utama	: Juhari, S.Pd., M.Si
Ketua Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Nama : Rif'atul Syarifah

NIM : 16610048

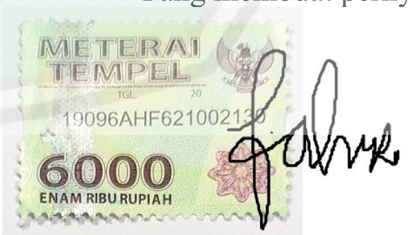
Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier menggunakan Determinan Matriks

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,
Yang membuat pernyataan



Rif'atul Syarifah
NIM. 16610048

MOTO

"Berlomba-lombalah dalam kebaikan"

"Ridha Allah tergantung pada ridha orang tua dan murka Allah tergantung pada murka orang tua."

Be the reason someone believes in good people

"Jadilah alasan sesorang percaya tentang orang baik"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Sami'uddin (Alm.), Ibu Unsiyah, Adik tersayang Nur Malika Balqis, Paman Nur Rahman yang selalu menjadi alasan penulis berjuang dan bertahan sampai saat ini. Serta keluarga besar yang selalu mendukung dan mendoakan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Bapak Sami'uddin (Alm) dan Ibu Unsiyah serta keluarga yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2016, terutama Devi, Irma, Soima, Intan, Ema, Yati, Luluk, Ulfa, Hana, Izza, dan Rosa yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, 27 Maret 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
ABSTRAK xii
ABSTRACT xiii
ملخص xiv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4Manfaat Penelitian 6
1.5 Batasan Masalah 6
1.6 Metode Penelitian 6
1.7 Sistematika Penulisan 9

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Bulat dan Keterbagian dalam Bilangan Bulat 10
2.2 Matriks 11
2.3 Determinan Matriks 15
2.4 Persamaan Linier dan Sistem Persamaan Linier 22
2.5 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode Cramer 23
2.6 Kongruensi 27
2.7 Kongruensi Linier 30
2.8 Sistem Kongruensi Linier 32
2.9 Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier 32
2.9.1 Metode Eliminasi 33
2.9.2 Metode Substitusi 34
2.9.3 Metode Campuran 36

2.10 Kajian Keagamaan 37

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier dengan Determinan Matriks... 39
3.2 Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier dengan Determinan Matriks pada Aplikasi Python.. 46
3.3 Sistem Kongruensi Linier dalam Pandangan Islam 51

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 54
4.2 Saran.. 54

DAFTAR RUJUKAN

LAMPIRAN

DAFTAR RIFAYAT HIDUP

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

ABSTRAK

Syarifah, Rifatul. 2020. **Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier Menggunakan Metode Determinan Matriks.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Evawati Alisah, M.Pd, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: Determinan matriks, Kongruensi, Kongruensi Linier, Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier, Python

Sistem kongruensi linier merupakan salah satu tema dalam bidang aljabar khususnya teori bilangan. Sistem kongruensi linier seringkali disamakan dengan sistem persamaan linier. Namun terdapat perbedaan diantara keduanya yaitu jika sistem persamaan linier bekerja pada himpunan bilangan riil, maka sistem kongruensi linier bekerja pada himpunan bilangan bulat modulo. Tujuan dari penelitian ini yaitu menyelesaikan sistem kongruensi linier menggunakan metode Determinan Matriks serta aplikasinya pada program Python, dimana metode Determinan Matriks merupakan salah satu metode turunan dari metode cramer. Metode cramer sendiri merupakan metode analitik dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Metode determinan matriks yaitu dikhususkan untuk sistem kongruensi linier pada himpunan bilangan bulat modulo, sedangkan cramer dikhususkan pada penyelesaian sistem persamaan linier pada bilangan riil. Jenis penelitian yang dilakukan yaitu penelitian kepustakaan dengan mengumpulkan beberapa literatur baik berupa buku maupun artikel yang berkaitan dengan penelitian ini.

Hasil dari penelitian berupa rumus umum penyelesaian sistem kongruensi linier yaitu misalkan sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$, maka solusi penyelesaian dari sistem kongruensi linier berdasarkan metode determinan matriks adalah $x_i \equiv (\det(A))^{-1} \det\left(A_{x_j}\right) (mod\ m)$ untuk setiap $j = 1,2,3, \dots, n$ dan $(\det(A))^{-1}$ adalah invers dari $\det(A)$ modulo m. Begitupun pada aplikasinya dengan program Python penyelesaian sistem kongruensi linier dinilai sangat membantu untuk meminimalkan tingkat kesalahan perhitungan pada proses perhitungan *(human error)*.

ABSTRACT

Syarifah, Rifatul. 2020. **Solving Linear System of Congruence using Determinant of Matrix.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisiors: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Congruence, Determinant of Matriks, Linear Congruence, Solving Linear System of Congruence, Python

Linear system of congruence is one of topic of Algebra especially in number theory. Linear system of congruence is often equated with linear system of equation. But there is the difference is that the linear system of equations works on a real number set, while the linear system of congruence works on modulo integer set. The purpose of this research is to solve the linear system of congruence using Determinant of matrix and its application using Python program, where the determinant of matrix is an expansion method from Cramer's rule. The determinant of matriks method especially for solving a linier sistem of congrunce in a set of modulos integer, and Cramer's rule is one of the analytical methods in solving the linear equation system in a set of real number. This type of research is literature research by collecting some literature of books and articles that related to this research.

The result of the research is a general formula for the completion of a linear congruence system, for example, a matrix $\boldsymbol{A}$ of size $n \times n$, then the solution for the solution based on the determinant of matrix method is $x_i \equiv (\det(A))^{-1} \det\left(A_{x_j}\right)\ (mod\ m)$ for each $j = 1,2,3, \dots, n$ and $(\det(A))^{-1}$ is inverse of $\det(A)$ modulos m. Likewise in its application with the python program the completion of the linear congruence system is considered very helpful for minimizing the level of calculation error in the calculation process (human error).

ملخص

الشريفة ، رفعة. ٢٠٢٠. حل نظام التطابق الخطي باستخدام طريقة *matrix* محدد . بحث جامعي .شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا ألجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج .المشرف:(١ايفاوتي عليشة الماجستير) ٢ محمد حذيفة الماجستير.

الكلمة المفتاحية: *matrix* محدد ، التطابق، التطابق الخطي ، حل نظام التطابق الخطي، *Python*

نظام التطابق الخطي هو أحد مواضيع الجبر التي تتعلم خاصة في نظرية الأعداد. غالبًا ما يُعادل نظام التطابق الخطي بنظام المعادلة الخطية. الفرق هو أن نظام المعادلات الخطية يعمل على مجموعة حقيقية، فإن نظام التطابق الخطي يعمل على رؤوس أعداد صحيحة. الغرض من هذا البحث هو حل نظام التطابق حيث يكون محدد المصفوفة طريقة ، *Python* الخطي باستخدام محدد المصفوفة وتطبيقه باستخدام برنامج خاصة لحل نظام التلازم الخطي في مجموعة من الوحدات *matrix* محدد طريقة .*Cramer* توسعة من قاعدة هي إحدى الطرق التحليلية في حل نظام المعادلة الخطية في مجموعة من Cramer المعيارية ، وقاعدة الأعداد الحقيقية. هذا النوع من البحث هو بحث أدبي من خلال جمع بعض أدب الكتب والمجلات المتعلقة بهذا البحث.

نتيجة هذا البحث هي صيغة عامة لحل نظام التطابق الخطي، على سبيل المثال ، المصفوفة بالحجم $n \times n$ ، طريقة محدد على طريقة القائم الحل حل ثم *matrix* هو أي $x_j \equiv (\det(A))^{-1}(\det(A_{x_i}))(mod\ m)$ والتي تنقسم إلى ثلاثة أجزاء حسب قيمة مؤشرها عندما تكون $j = 1,2,3,\dots,n$. وبالمثل في تطبيقه مع برنامج الثعبان ، يعتبر إكمال نظام التطابق الخطي مفيدًا جدًا لتقليل مستوى خطأ الحساب في عملية الحساب (خطأ بشري).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Saat ini ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang dengan sangat pesat. Hasil dari peningkatan ilmu pengetahuan dan teknologi mempunyai peran yang sangat penting untuk memenuhi kebutuhan manusia. Penelitian sangat diperlukan untuk terus mengembangkannya, baik untuk menemukan sesuatu yang baru ataupun untuk menyempurnakan penemuan-penemuan sebelumnya. Matematika sebagai salah satu bidang ilmu yang digunakan untuk alat bantu penyelesaian permasalahan sehari-hari. Dalam hubungannya dengan berbagai ilmu pengetahuan, matematika berfungsi sebagai bahasa. Adapun matematika sebagai ilmu itu sendiri memiliki beberapa bagian atau cabang bidang keilmuan.

Aljabar merupakan salah satu cabang bidang keilmuan matematika yang sudah digunakan sejak lama. Salah satu pembahasannya yaitu sistem persamaan linier, sistem persamaan linier merupakan bagian dari ilmu aljabar yang mempelajari bagaimana menyelesaikan persamaan-persamaan dengan menggunakan metode aljabar. Oleh sebab itu persamaan linear biasa disebut sebuah persamaan aljabar, dimana setiap sukunya berpangkat tunggal dan mengandung konstanta.

Terdapat beberapa metode penyelesaian dalam sistem persamaan linier, diantaranya metode eliminasi gauss, metode eliminasi, metode substitusi, metode invers matriks, dan aturan cramer. Aturan cramer adalah salah satu metode penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan nilai determinan. Nilai determinan matriks dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa metode, sehingga diperlukan n persamaan dengan n variabel atau matriks bujur sangkar agar bisa diselesaikan dengan menggunakan metode tersebut. Metode cramer merupakan salah satu metode yang sangat efektif jika dilihat dari jumlah iterasinya, karena metode tersebut adalah metode dimana penyelesaian antar variabel bisa dilakukan tanpa membutuhkan variabel lainnya.

Teori tentang matriks pertama kali dikembangkan oleh Arthur Cayley pada tahun 1859 di inggris dalam sebuah studi sistem persamaan linier dan transformasi linier. Sedangkan gagasan mengenai determinan dari sebuah matriks pertama kali muncul di Jepang dan di Eropa pada waktu yang hampir bersamaan, tetapi ilmuan Jepang yang bernama Seki Kowa mempublikasikannya terlebih dahulu. Seki merilis buku yang berjudul *"Method of Solving the dissimulated problems"* pada tahun 1683 yang memuat metode matriks. Tanpa menggunakan istilah *"determinant"*, ia memberikan metode umum dan memperkenalkannya. Kemudian barulah pada tahun 1801 dalam *"Disquistiones arithmeticae"* istilah *"determinant"* diperkenalkan oleh Carl F. Gauss dalam pembahasan bentuk-bentuk kuadrat dengan menggunakan determinan. Kemudian ada seorang ilmuan Perancis yang bernama Pierre Frederic Sarrus menemukan aturan untuk memecahkan determinan dari sebuah matriks berukuran 3×3 yang dinamakan skema Sarrus.

