

**KONTROL OPTIMAL KARBON DIOKSIDA DAN NUTRISI  
PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA**

**SKRIPSI**

**OLEH  
HESTI WIJAYANTI  
NIM. 16610077**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**KONTROL OPTIMAL KARBON DIOKSIDA DAN NUTRISI  
PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Hesti Wijayanti  
NIM. 16610077**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**KONTROL OPTIMAL KARBON DIOKSIDA DAN NUTRISI  
PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Hesti Wijayanti**  
NIM.16610077

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 25 Juni 2020

Pembimbing I,



Heni Widayani, M.Si  
NIP. 19901006201802012229

Pembimbing II,



Juhari, M.Si  
NIP.19840209201608011055

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 196504142003121001

**KONTROL OPTIMAL KARBON DIOKSIDA DAN NUTRISI  
PADA MODEL PERTUMBUHAN ALGA**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Hesti Wijayanti**  
**NIM.16610077**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika(S.Mat)  
Tanggal 25 Juni 2020.

Penguji utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si

Pembimbing II : Juhari, M.Si

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

  
Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 196504142003121001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hesti Wijayanti

NIM : 16610077

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kontrol Optimal Karbondioksida dan Nutrisi pada Model  
Pertumbuhan Alga

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikirana saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Juni 2020  
Yang membuat pernyataan,



Hesti Wijayanti  
NIM.16610077

## MOTO

*“Finish What You’ve Started”*

*“Tetaplah bertahan hidup, meskipun kamu sedang berada di fase paling tidak bergunanya dirimu”*

*“Usaha Tanpa Doa adalah Sombong. Doa Tanpa Usaha adalah Sia-Sia, dan Jangan Lupa Tawakkal”*



## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Keluargaku tercinta : Bapak Wiyarto dan Ibu Suyatwi

Terima kasih atas doa, dukungan, kesabaran, kepercayaan, motivasi, dan  
segalanya.

Keluarga besar penulis yang selalu mendukung serta mendoakan.

Teman, sahabat, sekaligus adik-adik tercinta Mutia, Kasyifa, Valyn dan Salwa  
yang selalu menghibur ketika menghadapi kejenuhan selama membuat skripsi  
ditengah wabah pandemi Covid-19



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puja dan puji syukur bagi Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karuniaNya, sehingga ditengah wabah pandemi Covid-19 ini, penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi yang berjudul “Kontrol Optimal Karbondioksida dan Nutrisi pada Model Pertumbuhan Alga”.

Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah menuntun ummatnya dari jaman yang gelap ke jaman yang terang yakni agama islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.si, selaku dekan Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si dan Juhari M.Si selaku dosen pembimbing atas segala kesabaran, ilmu dan masukannya selama membimbing penulis.

5. Dr. Usman Pagalay, M.Si dan Mohammad Jamhuri, M.Si selaku dosen penguji, dan seluruh dosen Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Segenap sivitas akademika jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Keluargaku tercinta: Ibu (terima kasih atas doa, dukungan, kesabaran, kepercayaan, dan kasih sayang, motivasi dan segalanya). Bapak (terima kasih atas doa, dukungan dan kasih sayang), serta adik-adikku (terima kasih atas dukungan kasih sayangnya).
8. Teman-teman satu bimbingan yang selalu saling mengingatkan dan memberi motivasi dalam penyusunan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2016 atas kekeluargaan yang telah diberikan.
10. Semua pihak yang telah mendukung selama ini, baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, di balik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 16 Juni 2020

Penulis

## DAFTAR ISI

**HALAMAN JUDUL**

**HALAMAN PENGAJUAN**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

**HALAMAN PENGESAHAN**

**HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

**HALAMAN MOTO**

**HALAMAN PERSEMBAHAN**

**KATAPENGANTAR..... viii**

**DAFTAR ISI..... xi**

**DAFTAR GAMBAR..... xii**

**DAFTAR TABEL..... xiii**

**DAFTAR SIMBOL.....xiv**

**ABSTRAK .....xv**

**ABSTRACT.....xvi**

**ملخص..... xvii**

### **BAB I PENDAHULUAN**

1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Sistematika Penulisan.....	6

**BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

2.1 Persamaan Differensial .....	10
2.2 Kontrol Optimal.....	12
2.2.1 Persamaan <i>state</i> dan variabel kontrol .....	13
2.2.2 Fungsi Tujuan (Indeks Performansi) .....	13
2.2.3 Formulasi Masalah Kendali Optimal.....	14
2.2.4 Fungsi Hamiltonian .....	15
2.2.5 Fungsi Maksimum Pontryagin.....	15
2.3 Metode Beda Hingga .....	17
2.4 Metode Runge Kutta Orde 4.....	19
2.5 Alga .....	21
2.6 Model Matematika Pertumbuhan Alga.....	24
2.7 Proses Penciptaan Tumbuhan dalam Al-Quran.....	28

**BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Mendeskripsikan Model Matematika Pertumbuhan Alga dengan Kontrol.....	31
3.2 Penyelesaian Kontrol Optimal pada Model Pertumbuhan Alga.....	33
3.3 Simulasi Numerik .....	38
3.3.1 Proses Diskritisasi Sistem Persamaan .....	38
3.3.2 Hasil Simulasi Numerik.....	44
3.5 Proses Penciptaan Tumbuhan dan Manfaat Tumbuhan dalam Islam .....	54

**BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	59
4.2 Saran .....	60

<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>61</b>
-----------------------------	-----------

**LAMPIRAN****RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Pertumbuhan Alga dari Karbon Dioksida dan Nutrisi .....	25
Gambar 3.1	Dinamika Konsentrasi Alga Ketika $D = 0.3, N = 0.3$ .....	46
Gambar 3.2	Dinamika Konsentrasi Nutrisi Ketika $D = 0.3, N = 0.3$ .....	47
Gambar 3.3	Dinamika Konsentrasi Glukosa Ketika $D = 0.3, N = 0.3$ .....	48
Gambar 3.4	Dinamika Konsentrasi Karbondioksida Ketika $D = 0.3, N = 0.3$ .....	49
Gambar 3.5	Kondisi Kontrol Laju Karbon Dioksida Ketika $D = 0.3, N = 0.3$ .....	49
Gambar 3.6	Kondisi Kontrol Laju Nutrisi Ketika $D = 0.3, N = 0.3$ .....	50
Gambar 3.7	Dinamika Konsentrasi Alga Ketika $D = 1, N = 1$ .....	51
Gambar 3.8	Dinamika Konsentrasi Nutrisi Ketika $D = 1, N = 1$ .....	52
Gambar 3.9	Dinamika Konsentrasi Glukosa Ketika $D = 1, N = 1$ .....	53
Gambar 3.10	Dinamika Konsentrasi Karbondioksida Ketika $D = 1, N = 1$ .....	54
Gambar 3.11	Kondisi Kontrol Laju Karbon Dioksida Ketika $D = 1, N = 1$ .....	55
Gambar 3.12	Kondisi Kontrol Laju Nutrisi Ketika $D = 1, N = 1$ .....	56

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Keterangan Variabel dan Parameter.....	28
Tabel 3.1	Nilai Prameter yang Digunakan dalam Simulasi .....	46



## DAFTAR SIMBOL

$H$	:	Fungsi Hamiltonian
$J$	:	Fungsi Objektif
$A$	:	Konsentrasi alga
$M$	:	Konsentrasi nutrisi
$S$	:	Konsentrasi glukosa
$C$	:	Konsentrasi karbondioksida
$\rho_{max}$	:	Konsentrasi nutrisi maksimal dalam alga
$M_{turn}$	:	Setengah konsentrasi konstan
$u_1(t)$	:	Laju karbon dioksida
$u_2(t)$	:	Laju nutrisi
$h_r$	:	Tingkat panen alga
$D_r$	:	Tingkat kematian alga
$\alpha_A$	:	Konstanta pertumbuhan biomassa
$\alpha_s$	:	Konstanta fotosintesis
$k_1$	:	Tingkat perubahan karbon dioksida menjadi glukosa
$k_2$	:	Tingkat perubahan nutrisi menjadi alga
$k_3$	:	Tingkat perubahan glukosa menjadi alga

## ABSTRAK

Wijayanti, Hesti.2020. **Kontrol Optimal Karbon Dioksida dan Nutrisi pada Model Pertumbuhan Alga**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Heni Widayani, M.Si (II) Juhari, M.Si.

**Kata Kunci:** Kontrol Optimal, Model Pertumbuhan Alga, Prinsip Maksimum Pontryagin, Aliran Karbondioksida, Aliran Nutrisi.

Model matematika pertumbuhan alga merupakan sistem persamaan differensial nonlinier biasa orde satu. Model ini merupakan model *nonautonomous* karena perubahan konsentrasinya bergantung pada waktu. Model matematika Pertumbuhan alga dipengaruhi oleh glukosa, nutrisi dan proses fotosintesis. Sedangkan pembentukan glukosa sendiri terdiri dari karbon dioksida dan air. Konsentrasi karbon dioksida yang berasal dari aliran karbondioksida dan konsentrasi nutrisi yang berasal dari aliran nutrisi, keduanya akan mempengaruhi konsentrasi alga.

Pada penelitian ini dibahas suatu analisis kontrol optimal dari model matematika pertumbuhan alga. Adapun fungsi tujuan yang ingin dicapai adalah memaksimalkan konsentrasi alga dengan variabel kontrolnya adalah aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi. Penyelesaiannya dengan menerapkan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dengan menggunakan prinsip ini, dari sebuah model matematika pertumbuhan alga dengan kontrol aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi akan diperoleh kondisi yang optimal dan juga mendapatkan persamaan *state* dan *costate*, yang kemudian disimulasikan menggunakan metode Runge Kutta orde 4.

Hasil simulasi menunjukkan adanya perbedaan ketika tanpa kontrol dan dengan kontrol. Konsentrasi alga setelah diberikan kontrol dengan bobot konsentrasi 0,3 sebesar  $7,866 \text{ g}[A]m^{-3}$ , sedangkan Konsentrasi alga setelah diberikan kontrol dengan bobot konsentrasi 1 sebesar  $7,862 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Jadi pertumbuhan alga ketika bobot konsentrasi 0,3 lebih besar 9% dibandingkan dengan nilai bobot konsentrasi 1. Sehingga pertumbuhan alga dapat maksimum dengan nilai bobot minimum.

## ABSTRACT

Wijayanti, Hesti. 2020. **Optimal Control Carbondioxide and Nutrient Flow of Algae Growth Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Heni Widayani, M.Si (II) Juhari, M.Si.

**Keywords:** Optimal Control, Algae Growth Model, Pontryagin Maximum Principle, Carbondioxide Flow, Nutrition Flow.

The mathematical model of algae growth is a system of nonlinear ordinary differential equations of first order. This model is a nonautonomous model since its change of the concentration depends on the time changes. Mathematical models of Algae growth is influenced by glucose, nutrient and photosynthesis. While the formation of glucose itself consists of carbon dioxide and water. The concentration of carbon dioxide from the carbon dioxide flow and the concentration of nutrients from the nutrient flow will affect the concentration of algae.

This research discusses an analysis of optimal control of a mathematical model of algae growth. The objective function to be achieved is to maximize the concentration of algae by the control variables namely carbon dioxide flow and nutrient flow. The solution is by applying Pontryagin's Maximum Principle. Using this principle, a mathematical model of algae growth with control of carbon dioxide and nutrient flow will obtain optimal conditions and also get State and Costate Equations, which is then simulated using the 4th order Runge Kutta method.

The simulation results show a difference without control and with control. The concentration of algae after being given control with a concentration weight of 0.3 is  $7.866 \text{ g}[A]m^{-3}$ , while the concentration of algae after being given control with a concentration weight of 1 is  $7.862 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Therefore the growth of algae when the concentration weight of 0.3 is 9% greater than the concentration weight of 1. Hence the growth of algae can be maximum with a minimum weight value.

## ملخص

ويجياتي هستي ٢٠٢٠. التحكم الأمثل لثاني أكسيد الكربون والتغذية في نموذج نمو الطحالب. البحث الجامعي. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا، بالجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: (١) هيني ويداياني، الماجستير (٢) جوهاري، الماجستير.

**الكلمات المفتاحية:** التحكم المثالي، النموذج نمو الطحالب، مبدأ القصى Pontryagin ، تدفق ثاني أكسيد الكربون، حركة انتقال الغذاء.

نموذج الرياضي للنمو الطحالب هو نظام معادلات تفاضلية غير خطية من الدرجة الأولى. هذا النموذج هو النموذج غير المستقل لأن تغييرات تركيزه تعتمد على الوقت. نموذج الرياضية يتأثر نمو الطحالب بالجلوكوز والتغذية والتمثيل الضوئي. بينما يتكون تكوين الجلوكوز نفسه من ثاني أكسيد الكربون والماء. كثافة ثاني أكسيد الكربون من حركة انتقال ثاني أكسيد الكربون وتركبون كثافة التغذية من حركة انتقال التغذية، وكلاهما سيؤثرن على كثافة الطحالب. يناقش هذا البحث تحليل السيطرة المثلى للنموذج الرياضي لنمو الطحالب.

اما الوظيفة الموضوعية التي ترحي تحقيقها هي زيادة كثافة الطحالب إلى أقصى حد مع متغيرات التحكم هي حركت انتقال ثاني أكسيد الكربون حركت انتقال المغذيات الحل بتطبيق مبدأ الحد الأقصى Pontryagin باستخدام هذا المبدأ، من النموذج الرياضي لنمو الطحالب مع التحكم في ثاني أكسيد الكربون حركت انتقال الغدية، سيتم الحصول على الظروف المثلى وأيضًا الحصول على معادلات سفشت  $state$  و  $costate$  ، والتي يتم محاكاتها بعد ذلك باستخدام طريقة Runge Kutta رتبة الرابعة.

تشير نتيجة المحاكاة الى وجود الاختلاف في حالتها تحكم ومع التحكم. كان كثافة الطحالب بعد إعطاء التحكم بوزن كثافة ٠.٣ كان  $37.61 g[A]m^{-3}$ ، في حين أن كثافة الطحالب بعد إعطاء التحكم بوزن كثافة ١ كان  $35.2 g[A]m^{-3}$ . لذا فإن نمو الطحالب عندما يكون وزن كثافة ٠.٣ أكبر ٦٪ من مقارنة بقيمة وزن كثافة ١. بحيث يمكن أن يكون نمو الطحالب بحد أقصى مع الحد الأدنى لقيمة الوزن.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Indonesia terkenal sebagai negara yang besar, baik dari segi sumber daya alam maupun sumber daya manusianya. Dengan meningkatnya pertumbuhan populasi, kebutuhan energi juga semakin meningkat. Di sisi lain, cadangan energi saat ini terutama bahan bakar fosil menipis karena bahan baku pembuatan bahan bakar fosil jumlahnya semakin sedikit. Untuk mengatasi masalah tersebut, perlu dikembangkan suatu energi alternatif supaya kebutuhan energi negeri tetap terpenuhi. Pengganti bahan bakar yang bersifat terbarukan dan ramah lingkungan dapat diperoleh dari kekayaan alam yaitu biodiesel yang berasal dari minyak nabati mikroalga ataupun rumput laut. Secara umum potensi mikroalga untuk menghasilkan biodiesel sangat besar. Mikroalga memiliki kandungan minyak yang sangat tinggi, yaitu bisa mencapai 40-85% dari berat kering (Borowitzka, 1998), bahkan dibandingkan dengan kelapa sawit yang selama ini menjadi icon utama biodiesel jauh lebih tinggi kandungan minyaknya. Kandungan minyak kelapa sawit hanyalah 20%. Fakta ini memberikan peluang yang besar untuk dapat mengganti kebutuhan bahan bakar fosil yang berasal dari minyak bumi.

