AUTOMORFISME GRAF IDENTITAS PADA GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

OLEH
KHANIFATUN MAISYAROH
NIM. 16610057

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

AUTOMORFISME GRAF IDENTITAS PADA GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
KHANIFATUN MAISYAROH
NIM. 16610057

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2020

AUTOMORFISME GRAF IDENTITAS PADA GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

Oleh
KHANIFATUN MAISYAROH
NIM. 16610057

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 April 2020

Pembimbing 1,	Pembimbing II,
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19870218 20160801 1 056	NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

AUTOMORFISME GRAF IDENTITAS PADA GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO PRIMA

SKRIPSI

Oleh
KHANIFATUN MAISYAROH
NIM. 16610057

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 30 April 2020

Penguji Utama	:	Evawati Alisah M.Pd	…………
Ketua Penguji	:	Juhari, S.Pd., M.Si	…………
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Nafie Jauhari M.Si	…………
Anggota	:	Muhammad Khudzaifah M.Si	…………

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN PENULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Khanifatun Maisyaroh
NIM	: 16610057
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Automorfisme Graf Identitas pada Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo Prima.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia meneriman sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2020

Yang membuat pernyataan,

Khanifatun Maisyaroh

NIM. 16610057

MOTO

"Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan"

(QS. Ar Rahman:13)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Konawi dan ibunda Musriah. Terimakasih atas perjuangan tanpa lelah, ketulusan do'a, kasih sayang dan penyemangat setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi lebih baik.

Kakak Khoirul Huda serta istrinya Zuliatin, Terimakasih atas do'a yang selalu dipanjatkan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala Puji bagi Allah Swt. Atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untui itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku pembimbing I penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.
5. Mohammad Khudzaifah, M.Si, selaku pembimbing II penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.
6. Evawati Alisah M.Pd selaku penguji utama dalam ujian skripsi penulis. Atas bimbingan dan arahannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.
7. Juhari S.Pd., M.Si selaku ketua penguji dalam ujian skripsi penulis. Atas bimbingan dan arahannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan terimakasih.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan beguna.

Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua. *Amin ya Robbal 'Alamin…*

Alhamdulillahirbbil Alamin

Malang, 30 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Maisyaroh, Khanifatun. 2020. ***Automorfisme Graf Identitas pada Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo Prima***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Moh. Nafie Jauhari, M.Si., (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: automorfisme, derajat, fungsi, graf identitas, permutasi.

Penelitian ini membahas pola umum banyaknya automorfisme graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z}_{np})$ dimana $n = 2$ dan 3, p prima bersama operasi penjumlahan dan perkalian. Tujuan yang akan dicapai dalam penelitian ini adalah menemukan pola umum mengenai banyaknya automorfisme dari graf identitas pada gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima. Pola tersebut diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan himpunan unsur dari $\mathbb{Z}_{np}$ dan himpunan unit $I(\mathbb{Z}_{np})$. Selanjutnya, menggambar graf identitas dari himpunan unit $I(\mathbb{Z}_{np})$ yang sudah diperoleh. Kemudian, menentukan fungsi bijektif dari himpunan titik $IG(\mathbb{Z}_{np})$ ke dirinya sendiri, dilanjutkan dengan menentukan automorfisme graf. Langkah terakhir yakni memunculkan dugaan mengenai banyaknya automorfisme dari graf identitas pada gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima kemudian dugaan tersebut akan dibuktikan secara umum. Hasil penelitian ini adalah banyaknya automorfisme dari graf identitas pada gelanggang himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z}_{2p})$ yakni $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$ dan banyaknya automorfisme dari graf identitas pada gelanggang himpunan bilangan bulat $(\mathbb{Z}_{3p})$ yakni $(2^{p-3}) \cdot (p-3)!\,3!$.

ABSTRACT

Maisyaroh, Khanifatun. 2020. **Automorphism Identity Graph of Ring of Integer with Prime Modulo**. Thesis. Department of Mathematics, Science and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Moh. Nafie Jauhari, M.Si., (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: degree, function, graph automorphism, identity graph, permutation.

This research discusses the pattern of the number of automorphism identity graph of ring of integer with prime modulo $(\mathbb{Z}_{np})$ where $n = 2$ and 3 p prime with addition and multiplication operation. The purpose to be achieved in this research is to find a general pattern about the number of automorphism of identity graphs on the set of integer with prime modulo. First, the pattern is obtained by determining the set of elements from $\mathbb{Z}_{np}$ and the set of units $I\left(\mathbb{Z}_{np}\right)$. Next, draw the identity graph from the set of unit $I\left(\mathbb{Z}_{np}\right)$ that has been obtained. Then, determine the bijective function of the set of vertices $IG\left(\mathbb{Z}_{np}\right)$ to itself, followed by determining graph automorphism. The last step is to raise the assumption about the number of automorphism of identity graph in the set of integer with prime modulo then the assumption will be proven in general. The results of this research are the number of automorphism identity graph of ring of integer prime modulo $(\mathbb{Z}_{2p})$ with addition and multiplication operation are $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$ and the number of automorphism identity graph of ring of integer with prime modulo $(\mathbb{Z}_{3p})$ with addition and multiplication operation are $(2^{p-3}) \cdot (p-3)!\,3!$

الملخص

ميشرة، حنيفة. ٢٠٢٠. **تشاكل ذاتى للرسم البياني للهوية على ساحة مجموعة العدد الصحيح الأول القياسى**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا،جامعة مولانا مالك إبراهيم الحكومية الاسلامية بمالانج. المشرف:(١) محمد نافع جوهاري الماجستر(٢) محمد حذيفة الماجستر.

الكلمات المفتاحية: تشاكل ذاتى، درجة ، الوظيفة ، رسم بياني للهوية، تبديل.

تناقش هذه الدراسة في النمط العام لعدد للرسم الباني التشاكلات الذاتية للمجموعة الصححة الأول مع عمليات الجمع والضرب.الغرض الذي سيتم تحقيقه p $n = 3$ و $n = 2$ حيث $(\mathbb{Z}_{np})$ في هذا البحث هو العثور على نمط عام حول عدد التشاكلات الذاتية للرسوم البيانية للهوية على مجموعة الأعداد الصحيحة الأولى القياسية.أولاً, يتم الحصول على النمط عن طريق تحديد مجموعة العناصر من $\mathbb{Z}_{np}$ ومجموعة الوحدات $I(\mathbb{Z}_{np})$ مجموعة الوحدة من للهوية بيانياً رسماً ذلك,ارسم بعد. $IG(\mathbb{Z}_{np})$ التي تم الحصول عليها. بعد ذلك,تحديد الوظيفة الوصفية لمجموعة الفقاط $I(\mathbb{Z}_{np})$ لنفسها,والتالي بتحديد التشاكل الذاتي للرسم البياني.الخطوة الأخيرة هي رفع الافتراض حول عدد التشاكل الذاتي للرسم البياني للهوية في مجموعة الأعداد الصحيحة الأولية القياسية, ثم سيتم الإثبات على التنبؤ بشكل عام. نتائج هذه الدراسة هي التشاكلات الذاتية من الرسم البانى للهوية على و عدد التشاكلات الذاتية $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$ وهي $(\mathbb{Z}_{2p})$ مجموعة الأعداد الصحيحة لرسوم بيانية لهوية على مجموعة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}_{3p})$ وهي $(2^{p-3}) \cdot (p-3)!\,3.$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Salah satu cabang matematika yang menarik untuk dibahas dan banyak manfaatnya dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Dalam teori graf terdapat rumusan atau model yang selanjutnya dianalisis guna memperjelas dan mempermudah dalam menemukan solusi yang tepat. Permasalahan tersebut akan dirumuskan dalam teori graf dengan cara mengambil aspek-aspek yang diperlukan dan membuang aspek-aspek yang lainnya (Purwanto, 1998). Hal ini yang menyebabkan teori graf selalu menarik untuk dibahas dan teori-teori yang ada masih aplikatif untuk memecahkan masalah di zaman sekarang.

Graf G merupakan pasangan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga dan tak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari dua titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, 2009). Konsep dalam graf banyak digunakan untuk memodelkan berbagai relasi dalam kehidupan sehari-hari seperti link internet, lampu lalu lintas, jalan tol, jaringan komunikasi, link transportasi dan bisa digunakan untuk menentukan rute terpendek untuk menuju suatu tempat.

Struktur aljabar seperti grup dan gelanggang bisa digunakan untuk membangun suatu graf. Struktur aljabar grup diantaranya bisa membangun graf *Cayley* (Heydemann, 1997), graf konjugasi, graf *non-commuting*, graf subgrup, graf invers, graf *non-centralizer*, graf identitas. Sedangkan struktur aljabar gelanggang diantaranya bisa menghasilkan graf pembagi nol, graf *annihilator*, graf *co-maximal* *ideal*, graf total, graf *nil-radical*, graf identitas (Kandasamy dan Floretin, 2009:134).

Gelanggang R dikatakan gelanggang komutatif jika semua elemen di R bersifat komutatif terhadap operasi perkalian (Dummit dan Foote, 2004). Jika gelanggang R komutatif terhadap operasi perkalian dan mempunyai elemen kesatuan terhadap operasi perkalian disebut dengan gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan (Gilbert dan Gilbert, 2015). Salah satu contoh gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan adalah himpunan bilangan bulat modulo prima.

