

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR-PREY*  
DENGAN WAKTU TUNDA PADA *TROPHIC TRANSFER*  
TIDAK SEMPURNA**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ULIL AMRI AKBAR  
NIM. 16610005**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR-PREY*  
DENGAN WAKTU TUNDA PADA *TROPHIC TRANSFER*  
TIDAK SEMPURNA**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
ULIL AMRI AKBAR  
NIM. 16610005**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

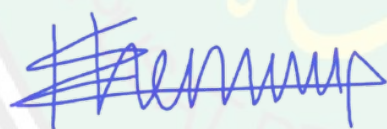
**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR-PREY*  
DENGAN WAKTU TUNDA PADA *TROPHIC TRANSFER*  
TIDAK SEMPURNA**

**SKRIPSI**

Oleh  
**ULIL AMRI AKBAR**  
NIM. 16610005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 24 Juni 2020

Pembimbing I,



Heni Widayani, M.Si  
NIP. 19901006 20180201 2 229

Pembimbing II,



Juhari, M.Si  
NIP. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR-PREY*  
DENGAN WAKTU TUNDA PADA *TROPHIC TRANSFER*  
TIDAK SEMPURNA**

**SKRIPSI**

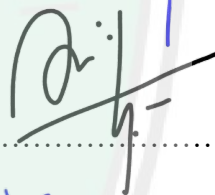
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 5 Oktober 2020

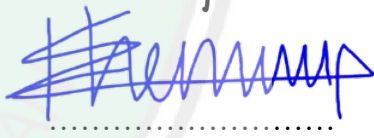
Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

  
.....

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

  
.....

Sekretaris Penguji : Heni Widayani, M.Si

  
.....

Anggota Penguji : Juhari, M.Si

  
.....

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Ulil Amri Akbar

NIM : 16610005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Waktu Tunda pada *Trophic Transfer* Tidak Sempurna

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtkumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Juni 2020

Yang membuat pernyataan,



Ulil Amri Akbar

NIM. 16610005

## MOTO

*“ Siapa yang bersungguh-sungguh pasti akan berhasil ”*



## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Orang tua penulis Bapak Riyaldi dan Ibu Jelita yang selalu menyebutkan penulis dalam doanya, yang selalu memberikan semangat serta kasih sayang tak ternilai, serta selalu menjadi kebanggaan bagi penulis



## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kehadirat Allah Swt. Sehingga dengan segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya, menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk menempuh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang bersedia meluangkan waktu untuk menerima konsultasi penelitian kepada mahasiswa bimbingannya khususnya penulis dan memberikan masukan serta motivasi demi kelancaran penelitian.
5. Juhari, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Kedua orang tua yang selalu memberikan dukungan dengan ikhlas secara moril maupun materil serta doa yang penulis selalu harapkan barakahnya.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen terima kasih atas ilmu dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis.
8. Bapak, Ibu dan saudara-saudara penulis yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga Allah Swt. memberikan balasan atas segala kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Pada akhirnya penulis berharap agar skripsi ini bermanfaat tidak hanya bagi penulis, melainkan juga berbagai pihak untuk menambah wawasan keilmuan yang selalu berkembang.

Malang, Oktober 2020

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>مستخلص البحث</b> .....	xvii
<b>BAB I. PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
<b>BAB II. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Analisis Model <i>Predator-Prey</i> dengan Waktu Tunda pada <i>Trophic Transfer</i> Tidak Sempurna .....	9
2.2 Persamaan Diferensial Tundaan Pada Matematika Biologi.....	14
2.2.1 Dasar-Dasar Persamaan Diferensial Tundaan .....	15
2.3 Sistem Persamaan Diferensial .....	16
2.3.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier .....	17
2.3.2 Sistem Persamaan Diferensial Non-linier .....	18
2.3.3 Sistem Persamaan Diferensial Tundaan .....	19
2.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	21

2.4.1	Titik Ekuilibrium.....	23
2.4.2	Linierisasi .....	23
2.4.3	Matriks Jacobian.....	24
2.4.4	Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	25
2.4.5	Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	26
2.5	Potret Fase Dari Sistem Autonomus .....	28
2.6	Kajian Al-Qur'an Tentang Kestimbangan Lingkungan .....	34

### BAB III. PEMBAHASAN

3.1	Syarat Kestabilan Model <i>Predator-Prey</i> .....	39
3.1.1	Model Tanpa Waktu Tunda ( $\tau = 0$ ).....	40
3.1.1.1	Penentuan Titik Ekuilibrium dari Model .....	40
3.1.1.2	Linierisasi Model.....	42
3.1.1.3	Analisis Kestabilan Pada Titik Ekuilibrium .....	46
3.1.1.4	Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	49
3.1.2	Model dengan Waktu Tunda ( $\tau \neq 0$ ).....	50
3.1.2.1	Linierisasi Model.....	53
3.1.2.2	Analisis Kestabilan Pada Titik Kestimbangan .....	58
3.1.2.3	Kestabilan Titik Kestimbangan .....	61
3.1.3	Simulasi Numerik.....	63
3.1.3.1	Hasil Simulasi Tanpa Waktu Tunda.....	63
3.1.3.2	Hasil Simulasi Dengan Waktu Tunda .....	66
3.1.4	Analisis Kestabilan Dalam Perspektif Islam .....	70

### BAB IV. PENUTUP

4.1	Kesimpulan .....	71
4.2	Saran.....	72

DAFTAR PUSTAKA .....	73
----------------------	----

### LAMPIRAN

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Keteranagan Model (Zhang dkk, 2015) .....	12
Tabel 2.2	Parameter (Zhang dkk, 2015).....	12
Tabel 2.3	Nilai Parameter untuk Model (Zhang dkk, 2015).....	13
Tabel 2.4	Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Dinamik (Boyce dan DiPrima, 2009).....	28
Tabel 3.1	Syarat kestabilan titik kesetimbangan model predator-prey tanpa waktu tunda .....	50
Tabel 3.2	Syarat kestabilan titik kesetimbangan model predator-prey dengan waktu tunda .....	62



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Trayektori Titik Simpul ( <i>Node</i> ) Tidak Stabil pada Potret Fase .....	30
Gambar 2.2	Trayektori Titik Pelana ( <i>Saddle</i> ) pada Poret Fase.....	31
Gambar 2.3	Trayektori Titik Star Stabil pada Potret Fase .....	32
Gambar 2.4	Trayektori Titik Spirial Tidak Stabil pada Potret Fase .....	33
Gambar 2.5	Trayektori Titik Pusat ( <i>Center</i> ) Stabil pada Potret Fase .....	34
Gambar 3.1	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.1) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.1$ .....	63
Gambar 3.2	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.1) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.0$ .....	64
Gambar 3.3	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.1$ dan $\tau = 3.05$ .....	67
Gambar 3.4	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.1$ dan $\tau = 3.55$ .....	67
Gambar 3.5	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.1$ dan $\tau = 3.75$ .....	68
Gambar 3.6	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.1$ dan $\tau = 3.85$ .....	68
Gambar 3.7	Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model <i>predator-prey</i> tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan $h = 0.1$ dan $\tau = 3.95$ .....	69

## DAFTAR SIMBOL

$x(t)$	: <i>Prey</i> terhadap waktu $t$
$y(t)$	: <i>Predator</i> terhadap waktu $t$
$r$	: Tingkat pertumbuhan instrinsik <i>prey</i>
$d$	: Tingkat kematian alami <i>predator</i>
$\alpha$	: Tingkat predasi <i>prey</i> oleh <i>predator</i>
$\beta$	: Tingkat konversi <i>prey</i> yang dikonsumsi menjadi <i>predator</i>
$\delta$	: Koefisien kompetisi antar populasi
$1 - e^{-\alpha x}$	: Respons fungsional tipe Ivlev
$h$	: Rasio koefisien Tangkapan
$\tau$	: Waktu tunda

## ABSTRAK

Akbar, Ulil Amri. 2020. **Analisis Kestabilan Model *Predator-prey* dengan Waktu Tunda pada *Trophic Transfer* Tidak Sempurna**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Heni Widayani, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

**Kata kunci:** *predator*, *prey*, *pemanenan*, waktu tunda, analisis kestabilan, titik kesetimbangan

Model *predator-prey* pada *trophic transfer* tidak sempurna merupakan model interaksi antara dua jenis populasi yang memiliki respon fungsional bertipe Ivlev. Dalam model ini tingkat predasi *prey* oleh *predator* lebih kecil dari tingkat konversi *prey* yang dikonsumsi menjadi *predator*. Selanjutnya, model *predator-prey* ini dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa non-linier bergantung waktu. Model matematika ini menggambarkan banyaknya individu disetiap popuasi pada jangka panjang. Dalam penelitian ini, pada populasi *prey* dilakukan penambahan faktor pemanenan dan waktu tunda. Pemanenan diasumsikan sebagai penangkapan *prey* yang dilakukan oleh manusia dalam ekosistem. Waktu tunda diasumsikan bagi populasi *prey* sebagai bentuk reproduksi dari satu generasi ke generasi lainnya.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat lima titik kesetimbangan, diantaranya menghasilkan dua titik kesetimbangan yang stabil. Dua titik kesetimbangan tersebut memiliki kondisi khusus yaitu ketika pemanenan  $h = 0.1$  dan ketika tidak ada pemanenan  $h = 0.0$ . Model *predator-prey* dengan pemanenan  $h = 0.1$  memiliki titik kesetimbangan yang stabil adalah  $(x^*, y^*) = (0.5407115622, 0.3475682133)$ . Model *predator-prey* dengan pemanenan  $h = 0.0$  memiliki titik kesetimbangan yang stabil adalah  $(x^*, y^*) = (0.618123303, 0.4634579675)$ .

Hasil dari solusi numerik menunjukkan bahwa apabila model *predator-prey* ditambah dengan waktu tunda maka akan menghasilkan kestabilan dengan besaran waktu yang berbeda. Besarnya waktu tunda yang diberikan mengakibatkan kedua populasi untuk mencapai tingkat kestabilan pada titik kesetimbangan menjadi semakin lama dan begitu juga sebaliknya. Dalam penelitian ini belum sampai pada batasan pemanenan konstan pada kedua populasi, maka disarankan untuk penelitian selanjutnya diberikan perlakuan pemanenan berupa fungsi terhadap kedua populasi.

## ABSTRACT

Akbar, Ulil Amri. 2020. **Stability Analysis of Predator-Prey Models with Time Delayed on Incomplete Trophic Transfer**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Heni Widayani, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

**Keywords:** predator, prey, harvesting, time-delayed, stability analysis, equilibrium

The predator-prey model incomplete trophic transfer is an interaction model between two types of population that have a functional response of type Ivlev. In this model, the predation rate of prey by predators is smaller than the conversion rate of prey consumed to predators. Furthermore, the predator-prey model is expressed in terms of a time-dependent non-linear system of ordinary differential equations. This mathematical model describes the number of individuals in each population in the long run. In this study, the prey population was added to the harvesting factor and time delay. Harvesting is assumed to be catching prey by humans in the ecosystem. The time delay is assumed for the prey population as a form of reproduction from one generation to another.

The results of this study indicate that there are five points of equilibrium, including two points of stable equilibrium. The two points of equilibrium have special conditions, namely when the harvest is  $h = 0.1$  and when there is no harvest  $h = 0.0$ . The predator-prey model with harvesting  $h = 0.1$  has a stable equilibrium point  $(x^*, y^*) = (0.5407115622, 0.3475682133)$ . The predator-prey model harvesting with  $h = 0.0$  has a stable equilibrium point  $(x^*, y^*) = (0.618123303, 0.4634579675)$ .

The results of the numerical solution show that if the predator-prey model is added to the time delay it will produce stability with different time magnitudes. The amount of time delay given causes both populations to reach a level of stability at the equilibrium point to be longer and vice versa. In this study, it has not reached the limit of constant harvesting in both populations, yet it is recommended for further research to provide harvesting treatment in the form of a function for both populations.

## مستخلص البحث

أكبر. أولي الأمري, 2020. تحليل الاستقرار لنموذج المفترس الفريسة مع وقت التأخير في النقل الغذائي غير الكامل. البحث الجامعي. قسم الرياضيات . كلية علوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف : (1) حيني وداياني الماجستير (2) جوهاري الماجستير,

الكلمة المفتاحية : المفترس, الفريسة, الخصاد, وقت التأخير, تحليل الاستقرار, نقطة الموازنة

نموذج المفترس والفريسة في النقل الغذائي غير الكامل هو نموذج تفاعل بين نوعين من السكان على الأقل لهما استجابة وظيفية من النوع Ivlev . في هذا النموذج ، يكون معدل افتراس الفريسة من قبل الحيوانات المفترسة أقل من معدل تحويل الفريسة المستهلكة إلى الحيوانات المفترسة. علاوة على ذلك ، يتم التعبير عن نموذج المفترس والفريسة هذا من خلال نظام غير خطي يعتمد على الوقت من المعادلات التفاضلية العادية. يصف هذا النموذج الرياضي عدد الأفراد في كل مجموعة على المدى الطويل . في هذه الدراسة ، تمت إضافة عدد الفرائس إلى عامل الحصاد والتأخير الزمني. يفترض أن الحصاد يصطاد فريسة من قبل البشر في النظام البيئي. يُفترض أن التأخير الزمني لمجموعات الفرائس هو شكل من أشكال التكاثر من جيل إلى آخر.

تشير نتائج هذه الدراسة إلى أن هناك خمس نقاط توازن ، بما في ذلك نقطتا توازن مستقر. نقطتا التوازن لهما شروط خاصة ، أي عندما يكون الحصاد  $h = 0.1$  وعندما لا يكون هناك حصاد  $h = 0.0$ . نموذج المفترس والفريسة مع الحصاد  $h = 0.1$  له نقطة توازن مستقرة  $(x^*, y^*) = (0.5407115622, 0.3475682133)$  . نموذج المفترس والفريسة مع  $h = 0.0$  له نقطة توازن مستقرة  $(x^*, y^*) = (0.618123303, 0.4634579675)$ .

تظهر نتائج الحل العددي أنه إذا تمت إضافة نموذج المفترس والفريسة إلى التأخير الزمني ، فسوف ينتج عنه استقرار بمقادير زمنية مختلفة يؤدي مقدار التأخير الزمني المعطى إلى وصول كلا المجموعتين إلى مستوى من الاستقرار عند نقطة التوازن لتكون أطول والعكس صحيح. في هذه الدراسة ، لم تصل إلى حد الحصاد المستمر في كلا المجموعتين ، لذلك يوصى بإجراء مزيد من البحث لتوفير علاج الحصاد في شكل وظيفة لكلا المجموعتين.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Pada dasarnya semua makhluk yang hidup di dunia ini melakukan interaksi baik secara positif maupun secara negatif untuk bertahan hidup. Interaksi yang terjadi antara individu satu dengan individu yang lain baik sesama jenis populasi maupun berbeda jenis populasi. Salah satu bentuk interaksi pada makhluk hidup yaitu saling memangsa antara populasi satu dengan populasi lainnya demi keberlangsungan hidup. Interaksi tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk matematika yang dinamakan model *predator-prey* yang diperkenalkan oleh Vito Volterra atau lebih dikenal dengan model *Lotka-Volterra*.

Menurut Iswanto (2012), pada model *predator-prey* terdapat dua jenis sistem interaksi. Pertama yaitu jenis sistem interaksi antara dua populasi yang salah satunya dimangsa. Dalam kasus ini, interaksi tersebut yaitu *prey* (mangsa) dimangsa oleh *predator* (pemangsa). Kemudian jenis sistem interaksi kedua yaitu adanya persaingan dalam memperebutkan satu populasi mangsa. Dalam kasus ini, interaksi tersebut yaitu *prey* diburu oleh dua *predator*, dengan *predator* pertama dan *predator* yang kedua yaitu pemanenan yang dilakukan oleh manusia.

Model mangsa memangsa *Lotka-Volterra* selanjutnya dimodifikasi dengan menambahkan faktor lain, misalnya (1) tingkat kompetisi antara *predator* dan *prey* dan (2) campur tangan manusia. Dengan adanya *predator* dalam populasi, maka pertumbuhan *prey* menjadi terganggu. Walaupun di alam, *predator* tidak akan terus menerus memangsa *prey*. Artinya tingkat kematian *prey* di alam mengalami

penundaan atau perlambatan. Kejadian tertundanya kematian *prey* secara matematika diekspresikan sebagai fungsi waktu tunda. Ekspresi waktu tunda pada kompetisi *predator* dan *prey* ini pernah diteliti oleh Baretta dkk (1996) dan Ruan (2009). Ketika populasi *predator* tidak terkendali, maka populasi *prey* lambat laun akan punah dan mengakibatkan ketersediaan makanan untuk *predator* menjadi habis. Sehingga *predator* tidak dapat hidup karena putusya rantai makanan. Hal tersebut akan mengakibatkan populasi *predator* menjadi menurun artinya kematian bagi *predator* menjadi meningkat.

Berdasarkan hal tersebut, maka diperlukan adanya campur tangan manusia yang berperan sebagai *biological control*. Yang dimaksud sebagai *biological control* adalah sebuah upaya / intervensi dalam mengendalikan jumlah *predator* serta menjaga ketersediaan *prey* di alam supaya tidak sampai punah (Chen, 2013). Artinya peran *biological control* tersebut mengatur agar pertumbuhan *predator* dan *prey* tetap proporsional. Selanjutnya manusia yang bertindak sebagai *biological control* yaitu pemanenan dalam model *predator-prey*.

Zhang dkk (2015) menganalisis model *predator-prey* dimana terdapat satu *prey* dan dua *predator*. Kedua *predator* ini masing-masing didefinisikan sebagai *predator* tingkat I dan *predator* tambahan atau bisa disebut manusia sebagai pemanen dalam model tersebut. Model yang digunakan pada penelitian Zhang dkk (2015) ini bersifat non-linier. Metode untuk penyelesaiannya yaitu analisis dinamik dengan membahas eksistensi kesetimbangan / ekuilibrium dan kestabilan linier, kestabilan bifurkasi Hopf, dan simulasi numerik. Penelitian tersebut kemudian menghasilkan model yang sesuai untuk kontrol biologis suatu populasi yang difokuskan adanya efek dari pemanen dan waktu tunda.