Dari banyaknya penelitian untuk mencari pengganti bahan bakar yang bersifat terbarukan dan ramah lingkungan, mikroalga mempunyai prospek yang sangat baik untuk dikembangkan sebagai salah satu alternatif penghasil *biofuel*. Mikroalga dipilih karena memiliki kemampuan tumbuh dengan cepat, tidak memerlukan tempat yang luas dalam proses produksinya, serta kandungan minyak

pada alga juga lebih banyak dari yang lainnya. Kandungan dari tumbuhan mikroalga juga dapat dijadikan sebagai bahan makanan, kosmetik, dan bahan baku industri farmasi lainnya. Dilihat dari pengaruhnya terhadap lingkungan, alga memiliki kemampuan untuk menyerap karbondioksida sehingga dapat mengurangi efek rumah kaca (Widjaja, 2009). Secara ekonomi, mikroalga dipilih karena ketersediaan serta biaya produksinya yang cukup rendah (Hossain dkk., 2008).

Beberapa penelitian sebelumnya pernah dilakukan oleh (Brown, 2002; Skill, 2007; Patil dkk, 2008; Widjaya, 2009; Amini & Sugiono, 2009) tentang pemanfaatan mikroalga sebagai bahan baku biodiesel. Selain di bidang biologi, ada pula penelitian tentang mikroalga dalam bidang matematika. Penelitian pertama dilakukan oleh (Thornton dkk, 2010) tentang model matematika pertumbuhan alga yang dibangun dengan memanfaatkan air limbah pabrik. Model matematika tersebut kemudian diselesaikan secara numerik sehingga diperoleh hasil panen dan intensitas cahaya pada alga dalam rentan waktu yang telah ditentukan. Sehubungan dengan adanya pemanfaatan mikroalga, salah satunya sebagai bahan bakar biodiesel, penelitian lain dilakukan oleh (Hajar,2015) tentang kontrol optimal pada pertumbuhan alga dengan mengendalikan laju karbondioksida. Kemudian oleh (Samsul,2017) tentang kontrol optimal pada pertumbuhan alga dengan pengenceran nutrisi, serta (Nailul,2015) tentang strategi pakan optimal pada pertumbuhan alga.

Alga merupakan salah satu jenis tumbuh-tumbuhan yang sangat bermanfaat bagi manusia. Secara ekologis tumbuh-tumbuhan sebagai produsen memiliki peranan yang sangat penting. Kemampuan tumbuhan untuk mengubah

energi dari matahari berupa cahaya menjadi energi kimia tidak dapat dilakukan oleh organisme lain. Perubahan ini hanya dapat dilakukan dengan proses fotosintesis, itupun hanya berlaku untuk tumbuhan yang memiliki klorofil saja. Peristiwa transformasi energi yang terjadi inilah yang patut kita jadikan sebagai bahan renungan. Perenungan akan kebesaran Sang Pencipta serta perenungan untuk senantiasa melestarikan alam yang Tuhan sediakan. Dalam Al-Quran, banyak sekali ayat yang menjelaskan manfaat tumbuhan bagi manusia, salah satunya adalah Surah ‘Abasa ayat 24-32. Jika dibaca dari terjemahan ayat-ayat tersebut sudah terlihat bahwa tumbuhan memberikan manfaat serta peran penting terhadap makhluk hidup, terutama bagi manusia. Dalam hal tersebut Allah SWT berfirman:

*“[24]Maka hendaklah manusia itu memperhatikan makanannya [25]Sesungguhnya kamilah yang telah mencurahkan air melimpah (dari langit) [26]Kemudian Kami belah bumi dengan sebaik-baiknya[27]Lalu di sana Kami tumbuhkan biji-bijian di bumi itu [28] Anggur dan sayur-sayuran [29]Zaitun dan pohon kurma[30]Kebun-kebun (yang) rindang [31]Dan buah-buahan serta rerumputan [31] Untuk kesenanganmu dan untuk hewan-hewan ternakmu”* (‘Abasa:24-32)

Ayat diatas secara tidak langsung menjelaskan bahwa tumbuhan itu sangat penting dan kaya akan manfaat bagi manusia, serta keduanya juga saling membutuhkan. Dalam Tafsir Ilmi Kemenag ayat-ayat ini ditafsirkan sebagai berikut “Ayat-ayat ini memberitahukan bahwa Allah menciptakan tumbuhan sebagai sumber makanan bagi manusia dan hewan. Melalui tumbuhan, tubuh manusia dan hewan mendapat semua elemen yang diperlukan bagi eksistensi biologisnya. Selanjutnya, Allah menciptakan beragam rasa pada hasil tumbuhan yang dimakan itu” (Ilmi, 2011).

Mengingat begitu banyak manfaat tumbuhan bagi kehidupan manusia, maka pada penelitian ini, dilakukan pengoptimalan pertumbuhan mikroalga dengan pengendalian optimal karbondioksida dan nutrisi dalam bidang matematika dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Kamien (1991) menyatakan bahwa Prinsip Maksimum ( *Maximum principle* ) merupakan suatu kondisi sedemikian sehingga dapat diperoleh penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengan tujuan.

Berdasarkan permasalahan tersebut, dalam penelitian ini penulis mengontrol aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi pada model pertumbuhan alga dengan tujuan mendapatkan produksi alga yang maksimum dengan biaya produksi yang minimum.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana model matematika pertumbuhan alga dengan kontrol ?
2. Bagaimana penyelesaian kontrol optimal pertumbuhan alga dengan kontrol aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi ?
3. Bagaimana simulasi numerik model pertumbuhan alga dengan kontrol ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui model matematika pertumbuhan alga dengan kontrol.
2. Untuk mengetahui penyelesaian kontrol optimal pertumbuhan alga dengan kontrol aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi.

3. Untuk mengetahui simulasi numerik model pertumbuhan alga dengan kontrol.

#### **1.4 Batasan Masalah**

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

- a. Model pertumbuhan alga, airnya berasal dari industri pabrik sehingga memiliki kandungan nutrisi, tetapi komposisi dari kandungan nutrisi diabaikan.
- b. Alga diasumsikan hanya menghasilkan glukosa saja, energi lain yang dihasilkan seperti minyak dan glukosa yang lebih kompleks diabaikan.
- c. Model matematika pertumbuhan alga diperoleh dari referensi (Thornton dkk, 2010).
- d. Nilai parameter diperoleh dari hasil eksperimen pada referensi (Thornton dkk, 2010).
- e. Penyelesaian kontrol optimal menggunakan Prinsip maksimum pontryagin.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memperoleh model pertumbuhan alga dengan kontrol yang dapat diterapkan pada penelitian di lapangan.
2. Menginformasikan simulasi pertumbuhan alga dengan kontrol maupun tanpa kontrol untuk dapat membantu dalam bidang pertanian.
3. Sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada beberapa studi literatur yang berkaitan dan dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Selain itu, mempelajari literatur pendamping berupa jurnal, buku, artikel atau referensi lain yang berkaitan dengan penelitian. Secara umum langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

### 1. Mendeskripsikan Model Matematika Pertumbuhan Alga

Pada bagian ini akan dijelaskan alur pembentukan model matematika pertumbuhan alga mulai dari parameter, konstanta, serta keadaan sebelum diberi kontrol.

### 2. Menentukan Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Menentukan masalah kontrol optimal dari model matematika pertumbuhan alga yang meliputi batas kontrol, fungsi tujuan serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

### 3. Menentukan Penyelesaian Kontrol Optimal

Setelah diformulasikan masalah kontrol optimal, maka langkah selanjutnya yaitu penyelesaian kontrol optimal dari model matematika pertumbuhan alga dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin.

Langkah-langkah yang dilakukan pada tahap ini sebagai berikut:

1. Menentukan model dengan kontrol.
2. Menentukan fungsi tujuan.
3. Menentukan fungsi Hamilton.
4. Mencari nilai  $u(t)$  yang optimal dengan  $\left. \frac{dH}{du} \right|_{u=u^*} = 0$ .

5. Menyelesaikan persamaan *state* dengan  $\dot{x} = \frac{dH}{d\lambda}$ .
6. Menyelesaikan persamaan *co-state* dengan  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ .
7. Mensimulasikan secara numerik untuk mengetahui pengaruh kontrol.

#### 4. Simulasi

Penelitian sebelumnya, tahapan simulasi berdasarkan nilai awal dari setiap *state* dan rentan waktu yang telah ditentukan. Alga dan glukosa setelah diketahui nilai awalnya. Sama halnya konsentrasi nutrisi dan karbondioksida diketahui pula nilai awalnya. Kemudian dicari solusi numerik dari permasalahan kontrol optimal pada model pertumbuhan alga dengan memanfaatkan persamaan *state*, *costate*, persamaan pengendali optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi. Kemudian akan disimulasikan untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan.

#### 5. Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini, jika hasil simulasi telah diperoleh yaitu berupa tampilan grafik, maka tahap selanjutnya adalah menganalisis hasil simulasi dan membuat pembahasan terhadap hasil simulasi.

#### 6. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran terhadap simulasi dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran untuk perbaikan dan pengembangan penelitian selanjutnya.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan ini lebih terarah dan mudah dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### BAB II KAJIAN PUSTAKA

Berisi tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan serta yang berhubungan dalam penelitian. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori seperti sistem persamaan differensial, teori kontrol optimal, metode beda hingga, metode Runge Kutta orde 4, Alga dan mengkaji ilmu dalam pandangan Al-Qur'an.

### BAB III PEMBAHASAN

Berisi tentang model pertumbuhan alga dengan kontrol beserta penyelesaiannya dan simulasi numeriknya beserta interpretasi grafik.

### BAB IV PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari analisis dan berisi saran-saran untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Persamaan Differensial

Menurut Ault dan Ayres (1992), mengatakan bahwa persamaan differensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan-turunan. Sedangkan persamaan differensial biasa (PDB) adalah sebuah persamaan yang memuat derivatif atau differensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, jika hanya memuat satu variabel bebas disebut persamaan differensial biasa (Kartono,2012).

$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^n) = 0$  dikatakan linier jika  $F$  adalah linier dan variabel-variabelnya adalah  $t, y, \dot{y}, \ddot{y}$  dan  $(y)^n$ . Secara umum persamaan differensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut:

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = f(t) \quad (2.1)$$

Menurut Baiduri (2012), persamaan (2.1) merupakan persamaan differensial orde- $n$  dikatakan linier jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- a. Variabel terikat dan derivatifnya hanya berderajat satu (paling tinggi pangkat satu).
- b. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan yang lainnya atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
- c. Variabel terikat  $y$  bukan merupakan fungsi transenden.

Dimisalkan bahwa koefisien-koefisien  $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$  dan fungsi  $f(t)$  merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada selang  $t$ . Jika fungsi  $f(t) = 0$

maka persamaan (2.1) disebut persamaan homogen. Jika fungsi  $f(t) \neq 0$  maka persamaan (2.1) disebut persamaan non homogen atau tak homogen. Bila semua koefisien  $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$  adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.1) disebut persamaan linier koefisien konstanta, jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel.

Sistem persamaan differensial biasa berdimensi  $n$  adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan differensial biasa dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui di mana  $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ . Bentuk umum sistem persamaan differensial biasa linier orde 1 berdimensi  $n$  adalah

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bentuk persamaan (2.2) dapat ditulis secara singkat sebagai

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

atau dalam bentuk matriks sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t),$$

dengan  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , dan  $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

sistem dari dua persamaan differensial tak linier dengan dua fungsi yang tidak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G(x, y)\end{aligned}\quad (2.3)$$

dengan  $ad - bc \neq 0$  (Finizio dan Ladas, 1988).

## 2.2 Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal adalah mencari nilai kontrol  $u(t)$  yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi konstrain atau kondisi fisik, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan. Kontrol pada saat keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan nilai optimal berdasarkan fungsi tujuan (fungsi objektif) yang diberikan. Formulasi masalah kontrol optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem atau model, menentukan fungsi tujuan dan kendala atau syarat batas yang berlaku. Secara umum, masalah kontrol optimal diformulasikan sebagai berikut:

$$J(u(t)) = \Phi(x, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.4)$$

Misalkan suatu sistem dinamik dinyatakan oleh persamaan berikut :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Dengan kondisi batas  $x(t_0) = x_0$  dan  $x(t_f) = t_f$  serta  $u(t)$  yang menyatakan pengendali keadaan pada waktu  $t$ . (Hajar, 2015)

### 2.2.1 Persamaan State dan Variabel Kontrol

*State* sistem dinamik adalah  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  yang apabila diberikan nilainya pada waktu  $t = t_0$  maka nilainya dapat ditentukan pada  $t > t_0$ .

*State* suatu sistem kontinu pada waktu  $t$  dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial yaitu  $\dot{x} = g(t, x(t), u(t))$

Variabel kontrol  $u(t)$  yaitu variabel yang mempengaruhi suatu *state* yang dapat dikontrolkan. Dengan  $u(t) \in U$  untuk setiap  $t \in [0, T]$  dengan

$$U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}, \text{ (Tu, 1983).}$$

### 2.2.2 Fungsi Tujuan (Indeks Performansi)

Fungsi tujuan yang dioptimalkan dalam masalah kontrol optimal secara umum dapat didefinisikan dalam tiga bentuk berbeda, yaitu dalam bentuk Lagrange, Mayer, dan Bolza.