Graf identitas yang dibangun dari gelanggang merupakan suatu graf yang diperoleh dari himpunan unsur yang jika dioperasikan menghasilkan identitas dari suatu gelanggang tersebut. Titik-titik pada graf identitas merupakan semua elemen dari himpunan unsur yang diperoleh dari unsur yang dioperasikan menghasilkan identitas dari gelanggang dan dua titik dikatakan terhubung langsung jika dan hanya jika perkalian dua titik menghasilkan identitas (Kandasamy dan Floretin, 2009:134). Penelitian tentang graf identitas pernah dilakukan oleh Leihitu dan Patty pada tahun 2016 tetapi dalam struktur aljabar grup bukan gelanggang. Tahun 2019, Lila Aryani Puspitasari meneliti tentang *Total Eccentricity and Eccentric Connectivity Index* pada graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan.

Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari G ke dirinya sendiri (Chartrand, dkk.2016). Contoh penelitian tentang automorfisme pada suatu graf adalah seperti penelitian Reni Tri Damayanti yang membahas banyaknya automorfisme pada graf bintang dan graf lintasan pada tahun 2011. Pada tahun 2018, Kurniawan Sugiarto dkk membuat artikel tentang analisis struktur automorfisme dari graf pembagi nol dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan menggunakan sampel graf pembagi nol untuk mewakili setiap graf. Pada tahun 2015, Imroatul Mukarromah juga meneliti tentang automorfisme pada graf piramida dan graf berlian. Any Tsalasatul Fitriyah meneliti tentang automorfisme graf roda dan graf tangga pada tahun 2011. Automorfisme graf pembagi nol pada gelanggang himpunan bilangan bulat tak prima diteliti Nurul Faqiyyah Rokhmah (2019).

Penelitian ini bisa dilanjutkan dengan mengganti graf pembagi nol dengan graf yang lain seperti graf identitas. Graf identitas merupakan suatu graf yang diperoleh dari himpunan unsur identitas. Graf identitas ini akan diterapkan dalam gelanggang komutatif dengan kesatuan yang salah satu contohnya adalah himpunan bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat ini akan diperkhusus dalam bilangan bulat modulo prima.

Ayat dalam Al-Qur'an yang membahas tentang konsep automorfisme dalam kehidupan sehari-hari. Surah fussilat ayat 46 yang berbunyi:

"*Barangsiapa yang mengerjakan amal yang saleh maka (pahalanya) untuk dirinya sendiri dan barangsiapa mengerjakan perbuatan jahat, maka (dosanya) untuk dirinya sendiri; dan sekali-kali tidaklah Rabb-mu menganiaya hamba-hamba-Nya."*

Kata *'abid* adalah bentuk jamak dari kata '*abd*, tetapi bentuk jamak ini digunakan oleh Al-Qur'an untuk menggambarkan hamba-hamba Allah yang durhaka dan bergelimang dosa, berbeda dengan kata *'ibad* yang juga merupakan bentuk jamak dari kata *'abd* tetapi biasanya digunakan oleh al-Qur'an untuk menunjuk hamba-hamba-Nya yang taat, atau kalaupun durhaka namun telah menyadari kedurhakaannya (Shihab, 2002:432).

Menurut Thabathaba'I, ayat di atas bagaikan menyatakan: Perbuatan seseorang berkaitan dengan pelakunya secara menyifatinya. Kalau baik dan bermanfaat, maka dirinya sendiri yang menarik manfaatnya, dan kalau buruk dan berbahaya, maka dia pula yang memperoleh keburukan dan bahayanya. Dengan demikian tidaklah pemberian manfaat amal yang baik kepada pelakunya yakni memberinya ganjaran, tidak juga pemberian dampak keburukan amal kepada pelakunya yakni siksa tidak juga itu merupakan penganiayaan atau menempatkan sesuatu bukan pada tempatnya (Shihab, 2002:431).

Ayat di atas memberitahukan kepada kita sebagai manusia bahwa apapun yang dilakukan akan kembali kepada diri kita sendiri. Manfaat dan madharat dari perbuatan yang kita lakukan akan berdampak pada diri kita sendiri. Jika kita berbuat baik maka kita juga berbuat baik bagi diri kita sendiri. Begitupun sebaliknya, jika kita berbuat buruk maka kita juga berbuat buruk pada diri kita sendiri. Ayat ini menerangkan bahwa perbuatan dan diri kita terdapat relasi atau hubungan yang saling berkaitan. Perbuatan yang kita lakukan berdampak pada diri kita sendiri, sama halnya automorfisme yang menjelaskan tentang relasi pada diri sendiri.

1.2 Rumusan masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah berapa banyaknya automorfisme graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima?

1.3 Tujuan penelitian

Berdasar rumusan masalah yang ada maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui banyaknya automorfisme graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima.

1.4 Batasan masalah

Penelitian ini membahas automorfisme graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima $\mathbb{Z}_{np}$ dengan $n = 2$ dan $n = 3$ dengan p bilangan prima.

1.5 Manfaat penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Memberikan informasi tentang automorfisme graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima.
2. Sebagain tambahan pustaka untuk rujukan penelitian selanjutnya.

1.6 Metode penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam melakukan penellitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah
2. Mengumpulkan data (informasi)
3. Menganalisis data

   Langkah-langkah dalam menganalisis data yaitu:

   (i) Mencari unsur dalam graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima $\mathbb{Z}_n$ dengan n yang sudah dibatasi dalam batasan masalah,

(ii) Menggambar graf identitas dari unsur-unsur yang sudah diperoleh,

(iii) Menentukan fungsi yang bijektif pada setiap graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima,

(iv) Menentukan automorfisme pada setiap graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima,

(v) Menentukan banyaknya automorfisme yang terjadi pada masing-masing graf identitas, dan

(vi) Membangun teorema tentang banyaknya automorfisme beserta pembuktiannya.

4. Memberikan kesimpulan akhir
5. Menulis laporan

1.7 Sistematika penulisan

Agar penulisan penelitian ini mudah dipahami dan terarah digunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan dari penelitian ini.

BAB II Kajian Pustaka

Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendasari penelitian ini seperti gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan, graf identitas dan automorfisme graf dan kajian automorfisme graf.

BAB III Pembahasan

Bab ini membahas tentang langkah-langkah yang dikerjakan untuk memperoleh banyaknya automorfisme graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima dengan cara mencari unsur-unsur graf, menggambar graf, menentukan permutasi, menghitung banyaknya automorfisme dan pembuktian hasil banyaknya automorfisme tersebut.

BAB IV Penutup

Bab ini membahas tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat digunakan untuk peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan

Definisi 2.1

Grup adalah suatu pasangan terurut $(G,*)$ dimana G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$ (* bersifat assosiatif),
2. Ada suatu elemen e di G, sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (identitas di G), dan
3. Untuk setiap $a \in G$, ada suatu elemen a^{-1} di G, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Grup $(G,*)$ disebut abelian (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 2004:17).

Definisi 2.2

Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong. Maka R dengan operasi penjumlahan dan perkalian, dilambangkan dengan $+$ dan $\cdot$ dinamakan gelanggang jika memenuhi kondisi sebagai berikut (Gilbert dan Gilbert, 2015:265):

1. R tertutup terhadap operasi penjumlahan: $x \in R$ dan $y \in R$ berarti $x + y \in R$.
2. Operasi penjumlahan di R bersifat asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk semua $x, y, z \in R$.
3. R memuat identitas operasi penjumlahan 0: $x + 0 = 0 + x = x$ untuk semua $x \in R$.
4. R memuat invers operasi penjumlahan: Untuk x di R, terdapat $-x$ di R yang memenuhi $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

5. Operasi penjumlahan di R bersifat komutatif: $x + y = y + x$ untuk semua $x, y \in R$.
6. R tertutup terhadap operasi perkalian: $x \in R$ dan $y \in R$ berarti $x \cdot y \in R$.
7. Operasi perkalian di R bersifat asosiatif: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ untuk semua x, y, z di R.
8. Dua hukum distributif berlaku di R: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ untuk semua $x, y, z \in R$.

Definisi 2.3

Misal $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang. Maka R dikatakan gelanggang komutatif jika perkalian di R komutatif yaitu jika $x \cdot y = y \cdot x$ untuk setiap $x, y \in R$ (Hodge dkk, 2014).

Definisi 2.4

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang. Jika terdapat suatu unsur e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$ untuk setiap x di R, maka 1 disebut elemen kesatuan dan R disebut gelanggang dengan elemen kesatuan. Jika R komutatif terhadap operasi perkalian, maka R yang komutatif dan mempunyai elemen kesatuan terhadap operasi perkalian disebut gelanggang komutatif dengen elemen kesatuan (Gilbert dan Gilbert, 2015:269).

2.2 Graf Identitas

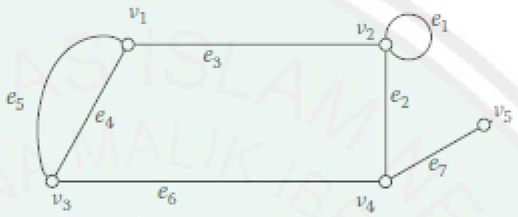
Definisi 2.5

Graf G merupakan pasangan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga dan tak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari dua titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ dinamakan order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan

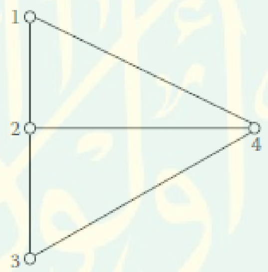
$q(G)$. Apabila permasalahan hanya pada graf G, order dan ukuran dapat dituliskan sebagai p dan q atau $G(p,q)$ (Abdussakir, 2009).