Selain persamaan linier, pada teori bilangan juga terdapat konsep kongruensi. Kongruensi linier memiliki semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat modulo. Selain itu, kongruensi linier satu variabel dapat digabungkan dengan kongruensi linier lainnya yang disebut kongruensi linier simultan.

Sedangkan sistem kongruensi linier yang terdiri lebih dari satu kongruensi dan variabel dan mempunyai modulo yang sama. Sistem kongruensi linear ini dalam penggunaanya dapat diselesaikan dengan tiga metode yaitu dengan metode eliminasi, subtitusi dan invers matriks. (Irawan, 2014).

Konsep kongruensi sudah terlebih dahulu dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya dalam QS. Al-Mujadalah:11 yang artinya:

"*Wahai orang-orang yang beriman! apabila dikatakan kepadamu,"Berilah kelapangan didalam majelis, maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan berdirilah kamu, maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat derajat orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang berilmu beberapa derajat*".

Sehingga dapat dilihat dari ayat diatas bahwa menuntut ilmu dengan ikhlas dan sesuai aturan-Nya akan mendapatkan berkali-kali lipat imbalan. Konsep sistem kongruensi yang ada dibidang aljabar dimana $x \equiv a(mod\ m)$, kongruensi tersebut dapat ditulis $x = a + mk$. Jika menuntut ilmu x maka Allah akan memberikan banyak balasan kebaikan $(a + mk)$, hal ini membuktikan bahwa Al-Qur'an yang merupakan kitab suci ummat islam telah memuat pesan-pesan tersirat yang salah satu konsepnya kita kenal dengan kongruensi. Dimana seorang umat melakukan satu kebaikan dan Tuhan akan membalasnya dengan berlipat-lipat kebaikan lainnya.

Penelitian mengenai sistem kongruensi linear sendiri sudah pernah dilakukan oleh Kurnia Era W yang berjudul *"Penyelesaian Sistem Kongruensi Linear"*. Pada penelitian yang berupa tugas akhir tersebut membahas bagaimana menyelesaikan sistem kongruensi linear menggunakan metode invers matriks, eliminasi, substitusi, campuran, dan metode cramer. Namun pada penelitian tersebut hanya dibatasi dengan sistem kongruensi linear yang memiliki tiga kongruensi, tiga variabel, dan tiga selesaian dengan modulo yang sama. Penelitian lainnya yaitu penelitian yang dilakukan oleh Abdur Rohman Wahid dengan judul *"Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linear dengan Metode Eliminasi-Substitusi dan Invers Matriks"*. Pada penelitian yang berupa tugas akhir tersebut membahas bagaimana menyelesaikan sistem kongruensi linear menggunakan metode invers matriks, eliminasi, substitusi, campuran, dan metode cramer. Namun pada penelitian tersebut hanya dibatasi dengan sistem kongruensi linear yang memiliki tiga kongruensi tiga variabel dan empat kongruensi empat variabel.

Adapun penelitian dengan metode cramer sebelumnya telah dilakukan oleh Kasrina Kamaluddin dalam tugas akhirnya dengan judul *"Analisis Metode Gauss dan Metode Cramer terhadap Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dan Aplikasinya"*. Pada penelitian tersebut, dibahas bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan dua metode yaitu; eliminasi gauss dan metode cramer. Hal tersebut kemudian dibandingkan keefektifannya dengan membandingkan jumlah iterasi yang digunakan pada masing-masing metode. Selain itu pada tugas akhirnya juga dituliskan bagaimana aplikasinya pada aplikasi Matlab. Selain ituterdapat penelitian yang berjudul *"Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fuzzy Bilangan Segitiga dengan Menggunakan Metode Cramer"* yang diteliti oleh Afidatus Sholichah. Pada penelitian ini metode cramer digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* bilangan segitiga.

Selain dibekali ilmu teori bilangan sebagai mata kuliah matematika pokok, mahasiswa matematika juga diberikan pelajaran mengenai *programming. Programming* yang dilakukan menggunakan beberapa aplikasi yaitu; *Python,* *Matlab,* dan *Maple*. Tentu hal ini digunakan dengan harapan mahasiswa dapat mengaplikasikan ilmu matematika pada tahap *programming*.

Dari latar belakang diatas, penulis mencoba mengembangakan metode *cramer* pada sistem persamaan linier dengan menggunakan determinan pada matriks pada penyelesaian sistem kongruensi linier dengan menggunakan n kongruensi linier dengan n variabel dan modulo yang sama, juga mencoba menerapkan pada aplikasi python. Hal ini dilakukan guna memudahkan pengoprasian sistem kongruensi linier serta penyelesaian sistem kongruensi sebelumnya. Adapun penggunaan program python diharap dapat digunakan pada jumlah sistem kongruensi linier yang cukup banyak, selain untuk mempermudah hal ini juga dilakukan untuk meminimalisir tingkat kesalahan perhitungan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, masalah yang akan dikaji yaitu mengenai *"Bagaimana Penyelesain Sistem Kongruensi Linier dengan Determinan Matriks serta penyelesaiannya menggunakan aplikasi python".*

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah sebelumnya, diperoleh tujuan untuk *"Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier dengan Determinan Matriks serta penyelesaiannya menggunakan aplikasi Python".*

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan permasalahan sistem kongruensi n variabel n variabel mengunakan Determinan Matriks. Secara praktik penelitian ini diharapkan mampu memberikan manfaat sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai sistem kongruensi linier dan sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan atau lebih dikembangkan. Dan secara teori diharapkan penelitian ini akan menjadi kajian atau tambahan pada bidang matematika khususnnya teori bilangan.

1.5 Batasan Masalah

Agar identifikasi masalah lebih jelas, maka penulis membatasi analisis ini hanya pada penyelesaian pada sistem kongruensi dengan modulo yang sama yang memiliki n kongruensi dengan n variabel didalam setiap kongruensinya, dimana n adalah bilangan asli lebih dari sama dengan 3. Cara yang digunakan untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier tersebut dengan Determinan Matriks yang kemudian diaplikasikan dengan program Python. Pengoprasian menggunakan python dapat membatu untuk meminimalisir kesalahan perhitungan serta memudahkan apabila sistem kongruensi yang dimiliki dinilai rumit atau memiliki banyak kongruensi dengan variabel yang jumlahnya sama dan nilai modulonya sama.

1.6 Metode Penelitian

Pendekatan dalam penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian kualitatif yang diperoleh dengan studi literatur. Penelitian dengan pendekatan kualitatif pada umumnya menekankan analisis proses dari proses berfikir secara deduktif dan induktif yang berkaitan dengan dinamika hubungan antar fenomena yang diamati, dan senantiasa menggunakan logika ilmiah. Analisis data literatur diperoleh dari buku-buku ataupun penelitian-penelitian sebelumnya, kemudian dianalisis untuk mengembangkannya kembali.

Jenis peulisan skripsi yaitu dengan penelitian kepustakaan. Metode kepustakaan adalah metode yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan jurnal, dokumen, atau kepustakaan-kepustakaan lainnya. (Mardalis, 1999: 28).

Data yang digunakan penulis dalam penyusunan skripsi ini adalah data-data yang meliputi sistem kongruensi linier dan teknik-teknik dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier, dan data-data lain yang sesuai. Salah satu sumber penulisan skripsi ini adalah buku (Pengantar Teori Bilangan) oleh Wahyu H. Irawan, Nurul Hijriyah, dan Azwar R. Habibi. dan buku-buku teori bilangan lainnya.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan penulis dalam menganalisis data adalah sebagai berikut:

1. Memberikan bukti umum untuk mencari penyelesaian sistem kongruensi linier dengan metode determinan matriks.
2. Memberikan contoh soal tentang menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan metode determinan matriks.
3. Memberikan contoh soal tentang menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan metode determinan matriks pada program python.

Berikut merupakan contoh tahapan penyelesaian sistem kongruensi linier dengan 4 kongruensi dan 4 variabel:

1). Penyelesaian sistem kongruensi dengan 4 kongruensi dan 4 variabel pertama, bentuklah sistem kongruensi tersebut menjadi matriks 4×4 dengan mereduksi variabel-variabelnya menjadi satu kolom beri nama matriks $\boldsymbol{A}$.

2). Kemudian hitunglah determinan matriks tersebut, beri nama matriks tersebut dengan $\det(A)$. Jika $FPB(\det(A)\,, m) = 1$, maka lanjut ke langkah berikutnya.

3). Kemudian carilah determinan x_1 dengan cara mengganti kolom bervariabel x_1 dengan kolom hasil, beri nama $\det(A_{x_1})$.

4). Kemudian carilah determinan x_2 dengan cara mengganti kolom bervariabel x_2 dengan kolom hasil, beri nama $\det(A_{x_2})$.

5). Kemudian carilah determinan x_3 dengan cara mengganti kolom bervariabel x_3 dengan kolom hasil, beri nama $\det(A_{x_3})$.

6). Kemudian carilah determinan x_4 dengan cara mengganti kolom bervariabel x_4 dengan kolom hasil, beri nama $\det(A_{x_4})$.

7). Tahap selanjutnya setelah kita memperoleh hasil dari ke-empat determinan tersebut, maka selanjutnya kita akan mencari nilai x_1, x_2, x_3, x_4.

8). Nilai x_i diperoleh dengan substitusi $x_i \equiv (\det(A))^{-1} \det(A_{x_i}) \pmod{m}$ untuk setiap $i = 1,2,3,4$.

Untuk persamaan kongruensi yang lebih dari empat, maka dilakukan tahapan yang sama. Dengan catatan menambah determinan yang harus dicari.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka menjelaskan teori yang dikaji, yaitu memuat persamaan linier dan sistem persamaan linier, macam-macam metode penyelesaian sistem persamaan linier, operasi matriks dan determinan matriks, bilangan bulat dan keterbagian dalam bilangan bulat, kongruensi linier dan sistem kongruensi linier, dan kajian keislaman.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi penjelasan sistem kongruensi linier, penyelesaian sistem kongruensi linier dengan menggunakan metode determinan matriks serta kajian agama mengenai sistem kongruensi linier.

Bab IV Penutup

Penutup ini berisi kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada seluruh kajian beberapa saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Bulat dan Keterbagian dalam Bilangan Bulat

Istilah bilangan bulat merupakan istilah yang sering dijumpai saat mempelajari matematika khususnya bidang aljabar. Hal ini dikarenakan bilangan bulat merupakan dasar dari berbagai pembahasan dalam matematika. Berikut adalah definisi bilangan bulat:

Definisi 2.1.1 Bilangan bulat merupakan sebuah bilangan yang terdapat pada himpunan bilangan bulat $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$. Himpunan bilangan bulat dikelompokan menjadi tiga bagian; bilangan bulat negatif, nol, dan bilangan bulat positif.