#### 1. Fungsi Tujuan Bentuk Lagrange

Fungsi tujuan bentuk Lagrange memiliki integral. Fungsi ini mengintegrasikan fungsi yang memuat variabel keadaan  $x$  dan kontrol  $u$  pada waktu  $t$  dari waktu awal  $t_0$  hingga waktu akhir  $t_f$ . Fungsi tujuan dalam bentuk Lagrange tersebut yaitu:

$$J_L(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, u) dt$$

dengan  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$

#### 2. Fungsi Tujuan Bentuk Mayer

Fungsi tujuan dalam bentuk Mayer tidak memiliki bentuk integral, melainkan suatu fungsi yang memuat variabel keadaan  $x$  dan titik akhir dari domain variabel keadaan tersebut. Oleh karena itu, fungsi tujuan ini dapat

juga dipahami sebagai masalah mengoptimalkan waktu akhir. Fungsi tujuan bentuk mayer yaitu:

$$J_M(u) = g(t_f, x(t_f))$$

dengan  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

### 3. Fungsi Tujuan Bentuk Bolza

Fungsi tujuan bentuk Bolza merupakan kombinasi linier dari Lagrange dan Mayer. Oleh karena itu, fungsi tujuan dalam bentuk Bolza merupakan integral dari fungsi yang memuat variabel keadaan  $x$  dan kontrol  $u$  pada waktu  $t$  ditambah dengan suatu fungsi yang memuat keadaan  $x$  pada waktu akhir  $t_f$ . Fungsi tujuan dengan bentuk Bolza tersebut yaitu sebagai berikut;

$$J_B(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, u) dt + g(t_f, x(t_f))$$

#### 2.2.3 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Diberikan masalah kontrol optimal sebagai berikut.

Minimumkan/maksimumkan :  $J(u) = \int_0^T f(x(t), u(t), t) dt$

Kendala :  $\dot{x} = g(t, x(t), u(t))$

$X(0) = x_0$  dan  $x(T) = x_T, u(t) \in U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}$  untuk setiap  $t \in [0, T]$ . variabel kontrol  $u(t)$  mencapai optimal dilambangkan dengan  $u^*(t)$ .

Selanjutnya  $u^*(t)$  disubstitusikan ke dalam persamaan *state* kendala dan didapatkan *state* yang optimal  $x^*(t)$  (Lenhart, 2010).

#### 2.2.4 Fungsi Hamiltonian

Variabel *co-state* yang dilambangkan dengan  $\lambda(t)$  dilibatkan dalam masalah kontrol optimal melalui suatu fungsi Hamiltonian yang didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} H &= f(x, t, u) + \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) g_k(t, x, u) \\ &= f(x, t, u) + (\lambda_1(t) g_1(t, x, u) + \dots + \lambda_n(t) g_n(t, x, u)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dengan  $H$  merupakan fungsi empat variabel yaitu  $t, x, u$  dan  $\lambda$ , sedangkan  $f$  adalah fungsi tujuan yang dioptimalkan dan  $g$  merupakan persamaan *state* (Chiang, 2005)

#### 2.2.5 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal dengan kontrol ( $u$ ) yang dapat memaksimalkan fungsi Hamiltonian ( $H$ ) pada saat  $t$ . Selain memuat variabel kontrol  $u$ ,  $H$  juga memuat variabel *state* dan variabel *co-state*, prinsip maksimum pontryagin menyatakan bahwa  $x$  dan  $\lambda$  akan berubah terhadap waktu, baik melalui persamaan *state* maupun *co-state*. Berdasarkan persamaan fungsi Hamiltonian, persamaan *state* dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, x, u) \quad (2.6)$$

Sebaiknya variabel *co-state* tidak tampak dalam persamaan *state* tetapi variabel tersebut muncul sebagai bagian dari persamaan fungsi Hamilton yang hanya berfungsi sebagai suatu kondisi optimasi. Persamaan *co-state* dapat dinyatakan sebagai

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.7)$$

Perhatikan bahwa dengan adanya dua turunan yaitu persamaan (2.6) dan (2.7) maka untuk menentukan solusi optimal diperlukan dua kondisi batas. Jika diberikan nilai awal  $x(0)$  dan nilai akhir  $x(T)$  maka dapat langsung ditentukan  $x(t)$  dan  $\lambda(t)$ , tetap jika tidak diberikan kondisi akhir maka suatu kondisi yang disebut sebagai kondisi transversal yaitu  $\lambda(T) = 0$  harus digunakan sebagai pengganti kondisi akhir.

Dengan demikian dapat diperoleh beberapa komponen dalam prinsip maksimum pontryagin yaitu

- i.  $H(t, x, u^*, \lambda) \leq H(t, x, u, \lambda)$  untuk setiap  $t \in [0, T]$
- ii.  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$  (persamaan *state*)
- iii.  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$  (persamaan *co-state*)
- iv.  $\lambda(T) = 0$  (kondisi transversal)

Kondisi (i) menyatakan bahwa kontrol optimal dari  $u^*(t)$  dalam setiap waktu  $t$  harus ditentukan agar dapat meminimumkan fungsi Hamilton untuk setiap yang memenuhi  $u^*(t)$ . Pada kasus tertentu yaitu jika fungsi Hamilton dapat diturunkan terhadap  $u$  maka kondisi (i) dapat diganti oleh

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (2.8)$$

Kondisi (ii) dan (iii) dalam Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan sistem Hamilton. Kondisi (iv) adalah kondisi transversal yang esuai untuk masalah kondisi akhir yang tidak diberikan (Chiang, 2005).

### 2.3 Metode Beda Hingga

Suatu teori sederhana mengenai hampiran numerik untuk dapat diperoleh melalui ekspansi deret Taylor dari  $f(x+h)$  sekitar  $x$ :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Pengurangan  $f(x)$  dari kedua sisi dan membagi kedua sisi dengan ukuran langkah  $h$  menghasilkan

$$\begin{aligned} D_{f1}(x, h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!} f''(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \dots \\ &= f'(x) + O(h). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dengan  $O(h)$  menyatakan suatu galat pemotongan yang sebanding dengan  $h$  untuk  $|h| < 1$ . Dari sini, didapat hampiran beda maju (*forward difference approximation*) untudan k  $f'(x)$

$$D_{f1}(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.10)$$

Yang memiliki galat sebanding dengan ukuran langkah  $h$  atau ekuivalen dengan orde dalam  $h$ .

Berikutnya, dengan mensubstitusikan  $-h$  untuk  $h$  dalam persamaan di atas diperoleh hampiran beda mundur (*backward difference approximation*) untuk  $f'(x)$

$$D_{g1}(x, h) = \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

Untuk menurunkan rumus hampiran lain untuk turunan pertama, diambil deret Taylor dari  $f(x + h)$  dan  $f(x - h)$  sampai orde kelima:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + \dots$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x) + \dots$$

dan membagi selisih antara kedua persamaan dengan  $2h$  untuk mendapatkan hampiran beda pusat (*central difference approximation*) untuk  $f'(x)$ :

$$\begin{aligned} D_{f1}(x, h) &= \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x) + \dots \\ &= f'(x) + O(h^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

yang mempunyai galat sebanding dengan  $h^2$ , serupa dengan persamaan (2.10) (Chapra dan Canale, 1985).

## 2.4 Metode Ruge Kutta Orde 4

Metode Runge Kutta berusaha mencapai derajat ketelitian yang lebih tinggi, dengan cara mengevaluasi fungsi  $f(x, y)$  pada titik terpilih pada setiap subselang. Untuk persamaan  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ , membentuk aproksimasi  $y_n$  terhadap  $y(x_0 + nh)$  untuk  $h$  tetap dan untuk  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  dengan menggunakan rumus rekursi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

dimana

$$m_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}m_1\right),$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}m_2\right),$$

$$m_4 = hf\left(x_n + h, y_n + m_3\right),$$

(Conte dan Boor, 1993)

Menurut Novitasari (2013), untuk penyelesaian sistem persamaan differensial menggunakan metode Runge Kutta orde 4 seperti berikut:

Misalnya diberikan sistem persamaan differensial

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S, I, R, C) = \mu - \mu S - \beta SI + \gamma C$$

$$\frac{dI}{dt} = g(t, S, I, R, C) = \beta SI + \sigma \beta CI - (\mu + \alpha) I$$

$$\frac{dR}{dt} = i(t, S, I, R, C) = (1 - \sigma)\beta CI + \alpha I - (\mu + \sigma)R$$

$$\frac{dC}{dt} = j(t, S, I, R, C) = \delta R - \beta CI - (\mu + \gamma)C$$

Integrasi numerik dari persamaan dengan metode Runge Kutta orde 4 dinyatakan:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

dengan:  $m_{1,S} = hf(t_n, S_n)$

$$m_{2,S} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$

$$m_{3,S} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}m_2\right)$$

$$m_{4,S} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{1}{2}m_3\right)$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

dengan  $m_{1,I} = hg(t_n, I_n)$

$$m_{2,I} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$

$$m_{3,I} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{1}{2}m_2\right)$$

$$m_{4,I} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{1}{2}m_3\right)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

dengan:  $m_{1,R} = hi(t_n, R_n)$

$$m_{2,R} = hi\left(t_n + \frac{h}{2}, R_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$

$$m_{3,R} = hi\left(t_n + \frac{h}{2}, R_n + \frac{1}{2}m_2\right)$$

$$m_{4,R} = hi\left(t_n + \frac{h}{2}, R_n + \frac{1}{2}m_3\right)$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

dengan:  $m_{1,C} = hj(t_n, C_n)$

$$m_{2,C} = hj \left( t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{1}{2}m_1 \right)$$

$$m_{3,C} = hj \left( t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{1}{2}m_2 \right)$$

$$m_{4,C} = hj \left( t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{1}{2}m_3 \right)$$

dengan  $h$  adalah langkah waktu.

## 2.5 Alga

Alga merupakan organisme yang dianggap sebagai nenek moyang tumbuhan saat ini. Alga memiliki beberapa karakteristik yang juga dimiliki oleh tumbuhan saat ini seperti pigmen klorofil. Alga secara morfologi dapat terbagi menjadi dua golongan yaitu mikroalga (alga dengan ukuran mikroskopis) dan makroalga (alga berukuran makro). Namun, secara spesifik bentuk tubuh beserta ukurannya tidak akan sama persis dengan tumbuhan dan ukuran tubuhnya sekalipun dalam bentuk makro tidak dapat dilihat dengan mata telanjang. Ciri lainnya pada alga adalah tidak memiliki akar, batang, dan daun sejati. Tubuh seperti ini dinamakan talus. Itulah sebabnya alga tidak dapat digolongkan sebagai tumbuhan (plantae).

### 2.5.1 Mikroalga

Mikroalga merupakan tumbuhan halus yang berklorofil dan memiliki pigmen tumbuhan yang dapat menyerap cahaya matahari melalui proses fotosintesis. Keanekaragaman mikroalga sangat tinggi, diperkirakan ada sekitar 200.000-800.000 spesies mikroalga ada di bumi. Dari jumlah tersebut baru sekitar 35.000 spesies saja yang telah diidentifikasi. Beberapa contoh spesies mikroalga di antaranya yaitu *Spirulina*, *Nannochloropsis* sp., *Botryococcus*

*braunii*, *Chlorella* sp., *Nitzschia* sp., dan lain-lain. Sel-sel mikroalga tumbuh dan berkembang pada media air, sehingga mempunyai tingkat efisiensi yang lebih tinggi dalam hal penggunaan air, karbondioksida, dan nutrisi lainnya bila dibandingkan dengan tanaman tingkat tinggi (Widjaja, 2009).

Mikroalga merupakan mikroorganisme yang dapat digunakan sebagai bahan baku *biofuel*. Beberapa *biofuel* yang dapat dihasilkan dari mikroalga yaitu hidrogen, biodiesel (yang diperoleh melalui proses transesterifikasi), bioetanol (yang diperoleh melalui proses fermentasi), dan biogas. Namun demikian, ada beberapa hal penting terkait dengan pemanfaatan mikroalga sebagai bahan baku *biofuel*, yaitu proses produksi mikroalga, proses pemanenan mikroalga, dan proses konversi biomassa menjadi *biofuel* (Skill, 2007)

Mikroalga juga memiliki kelebihan dibandingkan tanaman pangan lainnya untuk dimanfaatkan sebagai bahan baku *biofuel*, yaitu pertumbuhan yang cepat, dapat menggunakan air tawar atau air laut, konsumsi air dalam jumlah sedikit, tidak berkompetisi dengan bahan pangan, biaya produksi yang rendah serta produktifitas tinggi. Mikroalga umumnya bersel satu atau berbentuk benang, sebagai tumbuhan dan dikenal sebagai fitoplankton. Karena mikroalga merupakan organisme mikroskopis yang berklorofil. Dewasa ini fitoplankton telah banyak dimanfaatkan untuk berbagai keperluan manusia antara lain (Hajar, 2015):

a. Bidang perikanan

Sebagai makanan larva ikan, dilakukan melalui isolasi untuk mendapatkan satu spesies tertentu, misalnya *Skeletonema*. Kemudian

dibudidayakan pada bak-bak terkontrol pada usaha pembibitan ikan untuk keperluan makanan larva ikan.

b. Industri farmasi dan makanan suplemen

Fitoplankton mempunyai kandungan nutrisi yang tinggi digunakan sebagai makanan suplemen bagi penderita gangguan pencernaan dan yang membutuhkan energi tinggi. Contoh produk yang beredar dari jenis *Chlorella*.

c. Pengolahan limbah logam berat

Dalam pengolahan limbah logam berat, fitoplankton dapat digunakan untuk mengikat logam dari badan air dan mengendapkannya pada dasar kolam, Sehingga logam dalam air menjadi berkurang.

d. Sumber energi alternatif biodiesel

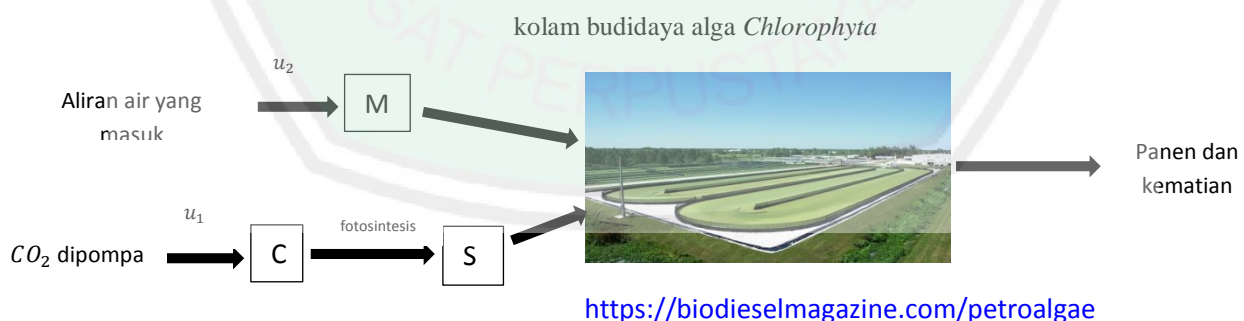
Biomassa mikroalga selain mengandung protein, karbohidat dan vitamin juga mengandung minyak. Bahkan jenis mikroalga tertentu, misal *Botryococcus braunii* memiliki kandungan minyak yang komposisinya mirip seperti tanaman darat dengan jumlah yang lebih tinggi bila dibanding dengan kandungan minyak pada kelapa, jarak dan sawit.