Definisi 2.6

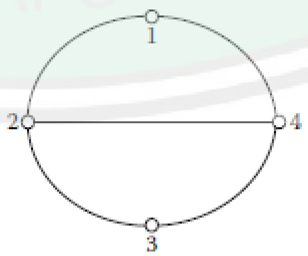
Graf yang tidak mempunyai sisi paralel disebut dengan graf sederhana. Graf yang memuat sisi paralel disebut graf ganda (Satyanarayana, dan Kuncham, 2013:74).



Gambar 2.1 Graf C



Gambar 2.2 Graf D



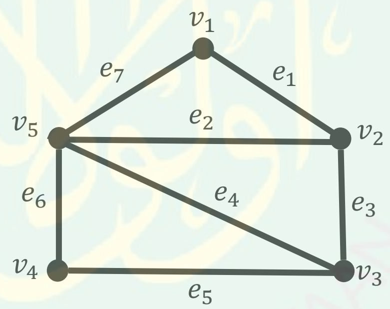
Gambar 2.3 Graf E

Definisi 2.7

Graf G dengan jumlah titik berhingga dan jumlah sisi berhingga disebut dengan graf berhingga (*finite graph*). Graf G yang bukan merupakan graf berhingga dikatakan sebagai graf tak berhingga (*infinite graph*) (Satyanarayana, dan Kuncham, 2013:77).

Definisi 2.8

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), sebagaimana v dan e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*) jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdussakir dkk, 2009).



Gambar 2.4 Graf $G(5,7)$

Dari gambar di atas titik-titik *adjacent* (terhubung langsung) adalah v_1 dan v_2, v_1 dan v_5, v_2 dan v_3, v_2 dan v_5, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5. Sedangkan sisi e_1*incident* (terkait langsung) dengan v_1 dan v_2, e_2*incident* dengan v_2 dan v_5, e_3*incident* dengan v_2 dan v_3, e_4 *incident* dengan v_3 dan v_5, e_5 *incident* dengan v_3 dan v_4, e_6 *incident* dengan v_4 dan v_5, dan e_7 *incident* dengan v_1 dan v_5.

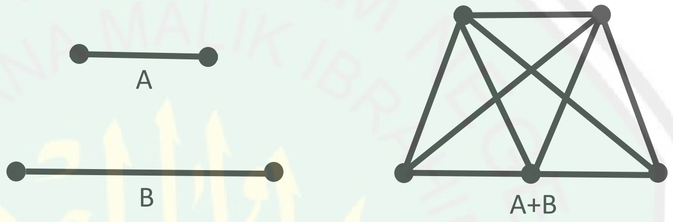
2.3 Operasi pada Graf

Operasi pada graf yang dibahas dalam penelitian ini, meliputi:

1. Penjumlahan

Definisi 2.9

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf, join (penjumlahan) dari G_1dan G_2, dinotasikan $G_1 + G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1) \cup V(G_2)$, dan semua sisi-sisi $v_i v_j$, dimana $v_i \in V(G_1)$ dan $v_j \in V(G_2)$. Akan ditunjukkan join graf $P_3 + K_2$ sebagai berikut (Chartrand dan Oellerman, 1993:29):



Gambar 2.5 Join graf A dan B

$A + B$ merupakan join dari graf A dan B.

2. Perkalian

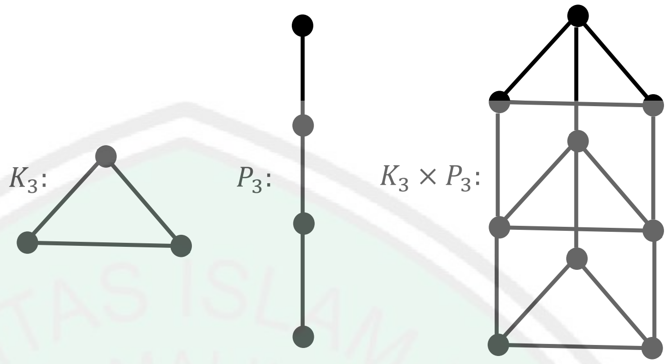
Definisi 2.10

Pada graf G_1 dan G_2, product (hasil kali) $G_1 \times G_2$ adalah himpunan titik dari $V(G_1) \cup V(G_2)$, dua titik $u_1 u_2$ dan $v_1 v_2$ terhubung langsung di $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika

$u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau

$u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$ (Chartrand dan Oellerman, 1993:29).

Contoh:



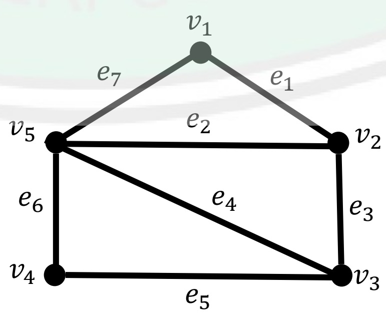
Gambar 2.6 Perkalian graf K_3 dan P_3

Graf $K_3 \times P_3$ merupakan hasil kali graf K_3 dengan P_3.

Definisi 2.11

Derajat *(degree)* titik v di graf G adalah banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan v. Sehingga, derajat dari v adalah banyaknya titik tetangganya $(N(v))$. Dengan kata lain, derajat dari v adalah banyaknya sisi yang terkait langsung dengan v. Derajat titik v dinotasikan dengan $\deg_G v$ atau sederhannya dengan $\deg v$. Sehingga, $\deg v = |N(v)|$ (Chartrand dan Lesniak, 2016:5).

Contoh:



Gambar 2.7 Graf $G(5,7)$

Dapat dituliskan derajat masing-masing titiknya sebagai berikut:

$deg_G v_1 = 2$

$deg_G v_2 = 3$

$deg_G v_3 = 3$

$deg_G v_4 = 2$

$deg_G v_5 = 4$

Definisi 2.12

Graf lingkaran (sikel) adalah satu titik dengan gelang (*self-loop*) atau graf sederhana C dengan $|V_C| = |E_C|$ yang dapat digambar sehingga semua titik dan sisi nya terletak pada satu lingkaran. Suatu graf lingkaran dengan n-titik dinotasikan dengan C_n (Gross dan Jay, 2006:18).

Contoh:

Gambar 2.8 Graf Lingkaran C_1, C_2 dan C_4

Definisi 2.13

Suatu graf G lengkap partisi-n adalah graf partisi-n dengan himpunan-himpunan partisi $V_1, V_2, \dots, V_n$ yang memiliki sifat tambahan yaitu $u \in V_i$ dan $v \in V_j, i \neq j$ maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = P_i$, kemudian graf ini dinotasikan dengan $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$. (Order pada bilangan $p_1, p_2, \dots, p_n$ tidak penting) Graf lengkap partisi-n adalah lengkap jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i, dalam hal ini adalah K_n. Jika $p_i = t$ untuk semua i, kemudian graf lengkap partisi-n adalah tetap dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Maka, $K_{n(t)} \cong K_n$. Suatu graf bipartisi lengkap dengan himpunan partisi V_1 dan V_2 dimana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, kemudian dinotasikan dengan $K(m,n)$. Graf $K(1,n)$ disebut graf bintang (Chartrand dan Lesniak, 2016:18).

Definisi 2.14

Misal R gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan. Ambil $I(R)$ himpunan elemen unit di R, $I(R) \neq \emptyset$ karena $1 \in I(R)$. Elemen dari $I(R)$ menjadi titik-titik pada graf sederhana. Dua elemen x dan y di R terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 1$. Diasumsikan bahwa 1 terhubung langsung dengan setiap elemen unit di R. Gaf yang dikaitkan dengan $I(R)$ didefinisikan sebagai graf $unit$ atau graf identitas di R (Kandasamy dan Floretin, 2009:134).

2.4 Automorfisme graf

Definisi 2.15

Misal X dan Y adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu fungsi f dari X ke Y, dilambangkan dengan $f: X \rightarrow Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen di X tepat satu pada elemen di Y. X adalah domain dari fungsi dan Y adalah himpunan kodomainnya. Jika y adalah elemen yang tunggal di Y dipetakan oleh fungsi f ke elemen x, maka y disebut peta dari x dan x adalah prapeta dari y dan ditulis $y = f(x)$. Himpunan $f(X)$ disebut *range* fungsi. *Range* fungsi adalah himpunan bagian dari kodomainnya (Balakrishnan, 1991:7).

Definisi 2.16

(a) Misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi 1-1 disebut dengan fungsi injektif.

(b) Misalkan A dan B himpunan dan f adalah suatu fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut *fungsi onto* jika $R(f) = B$. Jadi, $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi onto jika untuk setiap $y \in B$ maka ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Fungsi onto sering disebut juga fungsi surjektif atau fungsi pada.

(c) Suatu fungsi yang injektif sekaligus surjektif disebut fungsi bijektif.

(Bartle dan Donald, 2000:8)

Definisi 2.17

Korespondensi satu-satu dari suatu himpunan A ke dirinya sendiri dinamakan permutasi pada A. Untuk setiap himpunan tak-kosong A, notasi $S(A)$ menyatakan himpunan semua permutasi pada A. Himpunan semua fungsi dari A ke A dinotasikan dengan $\mathcal{M}(A)$ (Gilbert dan Gilbert, 2015:38).