Penelitian ini difokuskan pada analisis kestabilan antara biomasa *predator* dan biomasa *prey* dengan adanya pemanenan secara dinamik. Model yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada Zhang dkk (2015). Diasumsikan *predator* adalah biomasa *predator*, *prey* adalah biomasa *prey*, dan sebagai pemanen adalah manusia. Pemanenan dalam penelitian ini adalah kontrol manusia dengan cara memanen *prey*. Sementara pada biomasa *prey* terdapat adanya waktu tunda yaitu adanya regenerasi dari biomasa *prey*. Dengan adanya campur tangan manusia dan waktu tunda diharapkan dalam ekosistem tersebut banyaknya biomasa *predator* dan banyaknya biomasa *prey* dapat dikontrol jumlahnya.

Simulasi yang dilakukan dalam penelitian ini adalah perubahan nilai-nilai awal untuk populasi biomasa *predator* dan populasi biomasa *prey*. Akan tetapi, perubahan nilai awal pada peran waktu tunda disini justru menjadi penting sekali, karena yang memegang peran *biological control* disini adalah waktu tunda. Sehingga kestabilan yang diperoleh dari perubahan pada populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey* dikendalikan oleh besarnya perubahan nilai pada waktu tunda. Maka kedalaman dari penelitian ini yaitu melihat sejauh mana kestabilan yang diperoleh dari adanya perubahan nilai awal tersebut hingga menuju titik stabil. Sehingga nantinya dapat disimpulkan bagaimana kondisi dari suatu populasi tersebut agar tetap seimbang.

Salah satu tuntunan penting islam dalam hubungannya lingkungan dengan lingkungan adalah bagaimana menjaga keseimbangan alam atau lingkungan habitat yang ada tanpa merusaknya, karena tidak diragukan lagi bahwa Allah menciptakan segala sesuatu ini dengan perhitungan tertentu.

Sesuai dengan firman Allah SWT dalam Qs. Al-Mulk/67 ayat 15 sebagai berikut yang artinya :

“ *Dialah yang menjadikan bumi untuk kamu yang mudah dijelajahi, maka jelajahilah di segala penjurunya dan makanlah sebagian dari rezeki-Nya. Dan hanya lepada-Nyalah kamu (kembali setelah) dibangkitkan.*”

Dari ayat diatas terdapat kata makanlah sebagian dari rezeki-Nya. Kalimat tersebut beranalogi bahwa hendaklah mencari makan dari rizki Allah yang seperti sudah diterapkn dalam Al-qur'an. Mencari makan diibaratkan seperti rantai makanan yang tidak pernah terputus karena apabila ada kerusakan atau kepunahan atau populasi komponen tersebut yang tidak seimbang maka akan dapat menyebabkan kerusakan atau kepunahan dari komponen yang lain.

Penelitian tentang model *Lokta-Volterra* yang meliputi biomasa *predator* dan biomasa *prey* banyak terjadi disekitar kita. Hal ini berarti penelitian ini sangat penting dikaji. Terutama teknologi tentang bagaimana mengotrol upaya kondisi alam agar keseimbangan ekosistem menjadi terjaga.

Berdasarkan paparan diatas, maka peneliti mengambil judul “Analisis Kestabilan Model *Predator- Prey* dengan Waktu Tunda pada *Trophic Transfer* Tidak Sempurna”.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijabarkan, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini yaitu menganalisis kestabilan model *predator-prey* tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda pada *tropich transfer* yang tidak sempurna.

### 1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini yaitu untuk menganalisis kestabilan model *predator-prey* tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda pada *trophic transfer* yang tidak sempurna

### 1.4. Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian diharapkan dapat manfaat sebagai berikut:

1. Dapat mengetahui, memahami, menelaah serta menganalisis kestabilan model *predator-prey* tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda pada *trophic transfer* tidak sempurna, dan mengaplikasikannya ke kasus lain.
2. Dapat mengetahui hasil simulasi dari adanya perubahan nilai pemanenan dan nilai waktu tunda dari model *predator-prey* pada *trophic transfer* tidak sempurna.

### 1.5. Batasan Masalah

Agar pembahasan tidak melebar, maka penulis membatasi permasalahan yang dibahas pada penelitian ini yaitu:

1. Pada penelitian ini peneliti hanya meneliti tentang dua sistem persamaan dari model *prey-predator* dengan waktu tunda pada *trophic transfer* tidak sempurna yang sesuai pada jurnal Chang-qin ZHANG, Liping LIU, Ping YAN, dan Lin-zhong ZHANG (2015:235-246). Persamaan awal yang digunakan yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)(1 - x(t)) - (1 - e^{-ax(t)})y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t)[(1 - e^{-ax(t)}) - \delta y(t)] - dy(t)$$

dengan nilai awal  $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$ .

2. Pada persamaan *predator-prey* akan diberikan sebuah konstanta pemanenan pada *prey* berupa nilai konstanta  $h$  yang ditentukan dengan asumsi nilai pemanenan. Berikut persamaan dengan pemanenan:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)(1 - x(t)) - (1 - e^{-ax(t)})y(t) - hx(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t)[(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t)] - dy(t)$$

3. Pada persamaan *predator-prey* akan diberikan sebuah waktu tunda pada persamaan *prey*. Berikut persamaan dengan waktu tunda:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)[1 - x(t - \tau)] - (1 - e^{-ax(t)})y(t) - hx(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t)[(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t)] - dy(t)$$

### 1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menganalisis model *predator-prey* tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda pada *trophic transfer* tidak sempurna tersebut adalah menggunakan studi literatur atau *library research*. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adaah sebagai berikut :

1. Menganalisis titik kesetimbangan model *predator-prey* pada Zhang dkk (2015) tanpa dan dengan waktu tunda.
  - a. Mengambil model *predator-prey* pada *trophic transfer* tidak sempurna yang merujuk pada Zhang dkk (2015).
  - b. Mendeskripsikan setiap persamaan dari model matematika.
  - c. Menentukan titik ekuilibrium.

- d. Melakukan linearisasi terhadap model, kemudian dijadikan matriks Jacobian.
  - e. Mensubstitusikan nilai dari titik kesetimbangan / titik kesetimbangan terhadap matriks Jacobian.
  - f. Menentukan nilai Eigen.
  - g. Menganalisis kestabilan disekitar titik kesetimbangan.
2. Menganalisis kondisi kestabilannya.
- a. Menginterpretasi hasil simulasi terhadap model *predator-prey* pada *trophic transfer* tidak sempurna tanpa waktu tunda dengan adanya perubahan nilai awal populasi *predator* dan *prey*.
  - b. Menginterpretasi hasil simulasi terhadap model *predator-prey* pada *trophic transfer* tidak sempurna menggunakan waktu tunda dengan adanya perubahan nilai awal dari populasi *predator* dan *prey*.

### 1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini dibagi menjadi empat yaitu:

#### Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menguraikan tentang model *predator-prey*, model tanpa dan dengan waktu tunda, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, analisis kestabilan titik ekuilibrium, titik ekuilibrium, linierisasi,

kestabilan pada titik kesetimbangan, dan kajian al-Qur'an tentang kestabilan.

### Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang model *predator-prey* tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda pada *trophic tranfer* tidak sempurna, besaran parameter model, linierisasi model, penentuan titik kesetimbangan, analisis kesatabilan pada titik kesetimbangan, kemudian membuat simulasi dan menginterpretasikan hasil simulasi tersebut.

### Bab IV Penutup

Bab ini menyimpulkan hasil pembahasan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran dari penulis.



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Analisis Model *Predator-Prey* dengan Waktu Tunda pada *Trophic Transfer* Tidak Sempurna

Model *Predator-Prey* merupakan satu dari sekian model interaksi antara makhluk hidup dalam suatu ekosistem, dengan *prey* sebagai populasi yang dimangsa dan *predator* sebagai populasi yang memangsa. Model ini disebut juga sebagai model *Lotka Volterra* (Boyce & DiPrima, 1992). Asumsi dasar dari model *predator-prey* adalah setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan secara eksponensial. Interaksi yang terjadi antara *predator* dan *prey* akan mengakibatkan terjadinya proses memakan dan dimakan yang berpengaruh terhadap kepadatan populasi masing-masing.

Pada skripsi ini peneliti akan membahas tentang analisis kestabilan model *predator-prey* dengan dengan waktu tunda pada *trophic transfer* tidak sempurna dari penelitian Zhang (2015). Dalam model tersebut interaksi antara biomasa *predator* dengan populasi biomasa *prey*, karena ineteraksi tersebut menyebabkan adanya predasi. Predasi merupakan salah satu bentuk interaksi yang berkaitan dengan pengontrolan populasi biomasa *predator* dan biomasa *prey*. Selain itu, pada model tersebut terdapat *biological control*, yang mana dilakukan oleh *predator* lainnya dengan jumlah populasi biomasa *prey* dan biomasa *predator* yang sama dengan pemanennya.

Model *predator-prey* yang akan dibahas adalah model Zhang (2015) yaitu model *predator-prey* dengan waktu tunda pada *trophic transfer* tidak sempurna seperti berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - (1-e^{-\alpha x})y \\ \frac{dy}{dt} &= y[(1-e^{-\alpha x}) - \delta y] - dy\end{aligned}\tag{2.1}$$

di mana  $x(t)$  dan  $y(t)$  masing-masing adalah *prey* dan *predator*,  $r > 0$  adalah tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa,  $d > 0$  adalah tingkat kematian alami *predator*,  $\alpha > 0$  adalah tingkat konversi mangsa yang dikonsumsi oleh *predator*,  $\delta > 0$  koefisien kompetisi antar *predator*, dan  $(1 - e^{-\alpha x})$  adalah respon fungsional tipe Ivlev. Dalam model ini, transfer trofik antara mangsa dan *predator* diasumsikan sebagai transfer yang setara.

Berdasarkan model (2.1), maka model *predator-prey* dengan tingkat penyerapan trofik oleh *predator* yang berbeda dari tingkat konversi *prey* yang dikonsumsi menjadi *predator*  $\beta$  dalam respons fungsional tipe-Ivlev, maka menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - (1-e^{-\alpha x})y \\ \frac{dy}{dt} &= y[(1-e^{-\beta x}) - \delta y] - dy\end{aligned}\tag{2.2}$$

Selanjutnya memperhitungkan kerugian trofik dalam transfer dengan mengasumsikan  $0 < \beta \leq \alpha$ . Secara biologis dari variabel  $x$  dan  $y$ , dalam hal ini kita hanya perlu memperhatikan  $(x, y) \in R^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ .

Jika mempertimbangkan penangkapan *prey* (katakanlah, oleh manusia), dan mengasumsikan bahwa rasio penangkapan menjadi sebanding dengan populasi mangsa, model *predator-prey* dengan pemanenan adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1-x) - (1 - e^{-\alpha x})y - hx \\ \frac{dy}{dt} &= y[(1 - e^{-\beta x}) - \delta y] - dy\end{aligned}\quad (2.3)$$

di mana  $h$  adalah rasio koefisien penangkapan atau pemanenan.

Model (2.3) juga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx - rx^2 - (1 - e^{-\alpha x})y \\ \frac{dy}{dt} &= y[(1 - e^{-\beta x}) - \delta y] - dy\end{aligned}\quad (2.4)$$

dimana  $k = r - h$ . Untuk menunjukkan bahwa jika  $h \geq r$ , maka setiap solusi positif (2.4) akan konvergen ke  $(0,0)$ . Dari makna biologis pada  $d$  diketahui bahwa  $d < 1$ . Dengan demikian, dalam rentang parameter di atas, dinamika model (2.4) diketahui sepenuhnya. Oleh karena itu, perlu diasumsikan bahwa  $d < 1$  dan  $h < r$  (maka  $k > 0$  dan  $0 < k/r < 1$ ).

Diperlukan pertimbangan untuk laju pertumbuhan *prey* dengan waktu tunda bagi *prey* untuk berproduksi dari satu generasi ke generasi lainnya. Akan diselidiki model *predator-prey* tipe Ivlev tertunda berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t)[1 - x(t - \tau)] - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t) - hx(t) \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)[(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t)] - dy(t)\end{aligned}\quad (2.5)$$

di mana  $\tau \geq 0$  menunjukkan waktu tunda.

Model (2.5) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx(t) - rx(t)x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t) - dy(t)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Tabel 2.1 Keterangan Model (Zhang dkk, 2015)

Variabel	Deskripsi Variabel	Satuan
$x(t)$	<i>Prey</i> terhadap waktu $t$	Biomasa/bulan
$y(t)$	<i>Predator</i> terhadap waktu $t$	Biomasa/bulan

Tabel 2.2 Parameter (Zhang dkk, 2015)

Parameter	Identifikasi	Satuan
$r$	Tingkat pertumbuhan instrinsik <i>prey</i>	Biomasa/bulan
$d$	Tingkat kematian alami <i>predator</i>	Biomasa/bulan
$\alpha$	Tingkat predasi <i>prey</i> oleh <i>predator</i>	Biomasa/bulan
$\beta$	Tingkat konversi <i>prey</i> yang dikonsumsi menjadi <i>predator</i>	Biomasa/bulan
$\delta$	Koefisien kompetisi antar populasi	Biomasa/bulan
$1 - e^{-\alpha x}$	Respons fungsional tipe Ivlev	-
$h$	Rasio koefisien Tangkapan	Jiwa/bulan
$\tau$	Waktu tunda	-

Parameter yang dipakai dalam model *predator-prey* dengan waktu tunda ini menggunakan parameter dari penelitian Zhang dkk (2015), yaitu:

**Tabel 2.3** Nilai Parameter untuk Model (Zhang dkk, 2015)

Parameter	Nilai Awal
$r$	0.6
$d$	0.15
$\alpha$	0.59
$\beta$	0.5
$\delta$	0.25
$h$	0.1
$\tau$	$3.6 < \tau < 3.6$

Menurut Finizio dan Lada (1998), model *predator-prey* merupakan sistem persamaan non-linier dan tidak ada cara yang diketahui untuk menyelesaikan secara eksplisit, meskipun demikian dimungkinkan dengan menggunakan teori kualitatif mengenai sistem semacam itu. Menurut Waluya (2006), terdapat dua kunci konsep dalam sistem non-linier yang menentukan semua hasil dinamik. Dua konsep tersebut adalah titik keseimbangan (titik *equilibrium*) dan kestabilan.

Menurut Dwaradi (2011), model *Lotka-Volterra* layak digunakan jika interaksi yang terjadi hanya intrapopulasi. Intrapopulasi dapat diartikan interaksi yang terjadi antara populasi satu dengan populasi yang lain. Model ini tidak layak dapat digunakan dalam kehidupan nyata dengan tidak terbatasnya kapasitas mangsa. Jika model ini terdapat keterbatasan kapasitasnya, maka model ini tidak layak dapat digunakan. Pada penelitian ini akan digunakan model *Lotka-Volterra*

yaitu model *predator-prey* dengan adanya perlakuan pemanenan pada populasi *prey*.

## 2.2 Persamaan Diferensial Tundaan Pada Matematika Biologi

Penggunaan persamaan diferensial biasa dan parsial untuk memodelkan sistem biologis memiliki sejarah panjang, berasal dari Malthus, Verhulst, Lotka, dan Volterra. Karena model-model ini digunakan dalam upaya untuk memperbaiki pemahaman tentang fenomena yang semakin rumit, menjadi jelas bahwa model paling sederhana tidak dapat menangkap beragam dinamika yang diamati dalam sistem alam. Ada banyak pendekatan yang mungkin untuk menangani kompleksitas ini. Di satu sisi, seseorang dapat membangun sistem yang lebih besar dari persamaan diferensial biasa atau parsial, yaitu sistem dengan persamaan diferensial yang lebih banyak. Sistem ini bisa sangat baik dalam mendekati perilaku yang diamati, tetapi mereka menderita karena jatuhnya mengandung banyak parameter, sering menandakan jumlah yang tidak dapat ditentukan secara eksperimental. Lebih jauh, mendapatkan intuisi tentang komponen mana yang paling penting dalam menentukan budaya perilaku bisa sangat sulit.

Pendekatan lain yang mendapatkan keunggulan adalah dimasukkannya istilah waktu tunda dalam persamaan diferensial. Keterlambatan atau kelambatan dapat mewakili waktu kehamilan, periode inkubasi, keterlambatan transportasi, atau hanya dapat menyatukan proses biologis yang rumit menjadi satu, hanya menghitung waktu yang diperlukan untuk proses ini terjadi. Model semacam itu memiliki keuntungan menggabungkan derivasi yang sederhana dan intuitif dengan berbagai kemungkinan budaya perilaku untuk satu sistem. Di sisi negatif, model-

model ini menyembunyikan sebagian besar cara kerja sistem biologis yang rumit, dan terkadang justru detail-detail inilah yang menarik. Model keterlambatan menjadi lebih umum, muncul di banyak cabang pemodelan biologis (Jonathan, 2005).

### 2.2.1 Dasar-Dasar Persamaan Diferensial Tundaan

Menurut Jonathan (2005), walaupun mirip dengan persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial tunda memiliki beberapa fitur yang membuat analisisnya lebih rumit. Mari periksa contoh dari bentuk

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

Memulai dengan masalah nilai awal membutuhkan lebih banyak informasi daripada masalah analog untuk sistem tanpa penundaan. Untuk sistem diferensial biasa, solusi khusus ditentukan oleh titik awal dalam ruang Euclidean pada waktu awal  $t_0$ . Untuk sistem diferensial tunda, memerlukan satu informasi pada seluruh interval  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Jelas, untuk mengetahui laju perubahan pada  $t_0$ , diperlukan  $x(t_0)$  dan  $x(t_0 - \tau)$ , dan untuk  $\dot{x}(t_0 + \varepsilon)$ , perlu mengetahui  $x(t_0 + \varepsilon)$  dan  $x(t_0 + \varepsilon - \tau)$ . Jadi, agar masalah nilai awal masuk akal, diperlukan memberi fungsi awal, nilai  $x(t)$  untuk interval  $[-\tau, 0]$ . Setiap fungsi awal tersebut menentukan solusi unik untuk persamaan diferensial keterlambatan. Jika fungsi awal kontinu, maka solusinya memiliki dimensi yang sama dengan  $\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R})$ . Dengan kata lain, itu adalah dimensi tak terbatas.