## 2.6 Model Matematika Pertumbuhan Alga

Di Indonesia terdapat enam pabrik pupuk urea dengan karakteristik limbah cair yang mengandung  $(NH_2)_2CO$  (Urea) dan  $NH_3 - N$  (Amonia-Nitrogen), tetapi limbah cair pabrik urea dapat menimbulkan kerusakan ekosistem badan air yang sangat serius (Hajar,2015). Penanganan yang telah dilakukan yaitu proses nitrifikasi dan denitrifikasi heterotik kolam terbuka atau

ditampung didalam kolam besar sehingga terjadi pelepasan amonia ke udara. Tetapi hal tersebut tidak memberikan banyak manfaat, hanya menambah biaya. Ada cara yang lebih menguntungkan yaitu dengan budidaya tumbuhan alga jenis *Chlorophyta*. Alga tersebut merupakan mikroba autotrof yang mampu memanfaatkan  $(NH_2)_2CO$  (Urea) dan  $NH_3 - N$  (Amonia-Nitrogen) sebagai sumber nitrogen dan sumber karbon (faradilla, 2012).

Pada suatu kolam budidaya alga *Chlorophyta*, pertumbuhan alga dipengaruhi oleh dua faktor, yaitu karbon dioksida ( $C$ ) dan nutrisi ( $M$ ). Karbon dioksida dipompa ke dalam air dan berubah menjadi glukosa melalui fotosintesis. Kemudian nutrisi dalam air yang mengandung nitrogen dan karbon bergabung untuk membantu proses pertumbuhan dan perkembangbiakan alga. Selanjutnya alga dan glukosa yang tersimpan diasumsikan berkurang dengan adanya kematian dan hasil panen. Untuk menjaga model sederhana, komposisi nutrisi diabaikan. Serta energi tidak hanya bisa disimpan dalam glukosa, tetapi juga sebagai glukosa yang lebih kompleks dan minyak. Selanjutnya, pertumbuhan alga dapat diilustrasikan pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 ilustrasi pertumbuhan alga dari karbon dioksida dan nutrisi

Produksi alga dimodelkan dengan konsentrasi alga ( $A$ ), nutrisi ( $M$ ), glukosa ( $S$ ) dan karbon dioksida ( $C$ ) di kolam. Dengan asumsi bahwa kolam

teraduk dengan baik dan pertumbuhan alga sangat lambat, konsentrasi-konsentrasi di atas bersifat independen dari semua variabel spasial dan hanya bergantung dengan waktu  $t$ . Laju karbondioksida dan laju nutrisi dalam kolam dilambangkan dengan  $u_1$  dan  $u_2$ .

Alga baru ( $A$ ) diproduksi di dalam alga yang ada ( $\alpha_A f_m(M)$ ) dari nutrisi dan glukosa, di mana  $\alpha_A$  adalah konstanta pertumbuhan biomassa dan  $f_m(M)$  menunjukkan konsentrasi nutrisi dalam sel. ‘Tingkat kematian’ ( $D_r$ ) dan dipanen ( $h_r$ ) mengurangi jumlah produksi alga  $-(D_r + h_r)A$ . Sehingga parameter alga kering dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\dot{A} = \alpha_A f_m(M)S - (D_r + h_r)A$$

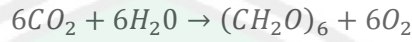
Selanjutnya, karena alga diproduksi dari nutrisi, dimana  $\alpha_A$  adalah konstanta pertumbuhan biomassa. Hal ini mengurangi jumlah nutrisi  $(-k_2 \alpha_A f_m(M)S)$  dari proses pertumbuhan alga pada gambar 2.1. Sehingga parameter nutrisi dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A f_m(M)S$$

Glukosa ( $S$ ) akan bertambah ketika karbon dioksida ( $C$ ) dikalikan dengan konstanta fotosintesis ( $\alpha_s$ ) dan akan berkurang ketika nutrisi berubah menjadi alga  $(-k_3 \alpha_A f_m(M)S)$ . Alga ini sedang kelaparan pada ‘tingkat kematian’ ( $D_r$ ) dan dipanen ( $h_r$ ), yang keduanya mengurangi jumlah alga dan glukosa yang tersimpan di dalam alga  $-(D_r + h_r)S$ . Sehingga parameter glukosa dapat dimodelkan sebagai berikut

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A f_m(M) S - (D_r + h_r) S$$

Selanjutnya, glukosa yang diproduksi ( $\alpha_s C$ ) dari karbon dioksida, dimana  $\alpha_s$  adalah konstan. Hal ini mengurangi jumlah karbon dioksida ( $-k_1 \alpha_s C$ ). Dari proses fotosintesis oksigen



Sehingga parameter karbondioksida dapat dimodelkan sebagai

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C$$

Diasumsikan bahwa konsentrasi nutrisi dalam sel jenuh  $\rho_{max} = 0.4 g[M]m^{-3}$  dan setengah jenuh diperoleh ketika nutrisi diluar  $M_{turn} = 4g[M]m^{-3}$ . Maka

$$f_m(M) = \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right)$$

Sehingga persamaan (2.1) – (2.4)

$$\dot{A} = \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \quad (2.12)$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S \quad (2.13)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \quad (2.14)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C \quad (2.15)$$

(Thornton, 2010)

penjelasan variabel dan parameter sebagai berikut:

**Tabel 2.1 Keterangan Variabel dan parameter**

Parameter	Satuan	Keterangan
$A$	$g[A]m^{-3}$	Konsentrasi alga
$M$	$g[M]m^{-3}$	Konsentrasi nutrisi
$S$	$g[(CH_2O)_6]m^{-3}$	Konsentrasi glukosa
$C$	$g[CO_2]m^{-3}$	Konsentrasi karbondioksida
$\rho_{max}$	$g[M]m^{-3}$	Konsentrasi nutrisi maksimal dalam alga
$M_{turn}$	$g[M]m^{-3}$	Setengah konsentrasi konstan
$u_1(t)$	$g[CO_2]m^{-3}day^{-1}$	Laju karbon dioksida
$u_2(t)$	$g[M]m^{-3}day^{-1}$	Laju nutrisi
$h_r$	$day^{-1}$	Tingkat panen alga
$D_r$	$day^{-1}$	Tingkat kematian alga
$\alpha_A$	$g[(CH_2O)_6]^{-1}day^{-1}$	Konstanta pertumbuhan biomassa
$\alpha_s$	$g[CO_2]^{-1}day^{-1}$	Konstanta fotosintesis
$k_1$	$g[(CH_2O)_6]^{-1}$	Tingkat perubahan $CO_2$ menjadi $(CH_2O)_6$
$k_2$	$g(M)g(A)^{-1}$	Tingkat perubahan nutrisi menjadi alga
$k_3$	$g((CH_2O)_6)g(A)^{-1}$	Tingkat perubahan $(CH_2O)_6$ menjadi alga

Selanjutnya akan dimodelkan suatu fungsi tujuan (*performance index*) yang menyatakan banyaknya alga yang diproduksi dan biaya produksi. Tujuan dari kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  adalah untuk memaksimalkan produksi alga dengan meminimumkan kontrol. Berdasarkan fakta bahwa hubungan antara biaya produksi  $(u_1(t), u_2(t))$  dengan banyaknya alga kering yang dihasilkan memiliki hubungan yang tidak linier, sehingga fungsi biaya dimodelkan non linier dan

dipilih fungsi kuadrat ( $u_1(t)^2, u_2(t)^2$ ).

Berdasarkan uraian diatas dapat dirumuskan fungsi biaya adalah  $(-\frac{1}{2}Du_1(t)^2, -\frac{1}{2}Nu_2(t)^2)$  dengan D adalah nilai bobot dalam aliran karbon dioksida dan N adalah nilai bobot dalam aliran nutrisi,  $t_0$  adalah waktu awal, dan  $t_f$  adalah waktu akhir. Dari pembahasan diatas diperoleh fungsi tujuannya sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = \int_{t_0}^{t_f} \left( A(t) - \frac{1}{2}Du_1^2(t) - \frac{1}{2}Nu_2^2(t) \right) dt \quad (2.16)$$

$u(t)$  adalah variabel kontrol dan variabel keadaannya adalah  $x = \begin{bmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{bmatrix}$

Diasumsikan nilai awal seluruh populasi bernilai positif  $A(t_0), M(t_0), S(t_0), C(t_0) \geq 0$  dan kondisi batas model pertumbuhan alga dengan kontrol yaitu  $t_0 < t < t_f$  dengan  $0 \leq u_1(t) \leq 1$  dan  $0 \leq u_2(t) \leq 1$ . batas tersebut menandakan bahwa waktu awal dari diberi pengontrol ( $t_0$ ) sampai waktu akhir setelah diberi pengontrol.

## 2.7 Proses Penciptaan Tumbuhan dalam Al-Quran

### 1. Proses penciptaan tumbuhan

Hubungan surah Abasa ayat 24-32 dengan ayat-ayat yang lainnya masih berkaitan. Seperti dalam Q.S al-Baqoroh:22.

*“ Dialah yang menjadikan bumi sebagai hamparan bagimu dan langit sebagai atap dan Dia menurunkan air (hujan) dari langit, lalu Dia menghasilkan dengan hujan itu segala buah-buahan sebagai rezki untukmu; karena itu janganlah kamu mengadakan sekutu-sekutu bagi Allah, padahal kamu mengetahui.”*

Q.S An-Nahl:69.

*“Kemudianmakanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu). Dari perut lebah itu keluar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, di dalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan.”*

Q.S Yunus:24.

*“Sesungguhnya perumpamaan kehidupan dunia itu, seperti air (hujan) yang Kami turunkan dari langit, lalu tumbuhlah dengan subur karena air itu tanam-tanaman bumi, di antaranya ada yang dimakan manusia dan binatang ternak.”*

Q.S Thaha:53-54.

*“[53]Yang telah menjadikan bagimu bumi sebagai hamparan dan yang telah menjadikan bagimu di bumi itu jalan-jalan, dan menurunkan dari langit air hujan. Maka Kami tumbuhkan dengan air hujan itu berjenis-jenis dari tumbuh-tumbuhan yang bermacam-macam.[54]Makanlah dan gembalakanlah binatang-binatangmu. Sesungguhnya pada demikian itu, terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah bagi orang-orang yang berakal.”*

Dari beberapa ayat tersebut memberikan isyarat bahwa interaksi tumbuhan dengan makhluk hidup lain seperti hewan dan manusia. Untuk itu ekologi memberi kedudukan pada tumbuhan sebagai produsen dan hewan atau tumbuhan sebagai konsumen. Imron Rossidy (2008) mengatakan secara ekologis tumbuh-tumbuhan sebagai produsen memiliki peran yang sangat penting. Kemampuan tumbuhan untuk mengubah energi dari matahari berupa cahaya

menjadi energi kimia tidak dapat dilakukan oleh organisme lain. Perubahan itu hanya dapat dilakukan oleh tumbuhan melalui proses fotosintesis, itupun hanya bisa dilakukan oleh tumbuhan yang memiliki klorofil. Peristiwa transformasi energi ini adalah fenomena alam yang patut untuk dijadikan bahan renungan. Perenungan akan kebesaran Sang Pencipta dan perenungan betapa pentingnya pelestarian alam termasuk tumbuhan. Atas dasar itu mempelajari ekologi tumbuhan merupakan keharusan bagi manusia, sebagaimana kewajibannya untuk melestarikan alam agar dapat melaksanakan tugas sebagai khalifah di muka bumi.



## BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas penyelesaian kontrol optimal karbondioksida dan nutrisi pada model pertumbuhan alga. Pada penyelesaian kontrol optimal di sini, akan digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Selanjutnya, model disimulasikan menggunakan metode numerik.

### 3.1 Mendeskripsikan Model Matematika Pertumbuhan Alga dengan Kontrol

Tujuan kontrol optimal pada model pertumbuhan alga yaitu untuk memaksimalkan pertumbuhan alga dengan meminimumkan kontrol (aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi) sehingga meminimumkan pula biaya produksi alga. Untuk menyelesaikan kontrol optimal dari model tersebut akan digunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Dalam model pertumbuhan alga akan disubstitusikan variabel kontrol ( $u_1(t)$ ) berupa aliran karbondioksida dan kontrol ( $u_2(t)$ ) berupa aliran nutrisi. Variabel kontrol ( $u_1(t)$ ) dan ( $u_2(t)$ ) akan memaksimalkan pertumbuhan alga sehingga produksi alga semakin meningkat. Berdasarkan hal tersebut, maka model pertumbuhan alga dengan variabel kontrol dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{A} = \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \quad (3.1)$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S + u_2(t) \quad (3.2)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \quad (3.3)$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + u_1(t) \quad (3.4)$$

Selanjutnya akan dimodelkan suatu fungsi tujuan (*performance index*) yang menyatakan banyaknya alga yang diproduksi dan biaya produksi. Tujuan dari kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  adalah untuk memaksimalkan produksi alga dengan meminimumkan kontrol (aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi) sehingga dapat diasumsikan dapat meminimumkan biaya produksi alga. Berdasarkan fakta bahwa hubungan antara biaya produksi ( $u_1(t), u_2(t)$ ) dengan banyaknya alga yang dihasilkan memiliki hubungan yang tidak linier, sehingga fungsi biaya dimodelkan non linier dan dipilih fungsi kuadrat ( $u_1(t)^2, u_2(t)^2$ ).

Berdasarkan uraian diatas dapat dirumuskan fungsi biaya adalah  $\left(-\frac{1}{2}Du_1(t)^2, -\frac{1}{2}Nu_2(t)^2\right)$  dengan  $D$  adalah nilai bobot dalam aliran karbon dioksida dan  $N$  adalah nilai bobot dalam aliran nutrisi. Nilai  $\frac{1}{2}$  menunjukkan bobot dari  $u_1$  dan  $u_2$  adalah sama. Persamaan tersebut bernilai negatif (-) karena tujuan dari fungsi tujuan (*index performance*) adalah mencari nilai maksimum, maka dipilih suatu persamaan kuadrat dengan nilai variabel kurang dari nol ketika diturunkan sebanyak dua kali.  $t_0$  adalah waktu awal, dan  $t_f$  adalah waktu akhir. Dari pembahasan diatas diperoleh fungsi tujuannya sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = \int_{t_0}^{t_f} \left( A(t) - \frac{1}{2}Du_1^2(t) - \frac{1}{2}Nu_2^2(t) \right) dt \quad (3.5)$$

$u(t)$  adalah variabel kontrol dan variabel keadaannya adalah  $x = \begin{bmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{bmatrix}$

Diasumsikan nilai awal seluruh populasi bernilai positif  $A(t_0), M(t_0), S(t_0), C(t_0) \geq 0$  dan kondisi batas model pertumbuhan alga dengan kontrol yaitu  $t_0 < t < t_f$  dengan  $0 \leq u_1(t) \leq 1$  dan  $0 \leq u_2(t) \leq 1$ . Batas tersebut menandakan bahwa waktu awal dari diberi pengontrol ( $t_0$ ) sampai waktu akhir setelah diberi pengontrol ( $t_f$ ).