Sistem bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan bulat yang dinotasikan $\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$. Himpunan bilangan bulat dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$. Sifat-sifat yang berkaitan dengan keterbagian telah dipelajari Euclid 350 SM. Pada aritmatika bilangan bulat, invers dari perkalian adalah pembagian.

Pengembangan selanjutnya telah banyak dikembangkan oleh beberapa ahli matematika yang lain, misalnya yang berkaitan dengan bilangan komposit, perkalian dalam usaha untuk mengembangkan teori bilangan. Karena pentingnya sifat keterbagian maka akibatnya konsep tersebut sering muncul dalam Aljabar Modern dan Struktur Aljabar.

Definisi 2.1.2 Keterbagian bilangan bulat dinotasikan dengan $a|b$ dimana bilangan $b \in \mathbb{Z}$ merupakan kelipatan dari a dimana $a \neq 0$ dan $a \in \mathbb{Z}$. Hal tersebut juga dapat dituliskan dengan $b = ax$ dimana $x \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.1 *Misalkan a dan b bilangan bulat dan* $b > 0$, *maka ada bilangan bulat* q *dan* r *yang memenuhi* $a = bq + r$ *dengan* $0 < r < b$. *Bilangan* q *disebut hasil bagi dan* r *disebut sisa dari pembagian* a *oleh* b. (Irawan, 2014).

Contoh 2.1

$2|8$ karena $\exists\, 4 \in \mathbb{Z}$ sehingga $8 = 2 \times 4$.

$3 \nmid 8$ karena $\nexists\, x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $8 = 3x$.

Teorema 2.1 dapat digunakan untuk memilahkan atau memisahkan himpunan bilangan bulat menjadi n himpunan bagian yang saling lepas. Jika $p = 2$ dan q adalah sebarang bilangan bulat, maka menurut teorema algoritma pembagian, q dapat dinyatakan sebagai $q = 2p + s, 0 \leq s < 2$. Karena $r \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq s < 2$, maka kemungkinan nilai-nilai s yaitu $s = 0$ atau $s = 1$. (Zuhroh, 2011).

2.2 Matriks

Definisi 2.2 Matriks merupakan suatu susunan atau kelompok bilangan yang berbentuk persegi panjang.

Cara yang biasa digunakan untuk menuliskan sebuah matriks dengan m baris n kolom adalah:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dengan a_{ij} adalah unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j dimana $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,3,\dots,n$ dan $i, j \in N$. (Cullen, 1992).

Jenis-jenis matriks yaitu:

a) Matriks bujur sangkar *(Square matrix)* adalah suatu matriks yang banyak baris dan kolomnya sama.

Berikut ini adalah contoh matriks bujur sangkar:

$$\boldsymbol{D}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Matriks diagonal *(diagonal matrix)* adalah suatu matriks bujur sangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol.

Berikut ini adalah contoh matriks diagonal:

$$\boldsymbol{D}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Matriks skalar *(scalar matrix)* yaitu matriks diagonal dimana elemen pada diagonal utamanya bernilai sama tetapi bukan satu atau nol.

Berikut ini adalah contoh matriks skalar:

$$\boldsymbol{A}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Matriks simetri *(simetric matrix)* yaitu matriks persegi yang setiap elemennya selain elemen diagonal adalah simetri terhadap diagonal utama atau $A = (A)^T$.

Berikut ini adalah contoh matriks simetri:

$$B_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, (B_{3\times3})^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B_{2\times2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, (B_{2\times2})^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

e) Matiks simetri miring *(skew-symetric matrix)* yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal saling berlawanan.

Berikut ini adalah comtoh matriks simetri miring:

$$H_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Matriks identitas *(unit matrix, identity matrix)* adalah matrks yang semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu dan elemen diluar diagonal utamanya bernilai nol.

Berikut ini adalah contoh matrik identitas:

$$I_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

g) Matriks segitiga atas *(upper triangular matrix)* adalah matriks diagonal dimana elemen disebelah kanan atas diagonal utama ada yang bernilai bebas sedangkan elemen disebelah kiri bawah diagonal bernilai nol.

Berikut ini adalah contoh matriks segitiga atas:

$$U_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

h) Matriks segitiga bawah *(lower triangular matrix)* adalah matriks diagonal dimana elemen disebelah kiri bawah diagonal utama bernilai bebas sedangkan elemen disebelah kanan atas diagonal bernilai nol.

Berikut ini adalah contoh matriks segitiga bawah:

$$\boldsymbol{L}_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 0\\ 3 & 8 & 7\end{pmatrix}.$$

i) Matriks *transpose* adalah matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom atau sebaliknya. *Transpose* matriks A dilambangkan dengan A^T.

Berikut ini adalah contoh matriks *transpose*:

$$\boldsymbol{A}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 6 & 1 & 9\end{pmatrix} \text{ maka } A^T \text{nya menjadi: } \boldsymbol{A}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\\ 5 & 9\end{pmatrix}.$$

j) Matriks tridiagonal *(tridiagonal matrix)* yaitu matriks diagonal dimana elemen diagonal utama, tepat satu dibawah diagonal, dan tepat satu diagonal diatas diagonal memiliki elemen yang tidak sama dengan nol.

Berikut ini adalah contoh matriks tridiagonal:

$$\boldsymbol{T}_{3\times 3}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 3\\ 8 & 7 & 8\\ 3 & 8 & 7\end{pmatrix}.$$

k) Matriks singular *(singular matrix)* adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

$$\boldsymbol{S}_{3\times 3}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{S}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}.$$

l) Matriks non-singular *(non-singular matrix)* adalah matriks yang determinannya bernilai tidak sama dengan nol.

Berikut ini adalah contoh matriks non-singular:

$$N_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, N_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.3 Determinan Matriks

Definisi 2.3.1 Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat adalah susunan bilangan-bilangan bulat menurut suatu aturan tanpa mengurangi atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut. (Anton, 1998).

Contoh 2.3.1

Permutasi dari $\{1,2\}$ adalah sebagai berikut:

$(1,2)$ $(2,1)$.

Contoh 2.3.2

Berikut merupakan semua permutasi himpunan bilangan bulat $\{1,2,3\}$:

Penyelesaian

$(1,2,3)$ $(2,1,3)$ $(3,2,1)$

$(1,3,2)$ $(2,3,1)$ $(3,1,2)$.

Misalkan didefinisikan $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ sebagai permutasi dari himpunan dengan k unsur bilangan bulat. Dalam permutasi $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ dikatakan terjadi sebuah inversi apabila terdapat bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan bulat lebih kecil, atau dapat dikatakan terjadi inversi jika terdapat $i_i > i_j$ dimana $i < j$ dan $i, j \in \{1,2, \dots, k\}$.

Contoh

Berikut merupakan banyaknya inversi dalam permutasi $(3,2,1)$:

Perhatikan bahwa $i_1 = 3, i_2 = 2$, dan $i_3 = 1$

Selanjutnya dimulai dari unsur i_1, pada permutasi $(3,2,1)$ dapat dilihat bahwa terdapat dua unsur yang kurang dari i_1 yang terletak setelahnya yaitu i_2 dan i_3. Jadi jumlah unsur yang kurang dari i_1 adalah 2. Selanjutnya unsur yang kurang dari i_2 dengan cara yang sama diperoleh sebanyak 1, dan jumlah unsur yang kurang dari i_3 sebanyak nol unsur. Jadi diperoleh jumlah inversi pada permutasi $(3,2,1)$ sebanyak 3.

Definisi 2.3.2 Sebuah permutasi dinamakan genap, jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan diberi tanda positif $(+)$ sedangkan sebuah permutasi dinamakan ganjil, jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat ganjil dan diberikan tanda negatif $(-)$. (Anton, 1998).

Contoh 2.3.3

Banyaknya inversi dalam permutasi dari $\{1,2\}$ adalah sebagai berikut:

Permutasi dari $\{1,2\}$

$(1,2)$ $(2,1)$.

Selanjutnya akan dicari jumlah inversi pada setiap permutasi,

Untuk permutasi $(1,2)$, banyaknya inversi adalah 0 dikarenakan tidak ada unsur yang terletak setelah unsur pertama dan kedua yang memiliki nilai lebih kecil dari unsur pertama dan kedua. Sedangkan banyaknya inversi untuk permuasi $(2,1)$ adalah 1, hal tersebut terjadi dikarenkan terdapat 1 sebagai unsur kedua yang nilainya lebih kecil dari unsur pertama yaitu 2.

Definisi 2.3.3 Suatu hasil kali elementer dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ merupakan hasil kali dari n −entri dari A, yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama. (Anton, 1998).

Contoh 2.3.4

Berikut merupakan hasil kali elementer dari matriks $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Penyelesaian

Hasil kali elementer dari matriks A adalah

$$a_{11}a_{22}$$

$$a_{12}a_{21}$$

Permutasi yang berkaitan yaitu

$$(1,2)$$

$$(2,1)$$

Sehingga jumlah inversi dari permutasi tersebut yaitu

$$(1,2) = 0 + 0 = 0\ (Genap)$$

$$(2,1) = 1 + 0 = 1\ (Ganjil)$$

Sehingga berdasarkan hasil invers dari permutasinya, hasil kali elementer diberikan tanda sebagai berikut

$$+(a_{11}a_{22})\ (genap)$$

$$-(a_{12}a_{21})\ (ganjil)$$

Definisi 2.3.4 Determinan matriks adalah bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi elemen pada matriks bujur sangkar. (Ruminta, 2009).

Determinan dari suatu matriks hanya didefinisikan pada matriks bujur sangkar yaitu sebuah matriks yang berukuran n^2. Notasi determinan matriks:

$$\det(A) = |A|$$

Definisi 2.3.5 Hasill kali elementer dari matriks berukuran $n \times n$ adalah perkalian n-unsur pada matriks tersebut dimana tidak ada yang berasal dari baris atau kolom yang sama.

Contoh 2.3.5

Misalkan terdapat sebuah matriks berukuran 2×2 yaitu $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, selanjutnya dilakukan perkalian elementer pada unsur-unsur di matriks tersebut dan diperoleh

$$(a_{11}a_{22})$$

$$(a_{12}a_{21})$$

Selanjutnya jika diperhatikan, hail kali elementer pada matriks 2×2 terdapat sebanyak 2! dan berbentuk $a_{1i_1}a_{2i_2}$, dimana (i_1, i_2) adalah sebuah permutasi dari $\{1,2\}$ yaitu

$$(1,2)$$

$$(2,1)$$

Selanjutnya tentukan apakah inversi dari permutasi-permutasi tersebut genap atau ganjil untuk menghasilkan sebuah hasil perkalian elementer bertanda.

$$(1,2) = 0 + 0 = 0\ (genap)$$

$$(2,1) = 1 + 0 = 1\ (ganjil)$$

Jadi diperoleh

$(a_{11}a_{22})$ karena genap, dan $-(a_{12}a_{21})$ karena ganjil.