Sifat persamaan diferensial keterlambatan berdimensi tak terbatas tampak jelas dalam studi sistem linear. Seperti halnya persamaan diferensial biasa, mencari

solusi eksponensial dan menghitung persamaan karakteristik. Dari persamaan polinomial sampai pada persamaan transendental dari bentuk

$$P_0(\lambda) + P_1(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

di mana  $P_0$  dan  $P_1$  adalah polinomial dalam  $\lambda$ . Secara umum, persamaan ini memiliki banyak sekali solusi, sesuai dengan kumpulan tak terbatas dari solusi independen terhadap persamaan diferensial linier. Analisis stabilitas linier dengan demikian lebih sulit untuk persamaan diferensial ini. Untuk lebih lanjut akan dibahas pada sistem persamaan diferensial tundaan.

### 2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan sistem persamaan yang melibatkan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berikut ini akan diberikan vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  dan  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Apabila notasi  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  digunakan untuk menyatakan turunan  $x$  terhadap  $t$  maka dapat diperoleh,

$$\dot{x} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T.$$

Selanjutnya diberikan sistem *autonomous* sebagai berikut ini :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.7}$$

Sistem *autonomous* merupakan sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas implisit dengan  $x \in L \subset \mathbb{R}^n, f: L \rightarrow \mathbb{R}^n, L$  adalah himpunan terbuka dan  $f \in C^1(L)$  dengan  $C^1$  adalah notasi himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di  $L$ . berdasarkan paparan tersebut, maka sistem persamaan (2.7) dapat ditulis menjadi berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

### 2.3.1 Sistem Persamaan Differensial Linear

Sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan variabel tak bebas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel bebas  $t$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_n(t)$$

(2.8)

Jika  $g_i, i = 1, 2, \dots, n$  bernilai nol, maka sistem persamaan (2.8) disebut sebagai sistem persamaan diferensial linier homogen, sedangkan jika bernilai tak nol maka sistem persamaan (2.8) disebut sistem persamaan diferensial linier nonhomogen.

Sistem persamaan diferensial pada (2.8) selanjutnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{G}(t) \quad (2.9)$$

dengan  $\mathbf{A}$  adalah matriks  $n \times n$  yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dengan  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  serta  $j = 1, 2, \dots, n$  dan  $\mathbf{G}(t)$  adalah matriks berukuran  $n \times 1$  yang merupakan fungsi  $t$ . Oleh karena itu, persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

**Contoh :**

Berikut ini diberikan sistem persamaan diferensial linear:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

Sistem persamaan di atas merupakan persamaan diferensial linear.

### 2.3.2 Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear

Sistem persamaan diferensial non-linear merupakan sistem persamaan diferensial biasa tak linear. Persamaan diferensial disebut non-linear jika persamaan tersebut memenuhi salah satu kriteria berikut ini (Wiggins, 1990) :

- 1) Memuat variabel tak bebas dari turunannya yang berpangkat selain satu.
- 2) Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunannya.
- 3) Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunannya.

**Contoh :**

Berikut ini diberikan sistem persamaan differensial non-linear:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + x_2$$

Sistem persamaan di atas merupakan sistem persamaan differensial non-linear dengan variabel bebas  $t$  dan variabel tak bebas  $x_1$  serta  $x_2$ . Hal ini dikarenakan sistem persamaan differensial pada persamaan di atas terdapat perkalian antara variabel tak bebas  $x_1$  dan  $x_2$  untuk persamaan pertama dan untuk persamaan kuadrat dari variabel tak bebas  $x_1$ .

### 2.3.3 Sistem Persamaan Diferensial Tundaan

Salah satu bagian dari persamaan diferensial yang masih dipertimbangkan sampai sekarang adalah persamaan diferensial dengan waktu tunda atau *delay differential equations* (DDEs). Waktu perlambatan sangat penting untuk diperhitungkan dalam dunia pemodelan karena keputusan dibuat berdasarkan suatu realita. Merupakan suatu hal yang penting untuk mempertimbangkan model populasi dengan waktu tunda dimana laju pertumbuhan tidak hanya bergantung pada waktu  $t$  tetapi juga bergantung pada waktu  $(t - \tau)$  dimana  $\tau$  adalah waktu perlambatan atau waktu tunda.

Misalkan  $x$  adalah variabel terikat,  $t$  adalah variabel bebas dan  $\tau$  adalah sebarang konstanta positif. Untuk sebarang persamaan yang mempunyai bentuk

$$F(x(t), x'(t), x(t - \tau), x'(t - \tau), t) = 0 \quad (2.10)$$

Disebut sebagai persamaan diferensial dengan waktu tunda orde pertama dengan sebuah konstanta tunda. Jika persamaan tidak tergabung dengan  $x'(t - \tau)$  maka

disebut persamaan diferensial yang diperlambat. Jika persamaan tergabung dengan  $x'(t - \tau)$  maka disebut persamaan diferensial netral.

Persamaan (2.10) disebut orde pertama karena pada persamaan tersebut terdapat turunan tertingginya adalah turunan orde pertama dan disebut memiliki sebuah konstanta karena pada kenyataannya persamaan hanya memiliki satu waktu tunda saja yaitu  $\tau$  (Cain dan Reynold, 2010).

Jika suatu sistem dikontrol oleh loop umpan balik di mana ada penundaan, maka osilasi dapat terjadi. Kami telah melihat satu contoh yang dapat dianggap sebagai efek penundaan, ketika ada musim kawin yang terpisah dan ukuran populasi pada waktu  $n + 1$  tergantung pada apa itu pada waktu  $n$ , tetapi ada banyak lainnya. Salah satu model pertama yang memasukkan penundaan adalah oleh Volterra (1926), yang memperhitungkan waktu yang dibutuhkan untuk polutan yang dihasilkan oleh suatu populasi untuk menumpuk, yang pada akhirnya meningkatkan tingkat kematian populasi. Penundaan juga mungkin karena waktu pengembangan, populasi itu sendiri, atau sumber dayanya. (N.F. Britton, 2003)

Menurut Kuang (1993), persamaan differensial dengan tundaan dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0. \quad (2.11)$$

Parameter  $\tau$  adalah waktu tunda. Misalkan  $x(t) = e^{\lambda t}$ , maka persamaan (2.11) dapat juga ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0.$$

$$e^{\lambda t} \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0.$$

Karena  $e^{\lambda t} \neq 0$ , sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (2.11).

misalkan:

$$p_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad \text{dan} \quad p_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

Maka persamaan (2.12) dapat ditulis kembali sebagai

$$p_1(\lambda) + p_2(\lambda) e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.13)$$

Sistem persamaan differensial dengan waktu tunda dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_1(t - \tau))$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2(t), x_2(t - \tau))$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_n(t), x_n(t - \tau))$$

#### 2.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Secara umum analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat diselesaikan dengan sistem dinamik yang didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan diferensial dimana dalam persamaannya mengandung parameter-parameter yang

saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut akan menyebabkan perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium.

Titik ekuilibrium merupakan salah satu kunci konsep dalam sistem dinamik. Sistem yang lebih umum dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t),$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t).$$

Dengan  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = 1, 2, \dots, n$  adalah suatu fungsi umum dari  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  dan waktu  $t$ . Sistem tersebut dapat disederhanakan lagi menjadi sistem fungsi tak tergantung pada waktu (*sistem autonomous*), sebagai berikut:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Dengan  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  adalah fungsi yang tak tergantung secara *eksplisit* dari waktu  $t$ . Kemudian sistem tersebut dianalisis dengan memikirkan konsep tentang ekuilibrium. Ekuilibrium akan terjadi apabila tidak ada gerakan dalam sistem tersebut, artinya  $x_i' = 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Titik ekuilibrium akan memenuhi

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

$$f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

Karena  $x_i' = 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Berikut definisi titik ekuilibrium dari sistem dinamik

#### 2.4.1 Titik Ekuilibrium

Titik  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in R^n$  disebut titik ekuilibrium dari sistem jika  $f_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, n$  (Perko, 1991).

Diberikan persamaan diferensial orde satu,  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ . Solusi dengan kondisi awal  $x(0) = x_0$  diindikasikan oleh  $x(t, x_0)$ . Vektor  $\bar{x}$  yang memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$  disebut titik ekuilibrium (Olsder, 2003).

#### 2.4.2 Linierisasi

Menurut Boyce dan DiPrima (2012), proses pendekatan persamaan diferensial non-linier dengan persamaan diferensial linier dinamakan linierisasi. Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial non-linier dengan persamaan linier untuk membantu memahami persamaan diferensial non-linier.

Suatu sistem autoomous dimana  $f$  dan  $g$  adalah non-linier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar  $(x^*, y^*)$  dengan melakukan ekspansi deret Taylor disekitar  $(x^*, y^*)$  dan menghilangkan suku non-liniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Bila dilakukan substiusi  $(x - x^*) = u$  dan  $(y - y^*) = v$  maka  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$

dan  $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$  pada keadaan setimbang  $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$  sehingga

siperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks,

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sehingga sistem linier pada titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  diberikan dengan,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

dimana semua turunan parsial didalam matriks adalah hasil daripada  $(x^*, y^*)$ .

### 2.4.3 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial pertama dari berbagai fungsi.

**Contoh :**

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x) - y(x) = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\mu(x) - D) = g(x, y)$$

Sehingga bentuk matriks Jacobian berukuran  $2 \times 2$  adalah:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Jika  $P(x_1, y_1) = Q(x_2, y_2) = 0$  adalah titik setimbang dari sistem autonomus maka titik setimbangnya dapat ditulis:

$$\frac{dx}{dt} = P(x_1, y_1)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x_2, y_2)$$

Hasil linierisasi matriks Jacobian dengan titik setimbang  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_2, y_2)$ , dinamakan matriks  $A$  dapat ditulis:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} |_{x_1, y_2} & \frac{\partial f}{\partial y} |_{x_1, y_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} |_{x_1, y_2} & \frac{\partial g}{\partial y} |_{x_1, y_2} \end{pmatrix}$$

dengan  $\frac{\partial f}{\partial x} |_{x_1, y_2}$  merupakan nilai turunan pertama fungsi  $f$  terhadap variabel  $x$  di titik  $(x_1, y_2)$  (Zill dan Cullen, 2009).

#### 2.4.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara umum definisi nilai Eigen dan vektor Eigen adalah sebagai berikut.

##### Definisi 2.2

Misalkan  $A$  matrik  $n \times n$  dan  $x \in R^n, x \neq 0$ . Vektor  $x$  disebut vektor Eigen/ nilai karakteristik. Vektor  $x$  disebut vektor Eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Untuk mencari nilai dan vektor Eigen dari suatu matrik  $A$  berordo  $n \times n$  adalah sebagai berikut:

Misalkan  $A$  matrik  $n \times n$  dan  $v \in R^n, v \neq 0$  merupakan vektor Eigen dari matrik  $A$ , maka ada  $\lambda \in R$  sehingga

$$Av = \lambda v$$

$$Av = \lambda I v$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Jelas bahwa  $\lambda$  merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linier (SPL) homogen  $(\lambda I - A)v = 0$ . Karena  $v \neq 0$ , maka sistem persamaan homogen  $(\lambda I - A)v = 0$  mempunyai penyelesaian non trivial. Ini hanya terjadi jika determinan  $(\lambda I - A)v = 0$ , artinya  $\lambda$  adalah penyelesaian persamaan dari determinan  $(\lambda I - A)v = 0$ . Determinan  $(\lambda I - A)v = 0$  ini disebut persamaan karakteristik dari matrik  $A$ .

#### **Lemma $\lambda$**

Misalkan  $A$  matriks  $n \times n$  dan  $\lambda \in R$  adalah nilai Eigen dari matrik  $A$  jika dan hanya jika  $\lambda$  adalah akar karakteristik  $\det(\lambda I - A)v = 0$ . Sedangkan vektor Eigen dari matrik  $A$  yang disesuaikan dengan  $\lambda$  adalah penyelesaian dari SPL homogen  $(\lambda I - A)v = 0$ .

(Anton & Rorres, 2014)

#### **2.4.5 Kestabilan Titik Ekuilibrium**

Menurut Finizio dan Ladas (1988), penentuan kestabilan titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu  $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$  yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari suatu matrik  $A$ , yaitu  $(A - \lambda I) = 0$ . Secara umum kestabilan titik kesetimbangan mempunyai tiga perilaku sbagai berikut:

## 1) Stabil

Suatu nilai titik kesetimbangan dikatakan stabil jika:

- a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ( $\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ )
- b. Setiap komponen nilai eigen kompleks, bagian realnya lebih kecil atau sama dengan nol,  $Re(\lambda_i) \leq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$

## 2) Tidak Stabil

Suatu nilai titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika:

- a. Setiap nilai eigen real adalah positif ( $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ )
- b. Setiap komponen nilai eigen kompleks, bagian realnya lebih besar atau sama dengan nol,  $Re(\lambda_i) \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$

3) Pelana (*Saddle*)

Suatu nilai titik kesetimbangan dari suatu sistem *autonomous* adalah pelana jika perkalian dua nilai eigen real adalah negatif ( $\lambda_i, \lambda_j < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Kestabilan titik ekuilibrium dari sistem dinamik juga dapat ditunjukkan pada tabel sebagai berikut,

**Tabel 2.4** Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Dinamik (Boyce dan DiPrima, 2009)

No.	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
	$\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$		
1.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak stabil	<i>Node</i> / Simpul
2.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node</i> / Simpul
3.	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Tidak Stabil	<i>Saddle</i> / Pelana
4.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node</i> / Simpul
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node</i> / Simpul
	$\lambda_1, \lambda_2 = a + bi \in \mathbb{C}$		
6.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
7.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
8.	$a = 0$	Stabil	Terpusat

## 2.5 Potret Fase Dari Sistem Autonomous

Menurut Finizio dan Ladas (1988:296), diberikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, y) \text{ dan } \dot{y} = g(x, y)$$

Dimana fungsi-fungsi  $f$  dan  $g$  bebas dari waktu disebut autonomous, jika  $(x_0, y_0)$  sembarang titik di  $R$  dan jika  $t_0$  sembarang bilangan riil maka penyelesaian tunggal dari sistem persamaan tersebut yaitu:

$$x = x(t) \text{ dan } y = y(t)$$

Dengan nilai  $t$  yang didefinisikan di dalam suatu selang  $a < t < b$  yang memuat  $t_0$  maka memenuhi syarat awal

$$x_0 = x(t_0) \text{ dan } y_0 = y(t_0)$$

Pandang  $t$  sebagai parameter, maka bila  $t$  berubah di dalam selang  $a < t < b$ , titik  $(x(t), y(t))$  menelusuri sebuah kurva yang disebut trayektori atau orbit dari penyelesaian sistem tersebut di bidang  $xy$ . Dalam kajian dari sistem ini pasangan  $(x, y)$  disebut fase dari sistem, bidang  $xy$  pada umumnya disebut bidang fase yang digambarkan dengan parameter oleh suatu penyelesaian dari sistem.

Menurut Finizio dan Ladas (1988:296), gambar semua trayektori dari suatu sistem disebut potret fase dari sistem. Potret fase dari sebuah sistem hampir seluruhnya bergantung pada akar  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ . Terdapat lima kasus perilaku solusi yang telah dibahas pada subbab 2.5, kemudian pada subbab ini akan diberi contohnya dan potret fasen sebagai berikut:

**Kasus 1.** Jika nilai-nilai eigennya riil, berbeda dan bertanda sama.

Diberikan sistem sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y$$

maka akar-akar karakteristik dari sistem tersebut adalah -1 dan -3 (sama tanda) sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

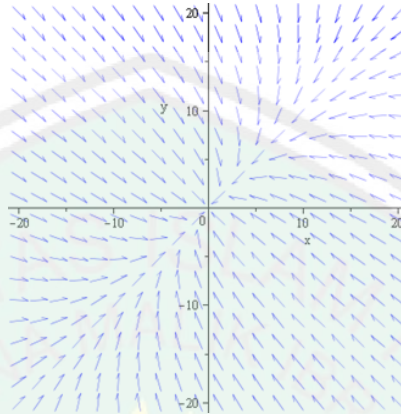
$$y(t) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}$$

dan sistem tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0). Sedangkan bidang fase

tersebut adalah

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}}{C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}}$$

Maka bidang fasenya sebagai berikut



**Gambar 2.1** Trayektori Titik Simpul (*Node*) Tidak Stabil pada Potret Fase

Semua trayektori ini menunjukkan titik asal dan menyinggung garis  $y = x$ , hal ini menunjukkan bahwa semua trayektori dari sistem tersebut, pasangan garis  $y = x > 0$  dan  $y = - < 0$ , menuju ke titik asal dengan menyinggung garis  $y = x$ . Titik kesetimbangan ini disebut titik simpul stabil. Jika  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , potret fase tetap sama akan tetapi arah panah dibalik trayektori menuju ke titik asal bila  $t \rightarrow -\infty$ . Titik kesetimbangan tipe ini disebut titik simpul tidak stabil.

**Kasus 2.** Jika nilai-nilai eigennya riil, berbeda dan berbeda tanda

Diberikan sistem dua persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -3x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$$

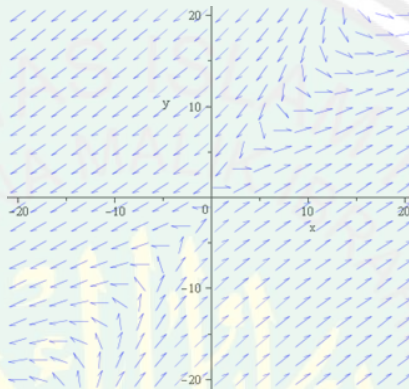
akar-akar karakteristik dari sistem tersebut adalah 2 dan -1 (berlawanan tanda)

sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$$

sistem dua persamaan diferensial tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0). berdasarkan solusi yang dihasilkan dapat digambarkan kurva trayektori dalam bidang fase sebagai berikut



**Gambar 2.2** Trayektori Titik Pelana (Saddle) pada Poret Fase

dari bidang fase tersebut menyatakan bahwa semua trayektori asimtotik ke garis  $y = 2x$ , bila  $t$  menuju ke  $-\infty$ . Titik kesetimbangan ini dinamakan titik pelana karena salah satu akar karakteristiknya positif, maka titik pelana adalah tidak stabil.