### 3.2 Penyelesaian Kontrol Optimal pada Model Pertumbuhan Alga

Pada subbab sebelumnya telah didapatkan model dengan kontrol beserta fungsi tujuannya. Selanjutnya akan diselesaikan masalah kontrol optimal model pertumbuhan alga dengan prinsip maksimum pontryagin, akan dibentuk fungsi Hamilton dengan mengikuti definisi (2.5) sebagai berikut dengan variabel

$$\text{co-statenya } \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_M \\ \lambda_S \\ \lambda_C \end{bmatrix} \text{ dan variabel statenya adalah } x = \begin{bmatrix} A \\ M \\ S \\ C \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} H(x, u, t, \lambda) &= f(x, t, u) + \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) g_k(t, x, u), \quad n = 4 \\ &= f(x, t, u) + \lambda_1(T) g_1(t, x, u) + \lambda_2(T) g_2(t, x, u) + \lambda_3(T) g_3(t, x, u) \\ &\quad + \lambda_4(T) g_4(t, x, u) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dengan

$$f(x, t, u) = A(t) - \frac{1}{2} D u_1^2(t) - \frac{1}{2} N u_2^2(t)$$

$$g_1(x, t, u) = \alpha_A \rho_{\max} \left( \frac{M}{M + M_{\text{turn}}} \right) S - (D_r + h_r) A$$

$$g_2(x, t, u) = -k_2 \alpha_A \rho_{\max} \left( \frac{M}{M + M_{\text{turn}}} \right) S + u_2(t)$$

$$g_3(x, t, u) = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S$$

$$g_4(x, t, u) = -k_1 \alpha_s C + u_1(t)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} H(x, u, t, \lambda) = & A(t) - \frac{1}{2} D u_1^2(t) - \frac{1}{2} N u_2^2(t) + \lambda_1 \left( \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \right) \\ & + \lambda_2 \left( -k_2 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S + u_2(t) \right) \\ & + \lambda_3 \left( \alpha_s C - k_3 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \right) \\ & + \lambda_4 \left( -k_1 \alpha_s C + u_1(t) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

selanjutnya untuk mendapatkan kondisi optimal dari  $H(x, u, t, \lambda)$ , maka harus memenuhi kondisi stasionernya yaitu persamaan *state*, *costate*, dan kondisi stasioner.

a. Persamaan *state*

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -k_2 \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M}{M + M_{turn}} \right) S + u_2(t) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = -k_1 \alpha_s C + u_1(t) \quad (3.9)$$

b. Persamaan *costate*

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial A} \\ &= -(1-\lambda_1(t))(D_r + h_r)\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial M} \\ &= \left[ \begin{aligned} &\frac{\alpha_A \rho_{\max} S(t)}{M(t) + M_{turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t)k_2 + \lambda_3(t)k_3) \\ &+ \frac{\alpha_A \rho_{\max} M(t)S(t)}{(M(t) + M_{turn})^2} (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)k_2 - \lambda_3(t)k_3) \end{aligned} \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S} \\ &= \left[ \frac{\alpha_A \rho_{\max} S(t)}{M(t) + M_{turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t)k_2 + \lambda_3(t)(D_r + h_r)) \right]\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial C} \\ &= -\lambda_3(t)\alpha_s + \lambda_4(t)k_1\alpha_s\end{aligned}\quad (3.13)$$

c. Kondisi stasioner

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} &= 0 \\ -Du_1(t)^* + \lambda_4(t) &= 0 \\ u_1(t)^* &= \lambda_4(t)\end{aligned}$$

$$u_1(t)^* = \frac{\lambda_4(t)}{D}\quad (3.14)$$

Karena telah diketahui bahwa batas  $u_1$  adalah  $0 \leq u_1(t) \leq 1$ , sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_1(t)^* = \begin{cases} 0 & , u_1(t)^* \leq 0 \\ u_1(t)^* & , 0 < u_1(t)^* < 1 \\ 1 & , u_1(t)^* \geq 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Jadi, kontrol optimal  $u_1(t)$  dicirikan sebagai

$$u_1(t)^* = \min\left(\max\left(0, u_1(t)^*\right), 1\right)$$

Atau

$$u_1(t)^* = \min\left(\max\left(0, \frac{\lambda_4(t)}{D}\right), 1\right) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2(t)} = 0$$

$$-Nu_2(t)^* + \lambda_2(t) = 0$$

$$u_2(t)^* = \frac{\lambda_2}{N}$$

(3.17)

Karena  $0 \leq u_2(t)^* \leq 1$  sehingga

$$u_2(t)^* = \begin{cases} 0 & , \leq u_2(t)^* 0 \\ u_2(t)^* & , 0 < u_2(t)^* < 1 \\ 1 & , u_2(t)^* \geq 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Jadi, kontrol optimal  $u_2(t)$  dicirikan sebagai

$$u_2(t)^* = \min\left(\max\left(0, u_2(t)^*\right), 1\right)$$

Atau

$$u_2(t)^* = \min\left(\max\left(0, \frac{\lambda_2(t)}{N}\right), 1\right) \quad (3.19)$$

Sistem optimal jika dengan memasukkan kontrol optimal  $u_1(t)^*$  dan  $u_2(t)^*$  ke dalam sistem persamaan *state* dan *costate* sehingga diperoleh sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) A \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= -k_2 \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M}{M + M_{turn}} \right) S + \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda_2(t)}{N} \right) \right) \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= \alpha_s C - k_3 \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} &= -k_1 \alpha_s C + \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda_4(t)}{D} \right) \right) \\
\frac{d\lambda_1}{dt} &= -(1 - \lambda_1(t))(D_r + h_r) \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= \left[ \begin{array}{l} \frac{\alpha_A \rho_{max} S(t)}{M(t) + M_{turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t)k_2 + \lambda_3(t)k_3) \\ + \frac{\alpha_A \rho_{max} M(t)S(t)}{(M(t) + M_{turn})^2} (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)k_2 - \lambda_3(t)k_3) \end{array} \right] \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= \left[ \frac{\alpha_A \rho_{maks} M(t)}{M(t) + M_{turn}} (-\lambda_1(t) + \lambda_2(t)k_2 + \lambda_3(t)(D_r + h_r)) \right] \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\lambda_3(t)\alpha_s + \lambda_4(t)k_1\alpha_s
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Masalah Persamaan Differensial (PD) pada persamaan (3.20) dengan syarat batas (3.16) dan (3.17) akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4.

### 3.3 Simulasi Numerik

Pada uraian diatas telah dijelaskan bahwa persamaan *state* dan *co-state* akan diselesaikan secara numerik karena sistem tersebut berbentuk sistem differensial nonlinier. Pada simulasi ini penyelesaian persamaan *state* akan disimulasikan menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4. Sedangkan persamaa *co-state* disimulasikan menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4.

#### 3.3.1 Proses Diskritisasi Sistem Persamaan

Pada proses ini, selesaikan persamaan *state* menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4.

$$A_{i+1} = A_i + \frac{h}{6} (m_{1,A} + 2m_{2,A} + 2m_{3,A} + m_{4,A})$$

$$M_{i+1} = S_i + \frac{h}{6} (m_{1,M} + 2m_{2,M} + 2m_{3,M} + m_{4,M})$$

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6} (m_{1,S} + 2m_{2,S} + 2m_{3,S} + m_{4,S})$$

$$C_{i+1} = C_i + \frac{h}{6} (m_{1,C} + 2m_{2,C} + 2m_{3,C} + m_{4,C})$$

dengan,

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} m_{1,A} &= f(t_i, A_i) \\ &= \alpha_A \left( \frac{\rho_{max} M_i}{M_i + M_{turn}} \right) S_i - (D_r + h_r) A_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{1,M} &= f(t_i, M_i) \\
&= -k_2 \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max} M_i}{M_i + M_{\text{turn}}} \right) S_i + u_{2_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{1,S} &= f(t_i, S_i) \\
&= \alpha_s C_i - k_3 \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max} M_i}{M_i + M_{\text{turn}}} \right) S_i - (D_r + h_r) S_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{1,C} &= f(t_i, C_i) \\
&= -k_1 \alpha_s C + u_{1_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{2,A} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}hm_{1,A}\right) \\
&= \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max} (M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{1,S} \right) - (D_r + h_r) \left( A_i + \frac{1}{2}hm_{1,A} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{2,M} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M}\right) \\
&= -k_2 \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max} (M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{1,S} \right) + \left( \frac{1}{2}(u_{2_i} + u_{2_{i+1}}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{2,S} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hm_{1,S}\right) \\
&= \alpha_s \left( C_i + \frac{1}{2}hm_{1,C} \right) - k_3 \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max} (M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{1,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( C_i + \frac{1}{2}hm_{1,C} \right) - (D_r + h_r) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{1,S} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{2,C} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, C_i + \frac{1}{2}hm_{1,C}\right) \\
&= -k_1 \alpha_s \left( C_i + \frac{1}{2}hm_{1,C} \right) + \left( \frac{1}{2}(u_{1_i} + u_{1_{i+1}}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,A} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}hm_{2,A}\right) \\
&= \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max}(M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{2,S} \right) - (D_r + h_r) \left( A_i + \frac{1}{2}hm_{2,A} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,M} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M}\right) \\
&= -k_2\alpha_A \left( \frac{\rho_{\max}(M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{2,S} \right) + \left( \frac{1}{2}(u_{2_i} + u_{2_{i+1}}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,S} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hm_{2,S}\right) \\
&= \alpha_s \left( C_i + \frac{1}{2}hm_{2,C} \right) - k_3\alpha_A \left( \frac{\rho_{\max}(M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{2,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( C_i + \frac{1}{2}hm_{2,C} \right) - (D_r + h_r) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{2,S} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,C} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, C_i + \frac{1}{2}hm_{2,C}\right) \\
&= -k_1\alpha_s \left( C_i + \frac{1}{2}hm_{2,C} \right) + \left( \frac{1}{2}(u_{1_i} + u_{1_{i+1}}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,A} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, A_i + \frac{1}{2}hm_{3,A}\right) \\
&= \alpha_A \left( \frac{\rho_{\max}(M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{3,S} \right) - (D_r + h_r) \left( A_i + \frac{1}{2}hm_{3,A} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,M} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M}\right) \\
&= -k_2\alpha_A \left( \frac{\rho_{\max}(M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M}) + M_{\text{turn}}} \right) \left( S_i + \frac{1}{2}hm_{3,S} \right) + \left( \frac{1}{2}(u_{2_i} + u_{2_{i+1}}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,S} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hm_{3,S}\right) \\
&= \alpha_s\left(C_i + \frac{1}{2}hm_{3,C}\right) - k_3\alpha_A\left(\frac{\rho_{\max}(M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M})}{(M_i + \frac{1}{2}hm_{3,M}) + M_{um}}\right)\left(C_i + \frac{1}{2}hm_{3,C}\right) - (D_r + h_r)\left(S_i + \frac{1}{2}hm_{3,S}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,C} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, C_i + \frac{1}{2}hm_{3,C}\right) \\
&= -k_1\alpha_s\left(C_i + \frac{1}{2}hm_{3,C}\right) + \left(\frac{1}{2}(u_{1_i} + u_{1_{i+1}})\right)
\end{aligned}$$

Kemudian persamaan *co-state* diselesaikan menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4. Untuk mempersingkat penulisan maka digunakan pemisalan juga pada proses diskritisasi persamaan *co-state*. Penyelesaian persamaan *co-state* menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4 seperti berikut:

$$\lambda_A^j = \lambda_A^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,A} + 2m_{2,A} + 2m_{3,A} + m_{4,A})$$

$$\lambda_M^j = \lambda_M^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,M} + 2m_{2,M} + 2m_{3,M} + m_{4,M})$$

$$\lambda_S^j = \lambda_S^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,S} + 2m_{2,S} + 2m_{3,S} + m_{4,S})$$

$$\lambda_C^j = \lambda_C^{j-1} + \frac{h}{6}(m_{1,C} + 2m_{2,C} + 2m_{3,C} + m_{4,C})$$

dengan

$$j = (n + 2 - i)$$

$$\begin{aligned}
m_{1,A} &= f(t_i, \lambda_1^j) \\
&= -(1 - \lambda_1^j)(D_r + h_r)
\end{aligned}$$

$$m_{1,M} = f(t_i, \lambda_2^j) \\ = \left[ \frac{\alpha_A \rho_{maks} S}{M + M_{turn}} (-\lambda_1^j + \lambda_2^j k_2 + \lambda_3^j k_3) + \frac{\alpha_A \rho_{maks} MS}{(M + M_{turn})^2} (\lambda_1^j - \lambda_2^j k_2 - \lambda_3^j k_3) \right]$$

$$m_{1,S} = f(t_i, \lambda_3^j) \\ = \left[ \frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} (\lambda_1^j + \lambda_2^j k_2 + \lambda_3^j k_3) + \lambda_3^j (D_r + h_r) \right]$$

$$m_{1,C} = f(t_i, \lambda_4^j) \\ = -\lambda_3^j \alpha_s + \lambda_4^j k_1 \alpha_s$$

$$m_{2,A} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,A}\right) \\ = -\left(1 - \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,A}\right)\right)(D_r + h_r)$$

$$m_{2,M} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,M}\right) \\ = \left[ \frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} \left( -\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,A}\right) + \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,M}\right)k_2 + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)k_3 \right) \right. \\ \left. + \frac{\alpha_A \rho_{maks} MS}{(M + M_{turn})^2} \left( \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,A}\right) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,M}\right)k_2 - \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)k_3 \right) \right]$$

$$m_{2,S} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right) \\ = \left[ \frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} \left( -\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{1,A}\right) + \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{1,M}\right)k_2 + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)k_3 \right) \right] \\ + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)(D_r + h_r)$$

$$m_{2,C} = f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{1,C}\right) \\ = -\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{1,S}\right)\alpha_s + \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{1,C}\right)k_1\alpha_s$$

$$\begin{aligned}
m_{3,A} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,A}\right) \\
&= -\left(1 - \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,A}\right)(D_r + h_r)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,M} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,M}\right) \\
&= \left[ \begin{aligned} &\frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} \left( -\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,A}\right) + \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,M}\right)k_2 + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)k_3 \right) \\ &+ \frac{\alpha_A \rho_{maks} MS}{(M + M_{turn})^2} \left( \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,A}\right) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,M}\right)k_2 - \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)k_3 \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,S} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right) \\
&= \left[ \begin{aligned} &\frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} \left( -\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{2,A}\right) + \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{2,M}\right)k_2 + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)k_3 \right) \\ &+ \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)(D_r + h_r) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{3,C} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{2,C}\right) \\
&= -\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{2,S}\right)\alpha_s + \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{2,C}\right)k_1\alpha_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,A} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{3,A}\right) \\
&= -\left(1 - \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{3,A}\right)(D_r + h_r)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,M} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{3,M}\right) \\
&= \left[ \begin{aligned} &\frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} \left( -\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{3,A}\right) + \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{3,M}\right)k_2 + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{3,S}\right)k_3 \right) \\ &+ \frac{\alpha_A \rho_{maks} MS}{(M + M_{turn})^2} \left( \left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{3,A}\right) - \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{3,M}\right)k_2 - \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{3,S}\right)k_3 \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,S} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{3,S}\right) \\
&= \left[ \frac{\alpha_A \rho_{maks} M}{M + M_{turn}} \left( -\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hm_{3,A}\right) + \left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hm_{3,M}\right)k_2 + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{3,S}\right)k_3 \right) \right] \\
&\quad + \left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{3,S}\right)(D_r + h_r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{4,C} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{3,C}\right) \\
&= -\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hm_{3,S}\right)\alpha_s + \left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hm_{3,C}\right)k_1\alpha_s
\end{aligned}$$