Sehingga diperoleh determinan dari sebuah matriks bujur sangkar yang berukuran 2×2 sebagai berikut:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21})$$

Definisi 2.3.6 Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$ dan misalkan M_{ij} menyatakan matriks $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapuskan baris ke-i dan kolom ke-j. Determinan dari M_{ij} disebut minor dari a_{ij} dinotasikan dengan $|M_{ij}|$. Kofaktor A_{ij} dari a_{ij} adalah $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$. (Leon, 2001).

Definisi 2.3.7 Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$ dan A_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks $\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ dinamakan matriks kofaktor A. (Anton,1998).

Definisi 2.3.8 Adjoin matriks A yang berukuran $n \times n$ adalah transpose dari matriks kofaktor dari A.

Misalkan

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Maka minor dari matriks A yang dinotasikan dengan $|M_{ij}|$ adalah sebagai berikut

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Sedangkan kofaktor dari $a_{ij} \in A$ adalah sebagai berikut

$A_{11} = -1^{1+1}\det(M_{11}) = |M_{11}|, \quad A_{12} = -|M_{12}|, \quad A_{13} = |M_{13}|$

$A_{21} = -|M_{21}|, \quad A_{22} = |M_{22}|, \quad A_{23} = -|M_{23}|$

$A_{31} = |M_{31}|, \quad A_{32} = -|M_{32}|, \quad A_{33} = |M_{33}|$

Selanjutnya matriks kofaktor dari A yaitu

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Dan diperoleh adjoin A adalah

$$\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Teorema 2.3 *Determinan dari matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap* $1 \le i \le n$ *dan* $1 \le j \le n$. (Anton, 1998).

Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

Dan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

Kondisi-kondisi khusus dalam determinan:

1. Jika terdapat sebuah baris atau kolom pada matriks (misalkan A adalah matriks $n \times n$) yang entri-entrinya adalah 0 maka $\det(A) = 0$.

2. Misalkan A adalah matriks 2×2 dimana baris pertama ditukar dengan baris kedua atau kolom pertama diganti dengan kolom kedua sehingga membentuk matriks baru, maka nilai determinannya adalah negatif dari nilai determinan sebelumnya. Contoh: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 8$ dan $\det(B) = -8$.
3. Misalkan A adalah matriks 2×2, jika dua baris atau dua kolom dari matriks identik, maka $\det(A) = 0$. Contoh: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = (2 \times 4) - (2 \times 4) = 0$.
4. Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$, B adalah matriks A yang dikalikan dengan α di setiap elemen pada satu baris atau satu kolom. Maka $\det(B) = \alpha\det(A)$. $\det(A) = 2$ $\det(B) = 4 = 2 \times 2$.
5. Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -3$ dan B merupakan matriks baru yang diperoleh dari matriks A dimana baris kedua pada matriks $b_{2j} = a_{2j} + \alpha \boldsymbol{a}_{1j}$. Misalkan $\alpha = 2$ maka $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$. $\det(B) = -3 = \det(A)$. (hal ii juga berlaku pada kolom di matriks.
6. $\det(A) = \det A^T$.

   Contoh: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -3$, $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\det A^T = -3$.
7. Determinan dari matriks triangular adalah hasil kali dari entri diagonal.

   Contoh: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ maka $\det(A) = 3 \times 2 \times 5 = 30$.

8. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
9. Sebuah matriks $n \times n$ memiliki invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

2.4 Persamaan Linier dan Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.4.1 Persamaan linier adalah suatu persamaan yang pada saat divisualisasikan membentuk kurva berupa garis lurus. Persamaan linier dapat terdiri dari n variabel sehingga dapat dituliskan $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ dimana $a_i, b \in \mathbb{R}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n$.

Contoh 2.4.1

Berikut merupakan contoh persamaan linier:

$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 23$

Suatu persamaan linier dalam n variabel $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah bilangan-bilangan riil dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel.

Definisi 2.4.2 Sistem Persamaan Linier adalah kumpulan persamaan linier dengan jumlah variabel yang sama

Bentuk umum sistem persamaan linier (SPL) yang terdiri dari m buah dan n buah peubah dituliskan sebagai: (Santi, 2012).

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Dengan $a_{ij}, i = 1,2,3, \ldots, m$ dan $j = 1,2,3, \ldots, n \ \forall m, n \in \mathbb{N}$.

2.5 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode Cramer

Penyelesaian sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan berbagai metode. Secara umum dapat dibagi menjadi dua metode yaitu metode numerik dan metode analitik.

Metode analitik merupakan metode dengan selesaian eksak dimana tahapannya menggunakan model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah lazim. Pada penyelesaian sistem persamaan linier terdapat beberapa penyelesaian secara anlitik, salah satunya adalah metode cramer. Metode cramer merupakan salah satu metode pencarian nilai variabel dengan menggunakan determinan.

Definisi 2.5 Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$, dan apabila dapat diperoleh B sehingga berlaku $AB = BA = I$, maka A merupakan matriks yang memiliki invers *(Invertible)* dan B disebut sebagai invers dari matriks A dimana I merupakan matriks identitas.

Teorema 2.5.1 *Jika A adalah matriks yang memiliki invers, maka*

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$ (Anton, 1998).

Bukti. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$

Pertama, akan ditunjukkan bahwa

$A\, adj(A) = \det(A)\, I$

$$\boldsymbol{A\ adj(A)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Entri dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari $A\ adj(A)$ adalah

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \qquad (2.5)$$

Jika $i = j$, maka (2.5) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i. Sebaliknya, jika $i \neq j$ maka koefisien-koefisien a dan kofaktor-kofaktor berasal dari baris-baris A yang berbeda, sehingga nilai dari (2.5) sama dengan nol. Maka:

$$\boldsymbol{A\ adj(A)} = \begin{pmatrix} \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)\, I \qquad (2.6)$$

Karena A memiliki invers, maka $\det(A) \neq 0$. Selanjutnya persamaan (2.6) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\frac{1}{\det(A)}\big(A\ adj(A)\big) = I$$

Atau

$$A\left(\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right) = I$$

Selanjutnya kedua ruas dikalikan A^{-1} pada sebelah kiri, dan diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \blacksquare$$

Teorema 2.5.2 *Jika $AX = B$ adalah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dengan $\det(A) \neq 0$, maka sistem tersebut memiliki selesaian sebagai berikut:*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Dimana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan entri-entri dari kolom ke-j dari A dengan entri-entri dalam matriks $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *dimana* $j = 1,2,3,\dots,n$. (Anton, 1998).

Bukti. Jika $\det(A) \neq 0$, maka A memiliki invers. Dan dikalikan dengan A^{-1} pada kedua ruas disebelah kiri menghasilkan $X = A^{-1}B$. Sehingga, menurut teorema 2.5.1 diperoleh:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} adj(A)B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dengan mengalikan matriks-matriks tersebut dihasilkan

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + & \cdots & +b_nA_{n1} \\ \vdots \quad \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + & \cdots & +b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

Sehingga entri baris ke-j dari X dengan demikian adalah

$$x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}}{\det(A)} \tag{2.7}$$

Misalkan

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Sehingga berdasarkan teorema determinan dengan ekspansi kofaktor (teorema 2.3) sepanjang kolom ke$-j$ $\det(A_j)$ adalah

$$\det(A_j) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

Dengan mensubstitusikan hasil $\det(A_j)$ terhadap (2.7) maka

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \blacksquare.$$

Contoh 2.5

Berikut merupakan sistem persamaan linier berikut menggunakan aturan cramer

$3x + 4y = 18$

$2x + 5y = 19$

Penyelesaian

Berikut merupakan tahapan-tahapan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan metode cramer. Pertama akan bentuk matriks dengan entri-entri nya adalah konstanta-konstanta pada variabel-variabel yang ada,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh nilai determinannya,

$$\det(D) = 3(5) - 2(4) = 7$$

Selanjutnya dibentuk matriks kedua dengan mengganti kolom pada konstanta variabel x dengan kolom hasil.

$$\boldsymbol{D_x} = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(D_x) = 18(5) - 19(4) = 14$$

Kemudian dibentuk matriks kedua dengan mengganti kolom pada konstanta variabel y dengan kolom hasil.

$$\boldsymbol{D_y} = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\det(D_x) = 3(19) - 2(18) = 21$$

Selanjutnya disubstitusi pada rumus metode cramer yaitu:

$$x = \frac{\det(D_x)}{\det(D)} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{\det(D_y)}{\det(D)} = \frac{21}{7} = 3$$

2.6 Kongruensi

Teori kongruensi pertama kali ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ia salah seorang matematikawan besar Jerman pada akhir abad ke-19. Sistem matematika aritmatika modulo atau kongruensi menekankan adanya kenyataan bahwa dua bilangan bulat mempunyai selisih (beda) sama dengan kelipatan bilangan asli, bilangan-bilangan yang mempunyai selisih sama dengan kelipatan suatu bilangan asli disebut kongruen modulo.

Kongruensi mempunyai beberapa sifat yang sama dengan persamaan dalam Aljabar. Dalam Aljabar, masalah utamanya adalah bagaimana menentukan akar-akar persamaan yang dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x) = 0$, $f(x)$ adalah fungsi polinomial. Demikian pula halnya dengan kongruensi, permasalahannya bagaimana menentukan bilangan bulat x sehingga memenuhi kongruensi tersebut.

Definisi 2.6 Jika sebuah bilangan bulat M adalah suatu bilangan bulat positif yang membagi $(a - b)$, maka a kongruen b modulo M (ditulis $a \equiv b(mod\ M)$). Jika $a - b$ tidak dibagi oleh M, maka dapat dikatakan a tidak kongruen dengan $b\ (mod\ M)$, dan dituliskan $a \not\equiv b\ (mod\ M)$. (Irawan, 2014).

Dalam perhitungan modulo diberikan bilangan positif *m,* disebut modulus dan dua bilangan bulat yang selisihnya adalah kelipatan bulat modulus itu dipandang sebagai “sama” atau “setara” terhadap modulus. (Salima dalam Rorres, 1988).

Contoh 2.6

1. $14 \equiv 4\ (mod\ 5)$ karena $(14-4)$ terbagi oleh 5
2. $9 \equiv 1\ (mod\ 2)$ karena $(9-1)$ terbagi oleh 2
3. $17 \equiv 2\ (mod\ 3)$ karena $(17-2)$ terbagi oleh 3

Jika $M > 0$ dan $M|(a-b)$ maka ada suatu bilangan bulat t sehingga $(a-b) = Mt$. Sehingga $a \equiv b\ (mod\ M)$ dapat juga dinyatakan sebagai $(a-b) = Mt$, ini sama artinya dengan $a \equiv b(mod\ M)$ atau beda antara a dan b merupakan kelipatan M. Jadi $a \equiv b\ (mod\ M)$dapat juga dinyatakan $a = Mt + b$. Menurut contoh 2.6 nomer 1. $14 \equiv 4\ (mod\ 5)$ sama artinya dengan $14 = 5.2 + 4$.

