INDEKS WIENER DAN INDEKS TERMINAL WIENER PADA GRAF ANNIHILATOR GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

OLEH
NUR DANA NOVIYANTI SALMA
NIM. 16610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2020

INDEKS WIENER DAN INDEKS TERMINAL WIENER PADA GRAF ANNIHILATOR GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahm Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH
NUR DANA NOVIYANTI SALMA
NIM. 16610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

INDEKS WIENER DAN INDEKS TERMINAL WIENER
PADA GRAF ANNIHILATOR GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

OLEH
NUR DANA NOVIYANTI SALMA
NIM. 16610012

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 27 April 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Muhammad Khudzaifah, M.Si	M. Nafie Jauhari, M.Si
NIPT. 19900511 20160801 1 057	NIPT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

INDEKS WIENER DAN INDEKS TERMINAL WIENER PADA GRAF ANNIHILATOR GELANGGANG KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

OLEH
NUR DANA NOVIYANTI SALMA
NIM. 16610012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 14 Mei 2020

Penguji Utama	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Juhari, S.Pd., M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Anggota	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Dana Noviyanti Salma

NIM : 16610012

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Wiener Dan Indeks Terminal Wiener Pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif Dengan Unsur Kesatuan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 April 2020
Yang membuat pernyataan

Nur Dana Noviyanti Salma
NIM. 16610012

MOTO

"Adalah kehancuran bagi mereka yang menyerah"

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ibu dan Bapak tercinta yang selalu memberi dukungan fisik dan psikis kepada penulis, yang setiap saat berdoa untuk kesuksesan anak pertamanya ini, pengorbanan keduanya yang tak ternilai dengan apapun. Serta kepada adik dan keluarga saya yang slalu mendukung.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Indeks Wiener Dan Indeks Terminal Wiener Pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif Dengan Unsur Kesatuan" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulan Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan gelap gulita menuju jalan terang benderang yaitu agama Islam.

Pada penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyka bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terimaksih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan banyak arahan, ilmu, dan motivasi kepada penulis.
6. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen penguji utama yang telah banyak memberikan arahan dan nasihat kepada penulis.
8. Juhari, S.Pd., M.Si, selaku dosen ketua penguji yang telah banyak memberikan banyak arahan dan nasihat kepada penulis.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 27 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Salma, Nur Dana Noviyanti. 2020. **Indeks Wiener dan Indeks Terminal Wiener pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif Dengan Unsur Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Muhammad Khudzaifah, M.Si. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Graf Annihilator, Gelanggang Komutatif Dengan Unsur Kesatuan, Indeks Wiener, Indeks Terminal Wiener

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung. Indeks Wiener dari G didefinisikan sebagai $W(G) = \sum_{(u,v)\subseteq V(G)} d(u,v)$ dengan $d(u,v)$ adalah jarak terpendek dari u ke v. Sedangkan Indeks Terminal Wiener dari G didefinisikan sebagai $TW(G) = \sum_{(u,v)\subseteq V_1(G)} d(u,v)$ dengan $V_1(G) \subseteq V(G)$ dan titik pada $V_1(G)$ haruslah $\deg(v) = 1$. Penelitian ini bertujuan menentukan Indeks Wiener Dan Indeks Terminal Wiener Pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif Dengan Unsur Kesatuan pada modulo $\mathbb{Z}_{2p}$, dengan p prima. Didapatkan dengan mencari unsur pembagi nol terlebih dahulu, kemudian mencari titik yang terhubung langsung sehingga terbentuk graf annihilator. Sehingga didapatkan titik dan derajatnya. Hasil penelitian ini yaitu pertama, misalkan Indeks Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \leq 3$ dengan p adalah bilangan prima, maka $W\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = (p-1)^2$. Kedua, misalkan Indeks terminal Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \leq 3$ dengan p adalah bilangan prima, maka $TW(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = p^2 - 3p + 2$.

ABSTRACT

Salma, Nur Dana Noviyanti. 2020. Wiener and Terminal Wiener Indices of Annihilator Graph of Commutative Ring with Unity. Thesis. Mathematics Department. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor (I) Muhammad Khudzaifah, M.Sc. (II) M. Nafie Jauhari, M.Sc.

Keywords: Annihilator Graph, Commutative Ring with Unity, Wiener Index, Wiener Terminal Index

Let $G = (V(G), E(G))$ be a connected graph. Wiener's index of G is defined as $W(G) = \sum_{(u,v)\subseteq V(G)} d(u,v)$ where $d\ (u,v)$ is the distance from u to v. While the Wiener Terminal Index of G is defined as $TW(G) = \sum_{(u,v)\subseteq V_1(G)} d(u,v)$ with $V_1(G) \subseteq V(G)$ and $\deg(v) = 1, \forall x \in V_1(G)$. This study aims to determine the Wiener and Wiener Terminal Indices of Commutative Ring of Annihilator Graph with Unity on the $\mathbb{Z}_{2p}$ module, with p prime. The research steps are to determine the zero-divisor element, then looking for the vertex that is directly connected to form an annihilator graph. Consequently, we get the vertices and the degree. The results of this study are: the Wiener Index of annihilator graph from commutative ring $\mathbb{Z}_{2p}$ where $p \leq 3$ where p is a prime number, is $W(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = (p-1)^2$, and the Wiener terminal index of annihilator graph from commutative ring $\mathbb{Z}_{2p}$ where $p \leq 3$ where p is a prime number, is $TW(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = p^2 - 3p + 2$.

ملخص

سلمى ، نور دانا نوفيانتي. ٢٠٢٠. مؤش وينر و المؤش الطرفي لوينر على رسم بياني مبيد ساحة مع تبادلية الوحدوية. بحث أخير. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرف: ١) محمد حذيفة الماجستير. ٢) محمد نافع جوهري الماجستير.

الكلمات الرئيسية: رسم بياني للمبيد ، الساحة التبادلية مع عناصر الوحدوية، مؤش ، مؤش طرفي وينر.

مثلا أن $G=(V(G),E(G))$ هو رسم بياني متصل. يتم تعريف مؤش من G على أنه $W(G)=\sum_{(u,v)\subseteq V(G)} d(u,v)$ حيث $d(u,v)$ هو أقصر مسافة من u إلى v. بينما أن المؤش الطرفي لوينر من G يعرف بأنه $TW(G)=\sum_{(u,v)\subseteq V_1(G)} d(u,v)$ مع $V_1(G)\subseteq V(G)$ والنقطة عند $V_1(G)$ يجب أن تكون $\deg(v)=1$. تهدف هذه الدراسة إلى تحديد مؤش و المؤش الطرفي مؤش لوينر على الرسم البياني التبادلي للساحة مع العناصر الوحدوية في النومذجة $\mathbb{Z}_{2p}$ مع p. يتم الحصول عليها من خلال إيجاد عنصر القسمة الصفرية أولاً ، ثم البحث عن النقاط المرتبطة مباشرة لتشكيل الرسم البياني للمبيد. لذا نحصل على النقطة والدرجة. نتائج هذه الدراسة الأولى، على سبيل المثالا المؤش على الرسم البياني للمبيد من الساحة التبادلية $\mathbb{Z}_{2p}$ مع $p\le 3$ بحيث p هو الرقم رئيس ، فيكون $W\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right)=(p-1)^2$. الثانية، على سبيل المثال المؤش الطرفي لوينر على الرسم الباني للمبيد من الساحة التبادلية $\mathbb{Z}_{2p}$. مع $p\le 3$ بحيث pهو الرقم رئيس ، ثم $TW(AG(\mathbb{Z}_{2p}))=p^2-3p+2$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, sedangkan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan yang tak berurutan dari $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya elemen pada $V(G)$ yang dinamakan order dan dinotasikan $p(G)$, kemudian $q(G)$ merupakan notasi dari banyaknya elemen pada $E(G)$ yang dinamakan ukuran (Abdussakir, dkk., 2009: 9).

Segala sesuatu dapat diambil pelajarannya dan manfaatnya bagi orang-orang yang berfikir seperti penciptaan besi. Allah menciptakan besi supaya dapat diambil pelajarannya bagi orang-orang berfikir yang termuat dalam Firman Allah surat Al-Hadid ayat 25 sebagai berikut:

"Sesungguhnya Kami telah mengutus rasul-rasul Kami dengan membawa bukti-bukti yang nyata dan telah Kami turunkan bersama mereka Al Kitab dan neraca (keadilan) supaya manusia dapat melaksanakan keadilan. Dan Kami ciptakan besi yang padanya terdapat kekuatan yang hebat dan berbagai manfaat bagi manusia, (supaya mereka mempergunakan besi itu) dan supaya Allah mengetahui siapa yang menolong (agama)Nya dan rasul-rasul-Nya padahal Allah tidak dilihatnya. Sesungguhnya Allah Maha Kuat lagi Maha Perkasa."

Makna ayat di atas adalah besi merupakan salah satu dari tujuh unsur kimia yang telah dikenal oleh ilmuwan-ilmuwan zaman dahulu yaitu emas, perak, air raksa, loyang, timah hitam (plumbum), besi, dan timah, serta logam yang paling banyak tersebar di bumi. Besi itu biasanya terdapat dalam komponen unsur kimia lain seperti dalam oksida, sulfida (sulfat), zat arang dan silikon. Sejumlah kecil besi murni juga terdapat dalam batu meteor besi. Ayat ini menjelaskan bahwa besi mempunyai kekuatan yang dapat membahayakan dan dapat pula menguntungkan manusia. Allah menciptakan besi supaya dapat diambil manfaat dan pelajarannya bagi orang-orang berfikir, hal tersebut juga berlaku pada peneliti bahwa dalam suatu penelitian dalam bidang tertentu dapat diambil manfaat dan pelajarannya untuk bidang lain. Penelitian mengenai indeks Wiener dan indeks terminal wiener telah banyak diteliti di berbagai bidang salah satunya pada kimia, indeks Wiener dapat digunakan untuk memodelkan struktur atom. Hal tersebut adalah salah satu manfaat dari teori graf salah satu cabang bidang matematika pada bidang kimia.

Indeks Wiener yang diperkenalkan oleh Harry Wiener, adalah indeks topologi suatu molekul, yang didefinisikan sebagai jumlah dari panjang jalur terpendek antara semua pasangan simpul dalam grafik kimia yang mewakili atom-atom non-hidrogen dalam molekul. Indeks topologi yang juga dikenal sebagai indeks konektivitas adalah jenis deskriptor molekuler yang dihitung berdasarkan grafik molekul suatu senyawa kimia. Indeks topologis digunakan misalnya dalam pengembangan hubungan struktur-aktivitas kuantitatif (QSARs) di mana aktivitas biologis atau sifat-sifat molekul lainnya berkorelasi dengan struktur kimianya. Hubungan dengan sifat kimia adalah Wiener menunjukkan bahwa angka indeks Wiener berkorelasi erat dengan titik didih molekul alkana. Sedangkan indeks Wiener pada ilmu matematika adalah jumlah jarak antara setiap pasang graf yang terhubung.