**Kasus 3.** Jika nilai-nilai eigennya riil dan sama (akar kembar)

Diberikan sistem dua persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -2y$$

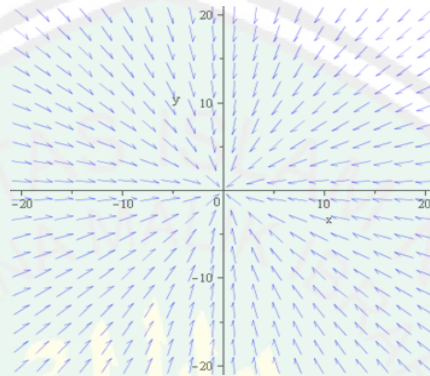
$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

akar-akar karakteristik dari sistem tersebut adalah -2 (akar kembar) sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x(t) = C_1 e^{-2t}$$

$$y(t) = C_1 e^{-2t}$$

sistem dua persamaan diferensial tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0). dari solusi yang dihasilkan dapat digambarkan kurva trayektori dalam bidang fase sebagai berikut



**Gambar 2.3** Trayektori Titik Star Stabil pada Potret Fase

Potret fase dari sistem ini mempunyai titik kesetimbangan yang disebut titik simpul (titik *center*) stabil, jika  $\lambda < 0$ . Maka arah panah akan menuju ke titik kesetimbangan dan titik simpul tidak stabil, jika  $\lambda > 0$  maka arah panah berkebalikan menjauhi titik kesetimbangan.

**Kasus 4.** Jika nilai-nilai eigennya kompleks

Diberikan sistem dua persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x + 2y$$

Sistem tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0). Sedangkan akar-akar karakteristik ditentukan dari persamaan karakteristik sebagai berikut:

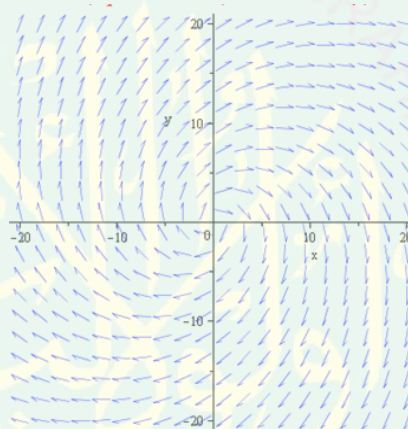
$$\lambda^2 - (-1 + 2)\lambda + ((-1)(-2) - (-3)3) = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 11 = 0$$

Sehingga dihasilkan  $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{35}i}{2}$  dan  $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{35}i}{2}$  yaitu akar-akar kompleks konjugat dengan bidang riil negatif, sedangkan potret fase sistem tersebut adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x + 2y}{x + 3y}$$

karena dihasilkan akar-akar kompleks konjugat dengan bagian riil yang positif, maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik spiral yang tidak stabil sebagai berikut



**Gambar 2.4** Trayektori Titik Spiral Tidak Stabil pada Potret Fase

Potret fase dari sistem ini mempunyai bentuk spiral dengan tipe titik kesetimbangan disebut fokus stabil jika bagian riilnya bernilai negatif dan fokus tidak stabil jika bagian riilnya bernilai positif.

**Kasus 5.** Jika nilai-nilai eigennya imajiner murni

Diberikan sistem dua persamaan diferensial sebagai berikut:

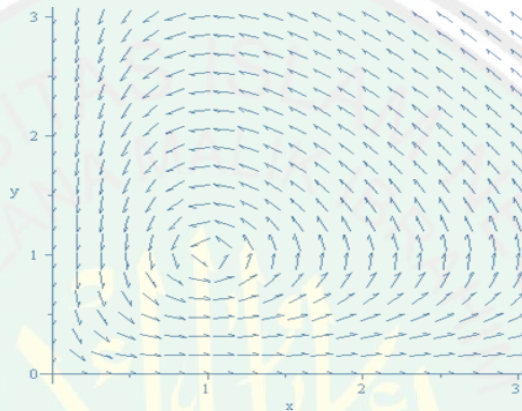
$$\frac{dx}{dt} = x - yx$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + yx$$

sistem tersebut memiliki titik kesetimbangan (1,1). Sedangkan akar-akar karakteristik ditentukan dari persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 - 8 = 0$$

maka akar-akar yang didapatkan yaitu  $i$  dan  $-i$ , maka tipe titik berupa titik pusat (*center*) dan jenis kestabilannya stabil asimtotik. Bisa disimulasikan berupa bidang fase sebagai berikut:



**Gambar 2.5** Trayektori Titik Pusat (Center) Stabil pada Potret Fase

Potret fase dari siste ini berbentuk lingkaran yang berpusat pada titik asal dengan tipe titik kesetimbangan disebut pusat. Dengan arah panah menuju ke titik kesetimbangan dan sistem ini stabil.

## 2.6 Kajian Al-Qur'an Tentang Kesetimbangan Lingkungan

Lingkungan menurut penafsiran Almaraghi yaitu segala sesuatu yang diciptakan Allah yang melingkupi kehidupan manusia, yakni langit, bumi, bulan, bintang, sesama manusia, binatang dan lain-lain. Semua itu diciptakan Allah menurut *sunnatullah* (hukum-hukum dan ketentuan Allah SWT), untuk mengatur segala yang telah diciptakan-Nya. Karena semuanya itu diciptakan Allah SWT dengan tujuan serta kesempurnaan, tanpa ada sedikitpun kecacatan (Al-Maraghi,

1993). Selain itu juga dijelaskan bahwa terciptanya langit dan bumi ini berdasarkan *haq* dan memiliki batas waktu yang ditentukan. *Al-haq* yang dimaksud Ibn ‘Asyur di sini adalah “Apa yang mestinya menjadi hikmah dan tujuan penciptaan langit dan bumi”. Tidak mungkin semua ini diciptakan dalam keadaan sia-sia (Quraish, 2002).

Adapun firman Allah SWT dalam Qs. Al-Mulk/67 ayat 3-4 sebagai berikut yang artinya :

*“Yang menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih. Maka lihatlah sekali lagi, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak cacat? Kemudian ulangi pandangan(mu) sekali lagi (dan) sekali lagi, niscaya pandanganmu akan kembali kepadamu tanpa menemukan cacat dan ia (pandanganmu) dalam keadaan letih” (Qs. Al-Mulk/67:3-4)*

Dalam tafsir Jalalain Jalaluddin Asy-syuyuti oleh Hidayah (2010:30) bahwa (yang telah menciptakan tujuh langit yang berlapis-lapis) yakni sebagian diantaranya berada di atas sebagian yang lain tanpa bersentuhan. (Tidak akan kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih) pada tujuh langit yang berlapis-lapis atau pada makhluk yang lain (sesuatu yang tidak seimbang) yang berbeda dan tidak seimbang (adakah yang kamu lihat) padanya (cacat?) maksudnya retak dan berbelah-belah. (Kemudian pandanglah sekali lagi) ulangilah penglihatanmu berkali-kali, (niscaya pandangan mu) akan kembali kepadamu (tanpa menemukan cacat) karena tidak menemukan sesuatu yang cacat (dan ia (pandanganmu) dalam keadaan letih) yakni tidak melihat sama sekali adanya cacat

Selanjutnya lingkungan yang memuat keseimbangan sistem ekologi menjadi hal yang penting untuk di kaji. Ekologi merupakan cabang ilmu yang

mempelajari hubungan timbal balik antara organisme dengan lingkungannya serta menganut prinsip keseimbangan semua komponen alam. Salah satu bahasan penting dalam ekologi yakni rantai makanan. Rantai makanan merupakan satu dari sekian yang menjadi penentu dari sebuah keseimbangan ekosistem yang bergerak secara linear dari produsen ke konsumen teratas. Dalam model *predator-prey* Lotka Voltera, pertumbuhan produsen mengalami kenaikan secara eksponensial jika diasumsikan tidak adanya konsumen. Selanjutnya produsen di alam dapat dianggap sebagai *prey* (mangsa) dan konsumen sebagai *predator* (pemangsa). Di sisi lain, Jorgensen (2009) mengatakan bahwa dalam suatu rantai makanan minimal terdapat dua macam populasi yaitu populasi *predator* (pemangsa) sebagai konsumen dan populasi *prey* (mangsa) sebagai produsen.

Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan berupa interaksi dua populasi yaitu interaksi antara populasi mangsa (*prey*) dengan pemangsa (*predator*). Model yang mendiskripsikan interaksi dua populasi yang terdiri dari *prey* dan *predator* adalah model rantai makanan dua populasi. Kehadiran *predator* memberikan pengaruh pada jumlah *prey*.

*Predator* pertama maupun *predator* kedua dengan *prey* hubungan sangat erat sebab apabila kehadiran *predator* kedua berkurang maka berpengaruh terhadap jumlah *predator* pertama maupun terhadap jumlah *prey* ataupun sebaliknya yakni jika *predator* kedua bertambah maka berpengaruh juga terhadap jumlah *predator* pertama maupun jumlah *prey*. Sehingga dalam hal ini dibutuhkan keseimbangan antar *predator* pertama, *predator* kedua maupun *prey*, karena apabila terjadi ketidakseimbangan diantara *predator* pertama, *predator* kedua maupun *prey* maka akan terjadi kepunahan diantara salah satu populasi tersebut atau bahkan semua

populasi tersebut akan punah.

Tafsir Jalalain, Jalaluddin al-Mahalli dan Jalaluddin as-suyuthi secara jelas mengatakan bahwa tidak ada satupun makhluk ciptaan Allah SWT yang diciptakan tidak seimbang. Dan menurut Musthafa Ahmad al-Maraghi dalam tafsir al-Maraghi bahwa alam raya ini diciptakan oleh Allah SWT dalam bentuk yang sangat serasi dan selaras. Seperti contoh dalam ilmu biologi, keserasian itu bisa disebut dengan istilah rantai atau jaring makanan karena apabila salah satu komponen tersebut tidak terpenuhi maka akan dapat mengganggu keseimbangan komponen yang lain atau bahkan bisa menyebabkan kepunahan komponen tersebut.

Apabila terjadi ketidakseimbangan dimuka bumi maka akan dapat menyebabkan kerusakan lingkungan tersebut. Kerusakan lingkungan tersebut disebabkan karena ulah dari manusia itu sendiri yang tidak mau menjaga keseimbangan dari lingkungan tersebut. Seperti yang tertulis dalam firman Allah Qs. Al-Qashash/28 ayat 77 sebagai berikut:

*“Dan carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bahagianmu dari (kenikmatan) duniawi dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik, kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di (muka) bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan.” ( Qs. Al-Qashash/28:77)*

Menurut Tafsir Al-muyassar dikatakan bahwa carilah dengan harta yang telah Allah berikan kepadamu pahala akhirat dengan melakukan amal ketaatan kepada Allah di dunia. Jangan meninggalkan bagianmu di dunia dengan cara menolak menikmati yang halal dengan berlebih-lebihan. Berbuat baiklah kepada manusia dengan bersedekah, sebagai mana Allah telah berbuat baik kepadamu melalui harta yang melimpah tersebut. jangan mencari apa yang Allah haramkan

atas kalian berupa perbuatan merusak di muka bumi dan pelanggaran terhadap kaummu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang yang berbuat kerusakan dan Dia akan membalas mereka atas perbuatan buruk mereka.

Dalam ayat tersebut juga dijelaskan bahwasannya Allah telah memberikan manusia kebahagiaan di dunia maupun di akhirat. Allah telah memberikan mereka rizki dari tiap-tiap makhluk yang hidup. Maka dari itu manusia harus berbuat baik kepada sesama maupun kepada yang lain seperti kepada hewan maupun kepada tumbuhan. Apabila manusia tidak berbuat baik kepada sesama maupun kepada yang lain maka akan terjadi kerusakan di lingkungan tersebut yang juga menyebabkan kerusakan di muka bumi dan sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang membuat kerusakan di muka bumi.

Salah satu tuntunan penting islam dalam hubungannya dengan lingkungan adalah bagaimana menjaga keseimbangan alam atau lingkungan habitat yang ada tanpa merusaknya, karena tidak diragukan lagi bahwa Allah menciptakan segala sesuatu di alam ini dengan perhitungan tertentu.

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Syarat Kestabilan Model *Predator-Prey*

Pada subbab ini model *predator-prey* yang akan dibahas adalah model Zhang dkk (2015) yaitu model *predator-prey* dengan tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda tipe Ivlev.

Model tanpa waktu tunda :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx(t) - rx^2(t) - (1 - e^{-ax(t)})y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)[(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t)] - dy(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Model dengan waktu tunda:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx(t) - rx(t)x(t - \tau) - (1 - e^{-ax(t)})y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= y(t)[(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t)] - dy(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Fokus pada pembahasan ini yaitu menentukan syarat kestabilan dari model *predator-prey* tanpa waktu tunda dan model *predator-prey* dengan waktu tunda ke dalam bentuk tabel sehingga dapat melakukan simulasi sesuai dengan syarat yang telah didapatkan. Selanjutnya simulasi yang dilakukan adalah simulasi untuk perubahan nilai awal suatu poplasi yang mana dapat mengarah pada seberapa banyak perubahan yang diakibatkan dengan waktu tunda sehingga kesetimbangan pada populasi tersebut tetap proposional.

### 3.1.1 Model Tanpa Waktu Tunda ( $\tau = 0$ )

#### 3.1.1.1 Penentuan Titik Ekuilibrium Model *Predator-Prey*

Menurut definisi titik kesetimbangan sistem (3.1) diperoleh ketika

$$\frac{dx}{dt} = kx(t) - rx^2(t) - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t) \quad (3.3.a)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(t)[(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t)] - dy(t) \quad (3.3.b)$$

Dari persamaan (3.3.a) tersebut didefinisikan  $\frac{dx}{dt} = 0$ , maka persamaan tersebut menjadi:

$$kx - rx^2 - (1 - e^{-\alpha x})y = 0$$

$$y = \frac{rx^2 - kx}{-(1 - e^{-\alpha x})}$$

Substitusikan ke persamaan (3.3.a)

$$kx - rx^2 - (1 - e^{-\alpha x}) \frac{rx^2 - kx}{-(1 - e^{-\alpha x})} = 0$$

$$kx - rx^2 - kx + rx^2 = 0$$

$$x(k - rx - k + rx) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } k - rx - k + rx = 0$$

Selanjutnya dari persamaan (3.3.b) didefinisikan  $\frac{dy}{dt} = 0$  dengan  $x = 0$  yang telah didapatkan, maka persamaannya menjadi :

$$y[(1 - e^{-\beta x}) - \delta y] - dy = 0$$

$$y[(1 - e^{-\beta 0}) - \delta y] - dy = 0$$

$$-\delta y^2 - dy = 0$$

$$y(-\delta y - d) = 0$$

$$y = 0 \text{ atau } -\delta y - d = 0$$

Substitusikan ke persamaan (3.3.a) dengan  $y = 0$  maka persamaannya menjadi :

$$kx - rx^2 - (1 - e^{-\alpha x})(0) = 0$$

$$kx - rx^2 = 0$$

$$kx = rx^2$$

$$x = \frac{k}{r}$$

Maka didapatkan titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0,0)$  yang selalu eksis dan titik kesetimbangan kedua  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$ .

Untuk selanjutnya ketika  $y \neq 0$ , maka:

$$-\delta y - d = 0$$

Maka persamaannya menjadi :

$$y = -\frac{d}{\delta}$$

Kemudian untuk  $y = -\frac{d}{\delta}$  maka persamaan (3.3.b) sebagai berikut:

$$\left(-\frac{d}{\delta}\right) \left[ (1 - e^{-\beta x}) - \delta \left(-\frac{d}{\delta}\right) \right] - d \left(-\frac{d}{\delta}\right) = 0$$

$$-\frac{d}{\delta} + \frac{d}{\delta} e^{-\beta x} - \frac{d^2}{\delta} + \frac{d^2}{\delta} = 0$$

$$\frac{d}{\delta} e^{-\beta x} - \frac{d}{\delta} = 0$$

$$e^{-\beta x} = \frac{d}{\delta} \cdot \frac{\delta}{d}$$

$$e^{-\beta x} = 1$$

$$\ln e^{-\beta x} = \ln 1$$

$$-\beta x = 0$$

$$x = 0$$

maka didapatkan titik kesetimbangan berikutnya  $E_3 = \left(0, -\frac{d}{\delta}\right)$ .

Maka pada titik kesetimbangan ini, didapatkan hasil titik kesetimbangan sebagai berikut :

1. Untuk titik kesetimbangan pertama yaitu  $E_1 = (0,0)$ . Pada titik kesetimbangan ini dapat diartikan bahwa jika populasi *prey* tidak ada, maka populasi *predator* juga tidak ada. Hal ini dikarenakan tidak adanya sumber makanan untuk populasi *predator*.
2. Untuk titik kesetimbangan kedua yaitu  $E_2 = (\frac{k}{r}, 0)$ . Pada titik kesetimbangan ini dapat diartikan bahwa jika populasi *predator* tidak ada, maka populasi *prey* tetap dapat bertahan hidup meskipun terdapat pemanenan pada populasi *prey*.
3. Untuk titik kesetimbangan ketiga yaitu  $E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$ . Pada titik kesetimbangan ini dapat diartikan bahwa jika populasi *prey* tidak ada, maka populasi *predator* mengalami penurunan atau pengurangan. Hal ini dikarenakan tidak adanya sumber makanan untuk populasi *predator*.