Misalkan Ω sebarang himpunan tak-kosong dan S_Ω adalah himpunan semua bijeksi dari Ω ke Ω (yakni himpunan semua permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω membentuk suatu grup terhadap fungsi komposisi $\circ$. Catatan bahwa $\circ$ adalah operasi biner pada S_Ω yakni jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah bijeksi, maka $\sigma \circ \tau$ juga bijeksi dari $\Omega \to \Omega$. Karena fungsi komposisi adalah asosiatif secara umum, $\circ$ bersifat asosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 didefinisikan sebagai $1(a) = a$, untuk semua $a \in \Omega$. Setiap permutasi σ terdapat (2-sisi) fungsi invers, $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ menyebabkan $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Maka, semua aksioma grup dipenuhi oleh $(S_\Omega, \circ)$. Grup ini dinamakan grup simetri pada himpunan Ω. Penting untuk mengetahui bahwa elemen dari S_Ω adalah permutasi dari Ω, bukan elemen dari Ω (Dummit dan Foote, 2004:29).

Teorema 2.1

Order dari S_n adalah $n!$ (Dummit dan Foote,2004:29).

Bukti:

Permutasi dari $\{1,2,3,\dots,n\}$ adalah fungsi injektif pada himpunan ini ke dirinya sendiri karena himpunan tersebut berhingga dan dapat dihitung banyaknya fungsi injektif. Suatu fungsi injektif σ bisa memetakan 1 ke suatu unsur sebanyak n elemen pada $\{1,2,3,\dots,n\}$; $\sigma(2)$ bisa dipetakan ke suatu elemen pada himpunan tersebut kecuali $\sigma(1)$ (sehingga terdapat $n-1$ pilihan untuk $\sigma(2)$); $\sigma(3)$ bisa dipetakan ke suatu elemen kecuali $\sigma(1)$ atau $\sigma(2)$ (sehingga terdapat $n-2$ pilihan untuk $\sigma(3)$), begitu seterusnya. Oleh karena itu, terdapat $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Kemungkinan fungsi injektif dari $\{1,2,3,\dots,n\}$ ke dirinya sendiri. Sehingga terdapat tepat $n!$ Permutasi dari $\{1,2,3,\dots,n\}$ akibatnya terdapat tepat $n!$ Elemen di S_n.Contoh:

Misal $\Omega = \{1,2,3\}$, tentukan grup simetri dari S_3 tersebut?

Jawab:

Grup S_3 adalah permutasi yang memuat $3! = 6$ elemen, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$ maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$$

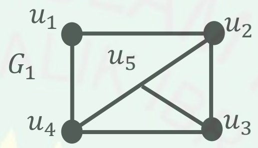
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) = (13)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) = (12)$$

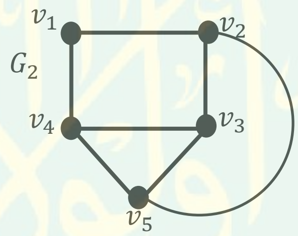
Jadi, grup simetri $S_3 = \{1, (123), (132), (23), (13), (12)\}$.

Definisi 2.18

Dua graf G dan G' dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi bijektif f antar titiknya dan korespondesi satu-satu g antar sisinya yang keterhubungan keduanya dapat diawetkan. (Dengan kata lain, dua graf $G = (V, E)$ dan $G' = (V', E')$ dikatakan isomorfik jika terdapat bijeksi $f: V \to V'$ dan $g: E \to E'$ yang memenuhi $g(v_i v_j) = f(v_i)f(v_j)$ untuk setiap sisi $v_i v_j$ di G) (Satyanarayana, dan Kuncham, 2013:83).



Gambar 2.9 Graf G_1



Gambar 2.10 Graf G_2

Contoh:

Lihat pada graf yang diberikan di gambar 2.9 dan 2.10.

Dua graf G_1 dan G_2 adalah isomorfik (pemetaan $f(u_i) = v_i$ adalah isomorfik antara kedua graf tersebut).

Definisi 2.19

Misal G dan H adalah dua graf sederhana. Suatu fungsi $f: V_G \to V_H$ mengawetkan keterhubungan jika untuk setiap pasangan titik u dan v terhubung di graf G, titik-titik $f(u)$ dan $f(v)$ terhubung di graf H. Demikian pula, f

mengawetkan ketidakterhubungan u dan v yaitu jika $f(u)$ dan $f(v)$ tidak terhubung, maka u dan v tidak terhubung (Gross dan Jay, 2006:59).

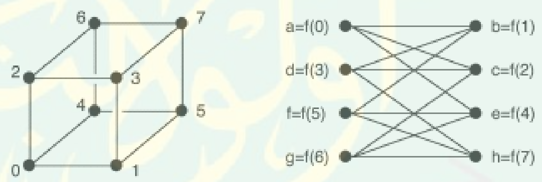
Definisi 2.20

Suatu bijeksi $f: V_G \to V_H$ antara himpunan titik pada dua graf sederhana G dan H disebut mengawetkan struktur jika f mengawetkan keterhubungan dan ketidakterhubungan, yaitu untuk setiap pasangan titik-titik di G, $uv \in \boldsymbol{G} \Leftrightarrow f(u)f(v) \in H$ (Gross dan Jay, 2006:59).

Definisi 2.21

Dua graf sederhana G dan H adalah isomorfik, dinotasikan $G \cong H$, jika terdapat fungsi bijektif $f: V_G \to V_H$ yang mengawetkan struktur. Fungsi f antara himpunan titik dari G dan H disebut isomorfisme dari G ke H (Gross dan Jay, 2006:59).

Contoh:



Gambar 2.11 Isomorfisme antara dua graf sederhana

Pemetaan $f: V_G \to V_H$ antara himpunan titik pada dua graf pada gambar dibawah diberikan $f(i) = i, i = 1,2,3,$ mengawetkan keterhubungan dan ketidakterhubungan, tetapi dua graf tersebut jelas tidak memiliki struktur yang ekivalen.

Gambar 2.12 Dua graf yang strukturnya tidak ekivalen

Definisi 2.22

Suatu bijeksi $f: V_G \to V_H$ antara himpunan titik pada dua graf G dan H, graf simpel atau umum, mengawetkan struktur jika

(i) Jumlah sisi (meskipun 0) antara setiap pasangan dari titik yang berbeda u dan v di graf G sama dengan jumlah sisi $f(u)$ dan $f(v)$ di graf H, dan

(ii) Jumlah self-loop pada setiap titik x di G sama dengan jumlah self-loop pada titik $f(x)$ di H (Gross dan Jay, 2006:61).

Definisi 2.23

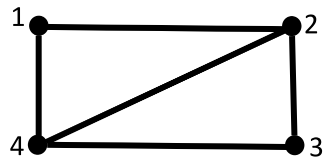
Dua graf G dan H isomorfik jika terdapat bijeksi $f: V_G \to V_H$ yang mengawetkan struktur. Hubungan ini dilambangkan dengan $G \cong H$ (Gross dan Jay, 2006:61).

Definisi 2.24

Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari G ke dirinya sendiri. Sehingga, automorfisme pada G adalah permutasi dari $V(G)$ yang mengawetkan keterhubungan langsung (ketidakterhubungan langsung). Jelas, fungsi identitas e pada $V(G)$ adalah automorfisme pada G. Invers automorfisme dari G juga automorfisme dari G, sebagai komposisi dua automorfisme dari G. Berdasarkan hasil penelitian tersebut diperoleh bahwa himpunan semua automorfisme dari graf G membentuk suatu grup (terhadap operasi komposisi), dinamakan grup automorfisme dan dinotasikan dengan $Aut(G)$ (Chartrand dkk, 2016:217).

Contoh:

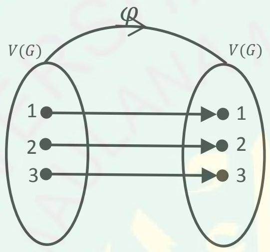
Misalkan graf G_4 seperti pada gambar dibawah ini.



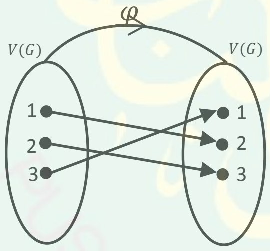
Gambar 2.13 Graf G_4

Diberikan pemetaan $\varphi: V(G) \to V(G)$, maka automorfisme yang mungkin dari graf G di atas adalah:

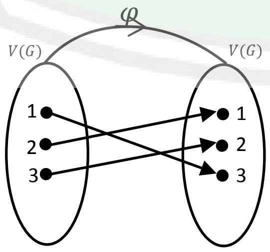
1. $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 3$ atau dapat ditulis $\varphi = (1)(2)(3)$



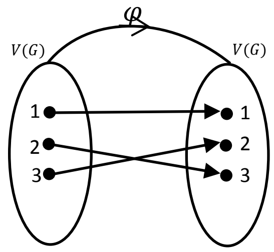
2. $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 1$ atau dapat ditulis $\varphi = (1\ 2\ 3)$



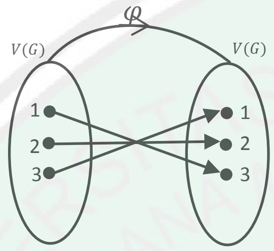
3. $\varphi(1) = 3, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2$ atau dapat ditulis $\varphi = (1\ 3\ 2)$



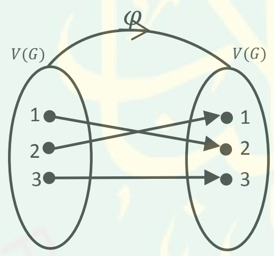
4. $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 2$ atau dapat ditulis $\varphi = (1)(2\ 3)$



5. $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 2$ atau dapat ditulis $\varphi = (2)(1\ 3)$



6. $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 3$ atau dapat ditulis $\varphi = (3)(1\ 2)$



Teorema 2.2

Graf bintang-n $(K_{1,n})$ memiliki $n + 1$ titik. Banyaknya automorfisme pada graf bintang-n $(K_{1,n})$ adalah $n!$ (Damayanti, 2011:38).