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung. Indeks Wiener dari G didefinisikan sebagai:

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v).$$

Sedangkan indeks Terminal Wiener dari G didefinisikan sebagai:

$$TW(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V_1(G)} d(u,v),$$

dengan $V_1(G) \subseteq V(G)$ adalah himpunan titik di G yang berderajat satu.

Penelitian mengenai Wiener dan terminal Wiener dilakukan oleh beberapa peneliti seperti Ivan Gutman dan beberapa rekannya pada tahun 2009. Penelitian tentang Wiener dan Terminal Wiener terus berkembang dan banyak peneliti-peneliti lain yang terus mengembangkannya, seperti Ramane dan beberapa rekannya (2013) meneliti tentang Indeks Terminal Wiener dari graf garis. Ya-Hong Chen dan Xiao-Dong Zhang (2013) meneliti tentang Indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari graf pohon. Meryam Z. dan beberapa rekannya (2014) meneliti Indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari akar pohon dan dilanjutkan pada tahun 2015 mereka meneliti tentang Terminal Wiener dari *star-tree* dan *path-tree*. J. Baskar Babujee dan J. Senbagamalar (2015) meneliti tentang Wiener dan Terminal Wiener untuk graf yang diturunkan dari operasi tertentu. Rezaei dan rekan–rekannya (2017) yang meneliti tentang Indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari pohon Kragujegav, serta beberapa penelitian lainnya yang berkaitan dengan Wiener dan Terminal Wiener.

Penelitian terkait annihilator telah diteliti oleh beberapa peneliti sebelumnya, seperti Hirano (2002) meneliti annihilator ideal pada gelanggang polinomial terhadap gelanggang yang tidak komutatif. Zadeh (2017) meneliti tentang isomorfisme isometri dari annihilator pada $CO(G)$ di $LUC(G)*$. Penelitian terbaru oleh Sanghita Dutta dan Chanlemki Lanong (2017) mengenalkan konsep baru terkait graf yang diperoleh dari annihilator yaitu graf annihilator pada gelanggang komutatif hingga. Graf annihilator $AG(R)$ dari gelanggang komutatif R adalah graf dengan himpunan titik $Z(R)^*$ dan dua titik yang berbeda yang terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(x) \cup ann(y) \neq ann(xy)$, dimana $ann(x)$ adalah annihilator dari suatu titik x.

Berdasarkan beberapa penelitian terdahulu, penelitian mengenai indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dapat diperluas dan digabungkan dengan graf annihilator gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Dengan demikian, untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya, peneliti akan melakukan penelitian terkait "Indeks Wiener dan Indeks Terminal Wiener dari Graf Annihilator pada Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana rumus umum indeks Wiener dari graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan ?
2. Bagaimana rumus umum indeks terminal Wiener dari graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini berdasarkan rumusan masalah tersebut adalah:

1. Mengetahui rumus umum indeks Wiener dari graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Mengetahui rumus umum indeks terminal Wiener dari graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai bentuk umum Wiener Indeks dan Terminal Indeks dari graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf dan struktur aljabar.
3. Dapat dijadikan rujukan bahan perkuliahan khususnya tentang graf annihilator, Indeks Wiener dan indeks terminal Wiener, serta rumus umum indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini akan memfokuskan pembahasannya pada indeks Wiener dan indeks terminal Wiener. Graf yang digunakan untuk menentukan adalah graf annihilator dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Penelitian ini memfokuskan pada $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan p merupakan bilangan prima.

1.6 Metode Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan tersebut, penelitian ini akan membahas cara penyelesaian dari permasalahan tersebut. Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku dan artikel-artikel yang berkaitan dengan teori graf dan struktur aljabar. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai graf annihilator, indeks Wiener dan indeks terminal Wiener suatu graf. Kajian pada buku-buku struktur aljabar berkaitan dengan gelanggang, khususnya tentang gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Menentukan pembagi nol $Z(R)$ dari $\mathbb{Z}_{2p}$ sebagai himpunan titik graf annihilator dengan menggunakan table Cayley operasi perkalian.
2. Menentukan titik yang terhubung pada graf annihilator dari himpunan titik yang diperoleh.
3. Menentukan graf yang diperoleh dari setiap titik yang terhubung dari langkah 2.
4. Menghitung jarak antar titik pada setiap graf yang diperoleh.
5. Menentukan derajat setiap titiknya.
6. Menghitung indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari graf annihilator dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
7. Menentukan rumus umum untuk indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari graf annihilator dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.7 Sistematika Penelitian

Penulisan ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab terdiri dari subbab. Sistematika ini dibuat untuk menjadi arahan penulisan agar lebih terarah dan mudah dipahami. Sistematika tersebut yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka berisi mengenai teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti. Penelitian ini menggunakan teori meliputi: teori graf, graf terhubung, indeks Wiener dan indeks terminal Wiener, Gelanggang, Gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, graf annihilator.

Bab III Pembahasan

Pembahsan berisi mengenai penyelesaian terhadap permasalahan indeks Wiener dan indeks terminal Wiener dari graf annihilator dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Bab IV Penutup

Penutup berisi titikan hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf

Definisi 2.1

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, sedangkan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan yang tak berurutan dari $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya elemen pada $V(G)$ yang dinamakan order dan dinotasikan $p(G)$, kemudian $q(G)$ merupakan notasi dari banyaknya elemen pada $E(G)$ yang dinamakan ukuran. Graf dengan order dan ukuran dapat dituliskan sebagai p dan q dapat disebut $graf - (p, q)$ (Abdussakir, dkk.,2009).

2.2 Graf Terhubung

Definisi 2.2

Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, titik u dan v disebut ujung dari sisi e(Chartrand, dkk, 2016). Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaiknya, jika terdapat dua titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G, maka G dikatakan tak terhubung(Abdussakir, dkk, 2009).

2.3 Jarak pada Graf

Chartrand dan Zhang(2009) mengatakan jika u dan v adalah titik yang berbeda pada graf G yang terhubung, maka terdapat garis antara titik u dan di G. Pada kenyataannya, mungkin terdapat beberapa lintasan $u - v$ di G yang panjangnya bervariasi. Informasi ini dapat digunakan untuk menunjukkan ukuran seberapa dekat antara u dan v atau seberapa jauh u dan v. Jarak *(distance)* $d(u, v)$ dari titik u ke titik v pada graf G yang terhubung adalah panjang minimum dari lintasan $u - v$ di G. Panjang lintasan $u - v$ disebut geodesik $u - v$. Dalam graf G pada gambar 2.1 , lintasan $P = (v_1, v_5, v_6, v_{10})$ adalah geodesik $v_1 - v_{10}$ jadi $d(v_1, v_{10}) = 3$. Selanjutnya, $d(v_1, v_1) = 0$, $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_6) = 2$, $d(v_1, v_7) = 3$, dan $d(v_1, v_8) = 4$ (Chartrand,2009:34).

2.4 Indeks Wiener dan Indeks Terminal Wiener

Definisi 2.3

Misalkan $G = (V(G), E(G)$ adalah sebuah graf terhubung. Indeks Wiener dari G didefinisikan sebagai:

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u, v).$$

Definisi 2.4

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah sebuah graf terhubung. Indeks Terminal Wiener dari G didefinisikan sebagai:

$$TW(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V_1(G)} d(u, v),$$

dimana $V_1(G) \subseteq V(G)$ adalah himpunan dari titik dari G yang derajatnya sama dengan satu (Gutman,dkk,2009).

2.5 Gelanggang

Suatu gelanggang $(R,+,\cdot)$ adalah suatu himpunan tak kosong R dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ pada R yang memenuhi aksioma-aksioma berikut (Mas'oed,2013:84):

1. Tertutup terhadap penjumlahan $(+)$, misalkan $a,b \in R$ maka R dikatakan tertutup jika $a+b \in R$.
2. Asosiatif terhadap penjumlahan $(+)$, misalkan $a,b,c \in R$ maka $(a+b)+c = a+(b+c)$.
3. Terdapat unsur satuan atau identitas terhadap penjumlahan $(+)$, misalkan $a \in R$ maka $a+(-a) = (-a)+a = e = 0$.
4. Terdapat unsur satuan atau identitas terhadap penjumlahan $(+)$, misalkan $a,b \in R$ maka $a+e = e+a = a$.
5. Komutatif terhadap penjumlahan $(+)$, misalakan $a,b \in R$ maka $a+b = b+a$.
6. Tertutup terhadap penjumlahan $(+)$, misalkan $a,b \in R$ maka dikatakan tertutup jika $a \cdot b \in R$.
7. Asosiatif terhadap perkalian $(\cdot)$, misalkan $a,b,c \in R$ maka $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
8. Adanya unsur satuan atau identitas terhadap perkalian $(\cdot)$, misalkan $a \in R$ maka $a \cdot e = e \cdot a = a$.

9. Distributif perkalian $(\cdot)$ dan terhadap penjmlahan $(+)$, misalkan $a, b, c \in R$ maka $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

2.6 Gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan

Misalkan R adalah gelanggang. Jika terdapat unsur $e \in R$ sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$ untuk setiap $x \in R$, maka e disebut unsur kesatuan (identitas), dan R adalah gelanggang dengan unsur kesatuan (identitas). Jika operasi perkalian pada R komutatif, maka R disebut dengan Gelanggang komutatif (Gilbert dan Jimmie :261).

2.7 Graf Annihilator

Definisi 2.5

Misalkan $a \in Z(R)$ dan misalkan $ann(a) = \{r \in R | ra = 0\}$. Graf annihilator $AG(R)$ dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan R adalah graf sederhana yang tidak berarah, dengan titik himpunan $Z(R)^*$ dan dua titik atau titik yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(x) \cup ann(y) \neq ann(xy)$ (Dutta dan Chanlemki: 3).

2.8 Kongruensi Linier

Definisi 2.6

Misalkan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo m. Banyaknya selesaian dari $f(x) \equiv 0(mod\ m)$ adalah banyaknya s_i yang memenuhi $f(s_i) \equiv 0(mod\ m)$.

Teorema 2.1

Kongruensi linier $ax \equiv b\ (mod\ m)$ dapat diselesaikan hanya jika $d = (a, m)$ membagi b, dan pada kasus ini memiliki d selesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi memiliki satu selesaian.