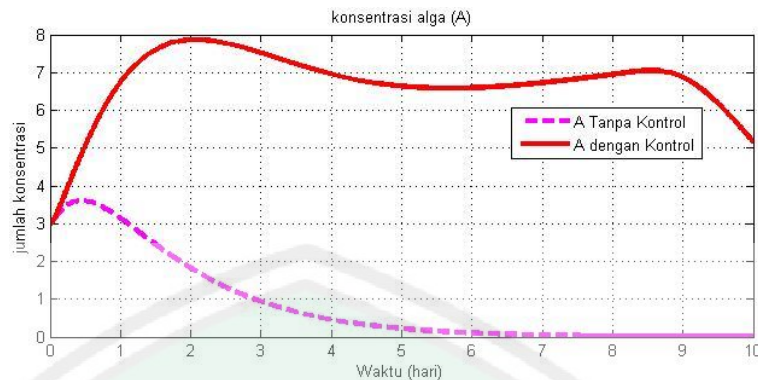
### 3.4.2 Hasil Simulasi Numerik

Model pertumbuhan alga disimulasikan dengan adanya kontrol aliran karbon dioksida ( $u_1$ ) dan kontrol aliran nutrisi ( $u_2$ ). Untuk mengetahui perubahan jumlah alga ( $A$ ), nutrisi ( $M$ ), glukosa ( $S$ ) dan karbon dioksida ( $C$ ), maka model disimulasikan di saat kondisi awal  $(A^0, M^0, S^0, C^0)$  adalah  $(3, 0.4, 10, 5)$  serta menggunakan dua variasi nilai bobot yaitu  $D = 0.3, N = 0.3$  dan  $D = 1, N = 1$ . Adapun nilai parameter yang digunakan diberikan pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Nilai Parameter yang digunakan dalam simulasi

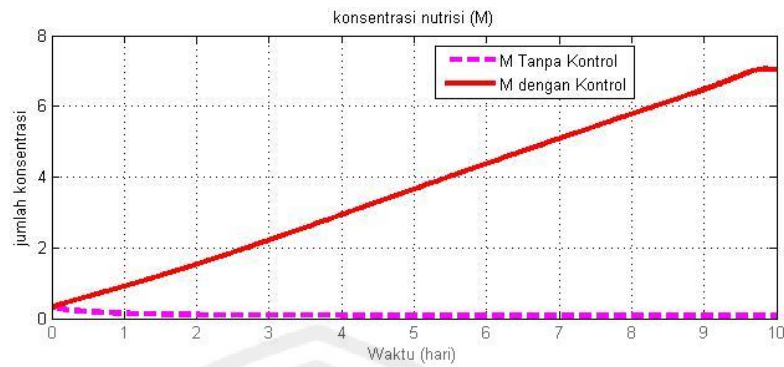
Parameter	$\rho_{max}$	$M_{turn}$	$D_r$	$h_r$	$\alpha_A$	$\alpha_s$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
Nilai	0.4	4	0.46	0.4	10.2	67.6	0.4	0.05	0.05

a. Ketika nilai bobot  $D = 0.3, N = 0.3$



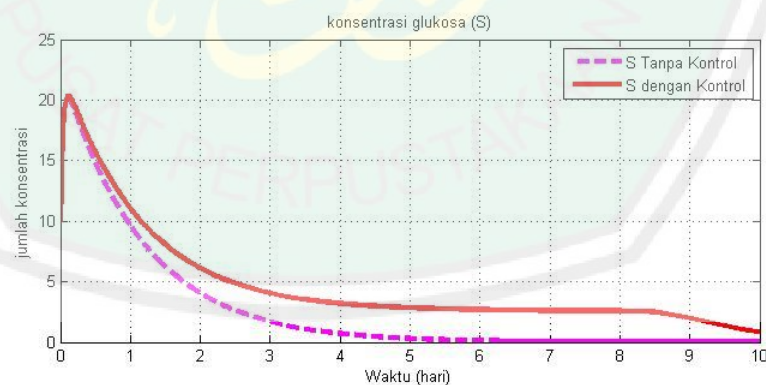
Gambar 3.1 dinamika konsentrasi alga ketika  $D = 0.3, N = 0.3$

Konsentrasi alga tanpa kontrol dan dengan kontrol mengalami perubahan. Tanpa kontrol kurang dari 1 hari konsentrasi alga meningkat hingga  $3,607 g[A]m^{-3}$ . Hal yang menyebabkan konsentrasi alga meningkat adalah konsentrasi glukosa dan nutrisi. Setelah itu terjadi penurunan pada hari ke-8 hingga  $0,221 g[A]m^{-3}$ . Pada hari ke-9 sampai dengan hari ke-10 sudah tidak terjadi perubahan yang berarti keadaan sudah stabil. Berbeda ketika setelah diberi pengontrol, konsentrasi alga mulai meningkat hingga  $7,862 g[A]m^{-3}$  pada hari ke-2. Setelah itu terjadi penurunan sebesar  $6,632 g[A]m^{-3}$  pada hari ke-5. Kemudian pada hari ke-8 naik lagi sebesar  $7,055 g[A]m^{-3}$ . Setelah itu terjadi penurunan pada hari ke-10 sebesar  $5,221 g[A]m^{-3}$ . Konsentrasi alga yang mengalami peningkatan dan penurunan dipengaruhi oleh besarnya kontrol yang diberikan selama 10 hari.



Gambar 3.2 dinamika konsentrasi nutrisi ketika  $D = 0.3, N = 0.3$

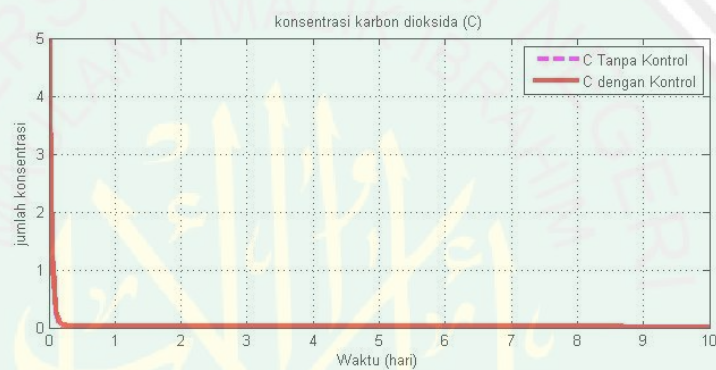
Konsentrasi nutrisi tanpa kontrol dan dengan kontrol mengalami perubahan. Tanpa kontrol, kurang dari 1 hari konsentrasi nutrisi meningkat hingga  $0,35 \text{ g}[M]m^{-3}$ , kemudian mengalami penurunan pada hari ke-3 hingga  $0.09 \text{ g}[M]m^{-3}$ . Pada hari ke-4 sampai dengan hari ke-10 sudah tidak terjadi perubahan yang berarti keadaan sudah stabil. Berbeda ketika setelah diberi pengontrol, konsentrasi nutrisi mulai meningkat secara signifikan hingga  $7,05 \text{ g}[M]m^{-3}$  pada hari ke-9. Setelah itu tidak terjadi penurunan hingga hari ke-10 yang berarti keadaan sudah stabil. Peningkatan konsentrasi nutrisi dikarenakan kontrol ( $u_1$ ) yaitu aliran nutrisi bekerja secara maksimal selama 10 hari.



Gambar 3.3 dinamika konsentrasi glukosa ketika  $D = 0.3, N = 0.3$

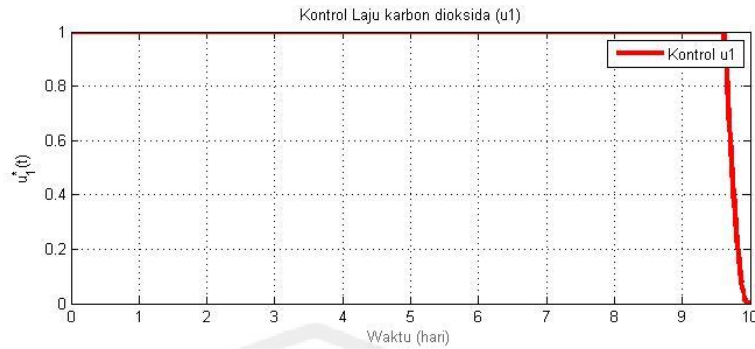
Konsentrasi glukosa tanpa kontrol dan dengan kontrol mengalami perubahan. Tanpa kontrol kurang dari 1 hari konsentrasi glukosa meningkat hingga  $20,16 \text{ g}[S]m^{-3}$ . Kemudian terjadi penurunan secara signifikan hingga

$0,022 \text{ g}[S]m^{-3}$  pada hari ke-8. Setelah itu tidak terjadi perubahan hingga hari ke-10 yang berarti keadaan sudah stabil. Berbeda ketika setelah diberi pengontrol, konsentrasi glukosa awalnya meningkat hingga  $20,33 \text{ g}[S]m^{-3}$ . Kemudian terjadi penurunan secara signifikan hingga hari ke-6 sebesar  $2,641 \text{ g}[S]m^{-3}$ . Setelah itu terjadi penurunan lagi pada hari ke-8 hingga  $0,175$ . Peningkatan konsentrasi glukosa terjadi akibat besarnya kontrol yang diberikan di waktu awal dan konsentrasi glukosa menurun akibat perubahan konsentrasi alga.



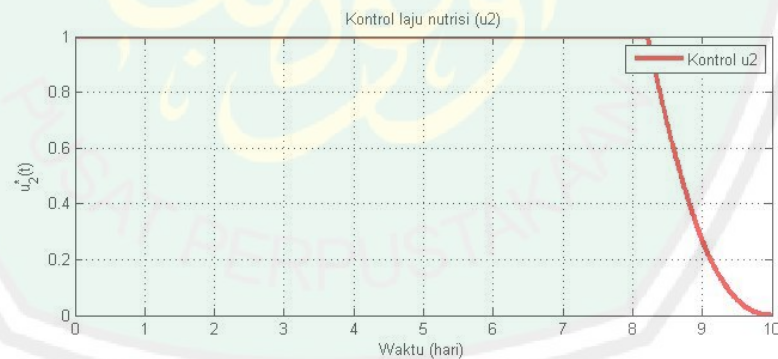
Gambar 3.4 Dinamika konsentrasi karbondioksida ketika  $D = 0.3, N = 0.3$

Konsentrasi karbon dioksida tanpa kontrol dan dengan kontrol sangat sedikit perbedaannya. Tanpa kontrol kurang dari 1 hari konsentrasi karbondioksida mengalami penurunan yang cukup drastis hingga  $0,001 \text{ g}[C]m^{-3}$  kemudian tidak mengalami perubahan atau konstan hingga hari ke-10. Begitu pula dengan kontrol, konsentrasi menurun secara drastis hingga  $0,037 \text{ g}[C]m^{-3}$  kemudian tidak mengalami perubahan atau konstan hingga hari ke-8. Pada hari ke-9 konsentrasi menurun lagi hingga  $0,005 \text{ g}[C]m^{-3}$ . Karbon dioksida yang ada akan selalu dipakai untuk menghasilkan glukosa, sehingga karbon dioksida selalu mengalami penurunan yang mengakibatkan konsentrasi glukosa meningkat.



Gambar 3.5 kondisi kontrol laju karbon dioksida ketika  $D = 0.3, N = 0.3$

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa kontrol karbon dioksida ( $u_1$ ) pada awal periode adalah 1 atau dinyatakan 100% ini berarti bobot dari kontrol diberikan sepenuhnya, kemudian tidak bergerak atau konstan hingga hari ke-9. Hal ini berarti pemberian kontrol laju karbon dioksida pada model pertumbuhan alga semakin menunjukkan keefektifannya dalam meningkatkan pertumbuhan alga. Namun keefektifan pengontrol hanya berlangsung hingga hari ke-9, karena pada hari ke-10 terjadi penurunan yang berarti keefektifan pengontrol telah berkurang.



Gambar 3.6 kondisi kontrol laju nutrisi ketika  $D = 0.3, N = 0.3$

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa kontrol laju nutrisi ( $u_2$ ) pada awal periode adalah 1 atau dinyatakan 100% ini berarti bobot dari kontrol diberikan sepenuhnya, kemudian tidak bergerak atau konstan hingga hari ke-8. Hal ini berarti pemberian kontrol laju nutrisi pada model pertumbuhan alga semakin

menunjukkan keefektifannya dalam meningkatkan pertumbuhan alga. Namun keefektifan pengontrol hanya berlangsung hingga hari ke-8, karena pada hari ke-9 terjadi penurunan secara signifikan yang berarti keefektifan pengontrol telah berkurang.

b. Ketika nilai bobot  $D = 1, N = 1$

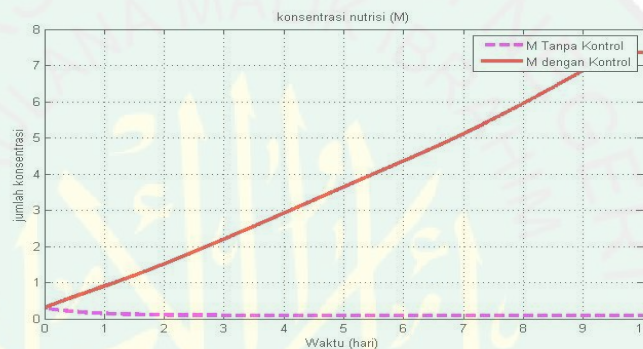


Gambar 3.7 dinamika konsentrasi alga ketika  $D = 1, N = 1$

Konsentrasi alga tanpa kontrol dan dengan kontrol mengalami perubahan. Tanpa kontrol kurang dari 1 hari konsentrasi alga meningkat hingga  $3,607 g[A]m^{-3}$ . Hal yang menyebabkan konsentrasi alga meningkat adalah konsentrasi glukosa dan nutrisi. Setelah itu terjadi penurunan secara signifikan pada hari ke-8 hingga  $0,022 g[A]m^{-3}$ . Pada hari ke-9 sampai dengan hari ke-10 sudah tidak terjadi perubahan yang berarti keadaan sudah stabil. Berbeda ketika setelah diberi pengontrol, konsentrasi alga mulai meningkat secara signifikan hingga  $7,866 g[A]m^{-3}$  pada hari ke-2. Terjadi peningkatan konsentrasi alga dikarenakan kontrol yang diberikan bekerja dengan maksimal selama 2 hari. Setelah itu terjadi penurunan pada hari ke-6 hingga  $2,641 g[A]m^{-3}$ . Kemudian pada hari ke-7 hingga hari ke-10 mengalami penurunan yang cukup drastis hingga  $1,871 g[A]m^{-3}$ . Perubahan konsentrasi alga yang mengalami

peningkatan dan penurunan konsentrasi juga dikarenakan besarnya kontrol yang diberikan selama 10 hari.