Teorema 2.6.1 *Andaikan $a, b,$ dan c adalah bilangan bulat dan m bilangan asli, maka berlaku:*

1. *Refleksi $a \equiv a(mod\ m)$.*
2. *Simetris, jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $b \equiv a(mod\ m)$.*
3. *Transitif, jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan $b \equiv c(mod\ m)$ maka $a \equiv c(mod\ m)$* (Irawan, 2014).

Bukti.

1. Jika $m \neq 0$ maka $m|0$ yang dapat dituliskan sebagai $m|a-a$. Menurut definisi 2.6 berlaku $a \equiv a(mod\ m)$ untuk semua bilangan bulat a dan $m \neq 0$.

2. $a \equiv b(mod\ m)$ berarti $m|a-b$, menurut definisi 2.6 ada keterbagian bilangan bulat t sehingga: $m|a-b$ dapat dinyatakan $a-b=tm$ jika dan hanya jika $b-a=(-t)m$. Akibatnya $b \equiv a(mod\ m)$.

3. $a \equiv b(mod\ m)$ berarti $m|a-b$ dapat dinyatakan $a-b=t_1m \quad \forall t_1 \in \mathbb{Z}$

   $b \equiv c(mod\ m)$ berarti $m|b-c$ dapat dinyatakan $b-c=t_2m \quad \forall t_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rl} a-b=t_1m & \\ b-c=t_2m & \\ \hline a-c=(t_1+t_2)m & + \end{array}$$

   Karena $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ maka $(t_1+t_2) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga berdasarkan definisi 2.6 $a-c=(t_1+t_2)m$ dapat ditulis $a \equiv c(mod\ m)$. ■

Teorema 2.6.2 *Jika* $a \equiv b(mod\ m)$, *maka* $a+c \equiv b+c(mod\ m)$. (Irawan, 2014)

Teorema 2.6.3 *Jika* $a \equiv b(mod\ m)$ *maka* $ac \equiv bc(mod\ m)$ *untuk* $c > 0$. (Irawan, 2014)

Teorema 2.6.4 *Jika* $a \equiv b(mod\ m)$ *dan* $d|m$, $d > 0$, *maka* $a \equiv b(mod\ d)$. (Irawam, 2014)

Teorema 2.6.5 *Jika* $a \equiv b(mod\ m)$ *dan* $c \equiv d(mod\ m)$, *maka* $ac \equiv bd\ (mod\ m)$ *untuk setiap* $a, b, c, d,$ *dan* m *bilangan bulat.* (Irawan, 2014

2.7 Kongruensi Linier

Definisi 2.7.1 Suatu bilangan a disebut faktor persekutuan dari dua bilangan bulat x_1 dan x_2 (ditulis $a = FP(x_1, x_2)$ jika dan hanya jika $a|x_i$ untuk setiap $i = 1$ dan 2.

Definisi 2.7.2 Suatu bilangan a disebut faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat jika dan hanya jika $a = FP(x_1, x_2)$ jika terdapat $b = FP(x_1, x_2)$ maka $b \leq a$.

Definisi 2.7.3 Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$, a dan b dikatakan relatif prima jika $fpb(a, b) = 1$.

Definisi 2.7.4 Misalkan $a, b, m \in \mathbb{Z}$, invers dari $a(mod\ m)$ adalah bilangan bulat x sedemikian sehingga $xa \equiv 1(mod\ m)$. Jika a dan b adalah relatif prima dan $m > 1$, maka invers dari $a(mod\ m)$ ada.

Definisi 2.7.5 Kongruensi linier merupakan sebuah kongruensi sederhana berderajat satu yang mempunyai bentuk umum $ax \equiv b\ (mod\ m)$, dengan $a, b, m \in Z$, $a \neq 0$, dan $m > 0$. Kongruensi tersebut dapat diselesaikan jika $d = (a, m)$ membagi b. (Irawan, 2014)

Kongruensi linier dapat diselesaikan dengan beberapa cara, salah satunya adalah algoritma Euclid. Algoritma Euclid merupakan algoritma yang dapat digunakan untuk menghitung suatu pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat positif.

Teorema 2.7 *Diberikan* $a, b \in \mathbb{Z}$ *dengan* $a \geq b > 0$. *Dimisalkan* $r_0 = 1$ *dan* $r_1 = b$. *Jika algoritma pembagian berhasil mendapatkan* $r_j = r_{j+1}\, q_{j_1} + r_{j+2}$, *dengan*

$0 < r_{j+2} < r_{j+1}$ *untuk* $j = 0,1,2,\ldots,n-2$ *dan* $r_{n+1} = 0$, *maka* $FPB(a,b) = r_n$, *yaitu sisa terkecil yang tidak nol pada seluruh proses algoritma pembagian.* (Irawan, 2014).

Contoh 2.7

Berikut merupakan contoh kongruensi linier beserta penyelesaiannya:

1. $4x \equiv 1\ (mod\ 15)$
2. $7x \equiv 1\ (mod\ 15)$

Penyelesaian

1. $4x \equiv 1\ (mod\ 15)$

   $16x \equiv 4\ (mod\ 15)$ (Kedua ruas dikalikan 4)

   $x \equiv 4\ (mod\ 15)$

   Jadi Selesaian dari kongruensi $4x \equiv 1\ (mod\ 15)$ adalah 4.

2. $7x \equiv 1\ (mod\ 5)$

   $21x \equiv 3(mod\ 5)$ (Kedua ruas dikalikan 3)

   $x \equiv 3(mod\ 5)$

   Jadi karena $x \equiv 3\ (mod\ 15)$, maka $7x \equiv 1\ (mod\ 15)$ jika di substitusikan nilai x menjadi $7(3) \equiv 1\ (mod\ 15)$ sehingga $21 \equiv 1\ (mod\ 15)$karena $(21-1)$ terbagi oleh 5.

Sebuah kongruensi linear $ax \equiv b(mod\ m)$ dikatakan memiliki selesaian jika dapat dibentuk kongruensi $b \equiv 0(mod\ d)$ dimana $d = GCD(a,m)$ dapat diselesaikan. (Irawan, 2014).

2.8 Sistem Kongruensi Linier

Definisi 2.8 Sistem kongruensi linier merupakan sebuah sistem yang terdiri lebih dari satu kongruensi dan variabel yang memiliki nilai modulo yang sama. Sistem kongruensi linier secara umum dapat dituliskan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \equiv b_1 (mod\ m)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \equiv b_2 (mod\ m)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \equiv b_m (mod\ m)$$

dimana a_{ij} dan $b_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2, \dots m; j = 1,2, \dots, n$

Contoh 2.8

Berikut ini merupakan contoh sistem kongruensi linier:

3x + 4y ≡ 5 (mod 13)

2x + 5y ≡ 7 (mod 13).

2.9 Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier

Sebelum mencari nilai-nilai variabel dari sistem kongruensi tiga kongruensi dan tiga variabel diperiksa terlebih dulu untuk mengetahui apakah sistem kongruensi linier tersebut mempunyai selesaian, tidak mempunyai selesaian dan apakah mempunyai banyak selesaian. Sebuah sistem kongruensi linier tiga kongruensi dan tiga variabel dapat diketahui jumlah selesaiannya dengan membandingkan koefisien-koefisien pada kongruensi linier tersebut. (Wati, 2009).

Sistem kongruensi linear pada umumnya sering kali diselesaikan dengan dua metode yaitu dengan metode eliminasi dan substitusi. Metode campuran merupakan gabungan dari metode eliminasi dan substitusi.

2.9.1 Metode Eliminasi

Metode eliminasi merupakan metode pencarian nilai selesaian sebuah sistem kongruensi dengan cara mengeliminasi salah satu variabel untuk mendapatkan variabel lainnya.

Contoh 2.9.1

Sistem kongruensi linier berikut ini akan diselesaikan menggunakan metode eliminasi:

$$3x + 4y \equiv 5\ (mod\ 13)$$

$$2x + 5y \equiv 7\ (mod\ 13)$$

Penyelesaian

$$3x + 4y \equiv 5\ (mod\ 13)\ |.2|\ 6x + 8y \equiv 10(mod\ 13)$$

$$2x + 5y \equiv 7\ (mod\ 13)\ |.3|\ 6x + 15y \equiv 21(mod\ 13)$$

$$-7y \equiv -11(mod\ 13)$$ eliminasi x

$$7y \equiv 11(mod\ 13)$$ Kedua ruas dikali -1

$$2.7y \equiv 2.11(mod\ 13)$$ Kedua ruas dikali 2 disebelah kriri

$$14y \equiv 22(mod\ 13)$$

$$y \equiv 9(mod\ 13)$$ Modulo 13

$3x + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)\ |.5|\ 15x + 20y \equiv 25(mod\ 13)$

eliminasi y

$2x + 5y \equiv 7 \ (mod\ 13)\ |.4|\ 8x + 20y \equiv 28(mod\ 13)$

Kedua ruas dikali 2 disebelah kiri

$$7x \equiv -3(mod\ 13)$$

$$14x \equiv -6(mod\ 13)$$

$$x \equiv 7(mod\ 13)$$

Modulo 13

Jadi nilai $x \equiv 7(mod\ 13)$ dan $y \equiv 9(mod\ 13)$

2.9.2 Metode Substitusi

Metode Substitusi merupakan metode untuk mencari nilai selesaian dengan cara menjadikan salah satu kongruensi menjadi satu variabel yang kemudian di substitusikan terhadap kongruensi lainnya.

Contoh 2.9.2

Untuk memperoleh nilai x dan y pada sistem kongruensi linier berikut, maka akan diselesaikan menggunakan metode substitusi:

$3x + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)$

$2x + 5y \equiv 7 \ (mod\ 13)$

Penyelesaian

$3x + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13) \rightarrow 3x + 4y = 5 + 13k$

Didefinisikan $x = \frac{13k+5-4y}{3}$

Kemudian substitusi nilai x terhadap persamaan ke-2 untuk diperoleh nilai y.