2.9 Al-Quran Sebagai Sumber Pengetahuan

Keistimewaan Al-Quran dalam kehidupan sehari-hari salah satunya sangat berhubungan dengan ilmu pengetahuan, banyak ilmu-ilmu yang berkaitan dengan ayat-ayat Al-Quran. Salah satu pengetahuan yang dapat di integrasikan dengan Al-Quran adalah matematika. Dalam penelitian ini ilmu matematika yang diambil adalah tentang graf. Banyak penelitian yang membahas tentang teori graf. Graf menurut definisi merupakan suatu himpunan tak kosong yang memuat objek-objek yang disebut titik dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda ang disebut sisi. Titik dan sisi adalah subtansi dari teori graf. Graf mempunyai berbagai bentuk struktur yang tersusun rapi. Matematika juga sangat berhubungan dengan ilmu-ilmu yang lain, seperti dalam ilmu kimia. Ilmu kimia memiliki ciri khusus yaitu atomnya, atom memiliki struktur yang sangat rapi seperti halnya graf. Jadi ilmu matematika sangat berhubungan dengan ilmu yang lain dan sangat bermanfaat bagi ilmu yang lain, seperti dalam potongan surat Al-Anbiya' ayat 30:

"...Dan dari air kami jadikan sesuatu yang hidup. Maka mengapakah mereka tiada beriman?".

"Dan dari air kami jadikan sesuatu yang hidup" menjelaskan bahwa Allah menjadikan segala yang hidup dari air, baik pohon kayu maupun binatang. Tidak

ada benda hidup yang tidak membutuhkan air, bahkan airlah yang menjadi asalnya. Hewan berasal dari nutfah, sedangkan nutfah adalah air. Sebagian ulama pada masa sekarang ini berpendapat bahwa segala binatang pada mulanya dijadikan di laut baik burung atau ternak darat adalah berasal dari laut. Airlah unsur yang penting bagi kehidupan sesuatu yang hidup. Hewan bisa hidup sampai 70 hari tanpa mengenyam makanan, jika masih meminum air. Dan pada potongan ayat *"Maka mengapakah mereka tiada beriman?"* menjelaskan mengapa mereka tidak memperhatikan dalil-dalil yang telah dikemukakan supaya mereka meyakini adanya Pencipta Yang Maha Kuasa, lalu mereka mengimaninya?.

Interpretasi dari ayat tersebut bahwa Allah menciptakan kejadian alam, yaitu hujan. Air hujan sangat bermanfaat bagi kehidupan makhluk hidup yang lain. Partikel-partikel yang terkandung di dalam air hujan sangatlah banyak. Dari hujan dapat diambil pelajarannya, yaitu kandungan air yang terdapat dalam air sangat menarik untuk di pelajari lebih jauh lagi. Hujan banyak manfaatnya Allah menurunkan hujan supaya bisa diambil hikmahnya dan pelajarannya. Banyak kejadian-kejadian alam yang bisa diambil pelajaranya. Sehingga seorang matematikawan tentunya kita harus mempelajari kejadian-kejadian alam tersebut dan mengambil manfaatnya. Untuk mempelajari hal tersebut dibutuhkan ilmu pada bidang lain, seperti penelitian mengenai indeks Wiener dan indeks terminal wiener telah banyak diteliti di berbagai bidang salah satunya pada kimia, indeks Wiener dapat digunakan untuk memodelkan struktur atom. Salah satunya pada penelitian M. Rezaei, M.K. Jamil, M.R. Farahani dan Z. Foruzanfar yang berjudul *On The Terminal Wiener Indices of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons* PAH_S menjelaskan bahwa rumus dari indeks terminal Wiener dapat digunakan dalam mehitung graf molekul Polycyclic Aromatic Hydrocarbons PAH_S. Seperti dalam contoh perhitungan indeks terminal Wiener pada Benzene, perhitungan terminal Wiener pada Coronene dan perhitungan terminal Wiener pada Circumcoronene.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang bagaimana bentuk graf annihilator pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, serta rumus umum dari indeks Wiener dan indeks terminal Wiener pada graf tersebut. Sehingga bisa mendapatkan hasil yang diharapkan.

3.1 Indeks Wiener pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

Gelanggang yang dibahas pada subbab ini adalah gelanggang $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan, $p \geq 3$ dan p bilangan prima. Beberapa gelanggang $\mathbb{Z}_{2p}$ yang memenuhi kriteria di atas di antaranya adalah $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{34}$ dan $\mathbb{Z}_{38}$. Namun untuk menemukan dugaan pola indeks Wiener dan indeks terminal Wiener akan dibahas adalah $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$ dan $\mathbb{Z}_{22}$.

3.1.1 Gelanggang Komutatif modulo 6 ($\mathbb{Z}_6$)

Elemen-elemen dari gelanggang $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_6$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.1 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_6)^* = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_6)^*$ sebagai berikut:

$$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6 \qquad ann(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\} \qquad ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\} \qquad ann(\bar{5}) = \{\bar{0}\}.$$

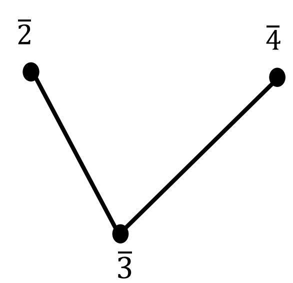
Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{3}) \neq ann(\bar{2} \cdot \bar{3})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{4}) \neq ann(\bar{3} \cdot \bar{4})$.

Sehingga graf $AG(\mathbb{Z}_6)$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1 $AG(\mathbb{Z}_6)$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\bar{2},\bar{3}) = 1, d(\bar{2},\bar{4}) = 2, d(\bar{3},\bar{4}) = 1, \deg(\bar{2}) = 1, \deg(\bar{3}) = 2, \deg(\bar{4}) = 1.$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

$$W(AG(\mathbb{Z}_6)) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v)$$

$$= d(\bar{2},\bar{3}) + d(\bar{2},\bar{4}) + d(\bar{3},\bar{4})$$

$$= 1 + 2 + 1$$

$$= 2(1) + 1(2)$$

$$= 4$$

3.1.2 Gelanggang Komutatif modulo 10 ($\mathbb{Z}_{10}$)

Elemen-elemen dari gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_{10}$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.2 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_{10})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_{10})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_{10}$

$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{3}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{5}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{9}) = \{\bar{0}\}$

Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{5}) \neq ann(\bar{2} \cdot \bar{5})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{5}) \neq ann(\bar{4} \cdot \bar{5})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

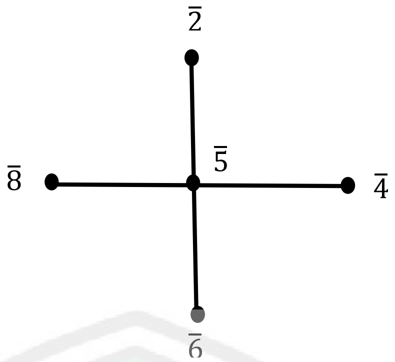
$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{5}) \cup ann(\bar{6}) \neq ann(\bar{5} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{5}) \cup ann(\bar{8}) \neq ann(\bar{5} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8}$

Sehingga graf $AG(\mathbb{Z}_{10})$dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.2 $AG(\mathbb{Z}_{10})$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut: $d(\bar{2},\bar{4}) = 2, d(\bar{2},\bar{5}) = 1, d(\bar{2},\bar{6}) = 2, d(\bar{2},\bar{8}) = 2, d(\bar{4},\bar{5}) = 1, d(\bar{4},\bar{6}) = 2, d(\bar{4},\bar{8}) = 2, d(\bar{5},\bar{6}) = 1, d(\bar{5},\bar{8}) = 1, d(\bar{6},\bar{8}) = 2$

$\deg(\bar{2}) = 1, \deg(\bar{4}) = 1, \deg(\bar{5}) = 4, \deg(\bar{6}) = 1, \deg(\bar{8}) = 1.$

Setelah didapatkan jarak dan derajat sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

$$W(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)$$

$$= d(\bar{2},\bar{4}) + d(\bar{2},\bar{5}) + d(\bar{2},\bar{6}) + d(\bar{2},\bar{8}) + d(\bar{4},\bar{5}) + d(\bar{4},\bar{6})$$

$$+ d(\bar{4},\bar{8}) + d(\bar{5},\bar{6}) + d(\bar{5},\bar{8}) + d(\bar{6},\bar{8})$$

$$= 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2$$

$$= 2(6) + 1(4)$$

$$= 16$$

3.1.3 Gelanggang Komutatif modulo 14 $(\mathbb{Z}_{14})$

Elemen-elemen dari gelanggang $\mathbb{Z}_{14}$ adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_{14}$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.3 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_{14})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_{14})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_{14}$

$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{3}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{5}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{9}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\overline{11}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$ $ann(\overline{13}) = \{\bar{0}\}$

Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{7}) \neq ann(\bar{2} \cdot \bar{7})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{7}) \neq ann(\bar{4} \cdot \bar{7})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{7}) \neq ann(\bar{6} \cdot \bar{7})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{7}) \cup ann(\bar{8}) \neq ann(\bar{7} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{10}) \neq ann(\bar{7} \cdot \overline{10})$

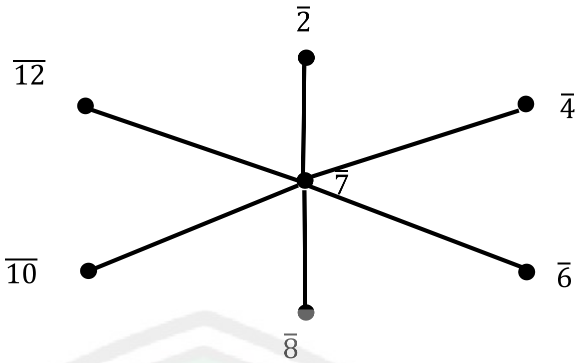
$ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{12}) \neq ann(\bar{7} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{9} \cdot \overline{10})$

Dari data yang tersebut diperoleh graf $AG(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut.