Teorema 2.3

Kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ m)$ dapat diselesaikan hanya jika $d = \text{FPB}(a, m)$ membagi b, dan pada kasus ini memiliki d selesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi memiliki satu selesaian (Irawan dkk,2014:83).

Proposisi 2.1

Berdasarkan penelitian Lila Aryani Puspitasari, Graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{2p}$ mempunyai order $p-1$ dimana $\deg(\overline{1}) = p-2, \deg(\overline{2p-1}) = 1$ dan $\deg v = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$ atau $v \neq \overline{2p-1}$. Sehingga, Graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{2p}$ mempunyai 1 titik berderajat 1, $(p-3)$ titik berderajat dua dan $\frac{1}{2}(p-3)\ C_3$ (Puspitasari,2019:39).

Proposisi 2.2

Berdasarkan penelitian Lila Aryani Puspitasari, Graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3p}$ mempunyai order $2p-2$ dimana $\deg(\overline{1}) = 2p-3, \deg\left(\overline{3(p-4)-1}\right) = 1, \deg\left(\overline{3(p-4)+1}\right) = 1, \deg(\overline{3p-1}) = 1$ dan $\deg v = 2$ untuk $v \neq \overline{1}, v \neq \overline{3(p-4)-1}, v \neq \overline{3(p-4)+1}$ atau $v \neq \overline{3p-1}$. Sehingga, Graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{2p}$ mempunyai 3 titik berderajat 1, $2p-6$ titik berderajat dua dan $(p-3)\ C_3$ (Puspitasari,2019:51).

2.5 Kajian Automorfisme Graf

Allah telah berfirman dalam surat fussilat ayat 46:

مَنْ عَمِلَ صَالِحًا فَلِنَفْسِهِ ۖ وَمَنْ أَسَاءَ فَعَلَيْهَا ۗ وَمَا رَبُّكَ بِظَلَّامٍ لِلْعَبِيدِ

"Barangsiapa yang mengerjakan amal yang saleh maka (pahalanya) untuk dirinya sendiri dan barangsiapa mengerjakan perbuatan jahat, maka (dosanya) untuk dirinya sendiri; dan sekali-kali tidaklah Rabb-mu menganiaya hamba-hamba-Nya".

Ayat di atas menerangkan bahwa perbuatan baik yang dilakukan manusia seperti menaati perintah Allah, melakukan perbuatan yang tidak dibenci atau haram untuk dilakukan, menghindari perbuatan tercela akan mendapatkan pahala dari

Allah. Hal ini akan berdampak pada diri kita sendiri, manfaat yang diperoleh dari perbuatan baik manusia. Begitupun sebaliknya, perbuatan buruk manusia akan mendatangkan madharat bari dirinya sendiri.

Firman-Nya, *"Barangsiapa yang beramal shalih, maka itu untuk dirinya sendiri…"* yakni bermal shalih di dunia ini, yaitu beriman, taat kepada Allah dan Rasul-Nya, baik dalam perintah maupun larangan, sehingga jiwa mereka menjadi suci dan telah siap untuk masuk surga, maka sesungguhnya Allah akan memasukkannya ke dalam surga. Dan kepada orang lain, sesungguhnya Allah tidak butuh kepada amalan hamba-hamba-Nya. Dan orang yang tidak beramal shalih, maka jiwanya tidak bisa suci dan bersih (Al-Jazairi,2009:731).

Firman-Nya, *"Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan…"* seperti tidak mengimani Allah, berbuat syirik dan tidak beramal shalih, maka balasn ats perbuatan mereka itu akan kembali kepada dirinya, yaitu balasan berupa siksaan nerakan dan kekal di dalamnya (Al-Jazairi,2009:731).

Firman-Nya, *"Kemudian kepada Tuhan kalianlah, kalian akan dikembalikan."* Yakni setelah kematian. Di antara kalian ada yang mati membawa amal shalih dan sebagiannya membawa amal buruk, maka kalian semua akan kembali kepada-Nya dengan membawa amalnya masing-masing pada hari kiamat dan Dia akan membalas setiap perbuatan kalian (Al-Jazairi,2009:731).

Kata (ظلام) *zhallam* adalah bentuk *mubalaghah* (hiperbola) yang mengandung makna *banyak* dan *sering kali*. Bentuk tunggalnya adalah (ظالم) *zhalim*. Anda jangan berkata bahwa menafikan sesutau yang banyak bukan bukti terjadinya yang sedikit, dnegan dalih bahwa ayat ini hanya menafikan tidak terjadinya kezaliman yang banyak dari Allah, maka boleh jadi terjadi sedikit kezaliman. Sekali lagi jangan berkata demikian, karena penggunaan patron tersebut untuk menyesuaikan dengan bentuk jamak dari kata (عبد) ‘*abid.* Sehingga dengan demikian ayat ini pada akhirnya menyatakan Allah tidak berlaku zalim kepada seorang hamba pun (Shihab, 2002:431).

Dalam kehidupan sehari-hari, perbuatan manusia sama halnya dengan konsep automorfisme. Perbuatan manusia seperti fungsi automorfisme yakni kembali kepada dirinya sendiri. Pencarian automorfisme graf yakni dengan menentukan unsur-unsur yang termasuk dalam definisi graf identitas kemudian dilanjutkan dengan menggambar graf identitas dari anggota yang sudah diperoleh. Setelah itu, diberikan fungsi antara himpunan titik-titiknya yang berupa fungsi bijektif. Fungsi tersebut akan memetakan graf awalnya pada dirinya sendiri. Fungsi seperti ini yang dinamakan automorfisme.

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan ini akan dimulai dengan: (1) menentukan anggota graf identitas dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{np}$ dimana $n = 2$ dan $n = 3$ dengan p prima, (2) menggambar graf identitas dari anggota yang sudah diperoleh, (3) mendefinisikan suatu fungsi antara himpunan titik-titiknya dan menentukan fungsi bijektif dari graf tersebut, (4) menentukan automorfisme, (5) membangun dugaan dan (6) membuktikan dugaan. Dalam pembahasan ini, penulis menotasikan graf identitas dengan $IG(\mathbb{Z}_{np})$.

3.1 Automorfisme pada Graf Identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$

Subbab ini menjelaskan bagaimana proses mencari banyaknya automorfisme pada graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo $2p$ bersama operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{Z}_{2p}, +, \times)$ dengan menggunakan $p = 3,5,7,11$ dan 13. Setelah menemukan banyaknya automorfisme graf identitas pada masing-masing gelanggang, maka akan menghasilkan dugaan banyaknya automorfisme dari $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ dan dugaan tersebut akan dibuktikan.

3.1.1 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_6$

Diberikan $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 6. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$. Jika dua anggota $\mathbb{Z}_6$ dioperasikan dengan operasi $\times$, dapat disajikan dalam tabel *Cayley* berikut:

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_6$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Menurut definisi graf identitas, diperoleh himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $I(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ dari Tabel 3.1. Dua unsur x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \bar{1}$. Jadi, graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan dari $\mathbb{Z}_6$ dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3.1 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_6, IG(\mathbb{Z}_6)$

Himpunan titik pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $V\big(I(\mathbb{Z}_6)\big) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6)$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V\big(IG(\mathbb{Z}_6)\big) \to V\big(IG(\mathbb{Z}_6)\big)$. Maka fungsi automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

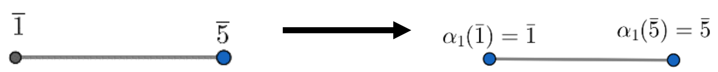
1. $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{5})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_1(\bar{1}) = \bar{1}$ dan $\alpha_1(\bar{5}) = (\bar{5})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.2 Fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{5})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\alpha_1(v_i)$	$\bar{1}$	$\bar{5}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.2 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_6$ dengan fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{5})$

Fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{5})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_1 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_1 : V(IG(\mathbb{Z}_6)) \rightarrow V(IG(\mathbb{Z}_6))$ yang berarti $\alpha_1(uv) = (\alpha_1(u)\alpha_1(v)), \forall (u, v) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$. Sehingga $\bar{1}\bar{5} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{5}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{5})) = (\bar{1}\bar{5}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$.

Karena α_1 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_1 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi $\alpha_1$adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_6)$.

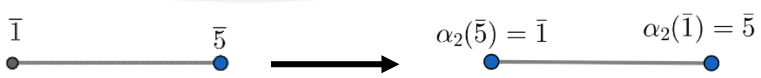
2. $\alpha_2 = (\bar{1}\ \bar{5})$

Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_2(\bar{1}) = \bar{5}$ dan $\alpha_2(\bar{5}) = (\bar{1})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.3 Fungsi $\alpha_2 = (\bar{1}\ \bar{5})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\alpha_2(v_i)$	$\bar{5}$	$\bar{1}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.3 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_6$ dengan fungsi $\alpha_2 = (\bar{1}\ \bar{5})$

Fungsi $\alpha_2 = (\bar{1}\ \bar{5})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_2 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_2 : V\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6)\big) \to V\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6)\big)$ yang berarti $\alpha_2(uv) = \big(\alpha_2(u)\alpha_2(v)\big), \forall (u,v) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6)\big)$. Sehingga sisi $\bar{1}\bar{5} \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6)\big)$, maka $\alpha_2(\bar{1}\bar{5}) = \Big(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{5})\Big) = (\bar{5}\bar{1}) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6)\big)$.

Karena α_2 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_2 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_2 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_6)$.