### 3.1.1.2 Linierisasi Model

Linierisasi merupakan salah satu metode lain yang digunakan untuk mentransformasi persamaan nonlinier menjadi persamaan diferensial linier dengan melakukan ekspansi deret Taylor dan menghilangkan suku non-linier di persekitaran titik kesetimbangan. Dari persamaan (3.3) dimisalkan sebagai berikut:

$$f(x, y) = kx(t) - rx^2(t) - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t)$$

$$g(x, y) = y(t)(1 - e^{-\beta x(t)}) - \delta y(t) - dy(t)$$

Sehingga persamaan (3.3) menjadi :

$$\dot{x}(t) = f(x, y)$$

$$\dot{y}(t) = g(x, y)$$

Maka akan dilakukan linierisasi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut :

1. Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0,0)$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \end{aligned} \quad (3.4)$$

dimana :

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= kx^* - rx^*x^* - (1 - e^{-ax^*})y^* & g(x^*, y^*) &= y^*(1 - e^{-\beta x^*}) - \delta y^* - dy^* \\ f_x(x^*, y^*) &= k - 2rx^* - ae^{-ax^*}y^* & g_x(x^*, y^*) &= \beta e^{-\beta x^*}y^* \\ f_y(x^*, y^*) &= -(1 - e^{-ax^*}) & g_y(x^*, y^*) &= (1 - e^{-\beta x^*}) - 2\delta y^* - d \end{aligned}$$

substitusikan titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$  ke persamaan (3.4) maka menjadi :

$$f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$f(x, y) = 0 + k(x - 0) + 0(y - 0)$$

$$f(x, y) = kx$$

$$g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$g(x, y) = 0 + 0(x - 0) - d(y - 0)$$

$$g(x, y) = -dy$$

Sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.3) dengan titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0,0)$

$$\dot{x}(t) = kx$$

$$\dot{y}(t) = -dy$$

2. Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan kedua  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$

sebagai berikut :

Dengan menggunakan cara yang sama, maka digunakan persamaan (3.4)

untuk melakukan linierisasi, dimana :

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= kx^* - rx^*x^* - (1 - e^{-\alpha x^*})y^* & g(x^*, y^*) &= y^*(1 - e^{-\beta x^*}) - \delta y^* - dy^* \\ f_x(x^*, y^*) &= k - 2rx^* - \alpha e^{-\alpha x^*}y^* & g_x(x^*, y^*) &= \beta e^{-\beta x^*}y^* \\ f_y(x^*, y^*) &= -(1 - e^{-\alpha x^*}) & g_y(x^*, y^*) &= (1 - e^{-\beta x^*}) - 2\delta y^* - d \end{aligned}$$

substitusikan titik kesetimbangan  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$  ke persamaan (3.4) maka menjadi :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &= \frac{k^2}{r} - r \frac{k^2}{r^2} - \left(1 - e^{-\frac{\alpha k}{r}}\right)0 + \left(k - \frac{2rk}{r} - 0\right)\left(x - \frac{k}{r}\right) \\ &\quad - \left(1 - e^{-\frac{\alpha k}{r}}\right)(y - 0) \\ &= -kx + \frac{k^2}{r} - y + ye^{-\frac{\alpha k}{r}} \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &= 0 + 0\left(x - \frac{k}{r}\right) + \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}} - 0 - d\right)(y - 0) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}} - d\right)y \\ &= y - ye^{-\frac{\beta k}{r}} - dy \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.3) dengan titik kesetimbangan kedua  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -kx + \frac{k^2}{r} - y + ye^{-\frac{\alpha k}{r}} \\ \dot{y}(t) &= y - ye^{-\frac{\beta k}{r}} - dy \end{aligned}$$

3. Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan ketiga  $E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$  sebagai berikut :

Dengan menggunakan cara yang sama, maka digunakan persamaan (3.4)

untuk melakukan linierisasi, dimana :

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= kx^* - rx^*x^* - (1 - e^{-\alpha x^*})y^* & g(x^*, y^*) &= y^*(1 - e^{-\beta x^*}) - \delta y^* - dy^* \\ f_x(x^*, y^*) &= k - 2rx^* - \alpha e^{-\alpha x^*} y^* & g_x(x^*, y^*) &= \beta e^{-\beta x^*} y^* \\ f_y(x^*, y^*) &= -(1 - e^{-\alpha x^*}) & g_y(x^*, y^*) &= (1 - e^{-\beta x^*}) - 2\delta y^* - d \end{aligned}$$

substitusikan titik kesetimbangan  $E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$  ke persamaan (3.4) maka menjadi :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &= kx - \frac{\alpha d}{\delta} x \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &= -\delta \left(-\frac{d}{\delta}\right)^2 - d \left(-\frac{d}{\delta}\right) + \beta \left(-\frac{d}{\delta}\right) x + \left(-2\delta \left(-\frac{d}{\delta}\right) - d\right) \left(y + \frac{d}{\delta}\right) \\ &= -\frac{d^2}{\delta} + \frac{d^2}{\delta} - \frac{\beta d}{\delta} x + dy + \frac{d^2}{\delta} \\ &= \frac{d^2}{\delta} - \frac{\beta d}{\delta} x + dy \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.3) dengan titik kesetimbangan ketiga  $E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= kx - \frac{\alpha d}{\delta} x \\ \dot{y}(t) &= \frac{d^2}{\delta} - \frac{\beta d}{\delta} x + dy \end{aligned}$$

### 3.1.1.3 Analisis Kestabilan Pada Titik Ekuilibrium

Untuk menentukan kestabilan setiap titik kesetimbangan, maka akan dihitung nilai eigen dari matriks Jacobian yang dievaluasi di titik kesetimbangan. Linearisasi dari persamaan non-linier (3.1) menghasilkan matriks Jacobian, sebagai berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k - 2rx^* - \alpha e^{-\alpha x^*} y^* & -(1 - e^{-\alpha x^*}) \\ \beta y^* e^{-\beta x^*} & (1 - e^{-\beta x^*}) - 2\delta y^* - d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Dari matriks Jacobi yang didapatkan, kemudian akan dianalisis kestabilannya sebagai berikut:

- 1) Untuk titik kesetimbangan pertama  $(x_1^*, y_1^*)$

Pada titik kesetimbangan pertama yaitu  $E_1 = (0,0)$  kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.5), secara umum didapatkan:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobi tersebut maka nilai Eigen dapat dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k - \lambda & 0 \\ 0 & -d - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$(k - \lambda)(-d - \lambda) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = k \text{ atau } \lambda_2 = -d$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = k - d$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det J_{(0,0)} = -kd < 0$$

2) Untuk titik kesetimbangan kedua  $(x_2^*, y_2^*)$

Pada titik kesetimbangan kedua yaitu  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$ , kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.5), secara umum didapatkan:

$$J_{\left(\frac{k}{r}, 0\right)} = \begin{pmatrix} -k & -\left(1 - e^{-\frac{\alpha k}{r}}\right) \\ 0 & \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobi tersebut maka nilai Eigen dapat dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} -k & -\left(1 - e^{-\frac{\alpha k}{r}}\right) \\ 0 & \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} -k - \lambda & -\left(1 - e^{-\frac{\alpha k}{r}}\right) \\ 0 & \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$(-k - \lambda) \left( \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d - \lambda \right) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -k \text{ atau } \lambda_2 = \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -k + \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det J_{\left(\frac{k}{r}, 0\right)} = -k \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d < 0$$

Karena  $\lambda_1 < 0$  maka titik  $E_2$  bersifat asymptotik lokal ketika  $\lambda_2 < 0$  atau ketika

kondisi  $\left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) < d$ .

3) Untuk titik kesetimbangan ketiga  $(x_3^*, y_3^*)$

Pada titik kesetimbangan ketiga yaitu  $E_3 = \left(0, -\frac{d}{\delta}\right)$ , kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.5), secara umum didapatkan:

$$J_{\left(0, -\frac{d}{\delta}\right)} = \begin{pmatrix} k - \frac{\alpha d}{\delta} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobi tersebut maka nilai Eigen dapat dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k - \frac{\alpha d}{\delta} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k - \frac{\alpha d}{\delta} - \lambda & 0 \\ 0 & d - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\left( k - \frac{\alpha d}{\delta} - \lambda \right) (d - \lambda) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = k - \frac{\alpha d}{\delta} \text{ atau } \lambda_2 = d$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = k - \frac{\alpha d}{\delta} + d$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det J_{\left(0, -\frac{d}{\delta}\right)} = \left( k - \frac{\alpha d}{\delta} \right) d > 0$$

### 3.1.1.4 Kestabilan Titik Keseimbangan

Berdasarkan teori kestabilan maka didapatkan :

1. Untuk titik keseimbangan  $x_1 = 0$  dan  $y_1 = 0$ , pada titik keseimbangan tersebut menghasilkan nilai eigen dengan  $\lambda_1 = k$  dan  $\lambda_2 = -d$ . Kemudian substitusikan parameter berdasarkan tabel 2.3 maka akan menghasilkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = 0.5$  dan  $\lambda_2 = -0.15$ . Sistem pada model *predator-prey* ini dinyatakan pelana (*saddle*) karena terdapat nilai eigen yang pertama positif dan yang kedua negatif. Perkalian dua eigen realnya negatif ( $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, \lambda_j < 0, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).
2. Untuk titik keseimbangan  $x_2 = \frac{k}{r}$  dan  $y_2 = 0$ , pada titik keseimbangan tersebut menghasilkan nilai eigen dengan  $\lambda_1 = -k$  dan  $\lambda_2 = \left(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}\right) - d$ . Kemudian substitusikan parameter berdasarkan tabel 2.3 maka akan menghasilkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = -0.5$  dan  $\lambda_2 = 0.81$ . Sistem pada model *predator-prey* ini dinyatakan pelana (*saddle*) karena terdapat nilai eigen yang pertama negatif dan yang kedua positif. Perkalian dua eigen realnya negatif ( $\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, \lambda_j > 0, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).
3. Untuk titik keseimbangan  $x_3 = 0$  dan  $y_3 = -\frac{d}{\delta}$ , pada titik keseimbangan tersebut menghasilkan nilai eigen dengan  $\lambda_1 = k - \frac{\alpha d}{\delta}$  dan  $\lambda_2 = d$ . Kemudian substitusikan parameter berdasarkan tabel 2.3 maka akan menghasilkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = 0.354$  dan  $\lambda_2 = 0.15$ . Sistem pada model *predator-prey* ini dinyatakan tidak stabil (*unstable*) karena terdapat nilai eigen yang pertama positif dan yang kedua positif. Perkalian dua eigen realnya positif ( $\lambda_i, \lambda_j > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Dari nilai Eigen yang didapatkan tersebut maka diberikan syarat kestabilan pada tabel berikut:

**Tabel 3.1** Syarat kestabilan titik kesetimbangan model predator-prey tanpa waktu tunda

Titik Kesetimbangan	Keterangan	Syarat Kestabilan
$E_1 = (0,0)$	<i>Saddle</i>	–
$E_2 = (\frac{k}{r}, 0)$	<i>Saddle</i>	$(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}) < d$
$E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$	<i>unstable</i>	$(1 - e^{-\frac{\beta d}{\delta}}) < d$

### 3.1.2 Model dengan Waktu Tunda ( $\tau \neq 0$ )

#### 1. Model dengan waktu tunda untuk titik kesetimbangan pertama $(x_1^*, y_1^*)$

Model *predator-prey* dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (3.2) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$ . Untuk itu dimisalkan

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) - x^* & v(t) &= y(t) - y^* \\ u_\tau(t) &= x(t - \tau) - x^* & v_\tau(t) &= y(t - \tau) - y^* \end{aligned}$$

Jika permisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) kemudian menyederhanakan dan mengabaikan hubungan hasil kalinya, dengan titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0,0)$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= k(u(t) + x^*) - r(u(t) + x^*)(u(t - \tau) + x^*) - (1 - e^{-\alpha(u(t)+x^*)})(v(t) + y^*) \\ &= ku(t) - ru(t)u(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha u(t)})v(t) \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dt} = (v(t) + y^*)[(1 - e^{-\beta(u(t)+x^*)}) - \delta(v(t) + y^*)] - d(v(t) + y^*)$$

$$\begin{aligned}
&= v(t)[(1 - e^{-\beta u(t)}) - \delta v(t)] - dv(t) \\
&= v(t) - e^{-\beta u(t)}v(t) - \delta v^2(t) - dv(t)
\end{aligned}$$

Sehingga persamaannya menjadi :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= kx(t) - rx(t)x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t) \\
\dot{y} &= y(t) - e^{-\beta x(t)}y(t) - \delta y^2(t) - dy(t)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

## 2. Model dengan waktu tunda untuk titik kesetimbangan kedua $(x_2^*, y_2^*)$

Model *predator-prey* dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (3.2) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik kesetimbangan  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$ . Untuk itu dimisalkan

$$\begin{aligned}
u(t) &= x(t) - x^* & v(t) &= y(t) - y^* \\
u_\tau(t) &= x(t - \tau) - x^* & v_\tau(t) &= y(t - \tau) - y^*
\end{aligned}$$

Jika permisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) kemudian menyederhanakan dan mengabaikan hubungan hasil kalinya, dengan titik kesetimbangan kedua, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= k(u(t) + x^*) - r(u(t) + x^*)(u(t - \tau) + x^*) - (1 - e^{-\alpha(u(t) + x^*)})(v(t) + y^*) \\
&= k\left(u(t) + \frac{k}{r}\right) - r\left(u(t) + \frac{k}{r}\right)\left(u(t - \tau) + \frac{k}{r}\right) - \left(1 - e^{-\alpha\left(u(t) + \frac{k}{r}\right)}\right)v(t) \\
&= ku(t) + \frac{k^2}{r} - ru(t)u(t - \tau) - ku(t) - \frac{k^2}{r} - ku(t - \tau) - v(t) \\
&\quad + e^{-\alpha\left(u(t) + \frac{k}{r}\right)}v(t) \\
&= (-ru(t) - k)u(t - \tau) - v(t) + e^{-\alpha\left(u(t) + \frac{k}{r}\right)}v(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= (v(t) + y^*)[(1 - e^{-\beta(u(t)+x^*)}) - \delta(v(t) + y^*)] - d(v(t) + y^*) \\
&= v(t) \left[ \left(1 - e^{-\beta\left(u(t)+\frac{k}{r}\right)}\right) - \delta v(t) \right] - dv(t) \\
&= v(t) - e^{-\beta\left(u(t)+\frac{k}{r}\right)}v(t) - \delta v^2(t) - dv(t)
\end{aligned}$$

Sehingga persamaannya menjadi :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (-rx(t) - k)x(t - \tau) - y(t) + e^{-\alpha\left(x(t)+\frac{k}{r}\right)}y(t) \\
\dot{y} &= y(t) - e^{-\beta\left(x(t)+\frac{k}{r}\right)}y(t) - \delta y^2(t) - dy(t)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

### 3. Model dengan waktu tunda untuk titik kesetimbangan ketiga $(x_3^*, y_3^*)$

Model *predator-prey* dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (3.2) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik kesetimbangan  $E_3 = \left(0, -\frac{d}{\delta}\right)$ . Untuk itu dimisalkan

$$\begin{aligned}
u(t) &= x(t) - x^* & v(t) &= y(t) - y^* \\
u_\tau(t) &= x(t - \tau) - x^* & v_\tau(t) &= y(t - \tau) - y^*
\end{aligned}$$

Jika permisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) kemudian menyederhanakan dan mengabaikan hubungan hasil kalinya, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= k(u(t) + x^*) - r(u(t) + x^*)(u(t - \tau) + x^*) - (1 - e^{-\alpha(u(t)+x^*)})(v(t) + y^*) \\
&= k(u(t) + 0) - r(u(t) + 0)(u(t - \tau) + 0) - (1 - e^{-\alpha(u(t)+0)})\left(v(t) - \frac{d}{\delta}\right) \\
&= ku(t) - ru(t)u(t - \tau) - v(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha u(t)}v(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha u(t)} \\
&= (k - ru(t - \tau))u(t) - v(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha u(t)}v(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha u(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= (v(t) + y^*)[(1 - e^{-\beta(u(t)+x^*)}) - \delta(v(t) + y^*)] - d(v(t) + y^*) \\
&= \left(v(t) - \frac{d}{\delta}\right) \left[(1 - e^{-\beta(u(t)+0)}) - \delta\left(v(t) - \frac{d}{\delta}\right)\right] - d\left(v(t) - \frac{d}{\delta}\right) \\
&= v(t) - e^{-\beta u(t)}v(t) - \frac{d}{\delta} + e^{-\beta u(t)}\frac{d}{\delta} - \delta v^2(t) + dv(t) + 2\frac{d^2}{\delta}
\end{aligned}$$

Sehingga persamaannya menjadi :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (k - rx(t - \tau))x(t) - y(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha x(t)}y(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha x(t)} \\
\dot{y} &= y(t) - e^{-\beta x(t)}y(t) - \frac{d}{\delta} + e^{-\beta x(t)}\frac{d}{\delta} - \delta y^2(t) + dy(t) + 2\frac{d^2}{\delta}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.1.2.1 Linierisasi Model

Linierisasi merupakan salah satu metode lain yang digunakan untuk mentransformasi persamaan nonlinier menjadi persamaan diferensial linier dengan melakukan ekspansi deret Taylor dan menghilangkan suku non-linier di persekitaran titik kesetimbangan.

1. Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0,0)$

Dari persamaan (3.6) dimisalkan jika penyelesaian  $x = e^{\lambda t}$  digunakan maka menjadi :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= kx(t) - rx(t)x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t) \\
&= ke^{\lambda t} - re^{\lambda t}e^{\lambda(t-\tau)} - (1 - e^{-\alpha e^{\lambda t}})y(t) \\
&= ke^{\lambda t} - re^{\lambda t}e^{\lambda t}e^{-\lambda\tau} - (1 - e^{-\alpha e^{\lambda t}})y(t) \\
&= ke^{\lambda t} - r(e^{\lambda t})^2e^{-\lambda\tau} - (1 - e^{-\alpha e^{\lambda t}})y(t)
\end{aligned}$$

Substitusikan kembali  $e^{\lambda t} = x$ , maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= kx(t) - rx^2(t)e^{-\lambda t} - (1 - e^{-\alpha x(t)})y(t) \\ \dot{y} &= y(t) - e^{-\beta x(t)}y(t) - \delta y^2(t) - dy(t)\end{aligned}\quad (3.9)$$

maka dari persamaan (3.9) akan dilakukan linierisasi dengan mendefinisikan

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Maka akan dilakukan linierisasi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut :

Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan ketiga  $E_1 = (0,0)$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned}f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)\end{aligned}\quad (3.10)$$

dimana :

$$f(x, y) = kx - rx^2e^{-\lambda t} - (1 - e^{-\alpha x})y$$

$$f_x(x, y) = k - 2rx e^{-\lambda t}$$

$$f_y(x, y) = e^{-\alpha x} - 1$$

$$g(x, y) = y - e^{-\beta x}y - \delta y^2 - dy$$

$$g_x(x, y) = \beta e^{-\beta x}y$$

$$g_y(x, y) = 1 - e^{-\beta x} - 2\delta y - d$$

substitusikan titik kesetimbangan  $E_1 = (0,0)$  ke persamaan (3.10) maka menjadi:

$$f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$f(x, y) = kx - y$$

$$g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$g(x, y) = -dy$$

Sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.9) dengan titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0, 0)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= kx - y \\ \dot{y} &= -dy\end{aligned}\tag{3.11}$$

2. Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan kedua  $E_2 = (\frac{k}{r}, 0)$

Dari persamaan (3.7) dimisalkan jika penyelesaian  $x = e^{\lambda t}$  digunakan maka menjadi :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (-rx(t) - k)x(t - \tau) - y(t) + e^{-\alpha(x(t) + \frac{k}{r})}y(t) \\ &= (-re^{\lambda t} - k)e^{\lambda(t - \tau)} - y(t) + e^{-\alpha(e^{\lambda t} + \frac{k}{r})}y(t) \\ &= (-re^{\lambda t} - k)e^{\lambda t}e^{-\lambda\tau} - y(t) + e^{-\alpha(e^{\lambda t} + \frac{k}{r})}y(t)\end{aligned}$$

Substitusikan kembali  $e^{\lambda t} = x$ , maka akan diperoleh :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (-rx(t) - k)x(t)e^{-\lambda\tau} - y(t) + e^{-\alpha(x(t) + \frac{k}{r})}y(t) \\ \dot{y} &= y(t) - e^{-\beta(x(t) + \frac{k}{r})}y(t) - \delta y^2(t) - dy(t)\end{aligned}\tag{3.12}$$

maka dari persamaan (3.12) akan dilakukan linierisasi dengan mendefinisikan

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Dengan menggunakan cara yang sama, maka digunakan persamaan (3.10) untuk melakukan linierisasi, dimana :

$$f(x, y) = -rx^2e^{-\lambda\tau} - kxe^{-\lambda\tau} - y + e^{-\alpha\left(x+\frac{k}{r}\right)y}$$

$$f_x(x, y) = -2rxe^{-\lambda\tau} - ke^{-\lambda\tau} - \alpha e^{-\alpha\left(x+\frac{k}{r}\right)y}$$

$$f_y(x, y) = e^{-\alpha\left(x+\frac{k}{r}\right)y} - 1$$

$$g(x, y) = y - e^{-\beta\left(x+\frac{k}{r}\right)y} - \delta y^2 - dy$$

$$g_x(x, y) = \beta e^{-\beta\left(x+\frac{k}{r}\right)y}$$

$$g_y(x, y) = 1 - e^{-\beta\left(x+\frac{k}{r}\right)y} - 2\delta y - d$$

substitusikan titik kesetimbangan  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$  ke persamaan (3.10) maka menjadi:

$$f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -r\left(\frac{k}{r}\right)^2 e^{-\lambda\tau} - k\left(\frac{k}{r}\right)e^{-\lambda\tau} + \left(-2r\left(\frac{k}{r}\right)e^{-\lambda\tau} - ke^{-\lambda\tau}\right)\left(x - \frac{k}{r}\right) \\ &\quad + \left(e^{-\alpha\left(\frac{k}{r}+\frac{k}{r}\right)} - 1\right)(y) \\ &= -\frac{2k^2}{r}e^{-\lambda\tau} - 3ke^{-\lambda\tau}x + \frac{3k^2}{r}e^{-\lambda\tau} + e^{-\alpha\frac{2k}{r}}y - y \\ &= \frac{k^2}{r}e^{-\lambda\tau} - 3ke^{-\lambda\tau}x + e^{-\frac{2\alpha k}{r}}y - y \end{aligned}$$

$$g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \left(1 - e^{-\beta\frac{2k}{r}} - d\right)y \\ &= y - e^{-\beta\frac{2k}{r}}y - dy \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.12) dengan titik keseimbangan

$$\text{kedua } E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$$

$$\dot{x} = \frac{k^2}{r}e^{-\lambda\tau} - 3ke^{-\lambda\tau}x + e^{-\alpha\frac{2k}{r}}y - y$$

$$\dot{y} = y - e^{-\beta\frac{2k}{r}}y - dy$$

(3.13)

3. Proses linierisasi di sekitar  $(x^*, y^*)$  untuk titik kesetimbangan ketiga  $E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$

Dari persamaan (3.8) dimisalkan jika penyelesaian  $x = e^{\lambda t}$  digunakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (k - rx(t - \tau))x(t) - y(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha x(t)}y(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha x(t)} \\ &= (k - re^{\lambda(t-\tau)})e^{\lambda t} - y(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha e^{\lambda t}}y(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha e^{\lambda t}} \\ &= (k - re^{\lambda t}e^{-\lambda\tau})e^{\lambda t} - y(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha e^{\lambda t}}y(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha e^{\lambda t}}\end{aligned}$$

Substitusikan kembali  $e^{\lambda t} = x$ , maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (k - rx(t)e^{-\lambda\tau})x(t) - y(t) + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha x(t)}y(t) - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha x(t)} \\ \dot{y} &= y(t) - e^{-\beta x(t)}y(t) - \frac{d}{\delta} + e^{-\beta x(t)}\frac{d}{\delta} - \delta y^2(t) + dy(t) + 2\frac{d^2}{\delta}\end{aligned}\tag{3.14}$$

maka dari persamaan (3.14) akan dilakukan linierisasi dengan mendefinisikan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama, maka digunakan persamaan (3.10)

untuk melakukan linierisasi, dimana

$$f(x, y) = kx - rx^2e^{-\lambda\tau} - y + \frac{d}{\delta} + e^{-\alpha x}y - \frac{d}{\delta}e^{-\alpha x}$$

$$f_x(x, y) = k - 2rx - \alpha e^{-\alpha x}y + \frac{\alpha d}{\delta}e^{-\alpha x}$$

$$f_y(x, y) = e^{-\alpha x} - 1$$

$$g(x, y) = y - e^{-\beta x}y - \frac{d}{\delta} + e^{-\beta x}\frac{d}{\delta} - \delta y^2 + dy + 2\frac{d^2}{\delta}$$

$$g_x(x, y) = \beta e^{-\beta x}y - \beta e^{-\beta x}\frac{d}{\delta}$$

$$g_y(x, y) = 1 - e^{-\beta x} - 2\delta y - d$$

substitusikan titik kesetimbangan  $E_3 = \left(0, -\frac{d}{\delta}\right)$  ke persamaan (3.10) maka menjadi:

$$f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(k + \frac{\alpha d}{\delta} + \frac{\alpha d}{\delta}\right)x \\ &= kx + \frac{2\alpha d}{\delta}x \end{aligned}$$

$$g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= -\frac{2\beta d}{\delta}x + d\left(y + \frac{d}{\delta}\right) \\ &= -\frac{2\beta d}{\delta}x + dy + \frac{d^2}{\delta} \\ &= \frac{d^2}{\delta} - \frac{2\beta d}{\delta}x + dy \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.14) dengan titik kesetimbangan ketiga  $E_3 = \left(0, -\frac{d}{\delta}\right)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx + \frac{2\alpha d}{\delta}x \\ \dot{y} &= \frac{d^2}{\delta} - \frac{2\beta d}{\delta}x + dy \end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.1.2.2 Analisis Kestabilan Pada Titik Kesetimbangan

Untuk menentukan kestabilan pada setiap titik kesetimbangan, maka akan dihitung nilai Eigen dari matriks Jacobian.

1. Untuk titik kesetimbangan pertama  $(x_1^*, y_1^*)$

Linearisasi dari persamaan non-linier (3.9) menghasilkan matriks Jacobian dengan titik kesetimbangan pertama  $E_1 = (0,0)$ , sebagai berikut ini :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut untuk mendapatkan nilai Eigen dapat dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k & -1 \\ 0 & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k - \lambda & -1 \\ 0 & -d - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$(k - \lambda)(-d - \lambda) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = k \text{ atau } \lambda_2 = -d$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = k - d$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -kd$$

2. Untuk titik kesetimbangan kedua  $(x_2^*, y_2^*)$

Linierisasi dari persamaan non-linier (3.12) menghasilkan matriks Jacobian

dengan titik kesetimbangan pertama  $E_2 = \left(\frac{k}{r}, 0\right)$ , sebagai berikut ini :

$$J_{\left(\frac{k}{r}, 0\right)} = \begin{pmatrix} -3ke^{-\lambda\tau} & e^{-\alpha\frac{2k}{r}} - 1 \\ 0 & 1 - e^{-\beta\frac{2k}{r}} - d \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut untuk mendapatkan nilai Eigen dapat dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} -3ke^{-\lambda\tau} & e^{-\alpha\frac{2k}{r}} - 1 \\ 0 & 1 - e^{-\beta\frac{2k}{r}} - d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} -3ke^{-\lambda\tau} - \lambda & e^{-\alpha\frac{2k}{r}} - 1 \\ 0 & 1 - e^{-\beta\frac{2k}{r}} - d - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$(-3ke^{-\lambda\tau} - \lambda)(1 - e^{-\beta\frac{2k}{r}} - d - \lambda) = 0$$

Selanjutnya sederhanakan bentuk akar-akar karakteristik diatas. Terlihat jelas

bahwa nilai  $\lambda = 0$  karena  $-3k < 0$ . Persamaan tersebut menjadi

$$(-3k - \lambda)(1 - e^{-\beta\frac{2k}{r}} - d - \lambda) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -3k \text{ atau } \lambda_2 = 1 - e^{-\beta \frac{2k}{r}} - d$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - e^{-\beta \frac{2k}{r}} - d - 3ke^{-\lambda r}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -3ke^{-\lambda r} \left( 1 - e^{-\beta \frac{2k}{r}} - d \right)$$

3. Untuk titik kesetimbangan ketiga  $(x_3^*, y_3^*)$

Linearisasi dari persamaan non-linier (3.14) menghasilkan matriks

Jacobian dengan titik kesetimbangan ketiga  $E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$ , sebagai berikut ini :

$$J_{(0, -\frac{d}{\delta})} = \begin{pmatrix} k + \frac{2\alpha d}{\delta} & 0 \\ -\frac{2\beta d}{\delta} & d \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut untuk mendapatkan nilai Eigen dapat dicari dengan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k + \frac{2\alpha d}{\delta} & 0 \\ -\frac{2\beta d}{\delta} & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} k + \frac{2\alpha d}{\delta} - \lambda & 0 \\ -\frac{2\beta d}{\delta} & d - \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\left( k + \frac{2\alpha d}{\delta} - \lambda \right) (d - \lambda) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = k + \frac{2\alpha d}{\delta} \text{ atau } \lambda_2 = d$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = k + \frac{2\alpha d}{\delta} + d$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = dk + \frac{2\alpha d^2}{\delta}$$

### 3.1.2.3 Kestabilan Titik Keseimbangan

Berdasarkan teori kestabilan maka didapatkan:

1. Untuk titik keseimbangan  $x_1 = 0$  dan  $y_1 = 0$ , pada titik keseimbangan tersebut menghasilkan nilai eigen dengan  $\lambda_1 = k$  dan  $\lambda_2 = -d$ . Kemudian substitusikan parameter berdasarkan tabel 2.3 maka akan menghasilkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = 0.5$  dan  $\lambda_2 = -0.15$ . Sistem pada model *predator-prey* ini dinyatakan pelana (*saddle*) karena terdapat nilai eigen yang pertama positif dan yang kedua negatif. Perkalian dua eigen realnya negatif ( $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, \lambda_j < 0, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).
2. Untuk titik keseimbangan  $x_2 = \frac{k}{r}$  dan  $y_2 = 0$ , pada titik keseimbangan tersebut menghasilkan nilai eigen dengan  $\lambda_1 = -3k$  dan  $\lambda_2 = 1 - e^{-\beta \frac{2k}{r}} - d$ . Kemudian substitusikan parameter berdasarkan tabel 2.3 maka akan menghasilkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = -1.5$  dan  $\lambda_2 = 0.4154017915$ . Sistem pada model *predator-prey* ini dinyatakan tidak stabil pelana (*saddle*) karena terdapat nilai eigen yang pertama negatif dan yang kedua positif. Perkalian dua eigen realnya negatif ( $\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, \lambda_j > 0, j = 1, 2, 3, \dots, n$ ).
3. Untuk titik keseimbangan  $x_3 = 0$  dan  $y_3 = -\frac{d}{\delta}$ , pada titik keseimbangan tersebut menghasilkan nilai eigen dengan  $\lambda_1 = k + \frac{2\alpha d}{\delta}$  dan  $\lambda_2 = d$ . Kemudian substitusikan parameter berdasarkan tabel 2.3 maka akan menghasilkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = 1.208$  dan  $\lambda_2 = 0.15$ . Sistem pada model *predator-prey* ini dinyatakan tidak stabil (*unstable*) karena terdapat nilai eigen yang pertama

positif dan yang kedua positif. Perkalian dua eigen realnya positif  $(\lambda_i, \lambda_j > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, n)$ .

Dari nilai Eigen yang didapatkan tersebut maka diberikan syarat kestabilan pada tabel berikut:

**Tabel 3.2** Syarat kestabilan titik kesetimbangan model predator-prey dengan waktu tunda

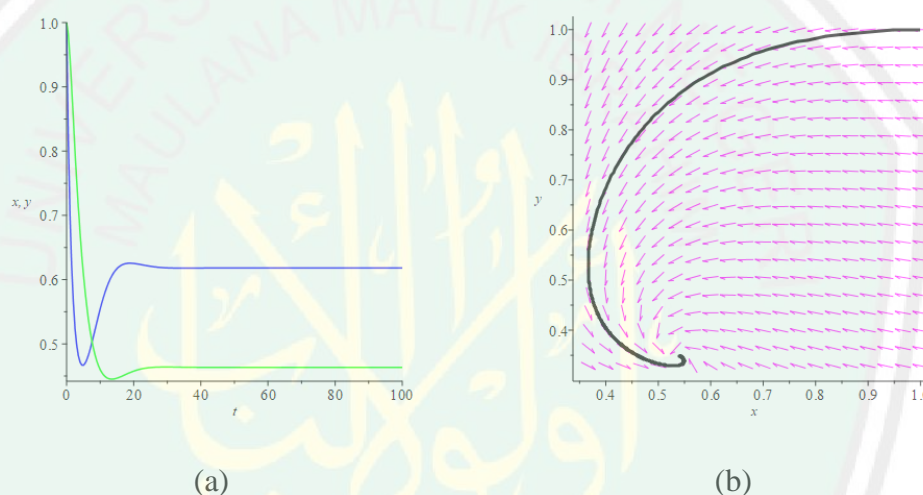
Titik Kesetimbangan	Keterangan	Syarat Kestabilan
$E_1 = (0, 0)$	<i>Saddle</i>	–
$E_2 = (\frac{k}{r}, 0)$	<i>Saddle</i>	$(1 - e^{-\frac{\beta k}{r}}) > d$
$E_3 = (0, -\frac{d}{\delta})$	<i>unstable</i>	$(1 - e^{-\frac{\beta d}{\delta}}) < d$

### 3.1.3 Simulasi Numerik

#### 3.1.3.1 Hasil Simulasi Tanpa Waktu Tunda

Pada subbab ini akan diberikan simulasi dari persamaan (3.1) dengan nilai parameter yang diberikan Zhang dkk (2015) sesuai Tabel 2.3 dengan parameter nilai  $h$  yang berbeda. Simulasi yang dilakukan dengan diberikan dengan kondisi tanpa waktu tunda. Dengan menggunakan bantuan aplikasi MAPLE 2016 :

Ketika nilai pemanenan  $h = 0.1$

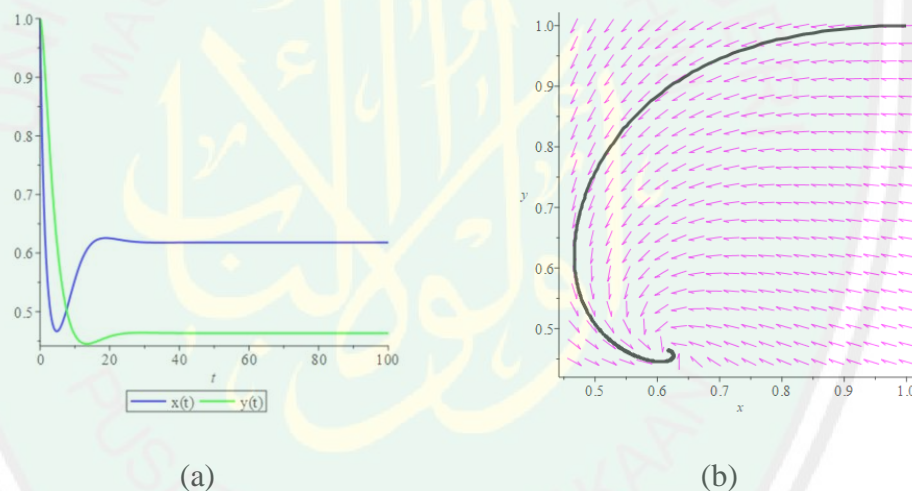


**Gambar 3.1** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.1) pada model predator-prey tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$  (bukti lampiran 1)

Dari gambar 3.1 untuk grafik perilaku (a) dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$ , dapat dilihat bahwa grafik dari populasi prey dengan nilai awal sebesar 1 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu sebesar 5 satu satuan menuju ke suatu titik 0.35 dan pada saat waktu sebesar 10 satu satuan waktu mengalami kenaikan ke suatu titik 0.5407 satu satuan dan kemudian populasi *prey* terus menerus stabil serta tidak mengalami kenaikan maupun penurunan. Sedangkan untuk populasi *predator* juga mengalami penurunan dengan nilai awal sebesar 1 satu satuan pada saat waktu

sebesar 15 satu satuan menuju ke suatu titik 0.0 dan pada saat waktu sebesar 16 satu satuan waktu mengalami kenaikan ke suatu titik 0.3476 satu satuan dan kemudian populasi *predator* terus menerus stabil serta tidak mengalami kenaikan maupun penurunan. Untuk potret fase (b) dapat dilihat bahwa ditemukan titik kesetimbangan dengan menunjukkan adanya arah panah yang menuju ke suatu titik yaitu  $(0.5407, 0.3476)$ . Kita bisa lihat bahwa hanya terdapat titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.5407, 0.3476)$  untuk persamaan (3.1) yang terletak pada kuadran pertama dan stabil secara global.