Gambar 3.3 $AG(\mathbb{Z}_{14})$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\overline{2},\overline{4}) = 2, d(\overline{2},\overline{6}) = 2, d(\overline{2},\overline{7}) = 1, d(\overline{2},\overline{8}) = 2, d(\overline{2},\overline{10}) = 2,$

$d(\overline{2},\overline{12}) = 2, d(\overline{4},\overline{6}) = 2, d(\overline{4},\overline{7}) = 1, d(\overline{4},\overline{8}) = 2, d(\overline{4},\overline{10}) = 2,$

$d(\overline{4},\overline{12}) = 2, d(\overline{6},\overline{7}) = 1, d(\overline{6},\overline{8}) = 2, d(\overline{6},\overline{10}) = 2, d(\overline{6},\overline{12}) = 2,$

$d(\overline{7},\overline{8}) = 1, d(\overline{7},\overline{10}) = 1, d(\overline{7},\overline{12}) = 1, d(\overline{8},\overline{10}) = 2, d(\overline{8},\overline{12}) = 2,$

$d(\overline{10},\overline{12}) = 2.$

$\deg(\overline{2}) = 1, \deg(\overline{4}) = 1, \deg(\overline{6}) = 1, \deg(\overline{7}) = 6, \deg(\overline{8}) = 1, \deg(\overline{10}) = 1, \deg(\overline{12}) = 1.$

Setelah didapatkan jarak dan derajat sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

$$W\big(AG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)$$

$$= d(\overline{2},\overline{4}) + d(\overline{2},\overline{6}) + d(\overline{2},\overline{7}) + d(\overline{2},\overline{8}) + d(\overline{2},\overline{10}) + d(\overline{2},\overline{12})$$
$$+ d(\overline{4},\overline{6}) + d(\overline{4},\overline{7}) + d(\overline{4},\overline{8}) + d(\overline{4},\overline{10}) + d(\overline{4},\overline{12})$$
$$+ d(\overline{6},\overline{7}) + d(\overline{6},\overline{8}) + d(\overline{6},\overline{10}) + d(\overline{6},\overline{12}) + d(\overline{7},\overline{8})$$
$$+ d(\overline{7},\overline{10}) + d(\overline{7},\overline{12}) + d(\overline{8},\overline{10}) + d(\overline{8},\overline{12}) + d(\overline{10},\overline{12})$$

$= 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2$

$+ 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2$

$= 2(15) + 1(6)$

$= 36.$

3.1.4 Gelanggang Komutatif modulo 22 ($\mathbb{Z}_{22}$)

Elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_{22} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{21}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_{22}$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.4 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_{22})^* = \{\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{14},\overline{16},\overline{18},\overline{20}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_{22})^*$sebagai berikut:

$ann(\overline{0}) = \mathbb{Z}_{22}$

$ann(\overline{1}) = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{2}) = \{\overline{0},\overline{11}\}$

$ann(\overline{3}) = \{\overline{0}\}$

$ann(\overline{4}) = \{\overline{0},\overline{11}\}$

$ann(\overline{5}) = \{\overline{0}\}$

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{9}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{13}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{15}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{17}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{19}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{21}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{11}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$

Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\bar{2} \cdot \overline{11})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{14})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{16})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{18})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{20})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\bar{4} \cdot \overline{11})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{14})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{16})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{4}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{4} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{8}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{8})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{10})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\overline{6} \cdot \overline{11})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{6}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{6} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{10})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\overline{8} \cdot \overline{11})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{8}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{8} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\overline{10} \cdot \overline{11})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{12}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{14}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{16}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{18}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{20}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{18})$

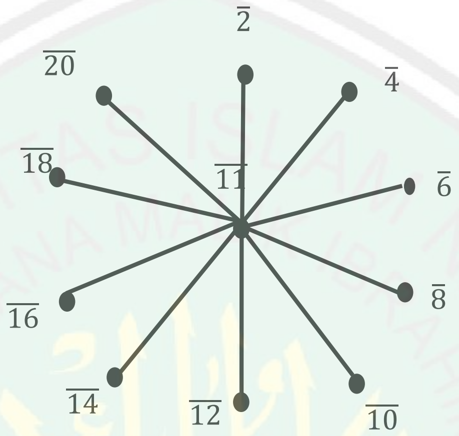
$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{16}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{16} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{16}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{16} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{18}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{18} \cdot \overline{20})$.

Sehingga graf $AG(\mathbb{Z}_{22})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 $AG(\mathbb{Z}_{22})$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\overline{2},\overline{4}) = 2, d(\overline{2},\overline{6}) = 2, d(\overline{2},\overline{8}) = 2, d(\overline{2},\overline{10}) = 2, d(\overline{2},\overline{11}) = 1,$

$d(\overline{2},\overline{12}) = 2, d(\overline{2},\overline{14}) = 2, d(\overline{2},\overline{16}) = 2, d(\overline{2},\overline{18}) = 2, d(\overline{2},\overline{20}) = 2,$

$d(\overline{4},\overline{6}) = 2, d(\overline{4},\overline{8}) = 2, d(\overline{4},\overline{10}) = 2, d(\overline{4},\overline{11}) = 1, d(\overline{4},\overline{12}) = 2,$

$d(\overline{4},\overline{14}) = 2, d(\overline{4},\overline{16}) = 2, d(\overline{4},\overline{18}) = 2, d(\overline{4},\overline{20}) = 2, d(\overline{6},\overline{8}) = 2,$

$d(\overline{6},\overline{10}) = 2, d(\overline{6},\overline{11}) = 1, d(\overline{6},\overline{12}) = 2, d(\overline{6},\overline{14}) = 2, d(\overline{6},\overline{18}) = 2,$

$d(\overline{6},\overline{20}) = 2, d(\overline{8},\overline{10}) = 2, d(\overline{8},\overline{11}) = 1, d(\overline{8},\overline{12}) = 2, d(\overline{8},\overline{12}) = 2,$

$d(\overline{8},\overline{14}) = 2, d(\overline{8},\overline{16}) = 2, d(\overline{8},\overline{18}) = 2, d(\overline{8},\overline{20}) = 2, d(\overline{10},\overline{11}) = 1,$

$d(\overline{10},\overline{12}) = 2, d(\overline{10},\overline{14}) = 2, d(\overline{10},\overline{16}) = 2, d(\overline{10},\overline{18}) = 2,$

$d(\overline{10},\overline{20}) = 2, d(\overline{11},\overline{12}) = 1, d(\overline{11},\overline{14}) = 1, d(\overline{11},\overline{16}) = 1, d(\overline{11},\overline{18}) = 1,$

$d(\overline{11},\overline{20}) = 1, d(\overline{12},\overline{14}) = 2, d(\overline{12},\overline{16}) = 2, d(\overline{12},\overline{18}) = 2, d(\overline{12},\overline{20}) = 2,$

$d(\overline{14},\overline{16}) = 2, d(\overline{14},\overline{18}) = 2, d(\overline{14},\overline{20}) = 2, d(\overline{16},\overline{18}) = 2, d(\overline{16},\overline{20}) = 2,$

$d(\overline{18},\overline{20}) = 2.$

$\deg(\overline{2}) = 1, \deg(\overline{4}) = 1, \deg(\overline{6}) = 1, \deg(\overline{8}) = 1, \deg(\overline{10}) = 1, \deg(\overline{11}) =$
$10, \deg(\overline{12}) = 1, \deg(\overline{14}) = 1, \deg(\overline{16}) = 1, \deg(\overline{18}) = 1, \deg(\overline{20}) = 1.$

Setelah didapatkan jarak dan derajat sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut

$$W\big(AG(\mathbb{Z}_{22})\big) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)$$

$$= d(\overline{2},\overline{4}) + d(\overline{2},\overline{6})+, d(\overline{2}, \overline{8}) + d(\overline{2},\overline{10}) + d(\overline{2},\overline{11}) + d(\overline{2},\overline{12})$$
$$+ d(\overline{2}, \overline{14}) + d(\overline{2},\overline{16}) + d(\overline{2}, \overline{18}) + d(\overline{2},\overline{20}) + d(\overline{4}, \overline{6})$$
$$+ d(\overline{4}, \overline{8}) + d(\overline{4},\overline{10}) + d(\overline{4}, \overline{11}) + d(\overline{4},\overline{12}) + d(\overline{4},\overline{14})$$
$$+ d(\overline{4}, \overline{16}) + d(\overline{4},\overline{18}) + d(\overline{4},\overline{20}) + d(\overline{6}, \overline{8}) + d(\overline{6},\overline{10})$$
$$+ d(\overline{6},\overline{11}) + d(\overline{6},\overline{12}) + d(\overline{6},\overline{14}) + d(\overline{6},\overline{18}) + d(\overline{6},\overline{20})$$
$$+ d(\overline{8},\overline{10}) + d(\overline{8},\overline{11}) + d(\overline{8},\overline{12}) + d(\overline{8},\overline{12}) + d(\overline{8},\overline{14})$$
$$+ d(\overline{8},\overline{16}) + d(\overline{8},\overline{18}) + d(\overline{8},\overline{20}) + d(\overline{10},\overline{11}) + d(\overline{10},\overline{12})$$
$$+ d(\overline{10},\overline{14}) + d(\overline{10},\overline{16}) + d(\overline{10},\overline{18}) + d(\overline{10},\overline{20}) + d(\overline{11},\overline{12})$$
$$+ d(\overline{11},\overline{14}) + d(\overline{11},\overline{16}) + d(\overline{11},\overline{18}) + d(\overline{11},\overline{20}) + d(\overline{12},\overline{14})$$
$$+ d(\overline{12},\overline{16}) + d(\overline{12},\overline{18}) + d(\overline{12},\overline{20}) + d(\overline{14},\overline{16}) + d(\overline{14},\overline{18})$$
$$+ d(\overline{14},\overline{20}) + d(\overline{16},\overline{18}) + d(\overline{16},\overline{20}) + d(\overline{18},\overline{20})$$
$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2$$
$$+ 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2$$
$$+ 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$+ 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$
$$= 2(45) + 1(10)$$

$= 100$

3.2 Indeks Terminal Wiener pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

Gelanggang yang dibahas pada subbab ini adalah gelanggang $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan, $p \geq 3$ dan p bilangan prima. Beberapa gelanggang $\mathbb{Z}_{2p}$ yang memenuhi kriteria di atas di antaranya adalah $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{34}$ dan $\mathbb{Z}_{38}$. Namun untuk menemukan dugaan pola indeks Wiener dan indeks terminal Wiener akan dibahas adalah $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$ dan $\mathbb{Z}_{22}$.

3.2.1 Gelanggang Komutatif modulo 6 ($\mathbb{Z}_6$)

Elemen-elemen dari gelanggang $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_6$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.5 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_6)^* = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_6)^*$ sebagai berikut:

$$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_6 \qquad ann(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\} \qquad ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\} \qquad ann(\bar{5}) = \{\bar{0}\}.$$

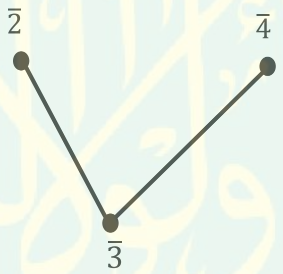
Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{3}) \neq ann(\bar{2} \cdot \bar{3})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{3}) \cup ann(\bar{4}) \neq ann(\bar{3} \cdot \bar{4})$.