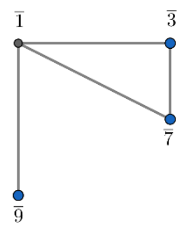
3.1.2 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{10}$

Diberikan $(\mathbb{Z}_{10}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 10. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Jika dua anggota $\mathbb{Z}_{10}$ dioperasikan dengan operasi $\times$, dapat disajikan dalam tabel *Cayley* berikut:

Tabel 3.4 Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{10}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Menurut definisi graf identitas, diperoleh himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$ dari Tabel 3.4. Dua unsur x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \bar{1}$. Jadi, graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{10}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{10}, IG(\mathbb{Z}_{10})$

Himpunan titik pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $V(\text{IG}(\mathbb{Z}_{10})) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $\text{IG}(\mathbb{Z}_{10})$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V(\text{IG}(\mathbb{Z}_{10})) \rightarrow V(\text{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$. Maka fungsi automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

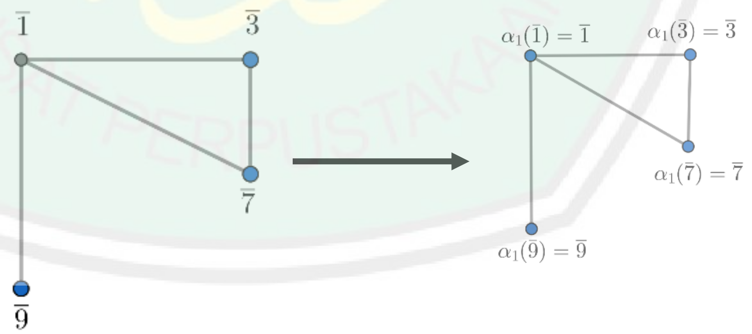
1. $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{7})(\bar{9})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_1(\bar{1}) = \bar{1}, \alpha_1(\bar{3}) = \bar{3}, \alpha_1(\bar{7}) = \bar{7}$ dan $\alpha_1(\bar{9}) = (\bar{9})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

   Tabel 3.5 Fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{7})(\bar{9})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\alpha_1(v_i)$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$

   Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.5 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{10}$ dengan fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{7})(\bar{9})$

Fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{7})(\bar{9})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_1 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_1: V(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})) \to V(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$ yang berarti $\alpha_1(uv) = (\alpha_1(u)\alpha_1(v)), \forall (u,v) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$. $\bar{1}\bar{3} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{3}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{3})) = (\bar{1}\bar{3}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$. $\bar{1}\bar{7} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{7}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{7})) = (\bar{1}\bar{7}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$

$\bar{1}\bar{9} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{9}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{9})) = (\bar{1}\bar{9}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$

dan $\bar{3}\bar{7} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$, maka $\alpha_1(\bar{3}\bar{7}) = (\alpha_1(\bar{3})\alpha_1(\bar{7})) = (\bar{3}\bar{7}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10}))$.

Karena α_1 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_1 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_1 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{10})$.

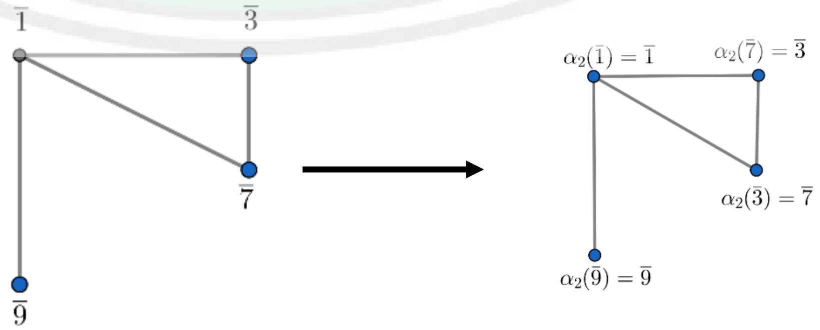
2. $\alpha_2 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{7})(\bar{9})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_2(\bar{1}) = \bar{1}, \alpha_2(\bar{3}) = \bar{7}, \alpha_2(\bar{7}) = \bar{3}$ dan $\alpha_2(\bar{9}) = (\bar{9})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan dengan

Tabel 3.6 Fungsi $\alpha_2 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{7})(\bar{9})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\alpha_1(v_i)$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.6 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{10}$ dengan fungsi $\alpha_2 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{7})(\bar{9})$

Fungsi $\alpha_2 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{7})(\bar{9})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_2 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_2 : V\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big) \to V\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$ yang berarti $\alpha_2(uv) = \big(\alpha_2(u)\alpha_2(v)\big), \forall (u,v) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$.

Sehingga $\bar{1}\bar{3} \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$, maka $\alpha_2(\bar{1}\bar{3}) = \big(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{3})\big) = (\bar{1}\bar{3}) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$

$\bar{1}\bar{7} \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$, maka $\alpha_2(\bar{1}\bar{7}) = \big(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{7})\big) = (\bar{1}\bar{7}) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$

$\bar{1}\bar{9} \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$, maka $\alpha_2(\bar{1}\bar{9}) = \big(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{9})\big) = (\bar{1}\bar{9}) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$

dan $\bar{3}\bar{7} \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$, maka $\alpha_2(\bar{3}\bar{7}) = \big(\alpha_2(\bar{3})\alpha_2(\bar{7})\big) = (\bar{7}\bar{3}) \in E\big(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_{10})\big)$.

Karena α_2 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_2 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_2 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{10})$.

3.1.3 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$

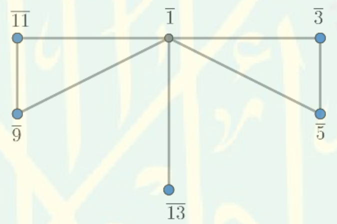
Diberikan $(\mathbb{Z}_{14}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 14. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$. Jika dua anggota $\mathbb{Z}_{14}$ dioperasikan dengan operasi $\times$, dapat disajikan dalam tabel *Cayley* berikut:

Tabel 3.7 Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{14}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$

$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	4	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Menurut definisi graf identitas, diperoleh himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{14}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{14}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}\}$ dari Tabel 3.5. Dua unsur x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \overline{1}$. Jadi, graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{14}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}, IG(\mathbb{Z}_{14})$

Himpunan titik pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ adalah $V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}\}$. Diberikan suatu fungsi dari $IG(\mathbb{Z}_{14})$ pada dirinya sendiri yaitu $\alpha: V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big) \to V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

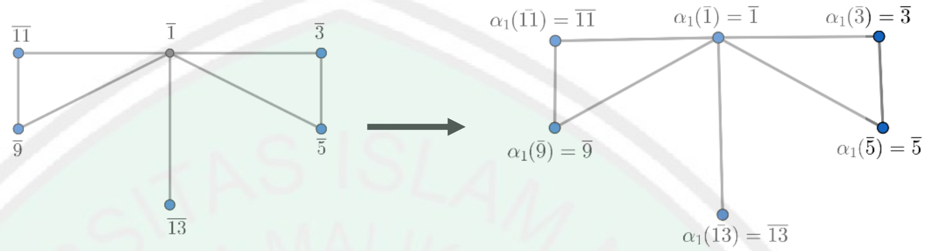
1. $\alpha_1 = (\overline{1})(\overline{3})(\overline{5})(\overline{9})(\overline{11})(\overline{13})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_1(\overline{1}) = \overline{1}, \alpha_1(\overline{3}) = \overline{3}, \alpha_1(\overline{5}) = \overline{5}, \alpha_1(\overline{9}) = \overline{9}, \alpha_1(\overline{11}) = \overline{11}$ dan $\alpha_1(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.8 Fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{5})(\bar{9})(\overline{11})(\overline{13})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_1(v_i)$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.8 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{5})(\bar{9})(\overline{11})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{5})(\bar{9})(\overline{11})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_1 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_1 : V(IG(\mathbb{Z}_{14})) \to V(IG(\mathbb{Z}_{14}))$ yang berarti $\alpha_1(uv) = (\alpha_1(u)\alpha_1(v)), \forall (u,v) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$. Sehingga $\bar{1}\bar{3} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{3}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{3})) = (\bar{1}\bar{3}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{5}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{5})) = (\bar{1}\bar{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{9} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{9}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{9})) = (\bar{1}\bar{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\overline{11}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\overline{11})) = (\bar{1}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{13} \in IG(\mathbb{Z}_{14})$, maka $\alpha_1(\bar{1}\overline{13}) = (\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\overline{13})) = (\bar{1}\overline{13}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{3}\bar{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_1(\bar{3}\bar{5}) = (\alpha_1(\bar{3})\alpha_1(\bar{5})) = (\bar{3}\bar{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

dan $\overline{9}\overline{11} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_1(\overline{9}\overline{11}) = \big(\alpha_1(\overline{9})\alpha_1(\overline{11})\big) = (\overline{9}\overline{11}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$.