$2x + 5y \equiv 7 \ (mod\ 13) \rightarrow 2x + 5y = 7 + 13t$

$2\left(\frac{13k+5-4y}{3}\right)+5y=7+13t$

$\frac{26k+10-8y}{3}+5y-7=13t$ — Kedua ruas dikali 3

$26k+10-8y+15y-21=39t$

$10-8y+15y-21=39t-26k$ — Kedua ruas dikurangi $26k$

$7y-11-21=13(3t-2k)$ — $(3t-2k)\in\mathbb{Z}$

$7y\equiv 11(mod\ 13)$

$2.7y\equiv 2.11(mod\ 13)$ — Kedua ruas dikali 2

$14y\equiv 22(mod\ 13)$

$y\equiv 9(mod\ 13)$ — Modulo 13

Kemudian substitusi nilai y terhadap persamaan kongruensi

$3x+4y\equiv 5\ (mod\ 13)$ — Substitusi y

$3x+4(9(mod\ 13))\equiv 5\ (mod\ 13)$

$3x+36(mod\ 13)\equiv 5\ (mod\ 13)$

$3x+10(mod\ 13)\equiv 5\ (mod\ 13)$

$3x\equiv 5\ (mod\ 13)-10(mod\ 13)$

$3x\equiv -5\ (mod\ 13)$

$9.3x\equiv 9.-5\ (mod\ 13)$ — Kedua ruas dikali 9

$27x\equiv -45\ (mod\ 13)$

$x\equiv 7\ (mod\ 13)$ — Modulo 13

Jadi nilai $x\equiv 7\ (mod\ 13)$ dan $y\equiv 9(mod\ 13)$

2.9.3 Metode Campuran

Metode campuran merupakan metode untuk mencari nilai selesaian sistem kongruensi dimana prosesnya menggunakan gabungan antara metode eliminasi dan metode substitusi

Contoh 2.9.3

Berikut merupakan contoh sistem kongruensi linier yang diselesaikan menggunakan menggunakan metode campuran:

$3x + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)$

$2x + 5y \equiv 7 \ (mod\ 13)$

Penyelesaian

Pertama, eliminasi variabel y

$3x + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)\ |.5|\ 15x + 20y \equiv 25(mod\ 13)$

$2x + 5y \equiv 7 \ (mod\ 13)\ |.4|\ 8x + 20y \equiv 28(mod\ 13)$

$7x \equiv -3(mod\ 13)$ Eliminasi y

$x \equiv 7(mod\ 13)$ Modulo 13

Selanjutnya, substitusi nilai x

$3(7(mod\ 13)) + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)$ Substitusi x

$(21(mod\ 13)) + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)$ Kedua ruas dikali 3 disebelah kriri

$(8(mod\ 13)) + 4y \equiv 5 \ (mod\ 13)$

$4y \equiv 5 \ (mod\ 13) - 8(mod\ 13)$

$4y \equiv -3 \ (mod\ 13)$

$3.4y \equiv 3.-3 \ (mod\ 13)$

$$-12y \equiv 9 \ (mod\ 13)$$

$$y \equiv 9 \ (mod\ 13)$$

Dikalikan -1
Modulo 13

2.10 Kajian Keagamaan

(Abdussakir, 2006) sebagai sumber ajaran dan pedoman hidup umat Islam, Al-Qur'an menjadi pusat dalam segala hal termasuk dalam pengembangan dan perkembangan ilmu pengetahuan dan keislaman. Penafsiran terhadap Al-Qur'an berkembang sejak awal agama Islam diturunkan untuk pedoman manusia. Penafsiran Al-Qur'an dapat dilakukan dengan berbagai cara, sehingga tidak menutup kemungkinan untuk menumbuhkan perbedaan penafsiran pada ayat-ayat Al-Qur'an.

Ayat-ayat Al-Qur'an diturunkan dalam bentuk tersirat sehingga salah satu penjelas ayat-ayat Al-Qur'an melalui hadits. Disamping melalui hadits, Al-Qur'an ditafsirkan dengan berbagai cara. Al-Qur'an sebagai pusat pengembangan ilmu ketahuan memiliki banyak sekali hal-hal yang belum diketahui namun sudah tertera dalam Al-Qur'an baik secara tersirat ataupun secara jelas. Salah satu pengembangan ilmu pengetahuan yang sampai saat ini sedang dikembangkan adalah ilmu matematika. matematika memiliki berbagai macam rumpun bidang ilmu pengetahuan yang salah satunya adalah teori bilangan. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai sistem kongruensi. Sistem kongruensi merupakan salah satu konsep matematika yang sudah terdapat dalam Al-Qur'an. Ilmu matematika merupakan salah satu ilmu yang sangat diperlukan untuk menopang ilmu-ilmu pengetahuan lainnya. Bahkan dalam kehidupan sehari-hari ilmu matematika juga sangat dibutuhkan. Hal pentingnya menuntut ilmu telah dijelaskan pada QS. Al-Baqarah: 151

"Sebagaimana (Kami telah menyempurnakan nikmat Kami kepadamu) Kami telah mengutus kepadamu Rasul diantara kamu yang membacakan ayat-ayat Kami kepada kamu dan mensucikan kamu dan mengajarkan kepadamu Al-Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui."

Seiring terus berkembangnya ilmu pengetahuan, dalam ayat ini Allah menegaskan peran Al-Qur'an sebagai kitab ummat islam. *"...mengajarkan kepadamu Al-Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui."* Pada kalimat itu menyadarkan setiap orang baik se-berkembang apapun suatu ilmu pengetahuan haruslah hal itu tidak membuat seseorang mempertanyakan keterlibatan Al-Qur'an. Karena Al-Qur'an sudah menjelaskan segala hal bahkan sesuatu yang belum diketahui pada era yang sudah berkembang ini. Hendaklah semakain bertambahnya ilmu semakin bertambah pula ke-imanan terhadap Al-Qur'an dan segala pesan yang terdapat didalamnya.

BAB III

PEMBAHASAN

Berlandaskan uraian dan landasan teori pada Bab II, maka pada Bab ini penulis akan membahas mengenai langkah-langkah penyelesaian sistem kongruensi linier.

3.1 Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier dengan Determinan Matriks

Definisi 3.1 Misalakn A dan B adalah matriks $n \times k$ dengan unsur-unsurnya bilangan bulat, unsur ke (i,j) berturut-turut adalah a_{ij} dan b_{ij}. A dikatakan kongruensi dengan B modulo m, jika $a_{ij} \equiv b_{ij}(mod\ m)$ untuk setiap pasang (i,j) dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq k$ dan dinotasikan dengan $A \equiv B(mod\ m)$. (Irawan, 2014).

Teorema 3.1 *Jika A dan B adalah matriks* $n \times k$ *dengan* $A \equiv B(mod\ m), C$ *adalah matriks* $k \times p$ *dan* D *adalah* $p \times n$, *yang semua unsurnya bilangan bulat, maka* $AC \equiv BC(mod\ m)$ *dan* $DA \equiv DB(mod\ m)$. (Irawan, 2014)

Perhatikan sistem kongruensi berikut:

$$\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \equiv & b_1(mod\ m) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \equiv & b_2(mod\ m) \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n & \equiv & b_3(mod\ m) \\
\vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & \equiv & b_n(mod\ m)
\end{array}$$

dimana $a_{ij}, b_i, m \in \mathbb{Z}\ i = 1,2,3, \dots, n\ dan\ j = 1,2,3, \dots, n\ dan\ m > 0$. Dengan menggunakan notasi matriks, sistem kongruensi tersebut dapat dinyatakan sama atau ekuivalen dengan kongruensi matriks $AX \equiv B(mod\ m)$ dimana;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{dan } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Sekarang akan dikembangkan suatu metode penyelesaian sistem kongruensi dengan dasar nilai determinan dari matriks A (Δ) dan determinan dari matriks A_{x_i} (Δ_{x_i}) dimana A_{x_i} merupakan matriks yang dibentuk dengan mengganti kolom ke-i pada matriks A dengan B, dimana matriks B merupakan sebuah matriks berukuran $n \times 1$ yang entri-entrinya merupakan hasil-hasil dari kongruensi linier pada sistem kongruensi linier. Metode menggunakan nilai determinan ini biasa disebut dengan metode cramer pada sistem persamaan linier, namun pada penyelesaian sistem kongruensi linier ini untuk menghindari bilangan rasional maka akan digunakan invers dari Δ disimbolkan dengan $\bar{\Delta}$ sedemikian sehingga $\Delta\bar{\Delta} \equiv 1 (mod\ m)$.

Definisi 3.2 Jika A dan $\bar{A}$ adalah matriks $n \times n$ dari bilangan-bilangan bulat, dan $\bar{A}A \equiv A\bar{A} \equiv I(mod\ m)$ dimana $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks identitas berorde n, maka $\bar{A}$ adalah invers dari A modulo m.

Teorema 3.2 (Irawan, 2014) *Jika A adalah matriks $n \times n$ dengan* $\det(A) \neq 0$, *maka* $A(Adj\ A) = \det(A)\, I$.

Teorema 3.3 (Irawan, 2014) *Jika A adalah matriks $n \times n$ dengan unsur-unsurnya bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif, sedemikian sehingga $FPB(det(A), m) = 1$ maka matriks $\bar{A} = \bar{\Delta}(adj\ A)$ adalah invers dari A modulo m, dimana $\bar{\Delta}$ adalah invers dari $\Delta = det(A)$ modulo m.*

Teorema 3.4 *Jika $AX \equiv B(mod\ m)$ adalah kongruensi linier matriks yang terdiri dari sistem kongruensi linier dengan n kongruensi, n variiabel, dan modulo m*

dengan $FPB(\det(A), m) = 1$, *maka sistem kongruensi linier tersebut memiliki selesaian sebagai berikut:*

$x_j \equiv (\det(A))^{-1}\left(\det\left(A_{x_j}\right)\right)(mod\ m)$

Dimana A_{x_j} *adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan entri-entri dari kolom ke-j dari A dengan entri-entri dari matriks* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *dimana* $j = 1,2,3, \dots, n$.

Bukti. Sebuah kongruensi linier matriks yang terdiri dari sistem kongruensi linier n kongrunsi, n variabel, dan bermodulo m dituliskan sebagai berikut

$$\boldsymbol{AX \equiv B(mod\ m)}$$

dengan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dimana a_{ij} adalah unsur matriks A baris ke-i kolom ke-j, x_i adalah variabel ke-i, dan b_i adalah unsur matriks B ke-i. Sehingga dapat dituliskan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (mod\ m)$$

Akan dibuktikan sistem kongruensi tersebut memiliki selesaian. Asumsikan $FPB(\Delta, m) = 1$, sedemikian sehingga $\Delta \neq 0$ maka A memiliki invers.

Kemudian kalikan kongruensi linier matriks tersebut dengan invers dari A modulo m dari sebelah kiri berdasarkan definisi 3.2

$$A^{-1}(AX) \equiv A^{-1}B(mod\ m)$$

$$(A^{-1}A)X \equiv A^{-1}B(mod\ m)$$

$$X \equiv A^{-1}B(mod\ m)$$

Selanjutnya berdasarkan teorema 3.3 dapat ditulis

$$X \equiv (\det(A))^{-1}\ adj(A)\ B(mod\ m)$$

Berdasarkan definisi 2.3.8 diperoleh

$$X \equiv (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (mod\ m)$$

Dimana A_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}.