Sehingga graf $AG(\mathbb{Z}_6)$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.5 $AG(\mathbb{Z}_6)$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\bar{2}, \bar{3}) = 1, d(\bar{2}, \bar{4}) = 2, d(\bar{3}, \bar{4}) = 1, \deg(\bar{2}) = 1, \deg(\bar{3}) = 2, \deg(\bar{4}) = 1.$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks terminal Wiener sebagai berikut:

$$TW\big(AG(\mathbb{Z}_6)\big) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V_1(G)} d(u, v)$$

$$= d(\bar{2}, \bar{4})$$

$$= 2(1)$$

$= 2.$

3.2.2 Gelanggang Komutatif modulo 10 ($\mathbb{Z}_{10}$)

Elemen-elemen dari gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_{10}$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.6 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_{10})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_{10})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_{10}$

$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{3}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{5}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}\}$ $\qquad$ $ann(\bar{9}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{5}\}$

Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$ $\qquad$ $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

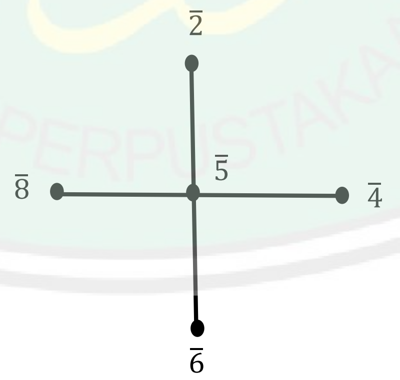
$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{5}) \neq ann(\bar{2} \cdot \bar{5})$ $\qquad$ $ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$ $\qquad$ $ann(\bar{5}) \cup ann(\bar{6}) \neq ann(\bar{5} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$ $\qquad$ $ann(\bar{5}) \cup ann(\bar{8}) \neq ann(\bar{5} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{5}) \neq ann(\bar{4} \cdot \bar{5})$ $\qquad$ $ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$

Sehingga graf $AG(\mathbb{Z}_{10})$dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.6 $AG(\mathbb{Z}_6)$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\bar{2},\bar{4}) = 2, d(\bar{2},\bar{5}) = 1, d(\bar{2},\bar{6}) = 2, d(\bar{2},\bar{8}) = 2, d(\bar{4},\bar{5}) = 1, d(\bar{4},\bar{6}) = 2, d(\bar{4},\bar{8}) = 2, d(\bar{5},\bar{6}) = 1, d(\bar{5},\bar{8}) = 1, d(\bar{6},\bar{8}) = 2$

$\deg(\bar{2}) = 1, \deg(\bar{4}) = 1, \deg(\bar{5}) = 4, \deg(\bar{6}) = 1, \deg(\bar{8}) = 1.$

Setelah didapatkan jarak dan derajat sehingga dapat dihitung nilai indeks terminal Wienersebagai berikut:

$$TW(AG(\mathbb{Z}_{10})) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V_1(G)} d(u,v)$$

$$= d(\bar{2},\bar{4}) + d(\bar{2},\bar{6}) + d(\bar{2},\bar{8}) + d(\bar{4},\bar{6}) + d(\bar{4},\bar{8}) + d(\bar{6},\bar{8})$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= 2(6)$$

$$= 12$$

3.2.3 Gelanggang Komutatif modulo 14 ($\mathbb{Z}_{14}$)

Elemen-elemen dari gelanggang $\mathbb{Z}_{14}$ adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_{14}$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.7 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_{14})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_{14})^*$ sebagai berikut:

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_{14}$

$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{3}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{5}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\bar{9}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\overline{11}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{7}\}$

$ann(\overline{13}) = \{\bar{0}\}$

Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{7}) \neq ann(\bar{2} \cdot \bar{7})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{7}) \neq ann(\bar{4} \cdot \bar{7})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{7}) \neq ann(\bar{6} \cdot \bar{7})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{7}) \cup ann(\bar{8}) \neq ann(\bar{7} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{10}) \neq ann(\bar{7} \cdot \overline{10})$

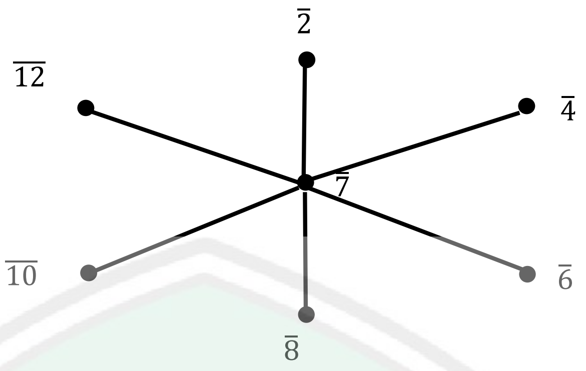
$ann(\bar{7}) \cup ann(\overline{12}) \neq ann(\bar{7} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{9} \cdot \overline{10})$

Dari data yang tersebut diperoleh graf $AG(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut.



Gambar 3.7 $\boldsymbol{AG(\mathbb{Z}_{14})}$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\bar{2},\bar{4}) = 2, d(\bar{2},\bar{6}) = 2, d(\bar{2},\bar{7}) = 1, d(\bar{2},\bar{8}) = 2, d(\bar{2},\overline{10}) = 2,$

$d(\bar{2},\overline{12}) = 2, d(\bar{4},\bar{6}) = 2, d(\bar{4},\bar{7}) = 1, d(\bar{4},\bar{8}) = 2, d(\bar{4},\overline{10}) = 2,$

$d(\bar{4},\overline{12}) = 2, d(\bar{6},\bar{7}) = 1, d(\bar{6},\bar{8}) = 2, d(\bar{6},\overline{10}) = 2, d(\bar{6},\overline{12}) = 2,$

$d(\bar{7},\bar{8}) = 1, d(\bar{7},\overline{10}) = 1, d(\bar{7},\overline{12}) = 1, d(\bar{8},\overline{10}) = 2, d(\bar{8},\overline{12}) = 2,$

$d(\overline{10},\overline{12}) = 2.$

$\deg(\bar{2}) = 1, \deg(\bar{4}) = 1, \deg(\bar{6}) = 1, \deg(\bar{7}) = 6, \deg(\bar{8}) = 1, \deg(\overline{10}) = 1, \deg(\overline{12}) = 1.$

Setelah didapatkan jarak dan derajat sehingga dapat dihitung nilai indeks terminal Wienersebagai berikut:

$$TW\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V_1(G)} d(u,v)$$

$$= d(\bar{2},\bar{4}) + d(\bar{2},\bar{6}) + d(\bar{2},\bar{8}) + d(\bar{2},\overline{10}) + d(\bar{2},\overline{12})$$

$$+ d(\bar{4},\bar{6}) + d(\bar{4},\bar{8}) + d(\bar{4},\overline{10}) + d(\bar{4},\overline{12}) + d(\bar{6},\bar{8})$$

$$+ d(\bar{6},\overline{10}) + d(\bar{6},\overline{12}) + d(\bar{8},\overline{10}) + d(\bar{8},\overline{12}) + d(\overline{10},\overline{12})$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= 2(15)$$

$$= 30$$

3.2.4 Gelanggang Komutatif modulo 22 ($\mathbb{Z}_{22}$)

Elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{21}\}$. Apabila elemen-elemen tersebut di operasikan dengan $(\cdot)$ maka diperoleh hasil pengoperasian dari $\mathbb{Z}_{22}$ pada tabel Cayley sebagai berikut.

Tabel 3.8 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{18}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{19}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{21}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan tabel tersebut didapatkan hasil $Z(\mathbb{Z}_{22})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$, sehingga didapatkan annihilatornya dari masing-masing unsur $Z(\mathbb{Z}_{22})^*$sebagai berikut:

$ann(\bar{0}) = \mathbb{Z}_{22}$

$ann(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{2}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{3}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{4}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{5}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{6}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{7}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\bar{8}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\bar{9}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{10}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{12}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{13}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{14}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{15}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{16}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{17}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{18}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{19}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{20}) = \{\bar{0}, \overline{11}\}$

$ann(\overline{21}) = \{\bar{0}\}$

$ann(\overline{11}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$

Setelah itu akan di cari bentuk grafnya dengan aturan keterhubungan titik tersebut maka dapat diperoleh:

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{4}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{4})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{2} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\bar{2} \cdot \overline{11})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{14})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{16})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{18})$

$ann(\bar{2}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\bar{2} \cdot \overline{20})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{6}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{6})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{4} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\bar{4} \cdot \overline{11})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{14})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{16})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{18})$

$ann(\bar{4}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\bar{4} \cdot \overline{20})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\bar{8}) = ann(\bar{6} \cdot \bar{8})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\bar{6} \cdot \overline{11})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{14})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{16})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{18})$

$ann(\bar{6}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\bar{6} \cdot \overline{20})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{10}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{10})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\bar{8} \cdot \overline{11})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{12})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{14})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{16})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{18})$

$ann(\bar{8}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\bar{8} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{11}) \neq ann(\overline{10} \cdot \overline{11})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{12}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{10}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{10} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{12}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{12})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{14}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{16}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{18}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{11}) \cup ann(\overline{20}) \neq ann(\overline{11} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{14}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{14})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{12}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{12} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{16}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{16})$

$ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{18})$

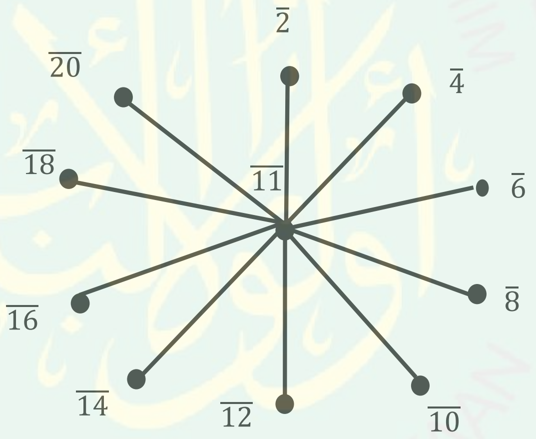
$ann(\overline{14}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{14} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{16}) \cup ann(\overline{18}) = ann(\overline{16} \cdot \overline{18})$

$ann(\overline{16}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{16} \cdot \overline{20})$

$ann(\overline{18}) \cup ann(\overline{20}) = ann(\overline{18} \cdot \overline{20})$.

Sehingga graf $AG(\mathbb{Z}_{22})$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.8 $AG(\mathbb{Z}_{22})$

Pada gambar graf tersebut didapatkan jarak dan derajat sebagai berikut:

$d(\overline{2},\overline{4}) = 2, d(\overline{2},\overline{6}) = 2, d(\overline{2},\overline{8}) = 2, d(\overline{2},\overline{10}) = 2, d(\overline{2},\overline{11}) = 1,$

$d(\overline{2},\overline{12}) = 2, d(\overline{2},\overline{14}) = 2, d(\overline{2},\overline{16}) = 2, d(\overline{2},\overline{18}) = 2, d(\overline{2},\overline{20}) = 2,$

$d(\overline{4}, \overline{6}) = 2, d(\overline{4},\overline{8}) = 2, d(\overline{4},\overline{10}) = 2, d(\overline{4},\overline{11}) = 1, d(\overline{4},\overline{12}) = 2,$

$d(\overline{4},\overline{14}) = 2, d(\overline{4},\overline{16}) = 2, d(\overline{4},\overline{18}) = 2, d(\overline{4},\overline{20}) = 2, d(\overline{6},\overline{8}) = 2,$

$d(\overline{6},\overline{10}) = 2, d(\overline{6},\overline{11}) = 1, d(\overline{6},\overline{12}) = 2, d(\overline{6},\overline{14}) = 2, d(\overline{6},\overline{18}) = 2,$

$d(\bar{6},\overline{20}) = 2, d(\bar{8},\overline{10}) = 2, d(\bar{8},\overline{11}) = 1, d(\bar{8},\overline{12}) = 2, d(\bar{8},\overline{12}) = 2,$