Karena α_1 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_1 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_1 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

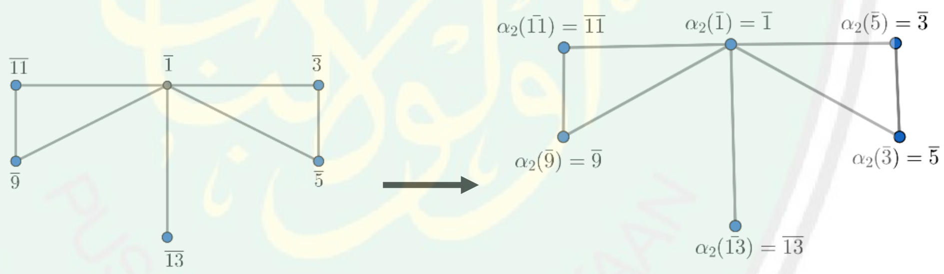
2. $\alpha_2 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{5})(\overline{9})(\overline{11})(\overline{13})$

Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_2(\overline{1}) = \overline{1}, \alpha_2(\overline{3}) = \overline{5}, \alpha_2(\overline{5}) = \overline{3}, \alpha_2(\overline{9}) = \overline{9}, \alpha_2(\overline{11}) = \overline{11}$ dan $\alpha_2(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.9 Fungsi $\alpha_2 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{5})(\overline{9})(\overline{11})(\overline{13})$

v_i	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_1(v_i)$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.9 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_2 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{5})(\overline{9})(\overline{11})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_2 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{5})(\overline{9})(\overline{11})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_2 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_2: V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big) \to V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$ yang berarti $\alpha_2(uv) = \big(\alpha_2(u)\alpha_2(v)\big), \forall(u,v) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$. Sehingga $\overline{1}\overline{3} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_2(\overline{1}\overline{3}) = \big(\alpha_2(\overline{1})\alpha_2(\overline{3})\big) = \big(\overline{1}\overline{5}\big) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{15} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_2(\overline{15}) = \left(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{5})\right) = (\overline{13}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{19} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_2(\overline{19}) = \left(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{9})\right) = (\overline{19}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{111} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_2(\overline{111}) = \left(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\overline{11})\right) = (\overline{111}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{113} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_2(\overline{113}) = \left(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\overline{13})\right) = (\overline{113}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{35} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_2(\overline{35}) = \left(\alpha_2(\bar{3})\alpha_2(\bar{5})\right) = (\overline{53}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

dan $\overline{911} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_2(\overline{911}) = \left(\alpha_2(\bar{9})\alpha_2(\overline{11})\right) = (\bar{9}\ \overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Karena α_2 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_2 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_2 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

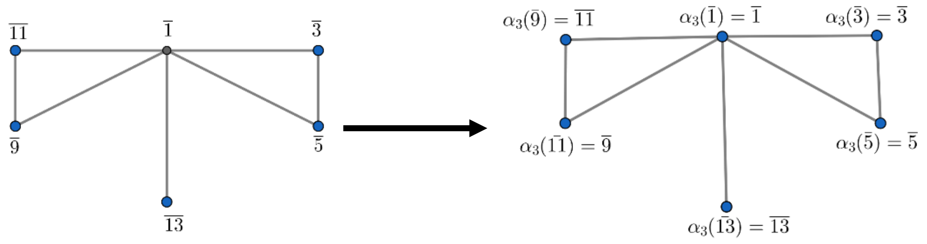
3. $\alpha_3 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{5})(\bar{9}\ \overline{11})(\overline{13})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_3(\bar{1}) = \bar{1}, \alpha_3(\bar{3}) = \bar{3}, \alpha_3(\bar{5}) = \bar{5}, \alpha_3(\bar{9}) = \overline{11}, \alpha_3(\overline{11}) = \bar{9}$ dan $\alpha_3(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.10 Fungsi $\alpha_3 = (\bar{1})(\bar{3})(\bar{5})(\bar{9}\ \overline{11})(\overline{13})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_3(v_i)$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.10 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_3 = (\overline{1})(\overline{3})(\overline{5})(\overline{9}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_3 = (\overline{1})(\overline{3})(\overline{5})(\overline{9}\ \overline{11})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_3 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_3: V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big) \to V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$ yang berarti $\alpha_3(uv) = \big(\alpha_3(u)\alpha_3(v)\big), \forall(u,v) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$.

Sehingga $\overline{1}\overline{3} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{1}\overline{3}) = \big(\alpha_3(\overline{1})\alpha_3(\overline{3})\big) = (\overline{1}\overline{3}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{1}\overline{5} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{1}\overline{5}) = \big(\alpha_3(\overline{1})\alpha_3(\overline{5})\big) = (\overline{1}\overline{5}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{1}\overline{9} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{1}\overline{9}) = \big(\alpha_3(\overline{1})\alpha_3(\overline{9})\big) = (\overline{1}\overline{11}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{1}\overline{11} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{1}\overline{11}) = \big(\alpha_3(\overline{1})\alpha_3(\overline{11})\big) = (\overline{1}\overline{9}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{1}\overline{13} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{1}\overline{13}) = \big(\alpha_3(\overline{1})\alpha_3(\overline{13})\big) = (\overline{1}\overline{13}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{3}\overline{5} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{3}\overline{5}) = \big(\alpha_3(\overline{3})\alpha_3(\overline{5})\big) = (\overline{3}\overline{5}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

dan $\overline{9}\overline{11} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_3(\overline{9}\overline{11}) = \big(\alpha_3(\overline{9})\alpha_3(\overline{11})\big) = (\overline{11}\overline{9}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$.

Karena α_3 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_3 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_3 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

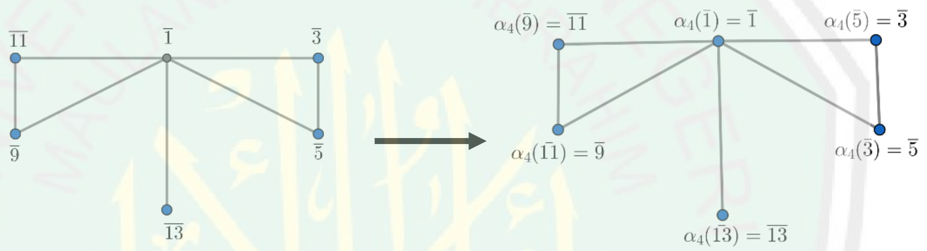
4. $\alpha_4 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{5})(\bar{9}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_4(\bar{1}) = \bar{1}, \alpha_4(\bar{3}) = \bar{5}, \alpha_4(\bar{5}) = \bar{3}, \alpha_4(\bar{9}) = \overline{11}, \alpha_4(\overline{11}) = \bar{9}$ dan $\alpha_4(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.11 Fungsi $\alpha_4 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{5})(\bar{9}\ \overline{11})(\overline{13})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_4(v_i)$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.11 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_4 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{5})(\bar{9}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_4 = (\bar{1})(\bar{3}\ \bar{5})(\bar{9}\ \overline{11})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_4 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_4: V(IG(\mathbb{Z}_{14})) \rightarrow V(IG(\mathbb{Z}_{14}))$ yang berarti $\alpha_4(uv) = (\alpha_4(u)\alpha_4(v)), \forall (u,v) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$. Sehingga $\bar{1}\bar{3} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_4(\bar{1}\bar{3}) = (\alpha_4(\bar{1})\alpha_4(\bar{3})) = (\bar{1}\bar{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_4(\bar{1}\bar{5}) = (\alpha_4(\bar{1})\alpha_4(\bar{5})) = (\bar{1}\bar{3}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{9} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_4(\bar{1}\bar{9}) = (\alpha_4(\bar{1})\alpha_4(\bar{9})) = (\bar{1}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_4(\bar{1}\overline{11}) = (\alpha_4(\bar{1})\alpha_4(\overline{11})) = (\bar{1}\bar{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{1}\overline{13} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_4(\overline{1}\overline{13}) = \big(\alpha_4(\overline{1})\alpha_4(\overline{13})\big) = (\overline{1}\overline{13}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

$\overline{3}\overline{5} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_4(\overline{3}\overline{5}) = \big(\alpha_4(\overline{3})\alpha_4(\overline{5})\big) = (\overline{5}\overline{3}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$

dan $\overline{9}\overline{11} \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$, maka $\alpha_4(\overline{9}\overline{11}) = \big(\alpha_4(\overline{9})\alpha_4(\overline{11})\big) = (\overline{11}\overline{9}) \in E\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big)$.

Karena α_4 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_4 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_4 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

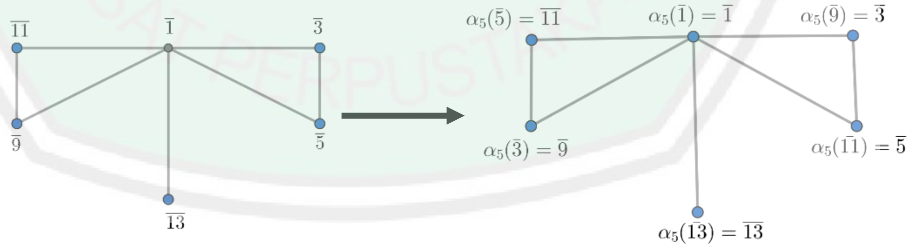
5. $\alpha_5 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9})(\overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_5(\overline{1}) = \overline{1}, \alpha_5(\overline{3}) = \overline{9}, \alpha_5(\overline{5}) = \overline{11}, \alpha_5(\overline{9}) = \overline{3}, \alpha_5(\overline{11}) = \overline{5}$ dan $\alpha_5(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.12 Fungsi $\alpha_5 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9})(\overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$

v_i	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_5(v_i)$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.12 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_5 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9})(\overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_5 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9})(\overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_5 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_5 : V\big(IG(\mathbb{Z}_{14})\big) \rightarrow$

$V(IG(\mathbb{Z}_{14}))$ yang berarti $\alpha_5(uv) = (\alpha_5(u)\alpha_5(v)), \forall (u,v) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Sehingga $\bar{1}\bar{3} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{1}\bar{3}) = (\alpha_5(\bar{1})\alpha_5(\bar{3})) = (\bar{1}\bar{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{1}\bar{5}) = (\alpha_5(\bar{1})\alpha_5(\bar{5})) = (\bar{1}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{9} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{1}\bar{9}) = (\alpha_5(\bar{1})\alpha_5(\bar{9})) = (\bar{1}\bar{3}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{1}\overline{11}) = (\alpha_5(\bar{1})\alpha_5(\overline{11})) = (\bar{1}\bar{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{13} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{1}\overline{13}) = (\alpha_5(\bar{1})\alpha_5(\overline{13})) = (\bar{1}\overline{13}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{3}\bar{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{3}\bar{5}) = (\alpha_5(\bar{3})\alpha_5(\bar{5})) = (\bar{9}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

dan $\bar{9}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_5(\bar{9}\overline{11}) = (\alpha_5(\bar{9})\alpha_5(\overline{11})) = (\bar{3}\bar{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Karena α_5 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_5 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_5 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$. .