Selanjutnya dengan mengalikan matriks-matriks tersebut dihasilkan

$$X \equiv (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + & \cdots & +b_nA_{n1} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + & \cdots & +b_nA_{nn} \end{pmatrix} (mod\ m)$$

Sehingga entri baris ke-j dari X dengan demikian adalah

$$x_j \equiv (\det(A))^{-1} \left(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}\right)(mod\ m) \tag{3.1}$$

Misalkan

$$\boldsymbol{A_{x_j}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan teorema ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j diperoleh

$$\det\left(A_{x_j}\right) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$$

Berdasarkan nilai $\det(A_{x_j})$ disubstitusikan ke pesamaan 3.1 diperoleh

$$x_j \equiv \left(\det(A)\right)^{-1} \det\left(A_{x_j}\right) (mod\ m).$$

Jadi teorema terbukti.■

Contoh 3.1

Berikut merupakan contoh sistem kongruensi linier yang akan diselesaikan dengan determinan matriks:

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \equiv 4(mod\ 5)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \equiv 4(mod\ 5)$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \equiv 5(mod\ 5)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \equiv 2(mod\ 5)$$

Selanjutnya Dibentuk menjadi matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} (mod\ 5)$$

Dengan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, dan $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Karena $FPB(\det(A), 5) = 1$ maka sistem kongruensi linier tersebut memiliki selesaian $x_i \equiv (\det A)^{-1} \left(\det A_{x_i}\right) (mod\ m)$.

Selanjutnya matriks A_{x_i} dengan mengganti kolom ke-i pada matriks A dengan B.

$$\boldsymbol{A_{x_1}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{x_2}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{x_3}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_{x_4}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kemudian nilai-nilai determinannya yaitu

$$\det(A) = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 3 & 1\\2 & 1 & 2\end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 1\\3 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

$$+ 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\\3 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{l} 3(-1)^{1+1}\left(2\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}\right)\\ + 1(-1)^{1+2}\left(1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +2(-1)^{1+3}\left(1\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\right)\\ +2(-1)^{1+4}\left(1\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\right)\end{array}\right)$$

$$= 3(10-5) - 1(5-3-7) + 2(-2+1) - 2(-5+14+3) = -6$$

$$\det(A_{x_1}) = 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 3 & 1\\2 & 1 & 2\end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\1 & 3 & 1\\2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$+ 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 3 & 1\\2 & 1 & 2\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 3 & 1\\1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{l} 4(-1)^{1+1}\left(2\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ + 4(-1)^{1+2}\left(1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +5(-1)^{1+3}\left(1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +2(-1)^{1+4}\left(1\begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\end{array}\right)$$

$$= 4(10-5) - 4(5-2-8) + 5(5-4-8) - 2(8-4) = -3$$

$$\det(A_{x_2}) = 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$+ 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\1 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\1 & 3 & 1\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{l} 4(-1)^{1+1}\left(1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ + 4(-1)^{1+2}\left(3\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +5(-1)^{1+3}\left(3\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +2(-1)^{1+4}\left(3\begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}\right)\end{array}\right)$$

$= 4(5-10) - 4(15-4-12) + 5(15-2-12) - 2(4-8) = 3$

$$\det(A_{x_3}) = 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

$$+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{l} 4(-1)^{1+1}\left(1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +4(-1)^{1+2}\left(3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +5(-1)^{1+3}\left(3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)\\ +2(-1)^{1+4}\left(3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right) \end{array}\right)$$

$= 4(-4+3) - 4(4-3) + 5(6+2-9) - 2(3+1-6) = -9$

$$\det(A_{x_4}) = 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{l} 4(-1)^{1+1}\left(1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)\\ +4(-1)^{1+2}\left(3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)\\ +5(-1)^{1+3}\left(3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right)\\ +2(-1)^{1+4}\left(3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right) \end{array}\right)$$

$= 4(-5+8+9) - 4(-15+6+3) + 5(-12+3-3) - 2(9-1-2) = 0$

Selanjutnya mencari nilai invers dari $\det(A) \equiv -6(mod\ 5)$

$-6x \equiv 1(mod\ 5)$

$-x \equiv 1(mod\ 5)$

$x \equiv -1(mod\ 5)$

Jadi invers dari $\det(A)$ adalah -1 $((\det(A))^{-1} \equiv -1\ (mod\ 5)$.

$x_1 \equiv (\det(A))^{-1} \det(A_{x_1})\ (mod\ m)$

$x_1 \equiv -1(-3)(mod\ 5)$

$x_1 \equiv 3(mod\ 5)$

$x_2 \equiv (\det(A))^{-1} \det(A_{x_2})\ (mod\ m)$

$x_2 \equiv -1(3)(mod\ 5)$

$x_2 \equiv -3(mod\ 5)$

$x_2 \equiv 2\ (mod\ 5)$

$x_3 \equiv (\det(A))^{-1} \det(A_{x_2})\ (mod\ m)$

$x_3 \equiv -1(-9)(mod\ 5)$

$x_3 \equiv 9(mod\ 5)$

$x_3 \equiv 4\ (mod\ 5)$

$x_4 \equiv (\det(A))^{-1} \det(A_{x_4})\ (mod\ m)$

$x_4 \equiv -1(0)(mod\ 5)$

$x_4 \equiv 0\ (mod\ 5)$

3.2 Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier dengan Determinan Matriks pada Aplikasi Python

Penyelesaian sistem kongruensi linier pdada python juga dilakukan dengan metode yang sama yaitu menggunakan determinan matriks. Adapun tahapan-tahapan untuk memperoh hasilnya adalah sebagai berikut:

Contoh 3.2

Berikut merupakan contoh sistem kongruensi linier:

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \equiv 4(mod\ 5)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \equiv 4(mod\ 5)$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \equiv 5(mod\ 5)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \equiv 2(mod\ 5)$$

1. Pertama tentukan A, X, B dan m

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Matriks dengan mereduksi semua variabel

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ Matriks yang terdiri dari variabel-variabel

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ Matriks yang terdiri dari elemen kolom hasil

$m = 5$ Nilai modulo

2. Selanjutnya tentukan $A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}$, dan A_{x_4}

$\boldsymbol{A_{x_1}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Matriks A dengan mengganti kolom ke-1 dengan matriks B

$\boldsymbol{A_{x_2}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Matriks A dengan mengganti kolom ke-2 dengan matriks B

$\boldsymbol{A_{x_3}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Matriks A dengan mengganti kolom ke-3 dengan matriks B

$\boldsymbol{A_{x_4}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Matriks A dengan mengganti kolom ke-4 dengan matriks B

3. Kemudian carilah nilai determinan dari $A, A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}$, dan A_{x_4}

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 3(-1)^{1+1}\left(2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ + 1(-1)^{1+2}\left(1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+3}\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+4}\left(1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3(10 - 5) - 1(5 - 3 - 7) + 2(-2 + 1) - 2(-5 + 14 + 3) = -6$$

$$\boldsymbol{A}_{x_1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_1}) = \begin{pmatrix} 4(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_1}) = \begin{pmatrix} 4(-1)^{1+1}\left(2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ + 1(-1)^{1+2}\left(4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+3}\left(4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+4}\left(4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_1}) = \left(4(10 - 5) - 1(20 - 24 - 1) + 2(-16 + 8) - 2(-20 + 2 + 24)\right)$$

$$\det(A_{x_1}) = -3$$

$$\boldsymbol{A_{x_2}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_2}) = \begin{pmatrix} 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_2}) = \begin{pmatrix} 3(-1)^{1+1}\left(4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ +4(-1)^{1+2}\left(1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+3}\left(1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+4}\left(1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_2}) = 3(20-24-1) - 4(5-3-7) + 2(8-4-11) - 2(-1+28-33)$$

$$\det(A_{x_2}) = 3$$

$$\boldsymbol{A_{x_3}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_3}) = \begin{pmatrix} 3(-1)^{1+1}\left(2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ +1(-1)^{1+2}\left(1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ +4(-1)^{1+3}\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+4}\left(1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_3}) = 3(16-8) - 1(8-4-11) + 4(-2+1) - 2(-8+22+4)$$

$$\det(A_{x_3}) = -9$$

$$\boldsymbol{A_{x_4}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_4}) = \begin{pmatrix} 3(-1)^{1+1}\left(2\begin{vmatrix}3 & 5\\1 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}\right) \\ +1(-1)^{1+2}\left(1\begin{vmatrix}3 & 5\\1 & 2\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{vmatrix}\right) \\ +2(-1)^{1+3}\left(1\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\right) \\ +4(-1)^{1+4}\left(1\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{x_4}) = 3(2+24-20) - 1(1+33-28) + 2(-8+22+4) - 4(-5+14+3)$$

$$\det(A_{x_4}) = 0$$

4. Kemudian periksa jumlah selesaian menggunakan $FPB(\det(A), m)$

   $FPB(\det(A), m) = FPB(-6,5) = 1$

   Jadi sistem kongruensi tersebut memiliki tepat 1 selesaian.

5. Carilah nilai invers modulo dari $\det(A)$ menggunakan (definisi 2.7.4).

$\det(A) = -6$

$-6k \equiv 1 (mod\ 5)$

$-k \equiv 1 (mod\ 5)$

$k \equiv -1 (mod\ 5)$

6. Terakhir, substitusi terhadap penyelesaian sistem kongruensi linier dengan determinan matriks

   $x_1 \equiv (\det(A))^{-1}(\det(A_{x_1}))\ (mod\ 5)$

   $x_1 \equiv -1(-3)\ (mod\ 5)$

   $x_1 \equiv 3\ (mod\ 5)$

   $x_2 \equiv (\det(A))^{-1}(\det(A_{x_2}))\ (mod\ 5)$

   $x_2 \equiv -1(3)\ (mod\ 5)$

   $x_2 \equiv -3\ (mod\ 5)$

$x_2 \equiv 2 \ (mod \ 5)$

$x_3 \equiv (\det(A))^{-1}(\det(A_{x_3})) \ (mod \ 5)$

$x_3 \equiv -1(-9) \ (mod \ 5)$

$x_3 \equiv 9 \ (mod \ 5)$

$x_3 \equiv 4 \ (mod \ 5)$

$x_4 \equiv (\det(A))^{-1}(\det(A_{x_4}))(mod \ 5)$

$x_4 \equiv -1(0) \ (mod \ 5)$

$x_4 \equiv 0(mod \ 5)$

Jadi diperoleh $x_1 \equiv 3(mod \ 5)$, $x_2 \equiv 2(mod \ 5)$, $x_3 \equiv 4 \ (mod \ 5)$, dan $x_4 \equiv 0(mod \ 5)$.

3.3 Sistem Kongruensi Linier dalam Pandangan Islam

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, telah dijelaskan konsep kongruensi yang sebenarnya sudah tertera secara tersirat dalam Al-Qur'an. Yang pertama yaitu mengenai peran penting Al-Qur'an dalam perkembangan ilmu pengetahuan pada QS. Al-Baqarah: 151

"Sebagaimana (Kami telah menyempurnakan nikmat Kami kepadamu) Kami telah mengutus kepadamu Rasul diantara kamu yang membacakan ayat-ayat Kami kepada kamu dan mensucikan kamu dan mengajarkan kepadamu Al-Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui." Seiring terus berkembangnya ilmu pengetahuan, dalam ayat ini Allah menegaskan peran Al-Qur'an sebagai kitab ummat islam. *"...mengajarkan kepadamu Al-Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui."* Pada kalimat tersebut tersirat seberapa penting ilmu pengetahuan namun tetap

berlandaskan dengan Al-Kitab dan Al-Hikmah sebagai pondasinya karena dengan adanya Al-Kitab dan Al-Hikmah sebagai pondasi dapat menjadikan seseorang yang berakhlak dan berilmu, sebab berilmu tanpa akhlak merupakan kesia-siaan.