$d(\bar{8},\overline{14}) = 2, d(\bar{8},\overline{16}) = 2, d(\bar{8},\overline{18}) = 2, d(\bar{8},\overline{20}) = 2, d(\overline{10},\overline{11}) = 1,$

$d(\overline{10},\overline{12}) = 2, d(\overline{10},\overline{14}) = 2, d(\overline{10},\overline{16}) = 2, d(\overline{10},\overline{18}) = 2,$

$d(\overline{10},\overline{20}) = 2, d(\overline{11},\overline{12}) = 1, d(\overline{11},\overline{14}) = 1, d(\overline{11},\overline{16}) = 1, d(\overline{11},\overline{18}) = 1,$

$d(\overline{11},\overline{20}) = 1, d(\overline{12},\overline{14}) = 2, d(\overline{12},\overline{16}) = 2, d(\overline{12},\overline{18}) = 2, d(\overline{12},\overline{20}) = 2,$

$d(\overline{14},\overline{16}) = 2, d(\overline{14},\overline{18}) = 2, d(\overline{14},\overline{20}) = 2, d(\overline{16},\overline{18}) = 2, d(\overline{16},\overline{20}) = 2,$

$d(\overline{18},\overline{20}) = 2.$

$\deg(\bar{2}) = 1, \deg(\bar{4}) = 1, \deg(\bar{6}) = 1, \deg(\bar{8}) = 1, \deg(\overline{10}) = 1, \deg(\overline{11}) = 10, \deg(\overline{12}) = 1, \deg(\overline{14}) = 1, \deg(\overline{16}) = 1, \deg(\overline{18}) = 1, \deg(\overline{20}) = 1.$

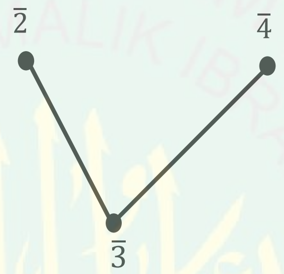
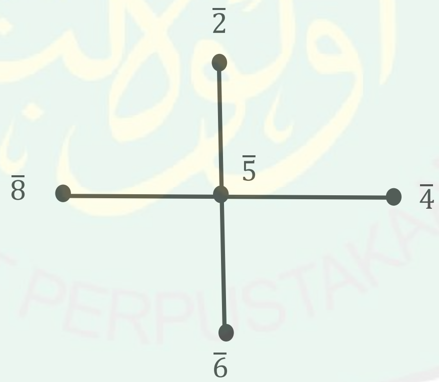
Setelah didapatkan jarak dan derajat sehingga dapat dihitung nilai indeks terminal Wienersebagai berikut

$$
\begin{aligned}
TW\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) &= \sum_{\{u,v\}\subseteq V_1(G)} d(u,v) \\
&= d(\bar{2},\bar{4}) + d(\bar{2},\bar{6}) +, d(\bar{2},\bar{8}) + d(\bar{2},\overline{10}) + d(\bar{2},\overline{12}) \\
&\quad + d(\bar{2},\overline{14}) + d(\bar{2},\overline{16}) + d(\bar{2},\overline{18}) + d(\bar{2},\overline{20}) + d(\bar{4},\bar{6}) \\
&\quad + d(\bar{4},\bar{8}) + d(\bar{4},\overline{10}) + d(\bar{4},\overline{12}) + d(\bar{4},\overline{14}) + d(\bar{4},\overline{16}) \\
&\quad + d(\bar{4},\overline{18}) + d(\bar{4},\overline{20}) + d(\bar{6},\bar{8}) + d(\bar{6},\overline{10}) + d(\bar{6},\overline{12}) \\
&\quad + d(\bar{6},\overline{14}) + d(\bar{6},\overline{18}) + d(\bar{6},\overline{20}) + d(\bar{8},\overline{10}) + d(\bar{8},\overline{12}) \\
&\quad + d(\bar{8},\overline{12}) + d(\bar{8},\overline{14}) + d(\bar{8},\overline{16}) + d(\bar{8},\overline{18}) + d(\bar{8},\overline{20}) \\
&\quad + d(\overline{10},\overline{12}) + d(\overline{10},\overline{14}) + d(\overline{10},\overline{16}) + d(\overline{10},\overline{18}) + d(\overline{10},\overline{20}) \\
&\quad + d(\overline{12},\overline{14}) + d(\overline{12},\overline{16}) + d(\overline{12},\overline{18}) + d(\overline{12},\overline{20}) + d(\overline{14},\overline{16}) \\
&\quad + d(\overline{14},\overline{18}) + d(\overline{14},\overline{20}) + d(\overline{16},\overline{18}) + d(\overline{16},\overline{20}) + d(\overline{18},\overline{20}) \\
&= 2(45)
\end{aligned}
$$

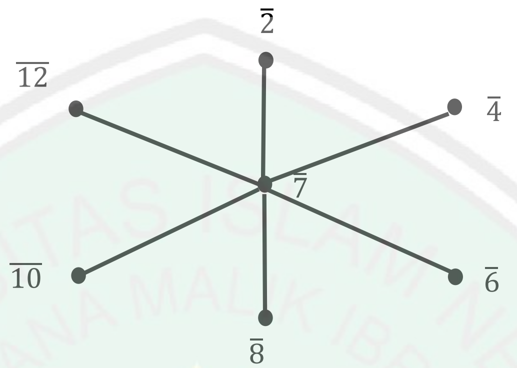
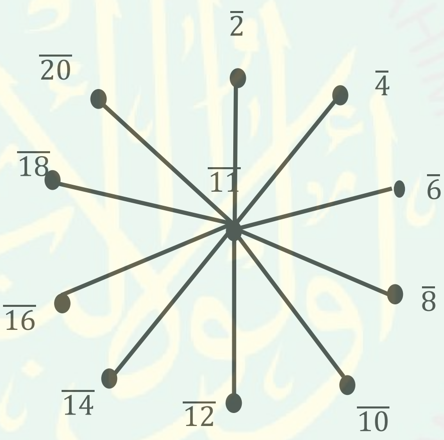
$= 90.$

Berdasarkan perhitungan indeks Wiener pada graf annihilator dari masing-masing gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan p adalah bilangan prima dapat dibentuk tabel sebagai berikut.

Tabel 3.9 Indeks Wiener pada Graf Annihilator

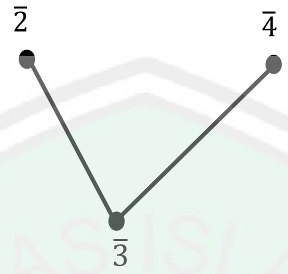
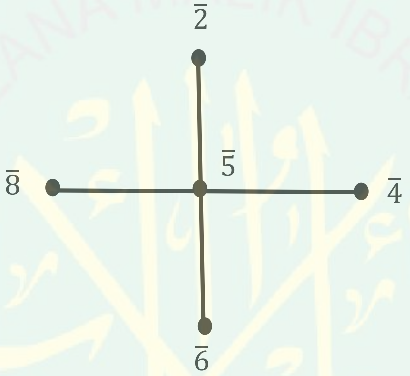
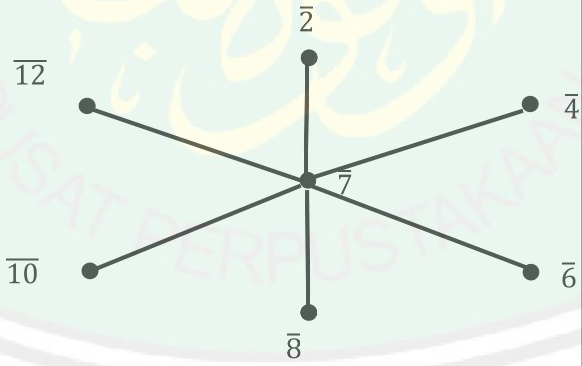
$\mathbb{Z}_{2p}$	p	**Gambar Graf Annihilator**	**Indeks Wiener**
$\mathbb{Z}_6$	3		4
$\mathbb{Z}_{10}$	5		16

Tabel 3.10 Indeks Wiener pada Graf Annihilator

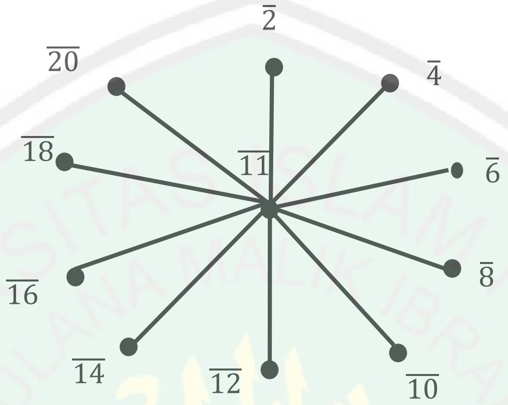
$\mathbb{Z}_{2p}$	$\boldsymbol{p}$	**Gambar Graf Annihilator**	**Indeks Wiener**
$\mathbb{Z}_{14}$	7		36
$\mathbb{Z}_{22}$	11		100

Adapun Berdasarkan perhitungan indeks terminal Wiener pada graf annihilator dari masing-masing gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan p adalah bilangan prima dapat dibentuk tabel sebagai berikut.

Tabel 3.11 Indeks Terminal Wiener pada Graf Annihilator

$\mathbb{Z}_{2p}$	p	**Gambar Graf Annihilator**	**Indeks Terminal Wiener**
$\mathbb{Z}_6$	3		2
$\mathbb{Z}_{10}$	5		12
$\mathbb{Z}_{14}$	7		30

Tabel 3.12 Indeks Terminal Wiener pada Graf Annihilator

$\mathbb{Z}_{2p}$	p	**Gambar Graf Annihilator**	**Indeks Terminal Wiener**
$\mathbb{Z}_{22}$	11		90

Adapun anggota dari $Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$ dapat dibentuk sebagai berikut:

Tabel 3.13 $\boldsymbol{Z(\mathbb{Z}_{2p})^*}$

$\boldsymbol{Z(\mathbb{Z}_{2p})^*}$	**Anggota**
$Z(\mathbb{Z}_6)^*$	$\{\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$
$Z(\mathbb{Z}_{10})^*$	$\{\overline{2},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{8}\}$
$Z(\mathbb{Z}_{14})^*$	$\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{7},\overline{8},\overline{10},\overline{12}\}$
$Z(\mathbb{Z}_{22})^*$	$\{\overline{2},\overline{4},\overline{6},\overline{8},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{14},\overline{16},\overline{18},\overline{20}\}$

Berdasarkan anggota $Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$ yang didapat akan diperoleh Annihilator dari setiap anggota $Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$sebagai berikut:

Tabel 3.14 $ann(Z(\mathbb{Z}_{2p})^*)$

$\mathbb{Z}_{2p}$	$ann(Z(\mathbb{Z}_{2p})^*)$	**Anggota**
$\mathbb{Z}_6$	$ann(\bar{2})$, $ann(\bar{4})$	$\{\bar{0},\bar{3}\}$
	$ann(\bar{3})$	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$
$\mathbb{Z}_{10}$	$ann(\bar{2})$,$ann(\bar{4})$, $ann(\bar{6})$, $ann(\bar{8})$	$\{\bar{0},\bar{5}\}$
	$ann(\bar{5})$	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\}$
$\mathbb{Z}_{14}$	$ann(\bar{2}), ann(\bar{4})$, , $ann(\bar{6})$,$ann(\bar{8})$, $ann(\overline{10}), ann(\overline{12})$	$\{\bar{0},\bar{7}\}$
	$ann(\bar{7})$	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10},\overline{12}\}$
$\mathbb{Z}_{22}$	$ann(\bar{2})$,$ann(\bar{4}), ann(\bar{6})$,$ann(\bar{8})$, $ann(\overline{10})$, $ann(\overline{12})$, $ann(\overline{14}), ann(\overline{16})$,$ann(\overline{18})$, $ann(\overline{20})$	$\{\bar{0},\overline{11}\}$
	$ann(\overline{11})$	$\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10},\overline{12},\overline{14},\overline{16},\overline{18},\overline{20}\}$

Adapun jarak yang terbentuk dengan u, v anggota dari $Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$ jika pasangan keduanya sama-sama genap maka jarak terpendek yang didapat hasilnya sama dengan 2 dan jika ada pasangan yang ganjil maka jarak terpendeknya adalah 1.