Berdasarkan hasil simulasi dari gambar (3.1) dan gambar (3.7), konsentrasi alga tanpa kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  dan bobot  $D = 1, N = 1$  tidak mengalami perubahan, sedangkan konsentrasi alga dengan kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  lebih besar 9% dan pertumbuhan alga optimal selama 8 hari, sedangkan ketika bobot  $D = 1, N = 1$  pertumbuhan alga optimal selama 5 hari.



Gambar 3.8 dinamika konsentrasi nutrisi ketika  $D = 1, N = 1$

Konsentrasi nutrisi tanpa kontrol dan dengan kontrol mengalami perubahan. Tanpa kontrol, kurang dari 1 hari konsentrasi nutrisi meningkat hingga  $0,331 \text{ g}[M]m^{-3}$ , kemudian mengalami penurunan hingga hari ke-3 sebesar  $0.093 \text{ g}[M]m^{-3}$ . Pada hari ke-4 sampai dengan hari ke-10 sudah tidak terjadi perubahan yang berarti keadaan sudah stabil. Berbeda ketika setelah diberi pengontrol, konsentrasi nutrisi mulai meningkat secara signifikan hingga  $7,361 \text{ g}[M]m^{-3}$  pada hari ke-9. Setelah itu tidak terjadi penurunan hingga hari ke-10 yang berarti keadaan sudah stabil. Peningkatan konsentrasi nutrisi dikarenakan kontrol ( $u_1$ ) yaitu aliran nutrisi bekerja secara maksimal selama 10 hari.

Berdasarkan hasil simulasi dari gambar (3.2) dan gambar (3.8), konsentrasi nutrisi tanpa kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  dan bobot  $D = 1, N = 1$  tidak mengalami perubahan, sedangkan konsentrasi nutrisi dengan kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  lebih besar 4% dibandingkan ketika bobot  $D = 1, N = 1$ .

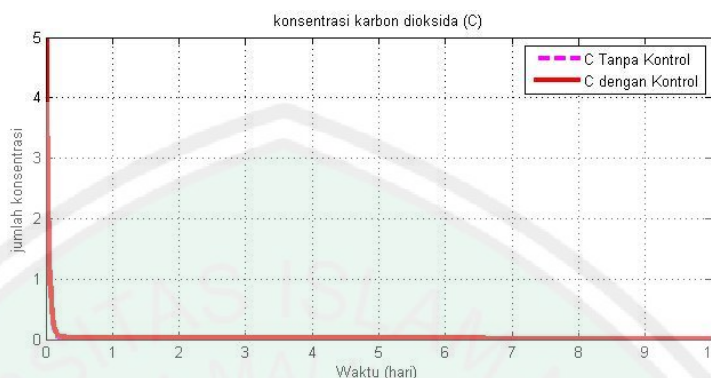


Gambar 3.9 dinamika konsentrasi glukosa ketika  $D = 1, N = 1$

Konsentrasi glukosa tanpa kontrol dan dengan kontrol mengalami perubahan. Tanpa kontrol kurang dari 1 hari konsentrasi alga meningkat hingga  $20,33 \text{ g}[S]m^{-3}$ . Kemudian terjadi penurunan secara signifikan hingga  $0,125 \text{ g}[S]m^{-3}$  pada hari ke-6. Setelah itu tidak terjadi perubahan hingga hari ke-10 yang berarti keadaan sudah stabil. Berbeda ketika setelah diberi pengontrol, konsentrasi glukosa awalnya meningkat hingga  $20,33 \text{ g}[S]m^{-3}$ . Kemudian terjadi penurunan secara signifikan hingga hari ke-8 sebesar  $2,556 \text{ g}[S]m^{-3}$ . Setelah itu terjadi penurunan lagi hingga hari ke-10 sebesar  $0,096$ . Peningkatan konsentrasi glukosa terjadi akibat besarnya kontrol yang diberikan di waktu awal dan konsentrasi glukosa menurun akibat perubahan konsentrasi alga.

Berdasarkan hasil simulasi dari gambar (3.3) dan gambar (3.9), konsentrasi glukosa tanpa kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  dan bobot

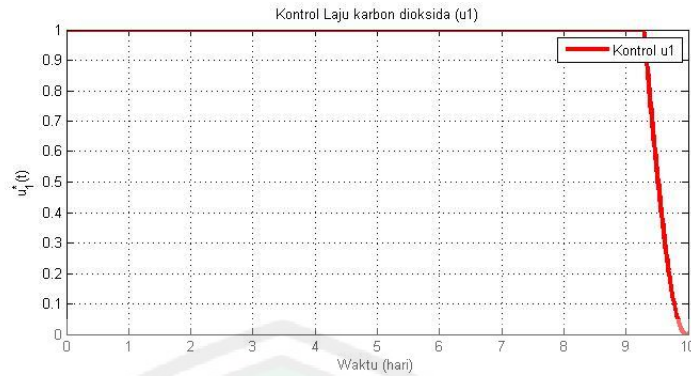
$D = 1, N = 1$  tidak mengalami perubahan, sedangkan konsentrasi glukosa dengan kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  lebih besar 8% dibandingkan ketika bobot  $D = 1, N = 1$ .



Gambar 3.10 Dinamika konsentrasi karbondioksida ketika  $D = 1, N = 1$

Konsentrasi karbon dioksida tanpa kontrol dan dengan kontrol sangat sedikit perbedaannya. Tanpa kontrol konsentrasi mengalami penurunan yang cukup drastis hingga  $0,001 \text{ g}[C]m^{-3}$  kemudian tidak mengalami perubahan atau konstan hingga hari ke-10. Begitu pula dengan kontrol, konsentrasi menurun secara drastis hingga  $0,037 \text{ g}[C]m^{-3}$  kemudian tidak mengalami perubahan atau konstan hingga hari ke-6. Pada hari ke-7 konsentrasi menurun lagi hingga  $0,005 \text{ g}[C]m^{-3}$ . Karbon dioksida yang ada akan selalu dipakai untuk menghasilkan glukosa, sehingga karbon dioksida selalu mengalami penurunan yang mengakibatkan konsentrasi glukosa meningkat.

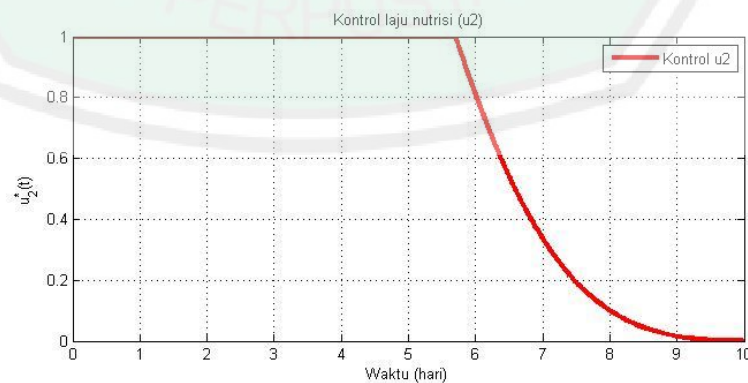
Berdasarkan hasil simulasi dari gambar (3.4) dan gambar (3.10), konsentrasi karbon dioksida tanpa kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  dan bobot  $D = 1, N = 1$  tidak mengalami perubahan, sedangkan konsentrasi karbon dioksida dengan kontrol ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  efektif hingga hari ke-8, sedangkan ketika bobot  $D = 1, N = 1$  efektif hingga hari ke-7.



Gambar 3.11 kondisi kontrol laju karbon dioksida ketika  $D = 1, N = 1$

Gambar 3.11 menunjukkan bahwa kontrol karbon dioksida ( $u_1$ ) pada awal periode adalah 1 atau dinyatakan 100% ini berarti bobot dari kontrol diberikan sepenuhnya, kemudian tidak bergerak atau konstan hingga hari ke-9. Hal ini berarti pemberian kontrol laju karbon dioksida pada model pertumbuhan alga semakin menunjukkan keefektifannya dalam meningkatkan pertumbuhan alga. Namun keefektifan pengontrol hanya berlangsung hingga hari ke-9, karena pada hari ke-10 terjadi penurunan yang berarti keefektifan pengontrol telah berkurang.

Berdasarkan hasil simulasi dari gambar (3.5) dan gambar (3.11), kontrol laju karbon dioksida ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  dan bobot  $D = 1, N = 1$  tidak mengalami perubahan, keduanya efektif hingga hari ke-9.



Gambar 3.12 kondisi kontrol laju nutrisi ketika  $D = 1, N = 1$

Gambar 3.12 menunjukkan bahwa kontrol laju nutrisi ( $u_2$ ) pada awal periode adalah 1 atau dinyatakan 100% ini berarti bobot dari kontrol diberikan sepenuhnya, kemudian tidak bergerak atau konstan hingga hari ke-5. Hal ini berarti pemberian kontrol laju nutrisi pada model pertumbuhan alga semakin menunjukkan keefektifannya dalam meningkatkan pertumbuhan alga. Namun keefektifan pengontrol hanya berlangsung hingga hari ke-5, karena pada hari ke-6 terjadi penurunan secara signifikan yang berarti keefektifan pengontrol telah berkurang.

Berdasarkan hasil simulasi dari gambar (3.6) dan gambar (3.12), kontrol laju karbon dioksida ketika bobot  $D = 0.3, N = 0.3$  dan bobot  $D = 1, N = 1$  terdapat perbedaan. Pada bobot  $D = 0.3, N = 0.3$ , pengontrol efektif hingga hari ke-8, sedangkan ketika bobot  $D = 1, N = 1$ , pengendali hanya efektif hingga hari ke-5.

### 3.5 Proses Penciptaan Tumbuhan dan Manfaat Tumbuhan dalam Islam

Kontrol optimal karbon dioksida dan nutrisi pada pertumbuhan alga merupakan upaya untuk memaksimalkan jumlah alga yang ditanam. Dalam Al-quran terdapat beberapa ayat yang menjelaskan tentang proses penciptaan tumbuhan dan beberapa manfaat tumbuhan.

#### 1. Proses Penciptaan Tumbuhan

Tumbuh-tumbuhan merupakan penopang utama kehidupan manusia dan hewan yang memperoleh makanannya dari tanah. Makanan itu berupa air, oksigen, karbon dioksida, dan berbagai mineral yang ada di dalam tanah. Keunikannya, tumbuhan dapat membuat makanannya sendiri, utamanya semua

tumbuhan hijau. Dengan bantuan sinar matahari dan zat hijau daun atau klorofil tumbuhan mengolah makanan sendiri. Dalam Q.S Thaha:53-54 yang berbunyi:

*“[53]Yang telah menjadikan bagimu bumi sebagai hamparan dan yang telah menjadikan bagimu di bumi itu jalan-jalan, dan menurunkan dari langit air hujan. Maka Kami tumbuhkan dengan air hujan itu berjenis-jenis dari tumbuh-tumbuhan yang bermacam-macam.[54]Makanlah dan gembalakanlah binatang-binatangmu. Sesungguhnya pada demikian itu, terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah bagi orang-orang yang berakal.”*

Dalam ayat tersebut, air mempunyai fungsi yang sangat penting dalam proses pertumbuhan tumbuhan. Air ( $H_2O$ ) dan karbon dioksida ( $CO_2$ ) bergabung membentuk karbohidrat (zat tepung) dengan bantuan sinar matahari dan klorofil. Proses ini disebut fotosintesis. Pada proses fotosintesis, selain menghasilkan karbohidrat juga menghasilkan sari-sari makanan yang lain. Kemampuan membuat sari-sari makanan itulah disebut dengan asimilasi. Hasil asimilasi dikirim ke seluruh bagian tumbuhan untuk tumbuh, bernafas, dan sebagian untuk makanan cadangan (Samsul, 2011).

Fotosintesis sangat penting bagi tumbuh-tumbuhan, sama seperti manusia bernapas setiap hari. Hanya saja jika siang hari tumbuhan lebih banyak melepaskan oksigen sebagai fotosintesis daripada karbon dioksida hasil pernapasannya. Karena jumlah oksigen yang dihasilkan lebih banyak, maka pada siang hari udara disekitar tumbuh-tumbuhan terasa segar, apalagi dibawah pohon rindang (Samsul,2011). Akar tumbuhan mampu memegang erat partikel tanah , daun tumbuhan menangkap sinar matahari dan menyebabkan lingkungan menjadi teduh, suhu udara sejuk dan nyaman bagi penghuninya. Selain itu, daun tumbuhan juga menciptakan keindahan sehingga dapat menjadikan orang merasa senang dan rileks.

## 2. Manfaat Tumbuhan dalam Islam

Manusia dan tumbuh-tumbuhan sangat erat kaitannya dalam kehidupan. Banyak sekali manfaat yang didapatkan dari tumbuh-tumbuhan namun masih banyak pula tumbuh-tumbuhan yang ada disekitar kita yang belum diketahui manfaatnya. Keberadaan tumbuh-tumbuhan merupakan berkah dan nikmat Allah SWT yang diberikan kepada seluruh makhluknya. Allah SWT menginformasikan tentang hal ini dalam surah 'Abasa: 27-32 yang menjelaskan tentang kuasa Allah SWT menciptakan biji-bijian, sayur-sayuran, buah-buahan serta rumput yang bisa jadi bahan makanan bagi manusia dan ternak. Setiap unsur makanan ini memiliki khasiat unik bagi tubuh yang bisa diteliti dalam kehidupan kita, dan banyak hal lain dari unsur-unsur ini yang dapat dipelajari untuk mencerahkan dan memberikan pandangan mendalam akan keajaiban yang terkandung dalam unsur tersebut.

Rasyidi (1999) menjelaskan bahwasannya Allah SWT menjadikan kehidupan alam dengan berbagai keanekaragaman hayati sebagai nikmat bagi kehidupan manusia, di dalamnya terkandung manfaat yang sangat beragam, contohnya tumbuhan yang tumbuh di sekitar kita yang dapat dipergunakan untuk pengobatan. Dari dulu hingga kini, pengobatan dengan tumbuhan (*herbal medicine*) masih sering digunakan sebagai alternatif penyembuhan. Perintah Allah SWT kepada kita (manusia) untuk memanfaatkan tumbuhan tersurat dalam Q.S An-Nahl:69.