Ketika nilai pemanenan  $h = 0.0$



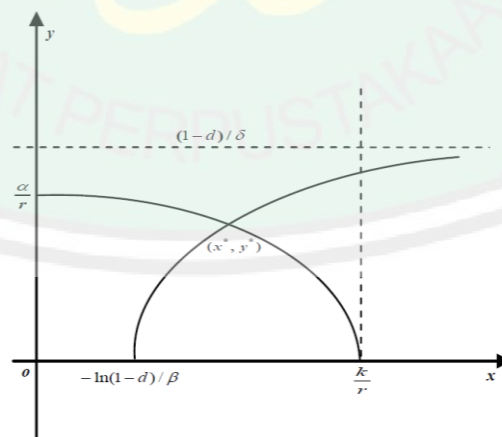
**Gambar 3.2** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.1) pada model *predator-prey* tanpa waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.0$  (bukti lampiran 2)

Dari gambar 3.1 untuk grafik perilaku dengan nilai pemanenan  $h = 0.0$ , dapat dilihat bahwa grafik dari populasi prey dengan nilai awal sebesar 1 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu sebesar 5 satu satuan menuju ke suatu titik 0.55 dan pada saat waktu 10 satu satuan waktu mengalami kenaikan ke suatu titik 0.6181 satu satuan dan kemudian populasi *prey* terus menerus stabil serta tidak

mengalami kenaikan maupun penurunan. Sedangkan untuk populasi *predator* juga mengalami dengan nilai awal sebesar 1 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu sebesar 15 satu satuan menuju ke suatu titik 0.0 dan pada saat waktu 16 satu satuan waktu mengalami kenaikan ke suatu titik 0.4635 satu satuan dan kemudian populasi *predator* terus menerus stabil serta tidak mengalami kenaikan maupun penurunan. Untuk potret fase (b) dapat dilihat bahwa ditemukan titik kesetimbangan dengan menunjukkan adanya arah panah yang menuju ke suatu titik yaitu  $(0.6181, 0.4635)$ . Kita bisa lihat bahwa hanya terdapat titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.6181, 0.4635)$  untuk persamaan (2.3) yang terletak pada kuadran pertama dan stabil secara global.

### Teorema 1

Jika  $d < 1 - e^{-\beta}$  dan  $\alpha < \frac{2r}{k}$ , maka terdapat titik kesetimbangan positif  $(x^*, y^*)$  untuk persamaan (3.1) yang memenuhi  $-\frac{1}{\beta} \ln(1 - d) < x^* < \frac{k}{r}$  dan  $y^* = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\beta x^*} - d)$



**Bukti:**

Definisikan  $L_1: y = f_1(x) = \frac{kx - rx^2}{1 - e^{-\alpha x}}$  dan  $L_2: y = f_2(x) = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\beta x} - d)$

Dimisalkan  $z = \alpha x, c = \frac{\alpha k}{r}, 0 < c < 2$ , dan  $f_1(x) = f_1\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \frac{r}{\alpha^2} \frac{cz - z^2}{1 - e^{-z}}$

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{df_1}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{r}{\alpha} \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2} [(c - 2z)e^z - c + (2 - c)z + z^2]$$

Himpunan  $\varphi(z) = (c - 2z)e^z - c + (2 - c)z + z^2, \varphi(z) \rightarrow 0$ , sehingga  $z \rightarrow 0^+, \varphi(c) < 0$  dan

$$\varphi'(z) = (c - 2 - 2z)(e^z - 1) < 0 \quad z \in (0, c)$$

Oleh karena itu  $\varphi(z) < 0, \forall z \in (0, c)$ . Dengan demikian  $f_1'(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{k}{r}\right)$ .

Perhatikan bahwa  $y = f_1(x)$  turun pada  $\left(0, \frac{k}{r}\right)$  dan  $f_2'(x) = \beta e^{-\beta x} > 0$

menunjukkan bahwa  $y = f_2(x)$  naik pada  $[0, +\infty)$ . Selanjutnya  $f_2\left(-\frac{1}{\beta} \ln(1 - d)\right) = 0, f_1\left(\frac{k}{r}\right) = 0$ . Pada garis  $L_1$  dan  $L_2$  jika  $f_2\left(\frac{k}{r}\right) = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\beta x} - d) > 0$ , ini

menunjukkan bahwa terdapat titik kesetimbangan positif  $(x^*, y^*)$  untuk persamaan

(3.1) jika  $d < 1 - e^{-\beta}$  dan  $\alpha < \frac{2r}{k}$ . Sehingga dapat dilihat bahwa terdapat titik

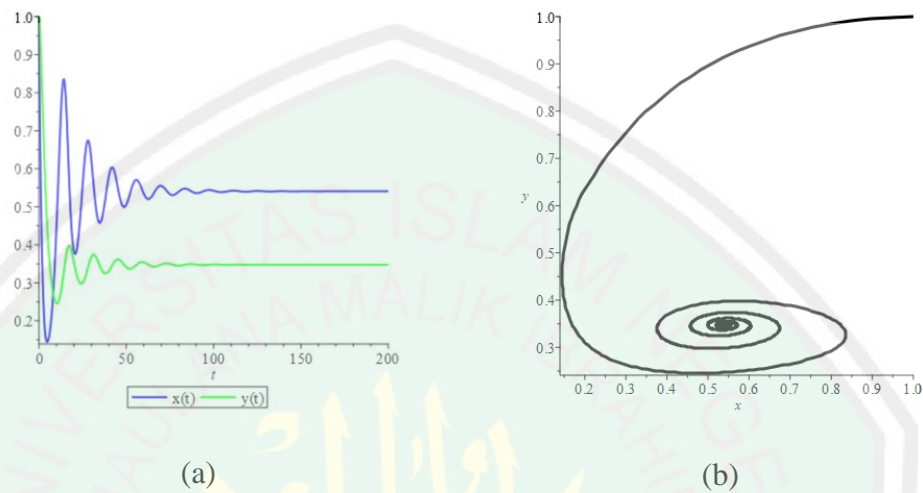
kesetimbangan  $-\frac{1}{\beta} \ln(1 - d) < x^* < \frac{k}{r}$  dan  $y^* = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\beta x^*} - d)$ .

Dengan bantuan aplikasi Maple didapatkan titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.5407115622, 0.3475682133)$  yaitu ketika pemanen  $h = 0.1$ , dan didapatkan juga titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.6181233030, 0.4634579675)$  yaitu ketika pemanen  $h = 0.0$  yang artinya tidak ada pemanenan.

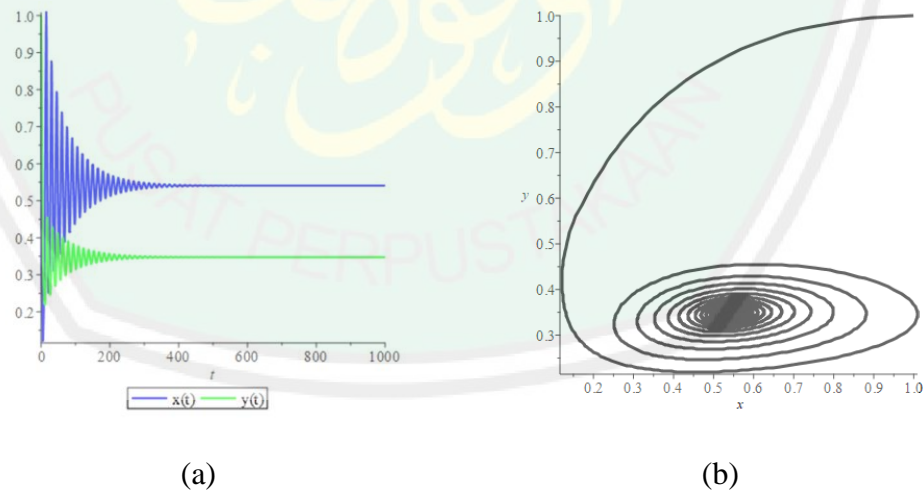
**3.1.3.2 Hasil Simulasi Dengan Waktu Tunda**

Pada subbab ini akan diberikan simulasi dari persamaan (3.2) dengan nilai parameter yang diberikan Zhang dkk (2015) sesuai Tabel 2.3. dengan bantuan

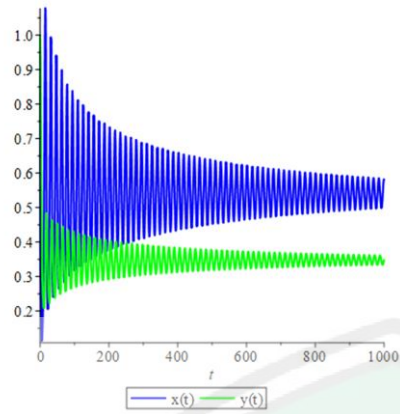
aplikasi MAPLE kita bisa dapatkan titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.5407, 0.3476)$  dan dengan parameter nilai  $h = 0.1$  dan waktu tunda yang berbeda. Simulasi yang dilakukan dengan diberikan dengan kondisi dengan waktu tunda. Dengan menggunakan bantuan aplikasi MAPLE 2016 :



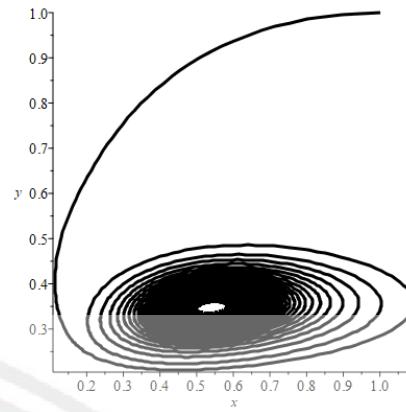
**Gambar 3.3** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model *predator-prey* dengan waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$  dan  $\tau = 3.05$  (bukti lampiran 3)



**Gambar 3.4** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model *predator-prey* dengan waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$  dan  $\tau = 3.55$  (bukti lampiran 4)

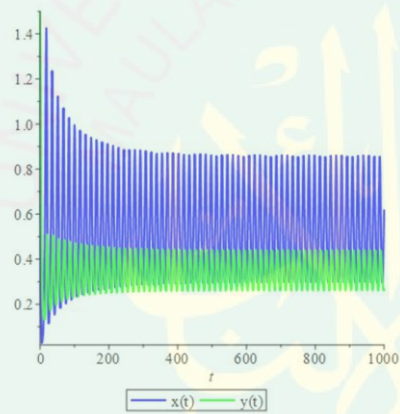


(a)

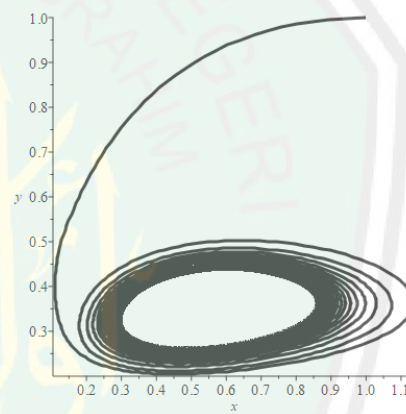


(b)

**Gambar 3.5** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model predator-prey dengan waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$  dan  $\tau = 3.75$  (bukti lampiran 5)

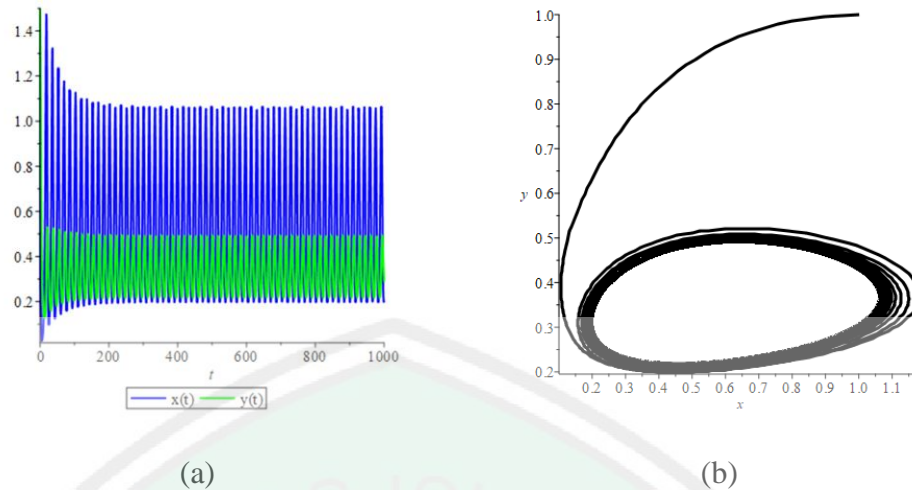


(a)



(b)

**Gambar 3.6** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model predator-prey dengan waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$  dan  $\tau = 3.85$  (bukti lampiran 6)



**Gambar 3.7** Grafik perilaku (a) dan Potret fase (b) dari sistem persamaan (3.2) pada model predator-prey dengan waktu tunda dengan nilai pemanenan  $h = 0.1$  dan  $\tau = 3.95$  (bukti lampiran 7)

Dari gambar diatas dapat dilihat bahwa untuk persamaan (3.2), ketika  $\tau < 3.6$  maka populasi predator dan prey mengalami kenaikan dan penurunan hingga menuju titik keseimbangan  $(x^*, y^*) = (0.5407, 0.3476)$  dan kemudian populasi predator dan prey terus menerus stabil serta tidak mengalami kenaikan maupun penurunan yang artinya populasi tersebut untuk mencapai kestabilan kurang dari nilai  $t = 400$ . ketika  $\tau > 3.6$  maka populasi predator dan prey mengalami kenaikan dan penurunan hingga menuju titik keseimbangan  $(x^*, y^*) = (0.5407, 0.3476)$  dan kemudian populasi predator dan prey terus menerus stabil serta mengalami kenaikan maupun penurunan yang dimana untuk mencapai kestabilannya membutuhkan waktu lebih dari  $t = 1000$ .

Dari uraian gambar diatas dapat dilihat bahwa tingkat kestabilan yang tidak jauh berbeda sehingga populasi dari kedua populasi tersebut dapat bertahan hidup jika kedua populasi tersebut sama-sama berada dalam kondisi yang stabil. Namun seiring bertambahnya waktu tunda maka populasi predator dan populasi prey untuk menuju kestabilan membutuhkan waktu yang lama seperti yang diketahui yaitu

adanya populasi *prey* yang mengalami regenerasi sehingga membutuhkan waktu dan itu berpengaruh kepada kondisi populasi *predator* yang dapat bertahan hidup dengan adanya sumber makanan dari populasi *prey*.

#### **3.1.4 Analisis Kestabilan Dalam Perspektif Islam**

Bumi sebagai tempat tinggal dan tempat hidup manusia dan makhluk Allah lainnya sudah dijadikan Allah dengan penuh rahmat-Nya. Sebagaimana yang telah dipaparkan di atas, maka manusia sebagai khalifah di bumi maka hendaknya menjaga agar kelestarian lingkungan tetap terjaga. Menjaga agar lingkungan tetap baik maka peran manusia disini sangat penting sebagai kendali dari ekosistem makhluk hidup lain di alam. Makhluk hidup di alam juga dapat melakukan kendali yang tak terkontrol sehingga bisa jadi manusia melakukan pemanenan yang berlebihan. Sesuatu yang berlebih-berlebihan merupakan salah satu yang menyebabkan sesuatu yang tidak seimbang, sesuatu yang tidak seimbang disebabkan oleh perbuatan manusia sendiri. Sesungguhnya Allah Swt telah menciptakan sesuatu yang seimbang, adanya sesuatu yang tidak seimbang disebabkan adanya campur tangan manusia yang berlebihan dalam memanfaatkan ciptaan-Nya. Dalam firman-Nya pada surat al- Mulk/67:3-4.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Dalam penyelesaian masalah model *predator-prey* dengan waktu tunda dilakukan analisis kestabilan dan perilaku dari model tersebut sehingga akan didapatkan model kesetimbangan dari model itu.

Dari model predator prey tersebut didapatkan tiga titik kesetimbangan dan dua titik kesetimbangan yang memiliki kasus khusus pada nilai pemanenan  $h = 0.0$  dan  $h = 0.1$ , dimana kondisi stabil dari model *predator-prey* terdapat pada titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.5407115622, 0.3475682133)$  dan titik kesetimbangan  $(x^*, y^*) = (0.6181233030, 0.4634579675)$  tanpa waktu tunda maupun yang telah diberikan waktu tunda dan ditunjukkan dengan kedua nilai eigennya bernilai real yang bertanda negatif dimana nilai tersebut stabil dan populasi *predator* dan populasi *prey* dapat hidup saling berdampingan dan tidak terjadi kepunahan.

Sedangkan dari simulasi numerik didapatkan kesetimbangan dari kedua populasi seiring bertambahnya waktu tunda maka populasi *predator* dan populasi *prey* untuk menuju kestabilan membutuhkan waktu yang lama seperti yang diketahui yaitu adanya populasi *prey* yang mengalami regenerasi sehingga membutuhkan waktu dan itu berpengaruh kepada populasi *predator* yang dapat bertahan hidup dengan adanya sumber makanan dari populasi *prey*.