Tabel 3.15 $\boldsymbol{d(u,v)}$

$Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$	$d(u,v)=2$	$d(u,v)=1$
$Z(\mathbb{Z}_6)^*$	$d(\bar{2},\bar{4})$	$d(\bar{2},\bar{3})$, $d(\bar{3},\bar{4})$
$Z(\mathbb{Z}_{10})^*$	$d(\bar{2},\bar{4}), d(\bar{2},\bar{6}), d(\bar{2},\bar{8})$, $d(\bar{4},\bar{6}), d(\bar{4},\bar{8})$, $d(\bar{6},\bar{8})$	$d(\bar{2},\bar{5})$, $d(\bar{4},\bar{5})$, $d(\bar{5},\bar{6}), d(\bar{5},\bar{8})$
$Z(\mathbb{Z}_{14})^*$	$d(\bar{2},\bar{4}), d(\bar{2},\bar{6}), d(\bar{2},\bar{8})$, $, d(\bar{2},\overline{10}), d(\bar{2},\overline{12})$ $d(\bar{4},\bar{6}), d(\bar{4},\bar{8}), d(\bar{4},\overline{10}), d(\bar{4},\overline{12})$, $d(\bar{6},\bar{8}), d(\bar{6},\overline{10}), d(\bar{6},\overline{12})$, $d(\bar{8},\overline{10}), d(\bar{8},\overline{12})$, $d(\overline{10},\overline{12})$	$d(\bar{2},\bar{7})$, $d(\bar{4},\bar{7})$, $d(\bar{6},\bar{7})$, $d(\bar{7},\bar{8}), d(\bar{7},\overline{10})$, $d(\bar{7},\overline{12})$

Tabel 3.16 $d(u, v)$

$Z(\mathbb{Z}_{2p})^*$	$d(u,v) = 2$	$d(u,v) = 1$
$Z(\mathbb{Z}_{22})^*$	$d(\overline{2},\overline{4}), d(\overline{2},\overline{6}), d(\overline{2},\overline{8}), d(\overline{2},\overline{10})$, $d(\overline{2},\overline{12})$, $d(\overline{2},\overline{14}), d(\overline{2},\overline{16})$, $d(\overline{2},\overline{18}), d(\overline{2},\overline{20}), d(\overline{4},\overline{6})$, $d(\overline{4},\overline{8}), d(\overline{4},\overline{10}), d(\overline{4},\overline{12})$, $d(\overline{4},\overline{14}), d(\overline{4},\overline{16}), d(\overline{4},\overline{18})$, $d(\overline{4},\overline{20}), d(\overline{6},\overline{8}), d(\overline{6},\overline{10})$, $d(\overline{6},\overline{12}), d(\overline{6},\overline{14}), d(\overline{6},\overline{18})$, $d(\overline{6},\overline{20})$, $d(\overline{8},\overline{10}), d(\overline{8},\overline{12})$, $d(\overline{8},\overline{12}), d(\overline{8},\overline{14}), d(\overline{8},\overline{16})$, $d(\overline{8},\overline{18}), d(\overline{8},\overline{20}), d(\overline{10},\overline{12})$, $d(\overline{10},\overline{14}), d(\overline{10},\overline{16}), d(\overline{10},\overline{18})$, $d(\overline{10},\overline{20}), d(\overline{12},\overline{14}), d(\overline{12},\overline{16})$, $d(\overline{12},\overline{18}), d(\overline{12},\overline{20}), d(\overline{14},\overline{16})$, $d(\overline{14},\overline{18}), d(\overline{14},\overline{20}), d(\overline{16},\overline{18})$, $d(\overline{16},\overline{20}), d(\overline{18},\overline{20})$.	$d(\overline{2},\overline{11})$, $d(\overline{4},\overline{11})$, $d(\overline{6},\overline{11})$, $d(\overline{8},\overline{11})$, $d(\overline{10},\overline{11})$, $d(\overline{11},\overline{12}), d(\overline{11},\overline{14})$, $d(\overline{11},\overline{16}), d(\overline{11},\overline{18})$, $d(\overline{11},\overline{20})$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh dugaan sebagai berikut:

1. $Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{2k, p\ ; k = 1,2,\dots,p-1\}$
2. Semua titik $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), v \neq p$ hanya terhubung langsung dengan p.
3. $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah graf bintang S_{p-1}.
4. $ann(x) = \{0, p\}, \forall x \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan x genap.

5. $ann(x) = \{0\}, \forall x \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan x ganjil.

6. Untuk setiap $u, v \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan u, v genap, $d(u, v) = 2$.

7. $d(u, p) = 1. \forall\, u \in Z(\mathbb{Z}_{2p}), u \neq p$

8. Indeks Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \leq 3$ dengan p bilangan prima, adalah

$$W\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = (p-1)^2.$$

9. Indeks Terminal Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \leq 3$ dengan p bilangan prima, adalah

$$TW(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = p^2 - 3p + 2$$

Sehingga dari dugaan di atas akan dibuktikan dan menjadi proposisi-proposisi sebagai berikut.

Proposisi 1.

$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{2k, p\,; k = 1,2, \dots, p-1\}$

Bukti:

$\forall k = 1,2, \dots, p-1$ berlaku

$$2k \cdot p = 2p \cdot k \equiv 0 (\text{mod } 2p),$$

artinya $\{2k; k = 1,2, \dots, p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{2p})$,

dan berlaku

$$p \cdot 2 = 2p \equiv 0 \ (\text{mod } 2p),$$

artinya $p \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

Dengan demikian $\{2k; k = 1,2, \dots, p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan $p \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

Selanjutnya akan dibuktikan semua unsur dari $\mathbb{Z}_{2p}$ yang ganjil kecuali p bukan unsur pembagi nol.

Misal $m \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan m ganjil. Misal $m = 2k + 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $FPB(2k + 1,2p) = 1$, maka dari teorema 2.1, kongruensi berikut ini

$$(2k + 1)x \equiv 0 \ (mod\ 2p),$$

memiliki satu solusi yaitu $x = 0$.

Dengan demikian semua unsur dari $\mathbb{Z}_{2p}$ yang ganjil kecuali p bukan unsur pembagi nol.

Proposisi 2.

Semua titik $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), v \neq p$ hanya terhubung langsung dengan p.

Bukti:

Misal $d \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan d genap. Misal $d = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $FPB(2k, 2p) = 2$, maka dari teorema 2.1, kongruensi berikut ini

$$(2k)\ y \ \equiv 0(\text{mod } 2p)$$

memiliki dua solusi yaitu $y = 0$ dan $y = p$.

Dengan demikian Semua titik $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), v \neq p$ hanya terhubung langsung dengan p.

Proposisi 3.

$AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah graf bintang S_{p-1}.

Bukti:

Berdasarkan proposisi 2 di atas dapat diperoleh p terhubung langsung dengan $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), v \neq p$. Oleh karena itu p terhubung langsung dengan titik-titik $v \in$

$V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), v \neq p$. Berdasarkan proposisi 1 bahwa $Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{2k, p\,; k = 1,2, \dots, p-1\}$ maka titik p berderajat $p-1$ sedangkan titik-titik $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right), v \neq p$ masing-masing berderajat 1. Terbukti bahwa graf $AG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah graf bintang S_{p-1}.

Proposisi 4.

$ann(x) = \{0, p\}, \forall x \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan x genap.

Bukti

Misal $d \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan d genap. Misal $d = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $FPB(2k, 2p) = 2$, maka dari teorema 2.1, kongruensi berikut ini

$$(2k)\, y \equiv 0 (\text{mod } 2p),$$

hanya memiliki dua solusi yaitu $y = 0$ dan $y = p$.

Jadi terbukti bahwa $ann(x) = \{0, p\}, \forall x \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ x genap

Proposisi 5.

$ann(x) = \{0\}, \forall x \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan x ganjil.

Bukti:

Misal $m \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan m ganjil. Misal $m = 2k + 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $FPB(2k + 1, 2p) = 1$, maka dari teorema 2.1, kongruensi berikut ini

$$(2k + 1)x \equiv 0\ (mod\ 2p),$$

hanya memiliki satu solusi yaitu $x = 0$.

Jadi terbukti bahwa $ann(x) = \{0\}, \forall x \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ x ganjil

Proposisi 6.

Untuk setiap $u, v \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan u, v genap, $d(u, v) = 2$.

Bukti:

Berdasarkan proposisi 2 diperoleh bahwa p terhubung langsung dengan semua titik di $Z(\mathbb{Z}_{2p})$ kecuali dirinya sendiri dan $\deg(w) = 1, \forall\, w \in V(AG(\mathbb{Z}_{2p})$ dan $w \neq p$. Karena u, v tidak terhubung langsung $\forall u, v \in Z(\mathbb{Z}_{2p})\; u, v \neq p$, maka $d(u,v) \geq 2$ dan karena terdapat lintasan $v - p - u$, maka $d(u,v) \leq 2$. Dengan demikian $d(u,v) = 2$.

Proposisi 7.

$d(u,p) = 1. \forall\, u \in Z(\mathbb{Z}_{2p}), u \neq p$

Bukti:

Dari proposisi 2 kita peroleh bahwa p terhubung langsung dengan semua titik $u \in Z(\mathbb{Z}_{2p}), u \neq p$. Dengan demikian $d(u,v) = 1$.

Proposisi 8.