*“Kemudian makanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu). Dari perut lebah itu keluar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, di dalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan.”*

Ayat di atas mengandung pengertian bahwa Allah SWT menumbuhkan beraneka macam tumbuhan yang mempunyai manfaat yang sangat besar bagi manusia, diantaranya sebagai bahan makanan, karena Allah SWT menciptakan bermacam-macam tumbuhan lengkap dengan manfaatnya, diantaranya adalah tumbuhan yang tumbuh di sekitar kita. Sebagai khalifah di bumi, kita semua berkewajiban untuk melestarikan dan menjaga hewan dan tumbuhan.

Menurut Syaikh Muhammad Ash-Shayim (2006), tumbuhan menjadi bahan obat yang sangat populer disamping bahan alam lainnya seperti madu dan telur dalam kehidupan Rasulullah Muhammad SAW, beliau sering menggunakan tumbuhan untuk mempertahankan kesehatan tubuh. Terdapat beberapa jenis tumbuhan yang dijadikan oleh Allah SWT sebagai makanan pelindung (*protector food*) dan obat penyembuh yang sering dicontohkan dalam pengobatan ala Rasulullah Muhammad SAW (*thibbun nabawi*) diantaranya adalah: minyak zaitun, bawang putih, bawang merah, buah delima, buah labu dan gandum. Rasulullah Muhammad SAW menyuruh kepada ummatnya agar mau berusaha mencari obat ketika tubuh sedang sakit, karena itu bentuk dari rasa sabar yang dicontohkan beliau, sebagaimana telah disebutkan dalam sabdanya:

*“Berobatlah! Karena tidak ada suatu penyakit yang diturunkan Allah kecuali diturunkan pula obat penyembuhnya, selain satu penyakit, yaitu kepikunan.”*

## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika pertumbuhan alga dengan kontrol aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi yaitu

$$\dot{A} = \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) A$$

$$\dot{M} = -k_2 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S + u_2(t)$$

$$\dot{S} = \alpha_s C - k_3 \alpha_A \rho_{max} \left( \frac{M}{M + M_{turn}} \right) S - (D_r + h_r) S$$

$$\dot{C} = -k_1 \alpha_s C + u_1(t)$$

2. Penyelesaian kontrol optimal model matematika pertumbuhan alga diselesaikan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin sehingga diperoleh  $u$  yang optimal yaitu berupa aliran karbondioksida yaitu

$$u_1(t)^* = \min \left( \max \left( 0, \frac{\lambda_4(t)}{D} \right), 1 \right)$$

dan aliran nutrisi

$$u_2(t)^* = \min \left( \max \left( 0, \frac{\lambda_2(t)}{N} \right), 1 \right)$$

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik, pemberian kontrol berupa aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi dapat memaksimalkan pertumbuhan

alga. Konsentrasi alga setelah diberikan kontrol dengan bobot konsentrasi 0,3 sebesar  $7,866 \text{ g}[A]m^{-3}$ , sedangkan Konsentrasi alga setelah diberikan kontrol dengan bobot konsentrasi 1 sebesar  $7,862 \text{ g}[A]m^{-3}$ . Jadi pertumbuhan alga ketika bobot konsentrasi 0.3 lebih besar 9% dibandingkan dengan bobot konsentrasi 1. Sehingga pertumbuhan alga dapat maksimum dengan nilai bobot minimum.

#### 4.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai kontrol optimal model matematika pertumbuhan alga dengan kontrol maupun tanpa kontrol berupa aliran karbon dioksida dan aliran nutrisi. pada model ini laju konsentrasi alga adalah konstan. Oleh karena itu, pembaca dapat melakukan penelitian selanjutnya menggunakan laju konsentrasi alga yang tidak konstan. Selain itu untuk hasil yang lebih baik, dapat menggunakan kondisi batas kontrol bebas, karena pada skripsi ini batas kontrol nya telah ditentukan, sehingga selisih hasil simulasi dengan kontrol dan tanpa kontrol berbeda jauh. Dengan menggunakan batas kontrol yang lain diharapkan selisih hasil simulasi dengan kontrol dan tanpa kontrol tidak berbeda jauh.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ault, J.C dan Ayres, F.1992. *Persamaan Differensial*. Jakarta: Erlangga
- Brown M.R.2002. *Nutritional Value Of Microalgae for Aquaculture*. Mexico.
- Chiang, A.2005. *Fundamental Method of Mathematical Economics Fourth Edition*. New York: The McGraw-Hill.
- faradilla, A. d. 2012. *Pemanfaatan air limbah pabrik pupuk kadar amonia tinggi sebagai media kultur mikroalga untuk perolehan sumber minyak nabati sebagai bahan baku biodiesel*. Semarang: universitas diponegoro.
- Hajar.2015. *Kendali Karbondioksida terhadap Pertumbuhan Alga*. Thesis tidak dipublikasikan. Thesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Hidayah, Elly Rohmatul. 2012. *Kontrol Optimal Model Pertumbuhan Tumor dengan Imunoterapi*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
- Ilmi, T. P.2011. *Tumbuhan dalam Perspektif Al-Qur'an dan Sains*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.
- Lenhart, n. d.2010. An Introduction to Optimal Control with an Application in Disease Modeling. *DOMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*.
- Skill, S.2007. Microalga Biofuels.Marine Futures Conference. *National Marine Aquarium*, 18.
- Thornton, d.2010. Modeling and Optimization of Algae Growth. ISSN:0926-4507.
- Tu, P.1983. *Introductory Optimization Dinamic: optimal control with economics and management applications*. berlin: springer-verlag.
- Widjaja, A.2009. Lipid Production from Microalgae as A Promising Candidate for Biodiesel Production. *Makara Teknologi*.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1. M-File untuk persamaan *state*

```
function dy = PSJ_algae(y,u2,u1, k1, k2, k3, aA, as, hr, Dr, rho, m)
%A= y1, M=y2, S=y3, C=y4
%persamaan state
x(1)= aA*((rho*y(2))/(y(2)+m))*y(3)-(Dr+hr)*y(1);
x(2)= -k2*aA*((rho*y(2))/(y(2)+m))*y(3)+u2;
x(3)= as*y(4)-k3*aA*((rho*y(2))/(y(2)+m))*y(3)-(Dr+hr)*y(3);
x(4)= -k1*as*y(4)+u1;

dy =[x(1) x(2) x(3) x(4)];
end
```

### Lampiran 2. M-File untuk persamaan *costate*

```
function dp=PCJ_algae(y,M,S,k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m)
%persamaan costate
p1=y(1); p2=y(2); p3=y(3); p4=y(4); %lambda1=p1,lambda2=p2
x(1)=p1*Dr+p1*hr-1;
x(2)=(aA*rho*S)/(m+M)*(-p1+p2*k2+p3*k3)+(aA*rho*M*S)/(m+M)^2*(p1-p2*k2-
p3*k3);
x(3)=(((aA*rho*M)/(m+M))*(-p1+p2*k2+p3*k3))+p3*(Dr+hr);
x(4)=-p3*as+p4*k1*as;

dp=[x(1) x(2) x(3) x(4)];
end
```

### lampiran 3. M-File untuk menggambarkan simulasi model matematika pertumbuhan alga tanpa kontrol dan dengan kontrol

```
clc;
clear all;
close all;
%Nilai awal variabel Model pada t=0
A0=3;
M0=0.3;
S0=10;
C0=5 ;

%Parameter2
k1=0.4;
k2=0.05;
k3=0.05;
```

```

aA=10.2;
as=67.6;
hr=0.4; %berdasarkan nilai di jurnal
Dr=0.46 ;
rho=0.4 ;
m=4;

D=0.3; % bobot u_1 % diubah2
N=0.3; % bobot u_2 % diubah2
u1max=1;%0<u1<4
u2max=1; %0<u2<4 %diubah menjadi lebih besar

h=0.01; %h=1/N misal: h=1/100=0.01
t=0:h:10; % Dipilih 10 karena umur pemeliharaan saat fase pertumbuhan rata-rata 7-10
hari
Z=length(t); % banyaknya t
% membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1 kolom
u1=zeros(Z,1);
u1old=zeros(Z,1);
u2=zeros(Z,1);
u2old=zeros(Z,1);

A=zeros(Z,1);
M=zeros(Z,1);
S=zeros(Z,1);
C=zeros(Z,1);

Aold=zeros(Z,1);
Mold=zeros(Z,1);
Sold=zeros(Z,1);
Cold=zeros(Z,1);
% p1 adalah lambda_1 dsb
p1=zeros(Z,1);
p2=zeros(Z,1);
p3=zeros(Z,1);
p4=zeros(Z,1);

p1old=zeros(Z,1);
p2old=zeros(Z,1);
p3old=zeros(Z,1);
p4old=zeros(Z,1);
%kontrol ada 2 pada u_1 dan u_1old

tes=1;
it=0;

while tes >1e-3
    u1old=u1;
    u2old=u2;
    Aold=A; Mold=M; Sold=S; Cold=C;
    p1o=p1; p2o=p2; p3o=p3; p4o=p4;
    A(1)=A0; M(1)=M0; S(1)=S0; C(1)=C0;
    J(it+1)=0;

```

```

for i=1:Z-1
    J(it+1)=J(it+1)+h*(A(1)-1/2*D*u1old(i)^2-1/2*N*u2old(i)^2);

    y=[A(i) M(i) S(i) C(i) ];
    %RungeKutta
    r1=h*PSJ_algae(y,u1old(i),u2old(i),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    r2=h*PSJ_algae(y+0.5*r1,u1old(i),u2old(i),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    r3=h*PSJ_algae(y+0.5*r2,u1old(i),u2old(i),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    r4=h*PSJ_algae(y+r3,u1old(i),u2old(i),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    y=y+(1/6)*(r1+2*r2+2*r3+r4);

    A(i+1)=y(1);
    M(i+1)=y(2);
    S(i+1)=y(3);
    C(i+1)=y(4);

end
J(it+1)=J(it+1)+h*(A(Z)-1/2*D*u1old(Z)^2-1/2*N*u2old(Z)^2);
%Plot populasi tanpa kontrol

if it == 0
figure(1)
plot(t,A,'m--','LineWidth',3);
legend('Tanpa Kontrol');
hold on;
figure(2)
plot(t,M,'m--','LineWidth',3);
hold on;
figure(3)
plot(t,S,'m--','LineWidth',3);
hold on;
figure(4)
plot(t,C,'m--','LineWidth',3);
hold on;
end

p1(Z)=0; p2(Z)=0; p3(Z)=0; p4(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;

    y=[p1(je+1) p2(je+1) p3(je+1) p4(je+1)];
    r1=h*PCJ_algae(y,M(je+1),S(je+1),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    r2=h*PCJ_algae(y+0.5*r1,M(je+1),S(je+1),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    r3=h*PCJ_algae(y+0.5*r2,M(je+1),S(je+1),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    r4=h*PCJ_algae(y+r3,M(je+1),S(je+1),k1,k2,k3,aA,as,hr,Dr,rho,m);
    y= y -(1/6)*(r1+2*r2+2*r3+r4);

    p1(je)=y(1);
    p2(je)=y(2);
    p3(je)=y(3);
    p4(je)=y(4);

```

```

temp2=min([(p4(je)/D) u1max]); % u1 adalah CO2
u1(je)=max([temp2 0]);
temp4=min([(p2(je)/N) u2max]); % u2 adalah nutrisi
u2(je)=max([temp4 0]);
end

```

```

eA=sum(abs(A-Aold));
eM=sum(abs(M-Mold));
eS=sum(abs(S-Sold));
eC=sum(abs(C-Cold));
ep1=sum(abs(p1-p1o));
ep2=sum(abs(p2-p2o));
ep3=sum(abs(p3-p3o));
ep4=sum(abs(p4-p4o));
eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
%error = sum dari error yang lama dengan yang baru

```

```

tes=eA+eM+eS+eC+ep1+ep2+ep3+ep4+eu1+eu2;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
end

```

```

% Langkah 8
% Plot populasi dengan kontrol
figure(1)
plot(t,A,'r-', 'LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('jumlah konsentrasi');
grid on;
legend('A tanpa kontrol','A dengan Kontrol');
title('konsentrasi alga (A)');
hold on;

```

```

figure(2)
plot(t,M,'r-', 'LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('jumlah konsentrasi');
grid on;
legend('M tanpa kontrol','M dengan Kontrol');
title('konsentrasi nutrisi (M)');
hold on;

```

```

figure(3)
plot(t,S,'r-', 'LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('jumlah konsentrasi');
grid on;
legend('S tanpa kontrol','S dengan Kontrol');
title('konsentrasi glukosa (S)');
hold on;

```

```
figure(4)
plot(t,C,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('jumlah konsentrasi');
grid on;
legend('C tanpa kontrol','C dengan Kontrol');
title('konsentrasi karbon dioksida (C)');
hold on;
```

```
figure(5)
plot(t,u1,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('u_1^(t)');
grid on;
legend('Kontrol u1');
title('Kontrol Laju karbon dioksida (u1)');
hold on;
```

```
figure(6)
plot(t,u2,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('u_2^(t)');
grid on;
legend('Kontrol u2');
title('Kontrol laju nutrisi (u2)');
hold on;
```



## RIWAYAT HIDUP



Hesti Wijayanti dilahirkan di Tuban pada tanggal 19 Pebruari 1998, anak pertama dari pasangan Bapak Wiyarto dan Ibu Suyatwi. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Sembung II yang ditamatkan pada tahun 2010. Pada tahun yag sama ia melanjutkan pendidikan menengahnya di SMP Negeri I Singgahan. Pada tahun 2013 ia menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN 1 Model Bojonegoro. pendidikan berikutnya ia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi



### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hesti Wijayanti  
NIM : 16610077  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Karbon dioksida dan Nutrisi pada Model Pertumbuhan Alga  
Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si  
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	5 Maret 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	9 Maret 2020	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	12 Maret 2020	Revisi Bab I & Bab II Konsultasi Bab III	3.
4.	13 Maret 2020	Revisi Agama Bab I & Bab II	4.
5.	27 Maret 2020	ACC Bab I & Bab II	5.
6.	27 Maret 2020	ACC Agama Bab I & Bab II	6.
7.	20 April 2020	Konsultasi Agama Bab III	7.
8.	24 April 2020	Revisi Agama Bab III	8.
9.	21 Mei 2020	Revisi Bab III	9.
10.	5 Juni 2020	Konsultasi Bab IV	10.
11.	13 Juni 2020	ACC Agama Bab III	11.
12.	16 Juni 2020	ACC Keseluruhan	12.
13.	16 Juni 2020	ACC Agama Keseluruhan	13.

Malang, 27 Juli 2020  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