Pada kalimat itu menyadarkan setiap orang se-berkembang apapun suatu ilmu pengetahuan haruslah hal itu tidak membuat seseorang mempertanyakan keterlibatan Al-Qur'an. Karena Al-Qur'an sudah menjelaskan segala hal bahkan sesuatu yang belum diketahui pada era yang sudah berkembang ini. Hendaklah semakain bertambahnya ilmu semakin bertambah pula ke-imanan terhadap Al-Qur'an dan segala pesan yang terdapat didalamnya. Keutamaan menuntut ilmu telah dijelaskan pada QS. Al-Mujadalah:11

"*Wahai orang-orang yang beriman! apabila dikatakan kepadamu,"Berilah kelapangan didalam majelis, maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan berdirilah kamu, maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat derajat orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang berilmu beberapa derajat*".

Pada ayat diatas dapat dilihat bagaimana baiknya Allah SWT, dijelaskan apabila sesorang memudahkan urusan orang lain dan mentaati perintah-Nya serta beriman kepada-Nya maka senantiasa Allah akan mengangkat derajat sesorang tersebut. Namun selain itu terdapat pula keistimewaan bagi orang-orang yang berilmu, yaitu akan diangkat baginya beberapa derajat.

Apabila dipahami dengan seksama, kemurahan serta kebaikan Allah SWT merupakan konsep kongruensi yang sesungguhnya. Terkadang seseorang perlu membantu orang lain setidaknya dengan tujuan dipermudah urusannya, karna Allah pasti akan membalas lebih dari apa yang dilakuakan hamba-Nya. Beruntunglah orang-orang yang senang membantu sesame serta memudahkan urusan orang yang sedang dalam kesulitan. Karena selain kemudahan di dunia, Allah juga akan memberikannya kemudahan di akhirat.

Sedangkan apabila dikaitkan dengan sistem kongruensi linier, maka dimisalakan seseorang melakukan 3 kebaikan berbeda dalam satu hari. Kebaikan pertama disimbolkan dengan x_1, kebaikan kedua x_2, dan kebaikan ketiga x_3. Pada saat bersamaan kita mendapatkan sebuah rejeki, simbolkan rejeki dengan m. secara konsep kongruensi dapat dituliskan menadi $x_1 + x_2 + x_3 \equiv y \ (mod\ m)$. Yang dapat dirasakan saat itu hanyalah kebaikan m, namun ada kebaikan y yang belum diketahui dan merupakan balasan dari Allah SWT. Sehingga hal ini mengajari kita untuk senantiasa berprasangka baik kepada-Nya. Karena tidak semua harus mendapat ganjarannya saat itu juga.

Hal ini juga dapat dilihat dalam terkabulnya seseorang dalam berdoa. Jika doa seseorang dikabulkan sesuai dengan harapannya, mungkin memang itu yang terbaik untuknya. Namun apabila doa sesorang belum juga dikabulkan, mungkin Allah masih ingin melihat hamba-Nya usaha lebih keras. Namun jika Allah memberi justru hal yang tidak ia harapkan, maka sengguhnya Allah Maha Mengetahui segala sesuatu yang belum diketahui hamba-Nya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa suatu sistem kongruensi linier dapat diselesaikan dengan menggunakan determinan matriks. Penggunaan determinan matriks pada penyelesaian sitem kongruensi linier dinilai efektif ketika akan dicari nilai selesaian atau satu variabel dari sistem kongruensi dengan banyak variabel. Misalkan sebuah sistem kongruensi linier memiliki n kongruensi dengan n variabel dan modulo m dimana selanjutnya akan membentuk sebuat matriks berukuran $n \times n$ sehingga diperoleh bentuk penyelesainnya yitu $x_j = (\det(A))^{-1} \det\left(A_{x_j}\right) \ (mod\ m)$ dimana $j = 1,2,3,..,n$ dan A_{x_j} merupakan matriks baru yang terbentuk dengan mengganti kolom ke-j pada matriks A dengan kolom hasil. Penyelesaian sistem kongruensi dengan program python lebih efektif dan mampu meminimalkan kemungkinan kesalahan pada proses perhitungan.

4.2 Saran

Dari penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan serta kurangnya refrensi membuat salah satu penyebab ketidaksempurnaan penelitian dan hasil penyusunan skripsi ini. Sehinga penulis mengharapkan saran serta kritik yang membangun dari para pembaca. Disamping itu penulis menyarankan agar penelitian ini dikembangakan pada penyelesaian sistem kongruensi non-linier serta penerapannya dengan menggunakan *programming* guna mempermudah dan menghasilkan selesaian yang akurat serta efisien.

DAFTAR RUJUKAN

Anton, H. 1998. *Aljabar Linier Elementer.* Jakarta: Erlangga.

Aziz, Abdul. Abdusysyakir. 2006. *Analisis Matematis Filsafat Al-Qur'an.* Malang: UIN-Maliki Press.

Cullen, Charles. G. 1992. *Aljabar Linier Dengan Penerapannya.* Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Irawan, Wahyu H, dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan.* Malang: UIN-Maliki Press.

Kamaluddin, Kasrina. 2015. *Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier serta Aplikasinya.* Makasar: Skripsi Universitas Alauddin Makasar.

Mardalis. 1999. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal.* Jakarta: Bumi Aksara.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-dasar Teori Bilangan.* Malang: IKIP Malang.

Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasinya.* Jakarta: Erlangga.

Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier.* Bandung: Rekayasa Sains

Santi, Rina Candra N. 2012. "Jurnal Teknologi Informasi DINAMIK. *Implementasi Sistem Persamaan Linier menggunakan Metode Aturan Cramer.* Vol (17).

Steven J. Leon. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya.* Jakarta: Erlangga.

Wati, Kurnia Era. 2009. *Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier.* Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Zuhroh. Madinatuz. 2011. *Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel.* Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

LAMPIRAN

```
def transpose(a):
    return map(list,zip(*a))
#proses tranpose matriks dengan fungsi map dan list,zip sebagai permisalan ukuran n*n matrix
def minor(a,i,j):
    return [row[:j] + row[j+1:] for row in (a[:i]+a[i+1:])]
#proses pencarian nilai minor pada matrix
def determinant(a):
    if len(a) == 2:
        return a[0][0]*a[1][1]-a[0][1]*a[1][0]
    #mencari determinant pada kasus dasar matrix 2x2
    dete = 0
    for k in range(len(a)):
        dete += ((-1)**k)*a[0][k]*determinant(minor(a,0,k))
    return dete


def transpose(b):
    return map(list,zip(*b))
#proses tranpose matriks dengan fungsi map dan list,zip sebagai permisalan ukuran n*n matrix
def minor(b,i,j):
    return [row[:j] + row[j+1:] for row in (b[:i]+b[i+1:])]
def determinan(b):
    if len(b) == 2:
        return b[0][0]*b[1][1]-b[0][1]*b[1][0]
    #mencari determinant pada kasus dasar matrix 2x2
    det = 0
    for k in range(len(b)):
        det += ((-1)**k)*b[0][k]*determinan(minor(b,0,k))
    return det
```

1.

```
def invers_modulo(b, M):


    A=determinan(b)
    gcd, x, y = fpb_euclid(A, M)
    """
    Asumsi A dan M co-prima
    dilakukan invers modulo terhadap modulo M
    """
    # mencari fpb dengan algoritma euclid

    # kondisi jika x negatif
    if x < 0:
        x += M

    return x

def fpb_euclid(v, w):
    """
     hasil berupa list 'hasil' dari persamaan ax + by = fpb(a, b) dengan
        hasil[0] adalah fpb(a, b)
        hasil[1] adalah x
        hasil[2] adalah y
    """
    s = 0; old_s = 1
    t = 1; old_t = 0
    r = w; old_r = v

    while r != 0:
        quo = old_r//r # pembagian dengan pembulatan kebawah
        old_r, r = r, old_r - quo*r
        old_s, s = s, old_s - quo*s
        old_t, t = t, old_t - quo*t
    return [old_r, old_s, old_t]
```

2.

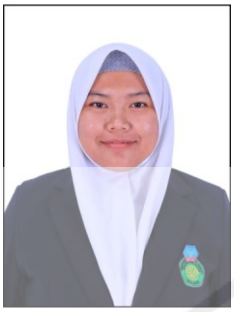
3.

```python
def finish(b,a,M):
    g=determinant(a)
    f=invers_modulo(b, M)
    return (g*f)%M
```

4.

```
Python 3.7.6 Shell
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.7.6 (tags/v3.7.6:43364a7ae0, Dec 19 2019, 00:42:30) [MSC v.1916 64 bit
(AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
=================== RESTART: E:\SCIENCE DIRECT\kongruensi.py ===================
tulislah finish([matriks awal],[matriks baru dg kolom hasil],angka modulo
>>> 
```

DAFTAR RIFAYAT HIDUP



Rif'atul Syarifah, lahir di Sumenep pada tanggal 21 Mei 1997. Anak sulung dari 2 bersaudara yakni dari pasangan Bapak Sami'uddin (Alm) dan Ibu Unsiyah.

Perempuan yang akrab disapa Rifa ini telah menempuh Pendidikan formal mulai dari TK Adz-Dzikir, lalu Pendidikan dasarnya ditrmpuh di SDN Karduluk I dan lulus pada tahun 2009, juga mengenyam Pendidikan nonformal selama 5 tahun di MD Al-Hidayah, dan melanjutkan ke MTsN. Al-Amien Putri I, selanjutnya melanjutkan ke MAN I Pamekasan dan lulus tahun 2015. Selanjutnya pada tahun 2016 menenpuh kuliah di Universitas Islama Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa rutinitas sebagai mahasiswa dilakukan dengan tekun, selain menjadi mahasiswa dengan tugas pada umumnya, juga menjadi Asisten praktikum untuk mengisi waktu luang. Selain hal itu juga sering menjadi pengisi belajar Bersama yang diadakan oleh HMJ Integral Matematika dan juga SeMaTa baik secara formal atau tidak. Selain aktif dibidang akademik juga sebagai salah satu mahasiswa penerima beasiswa GenBI 2019-2020 tentu aktif dalam kegiatan-kegiatan GenBI seperti GenBI Mengajar dan Bersih Indonesia 2019.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rif'atul Syarifah
NIM : 16610048
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier Menggunakan Determinan Matriks
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Agustus 2019	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	29 Agustus 2019	Konsultasi Bab I, II, & III	2.
3.	2 September 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	4 September 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	15 Setember 2019	Konsultasi Bab III	5.
6.	25 Januari 2020	Pembenahan Bab III	6.
7.	1 Maret 2020	Konsultasi Bab IV	7.
8.	7 Maret 2020	Konsultasi Abstrak	8.
9.	4 April 2020	ACC Kajian Keagamaan	9.
10.	7 April 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 8 Agustus 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001