Indeks Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \leq 3$ dengan p bilangan prima, adalah

$$W\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = (p-1)^2.$$

Bukti:

Karena graf annihilator $\mathbb{Z}_{2p}$, p bilangan prima mempunyai order $(p-1)$. Berdasarkan proposisi 5 dan 6 jarak antara titik yang diperoleh dari graf annihilator $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah 1 atau 2. Jarak antara titik yang berjarak 1 sebanyak $(p-1)$, dan yang berjarak 2 sebanyak $(p-1) - 1 + (p-1) - 2 + \cdots + 2 + 1$ atau dapat ditulis sebagai jumlah deret aritmatika sebanyak $(p-1) - 1$ suku dengan beda 1 Maka didapatkan:

$$W\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$$

$$= \sum_{u,p \in V(G)} 1 + \sum_{\substack{u,v \in V(G) \\ v \neq p}} 2$$

$$= \left(1 \times (p-1)\right) + \left(2 \times ((p-1)-1)\right)$$

$$= (p-1) + 2 \times \left(\frac{(p-1)-1}{2} \times (p-1)\right)$$

$$= (p-1) + 2 \times \left(\frac{(p-2)}{2} \times (p-1)\right)$$

$$= p - 1 + (p-2) \times (p-1)$$

$$= p - 1 + p^2 - 3p + 2$$

$$= p^2 - 2p + 1$$

$$= (p-1)^2$$

Proposisi 9.

Indeks Terminal Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \leq 3$ dengan p bilangan prima, adalah

$$TW(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = p^2 - 3p + 2$$

Bukti:

Karena graf annihilator $\mathbb{Z}_{2p}$, p bilangan prima mempunyai order $(p-1)$. Berdasarkan proposisi 5 dan 6 jarak antara titik dari graf annihilator $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah 1 atau 2. Berdasarkan rumus indeks terminal Wiener diketahui bahwa titik-titik yang dipasangkan adalah titik yang mempunyai $deg = 1$, sehingga berdasarkan proposisi 5 diperoleh bahwa jaraknya adalah 2 saja, sehingga yang berjarak 2 sebanyak $(p-1)-1+(p-1)-2+\cdots+2+1$ atau dapat ditulis sebagai jumlah deret aritmatika sebanyak $(p-1)-1$ suku dengan beda 1 Maka didapatkan:

$$TW\left(AG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \sum_{(u,v)\subseteq V_1(G)} d(u,v)$$

$$= \sum_{u,v\in V(G)} 2$$

$$= \left(2\times\left((p-1)-1\right)\right)$$

$$= 2\times\left(\frac{(p-1)-1}{2}\times(p-1)\right)$$

$$= 2\times\left(\frac{(p-2)}{2}\times(p-1)\right)$$

$$= (p-2)\times(p-1)$$

$$= p^2-3p+2.$$

3.3 Pelajaran Bagi Orang yang Berilmu

Allah berfirman dalam surah Hud ayat 24 yang artinya:

"Perbandingan kedua golongan itu (orang-orang kafir dan orang-orang mukmin), seperti orang buta dan tuli dengan orang yang dapat melihat dan dapat mendengar. Adakah kedua golongan itu sama keadaan dan sifatnya ? Maka tidakkah kamu mengambil pelajaran (daripada perbandingan itu)?"

Hidayatul Insan bi Tafsiril Qur'an atau Ustadz Marwan Hadidi bin Musa, M.Pd.I, Allah membuat perumpamaan sifat dan keadaan kedua golongan, yaitu golongan orang-orang kafir dan golongan orang-orang mukmin. Golongan orang kafir ibarat seperti orang buta mata kepala dan mata hatinya, sehingga tidak melihat tanda-tanda yang dapat menghantarkan ke jalan yang benar. Dan tuli telinganya, tidak mendengar sedikit pun tuntunan dan petuah-petuah agama. Adapun orang mukmin diibaratkandengan orang yang dapat melihatdengan mata kepala dan mata hatinya dan dapat mendengar dalam keadaan sempurna, karena mereka menggunakan penglihatan dan pendengarannya untuk memperhatikan, memahami, serta mengamalkan isi kandungan ayat-ayat Al-Qur'an. Samakah kedua golongan itu' tentu keduanya tidak sama. Maka dengan itu tidakkah kamu mengambil pelajaran' karena di balik perumpamaan terdapat pelajaran yang paling berharga. Setelah menjelaskan ciri dan sifat-sifat orang mukmin dan orang kafir ketika mendapat seruan Al-Qur'an, serta kesudahan dari kedua golongan itu, selanjutnya Allah menceritakan kisah nabi nuh ketika menyeru kaumnya untuk mengikuti risalah Allah. Dan sungguh, kami telah mengutus nabi nuh kepada kaumnya untuk menyampaikan risalah kepada mereka seraya dia berkata, sungguh, aku ini adalah pemberi peringatan adanya siksa neraka yang nyata bagi kalian, serta pemberi penjelasan yang nyata menuju jalan keselamatan yang dapat menghindarkan kalian dari azab yang pedih.

Ayat tersebut menunjukkan bahwa terdapat perbedaan dan perumpamaan, dalam ayat tersebut menjelaskan bahwa dengan itu tidakkah kamu mengambil pelajaran karena di balik perumpamaan terdapat pelajaran yang paling berharga, perumpamaan-perumpamaan dalam matematika biasanya disebut simbol. Simbol dalam matematika sangat bermanfaat bagi orang-orang yang sedang belajar. Seperti penjelasan sebelumnya bahwa indeks Wiener dan indeks terminal Wiener sangat bermanfaat pada bidang keilmuan lain. Salah satunya berhubungan dengan ilmu kimia, pada penelitian M. Rezaei, M.K. Jamil, M.R. Farahani dan Z. Foruzanfar yang berjudul *On The Terminal Wiener Indices of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons* PAH_S menjelaskan bahwa rumus dari indeks terminal Wiener dapat digunakan dalam mehitung graf molekul Polycyclic Aromatic Hydrocarbons PAH_S.

Manfaat tersebut didapatkan dari hasil penelitian orang-orang yang mau mengambil manfaat dari apa yang telah ada dan kemudian dikembangkan. Dengan demikian, kita harus jadi orang yang berilmu dengan terus memahami dan terus belajar.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari Uraian pada pembahasan, dapat diambil kesimpulan bahwa indeks Wiener dan indeks terminal Wiener pada graf annihilator gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan menghasilkan pola dan proposisi sebagai berikut:

1. Indeks Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \geq 3$ dengan p adalah bilangan prima, adalah
$$W(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = (p-1)^2$$
2. Indeks terminal Wiener pada graf annihilator dari gelanggang komutatif $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \geq 3$ dengan p adalah bilangan prima, adalah
$$TW(AG(\mathbb{Z}_{2p})) = p^2 - 3p + 2$$

4.2 Saran

Penelitian ini hanya dilakukan pada graf annihilator Modulo Z_{2p} dari gelanggang bilangan bulat modulo $2p$ dimana p adalah bilangan prima. Sehingga, penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada gelanggang komutatif lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusakir, Nilna N.A, Fifi. 2009. *Teori Graf.* Malang:UIN-Press.

Ash-Shiddieqy, Teungku Muhammad Hasbi. 2000. *TAFSIR AL-QURANUL MAJID AN-NUR.* Semarang: Pustaka Rizki Putra

Babujee, J. B. and Senbagamalar, J. 2015. On Wiener and Terminal Wiener Index of Graphs. *International Journal of Biomathematics*. Vol. 08. No. 05,1550066.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Spgelangganger.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. & oellermann O. R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Canada: McGraw-Hill Inc.

Chen, Ya-Hong and Zhang, Xiao-Dong. 2013. The Wiener and Terminal Wiener Indices Of Trees. *MATCH Communication in Mathematical and in Computer Chemistry*. Vol. 1305. No.6196.

Dutta, S. dan Chanlemki L. (2017). On Annihilator Graphs of a Finite Commutative Gelanggang. *Transactions on Combinatorics*. Iran: University of Isfahan. Vol. 6 No.1.

Gilbert, Linda dan Jimmie Gilbert. 2009. *Elements of Modern Algebra, Seventh Edition*. USA: Belmont.

Gutman, Ivan. dkk. 2008. Terminal Wiener Index. *J Math Chem*. Germany: Spgelangganger Science+Business Media. Vol. 46 No. 522-531.

Hirano, Yauyuki. 2002. On annihilator ideals of a Polynomial Gelanggang Over a Noncommutative Gelanggang. *Journal of Pure and Applied Algebra*. Vol. 168. No.1.

Mas'oed, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Palembang: Akademia Permata.

Ramane, Harishchandra S., dkk. 2013. Terminal Wiener Index of Line Graphs. *MATCH Communication in Mathematical and in Computer Chemistry*. Vol. 69. No. 0340-6253.

Rezaei, Mehdi. dkk. On The Terminal Wiener Index and Zagreb Indices of Kragujevac Trees. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 113. No.5,617-625.

Zadeh, Safoura. 2017. Isometric Isomorphisms of the annihilator of $C_0(G)$ in $LUC(G)*$. *The Quarterly Journal of Mathematics*. Vol. 68. No. 1019-1033.

Zeryouh, Meryam dkk. 2014. Wiener and Terminal Wiener Indices of Some Rooted Trees. *Applied Mathematics Sciences*. Vol. 8 No. 100,4995-5002.

RIWAYAT HIDUP

Nur Dana Noviyanti Salma, lahir di Lamongan pada 26 Juni 1998, akrab di panggil Novi. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan ibu Tutik Inayah dan bapak Marlikan.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Muhammadiyah 18 Sidodadi Desa Kranji Kecamatan Paciran Kabupaten Lamongan dan lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan pendidikan di MTs Muhammadiyah 17 Kranji Kecamatan Paciran Kabupaten Lamongan dan lulus pada tahun 2013. Setelah itu menempuh pendidikan di SMA Muhammadiyah 06 Paciran Kabupaten Lamongan dan lulus pada tahun 2016. Pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti penelitian PKRM (Penelitian Kompetitif Riset Mahasiswa), dan mengikuti Organisasi ekstra Kampus yaitu, Ikatan Mahasiswa Muhammadiyah (IMM) Komisariat Revivalis Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, dan menjadi anggota sekolah Tahfidz HTQ Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Nur Dana Noviyanti Salma
NIM	:	16610012
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Indeks Wiener dan Indeks Terminal Wiener pada Graf Annihilator Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.
Pembimbing I	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si
Pembimbing II	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	11 November 2019	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	1.	
2	20 November 2019	Melanjutkan Pembuktian		2.
3	31 Januari 2020	Perbaikan Ayat	3.	
4	31 Januari 2020	Perbaikan Pembuktian		4.
5	03 Februari 2019	Perbaikan Bab II	5.	
6	10 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan		6.
7	13 Maret 2020	Konsultasi Pembuktian	7.	
8	30 Maret 2020	Revisi Bab III (Bimbingan Online)		8.
9	29 April 2020	Revisi Bab I,II dan III (Bimbingan Online)	9.	
10	1 Mei 2020	ACC untuk disidangkan		10.

Malang, 8 Juni 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001