#### 4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis model *predator-prey* dengan waktu tunda yang terletak pada populasi *predator* sehingga akan diperoleh kestabilan pada titik- titik kesetimbangannya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maraghi, A. 1993. *Tafsir Al-Maraghi, (Terjemah)*. Semarang: Toha Putra.
- Baretta E, K. 1996. *Convergence Results in a Well-Known Delayed Predator-Prey System*. Journal Mathematics Analysis 204:840-853.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2009. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Ninth Edition. United States: John Wiley & Sons, Inc.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Tenth Edition. John Wiley & Sons, Inc: New York.
- Chen, Y. 2013. *Dynamics of a Delayed Predator-Prey Model With Predator Migration*. Elsevier Inc, 1400-1412.
- Finizio, N. dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Forde, J.E. 2005. *Delay Differential Equation Models In Mathematical Biology*. United States: University of Michigan.
- Hidayah. D. 2010. *Tafsir Jalalain Jalaludin Asy-syuyuthi Jalaludin Muhamad bin Ahmad Al-Mahalliy*. Tasikmalaya: Pesantren Persatuan Islam 91.
- Kuang, Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in population Dynamics*. London: Academic Press.
- Olsder, G.2003. *Mathematical System Theory*. Delfi: The Netherland.
- Ruan S. 2009. *On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay*. Math. Model. Nat. Phenom. 4:140-188.
- Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Shihab, M. Q. 2007. *Membumikan Alquran: Fungsi dan Peran Wahyu dalam Kehidupan Masyarakat*. Bandung: Mizan Pustaka.
- Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer. Verlag: New York.
- Xiao, H.B. 2007. *Global Analysis of Ivlev's Type Predator-Prey Dynamic Systems*. Appl. Math.Mech., 461-470.
- Zhang, Chang-qin dkk. 2015. *Stability and Hopf Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Model with Time Delayed Incomplete Trophic Transfer*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. 235–246.

## LAMPIRAN

## Lampiran 1. Program Maple untuk Gambar 3.1

```

> restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
>  $\alpha := 0.59$  :  $\beta := 0.5$  :  $\delta := 0.25$  :  $r := 0.6$  :  $d := 0.15$  :  $h := 0.1$  :  $k := r - h$  :  $e := 2.718281828$  :  $\tau := 3$  :

>  $dx := k \cdot x - r \cdot x^2 - (1 - e^{-\alpha \cdot x}) \cdot y$ 
>  $dy := y \cdot ((1 - e^{-\beta \cdot x}) - \delta \cdot y) - d \cdot y$ 
> solve({dx, dy}, [x, y])
> sist := matrix([[subs(x = x(t), y = y(t), eval(dx))], [subs(x = x(t), y = y(t), eval(dy))]])
> sistem := diff(x(t), t) = sist[1, 1], diff(y(t), t) = sist[2, 1]
> fcns := {x(t), y(t)};
> awal := dsolve({x(0) = 1, y(0) = 1, sistem}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun = 10000)

> odeplot(awal, [[t, x(t), color = blue, style = line], [t, y(t), color = green, style = line]], 0..100)
> phaseportrait( $\left( \left[ \frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t)^2 - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot ((1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t)) - d \cdot y(t) \right], [x(t), y(t)], t = 0..100, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], stepsize = 0.05, colour = magenta, linecolor = black \right)$ )

```

## Lampiran 2. Program Maple untuk Gambar 3.2

```

> restart : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
>  $\alpha := 0.59$  :  $\beta := 0.5$  :  $\delta := 0.25$  :  $r := 0.6$  :  $d := 0.15$  :  $h := 0.0$  :  $k := r - h$  :  $e := 2.718281828$  :

>  $dx := k \cdot x - r \cdot x^2 - (1 - e^{-\alpha \cdot x}) \cdot y$ 
>  $dy := y \cdot ((1 - e^{-\beta \cdot x}) - \delta \cdot y) - d \cdot y$ 
> solve({dx, dy}, [x, y])
> sist := matrix([[subs(x = x(t), y = y(t), eval(dx))], [subs(x = x(t), y = y(t), eval(dy))]])
> sistem := diff(x(t), t) = sist[1, 1], diff(y(t), t) = sist[2, 1]
> fcns := {x(t), y(t)};
> awal := dsolve({x(0) = 1, y(0) = 1, sistem}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun = 10000)

> odeplot(awal, [[t, x(t), color = blue, style = line], [t, y(t), color = green, style = line]], 0..100)
> phaseportrait( $\left( \left[ \frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t)^2 - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot ((1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t)) - d \cdot y(t) \right], [x(t), y(t)], t = 0..100, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], stepsize = 0.05, colour = magenta, linecolor = black \right)$ )

```

## Lampiran 3. Program Maple untuk Gambar 3.3

```

> restart : with(plots) : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
>  $\alpha := 0.59 : \beta := 0.5 : \delta := 0.25 : r := 0.6 : d := 0.15 : h := 0.1 : k := r - h : e :=$ 
  2.718281828 :  $\tau := 3.05 :$ 
> sistem := diff(x(t), t) = k·x(t) - r·x(t)·x(t -  $\tau$ ) - (1 - e- $\alpha$ ·x(t))·y(t), diff(y(t), t) = y(t)·((1
  - e- $\beta$ ·x(t)) -  $\delta$ ·y(t)) - d·y(t);
variabel := {x(t), y(t)};
>
Plot1 := dsolve({ sistem, x(0) = 1, y(0) = 1}, variabel, type = numeric, method = rkf45) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, x(t), color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..200, legend
  = ["x(t)", numpoints = 1000]) :
f2 := odeplot(Plot1, [t, y(t), color = green, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..200, legend
  = ["y(t)", numpoints = 1000]) :
display(f1, f2);
>
phaseportrait( $\left[ \left[ \frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot \left( (1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t) \right) - d \cdot y(t) \right], [x(t), y(t)], t = 0 ..200, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], stepsize = 0.1, colour = magenta, linecolor = black, method = rkf45 \right)$ )

```

## Lampiran 4. Program Maple untuk Gambar 3.4

```

> restart : with(plots) : with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
>  $\alpha := 0.59 : \beta := 0.5 : \delta := 0.25 : r := 0.6 : d := 0.15 : h := 0.1 : k := r - h : e :=$ 
  2.718281828 :  $\tau := 3.55 :$ 
> sistem := diff(x(t), t) = k·x(t) - r·x(t)·x(t -  $\tau$ ) - (1 - e- $\alpha$ ·x(t))·y(t), diff(y(t), t) = y(t)·((1
  - e- $\beta$ ·x(t)) -  $\delta$ ·y(t)) - d·y(t);
variabel := {x(t), y(t)};
>
Plot1 := dsolve({ sistem, x(0) = 1, y(0) = 1}, variabel, type = numeric, method = rkf45) :
f1 := odeplot(Plot1, [t, x(t), color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..1000, legend
  = ["x(t)", numpoints = 1000]) :
f2 := odeplot(Plot1, [t, y(t), color = green, linestyle = solid, thickness = 2], 0 ..1000, legend
  = ["y(t)", numpoints = 1000]) :
display(f1, f2);
>
phaseportrait( $\left[ \left[ \frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot \left( (1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t) \right) - d \cdot y(t) \right], [x(t), y(t)], t = 0 ..1000, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], stepsize = 0.1, colour = magenta, linecolor = black, method = rkf45 \right)$ )

```

## Lampiran 5. Program Maple untuk Gambar 3.5

- > *restart* : *with(plots)* : *with(linalg)* : *with(plots)* : *with(DEtools)* :
- >  $\alpha := 0.59$  :  $\beta := 0.5$  :  $\delta := 0.25$  :  $r := 0.6$  :  $d := 0.15$  :  $h := 0.1$  :  $k := r - h$  :  $e := 2.718281828$  :  $\tau := 3.75$  :
- > *sistem* := *diff*( $x(t), t = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t)$ , *diff*( $y(t), t = y(t) \cdot (1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t) - d \cdot y(t)$ );  
*variabel* := { $x(t), y(t)$ };
- > *Plot1* := *dsolve*( { *sistem*,  $x(0) = 1, y(0) = 1$  }, *variabel*, *type* = *numeric*, *method* = *rkf45* ) :  
*f1* := *odeplot*(*Plot1*, [ $t, x(t)$ ], *color* = *blue*, *linestyle* = *solid*, *thickness* = 2], 0 ..1000, *legend* = [ $"x(t)"$ ], *numpoints* = 1000) :  
*f2* := *odeplot*(*Plot1*, [ $t, y(t)$ ], *color* = *green*, *linestyle* = *solid*, *thickness* = 2], 0 ..1000, *legend* = [ $"y(t)"$ ], *numpoints* = 1000) :  
*display*(*f1, f2*);
- > *phaseportrait*(  $\left[ \left[ \frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot (1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t) - d \cdot y(t) \right], [x(t), y(t)], t = 0 ..1000, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], \textit{stepsize} = 0.1, \textit{colour} = \textit{magenta}, \textit{linecolor} = \textit{black}, \textit{method} = \textit{rkf45} \right]$  )

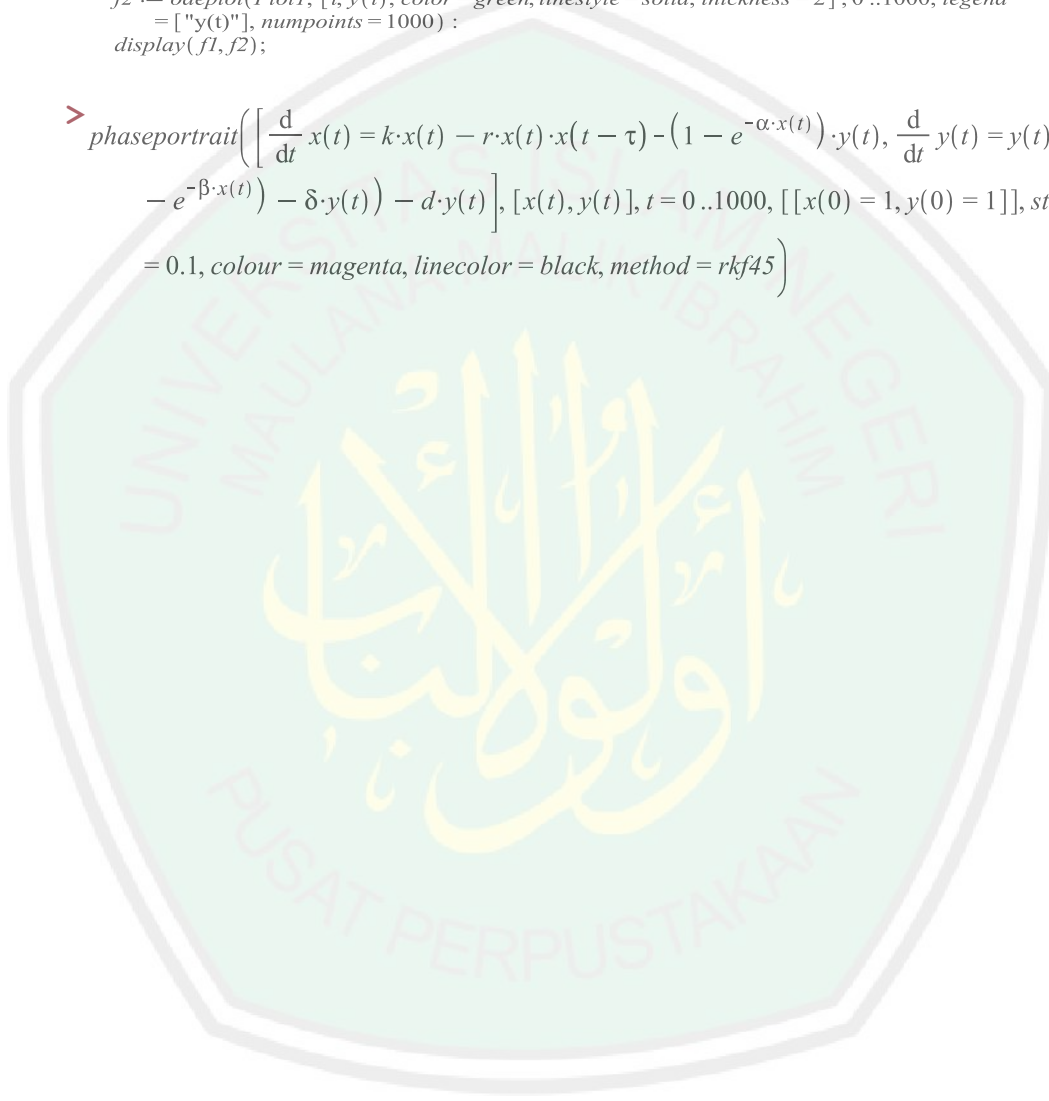
## Lampiran 6. Program Maple untuk Gambar 3.6

- > *restart* : *with(plots)* : *with(linalg)* : *with(plots)* : *with(DEtools)* :
- >  $\alpha := 0.59$  :  $\beta := 0.5$  :  $\delta := 0.25$  :  $r := 0.6$  :  $d := 0.15$  :  $h := 0.1$  :  $k := r - h$  :  $e := 2.718281828$  :  $\tau := 3.85$  :
- > *sistem* := *diff*( $x(t), t = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t)$ , *diff*( $y(t), t = y(t) \cdot (1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t) - d \cdot y(t)$ );  
*variabel* := { $x(t), y(t)$ };
- > *Plot1* := *dsolve*( { *sistem*,  $x(0) = 1.5, y(0) = 1.5$  }, *variabel*, *type* = *numeric*, *method* = *rkf45* ) :  
*f1* := *odeplot*(*Plot1*, [ $t, x(t)$ ], *color* = *blue*, *linestyle* = *solid*, *thickness* = 2], 0 ..1000, *legend* = [ $"x(t)"$ ], *numpoints* = 1000) :  
*f2* := *odeplot*(*Plot1*, [ $t, y(t)$ ], *color* = *green*, *linestyle* = *solid*, *thickness* = 2], 0 ..1000, *legend* = [ $"y(t)"$ ], *numpoints* = 1000) :  
*display*(*f1, f2*);
- > *phaseportrait*(  $\left[ \left[ \frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot (1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t) - d \cdot y(t) \right], [x(t), y(t)], t = 0 ..1000, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], \textit{stepsize} = 0.1, \textit{colour} = \textit{magenta}, \textit{linecolor} = \textit{black}, \textit{method} = \textit{rkf45} \right]$  )

## Lampiran 7. Program Maple untuk Gambar 3.7

- > *restart* : *with(plots)* : *with(linalg)* : *with(plots)* : *with(DEtools)* :

- >  $\alpha := 0.59 : \beta := 0.5 : \delta := 0.25 : r := 0.6 : d := 0.15 : h := 0.1 : k := r - h : e := 2.718281828 : \tau := 3.95 :$
- >  $sistem := diff(x(t), t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), diff(y(t), t) = y(t) \cdot ((1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t)) - d \cdot y(t);$   
*variabel := {x(t), y(t)};*
- >  $Plot1 := dsolve(\{sistem, x(0) = 1.5, y(0) = 1.5\}, variabel, type = numeric, method = rkf45) :$   
 $f1 := odeplot(Plot1, [t, x(t), color = blue, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 1000, legend = ["x(t)"], numpoints = 1000) :$   
 $f2 := odeplot(Plot1, [t, y(t), color = green, linestyle = solid, thickness = 2], 0 .. 1000, legend = ["y(t)"], numpoints = 1000) :$   
 $display(f1, f2);$
- >  $phaseportrait\left(\left[\frac{d}{dt} x(t) = k \cdot x(t) - r \cdot x(t) \cdot x(t - \tau) - (1 - e^{-\alpha \cdot x(t)}) \cdot y(t), \frac{d}{dt} y(t) = y(t) \cdot ((1 - e^{-\beta \cdot x(t)}) - \delta \cdot y(t)) - d \cdot y(t)\right], [x(t), y(t)], t = 0 .. 1000, [[x(0) = 1, y(0) = 1]], stepsize = 0.1, colour = magenta, linecolor = black, method = rkf45\right)$



## RIWAYAT HIDUP



Ulil Amri Akbar, lahir di Muaro Kalaban pada tanggal 25 Mei 1998. Anak kelima dari 6 bersaudara dari pasangan Bapak Riyaldi dan Ibu Jelita. Tinggal di Desa Muaro Kalaban Kec. Silungkang Kota Sawahlunto.

Pendidikan sekolah dasar di SD 01 Padang Sibusuk yang ditempuh selama 6 tahun. Kemudian pada tahun 2010 pendidikan di MTS.TI Paninggahan. Kemudian pada tahun 2013 melanjutkan pendidikan di MAS.TI Paninggahan. Pada tahun 2016 saya melanjutkan pendidikan ke perguruan tinggi Negeri yaitu Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan Mmengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Semasa menjadi mahasiswa, saya mengikuti beberapa organisasi mahasiswa intra dan ekstra kampus yaitu UKM Unit Olahraga sebagai anggota periode 2017-2018 dan Persatuan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) sebagai penanggung jawab bagian kematematikaan periode tahun 2017-2018 dalam rangka mengembangkan potensi akademik.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Ulil Amri Akbar  
NIM : 16610005  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Waktu Tunda pada *Trophic Transfer* Tidak Sempurna  
Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si  
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	2 Maret 2020	Konsultasi Bab I dan Topik penelitian	1.
2.	5 Maret 2020	Konsultasi Bab II	2.
3.	6 Maret 2020	Konsultasi Bab III	3.
4.	16 Maret 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	19 Juni 2020	Konsultasi Bab I, Bab II, dan Bab III	5.
6.	24 Juni 2020	ACC Bab I, Bab II, dan Bab III	6.
7.	20 Juli 2020	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	24 Juli 2020	Konsultasi Abstrak	8.
9.	20 September 2020	ACC abstrak	9.
10.	5 Oktober 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 5 Oktober 2020  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001