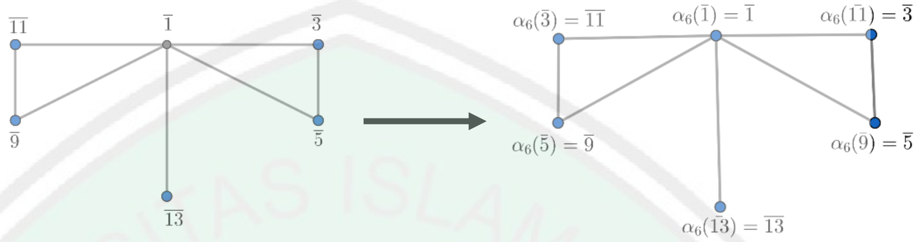
6. $\alpha_6 = (\bar{1})(\bar{3}\ \overline{11})(\bar{5}\ \bar{9})(\overline{13})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_6(\bar{1}) = \bar{1}, \alpha_6(\bar{3}) = \overline{11}, \alpha_6(\bar{5}) = \bar{9}, \alpha_6(\bar{9}) = \bar{5}, \alpha_6(\overline{11}) = \bar{3}$ dan $\alpha_6(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.13 Fungsi $\alpha_6 = (\bar{1})(\bar{3}\ \overline{11})(\bar{5}\ \bar{9})(\overline{13})$

v_i	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_6(v_i)$	$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.13 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_6 = (\bar{1})(\bar{3}\ \overline{11})(\bar{5}\ \bar{9})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_6 = (\bar{1})(\bar{3}\ \overline{11})(\bar{5}\ \bar{9})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_6 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_6 : V(IG(\mathbb{Z}_{14})) \to V(IG(\mathbb{Z}_{14}))$ yang berarti $\alpha_6(uv) = (\alpha_6(u)\alpha_6(v)), \forall (u,v) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$. Sehingga $\bar{1}\bar{3} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\bar{1}\bar{3}) = (\alpha_6(\bar{1})\alpha_6(\bar{3})) = (\bar{1}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\bar{1}\bar{5}) = (\alpha_6(\bar{1})\alpha_6(\bar{5})) = (\bar{1}\bar{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\bar{9} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\bar{1}\bar{9}) = (\alpha_6(\bar{1})\alpha_6(\bar{9})) = (\bar{1}\bar{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\bar{1}\overline{11}) = (\alpha_6(\bar{1})\alpha_6(\overline{11})) = (\bar{1}\bar{3}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\bar{1}\overline{13} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\bar{1}\overline{13}) = (\alpha_6(\bar{1})\alpha_6(\overline{13})) = (\bar{1}\overline{13}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{3}\overline{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\overline{3}\overline{5}) = (\alpha_6(\overline{3})\alpha_6(\overline{5})) = (\overline{11}\overline{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

dan $E(\overline{9}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_6(\overline{9}\overline{11}) = (\alpha_6(\overline{9})\alpha_6(\overline{11})) = (\overline{5}\overline{3}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Karena α_6 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_6 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_6 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

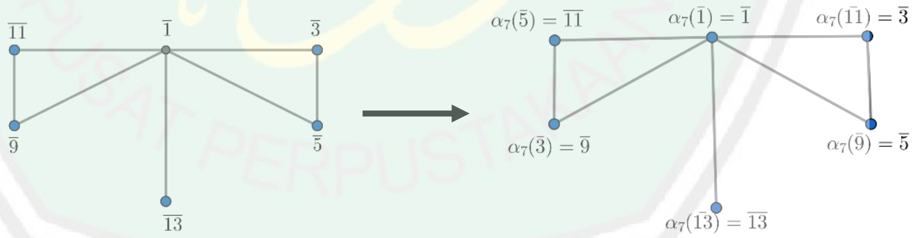
7. $\alpha_7 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9}\ \overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_7(\overline{1}) = \overline{1}, \alpha_7(\overline{3}) = \overline{9}, \alpha_7(\overline{5}) = \overline{11}, \alpha_7(\overline{9}) = \overline{5}, \alpha_7(\overline{11}) = \overline{3}$ dan $\alpha_7(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.14 Fungsi $\alpha_7 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9}\ \overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$

v_i	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_7(v_i)$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.14 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_7 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9}\ \overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_7 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{9}\ \overline{5}\ \overline{11})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_7 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_7: V(IG(\mathbb{Z}_{14})) \rightarrow V(IG(\mathbb{Z}_{14}))$ yang berarti $\alpha_7(uv) = (\alpha_7(u)\alpha_7(v)), \forall(u,v) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Sehingga $\overline{13} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{13}) = (\alpha_7(\overline{1})\alpha_7(\overline{3})) = (\overline{19}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{15} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{15}) = \left(\alpha_7(\overline{1})\alpha_7(\overline{5})\right) = (\overline{111}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{19} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{19}) = (\alpha_7(\overline{1})\alpha_7(\overline{9})) = (\overline{15}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{111} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{111}) = (\alpha_7(\overline{1})\alpha_7(\overline{11})) = (\overline{13}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{113} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{113}) = (\alpha_7(\overline{1})\alpha_7(\overline{13})) = (\overline{113}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{35} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{35}) = \left(\alpha_7(\overline{3})\alpha_7(\overline{5})\right) = (\overline{911}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

dan $\overline{911} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_7(\overline{911}) = (\alpha_7(\overline{9})\alpha_7(\overline{11})) = (\overline{53}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Karena α_7 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_7 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_7 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

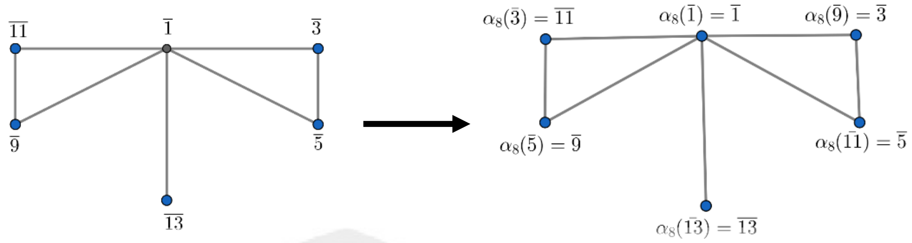
8. $\alpha_8 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{11}\ \overline{5}\ \overline{9})(\overline{13})$

   Fungsi ini berarti bahwa $\alpha_8(\overline{1}) = \overline{1}, \alpha_8(\overline{3}) = \overline{11}, \alpha_8(\overline{5}) = \overline{9}, \alpha_8(\overline{9}) = \overline{3}, \alpha_8(\overline{11}) = \overline{5}$ dan $\alpha_8(\overline{13}) = (\overline{13})$. Jika menggunakan tabel dapat dinyatakan sebagai berikut:

Tabel 3.15 Fungsi $\alpha_8 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{11}\ \overline{5}\ \overline{9})(\overline{13})$

v_i	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\alpha_8(v_i)$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$

Sehingga diperoleh graf berikut:



Gambar 3.15 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{14}$ dengan fungsi $\alpha_8 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{11}\ \overline{5}\ \overline{9})(\overline{13})$

Fungsi $\alpha_8 = (\overline{1})(\overline{3}\ \overline{11}\ \overline{5}\ \overline{9})(\overline{13})$ merupakan automorfisme karena pada graf awalnya dapat diperlihatkan bahwa fungsi α_8 bijektif. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas pada dirinya sendiri yaitu $\alpha_8 : V(IG(\mathbb{Z}_{14})) \to V(IG(\mathbb{Z}_{14}))$ yang berarti $\alpha_8(uv) = (\alpha_8(u)\alpha_8(v)), \forall (u,v) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Sehingga $\overline{1}\overline{3} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{1}\overline{3}) = (\alpha_8(\overline{1})\alpha_8(\overline{3})) = (\overline{1}\overline{11}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{1}\overline{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{1}\overline{5}) = (\alpha_8(\overline{1})\alpha_8(\overline{5})) = (\overline{1}\overline{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{1}\overline{9} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{1}\overline{9}) = (\alpha_8(\overline{1})\alpha_8(\overline{9})) = (\overline{1}\overline{3}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{1}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{1}\overline{11}) = (\alpha_8(\overline{1})\alpha_8(\overline{11})) = (\overline{1}\overline{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

$\overline{1}\overline{13} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{1}\overline{13}) = (\alpha_8(\overline{1})\alpha_8(\overline{13})) = (\overline{1}\overline{13}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

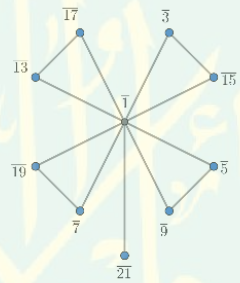
$\overline{3}\overline{5} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{3}\overline{5}) = (\alpha_8(\overline{3})\alpha_8(\overline{5})) = (\overline{11}\overline{9}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$

dan $\overline{9}\overline{11} \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$, maka $\alpha_8(\overline{9}\overline{11}) = (\alpha_8(\overline{9})\alpha_8(\overline{11})) = (\overline{3}\overline{5}) \in E(IG(\mathbb{Z}_{14}))$.

Karena α_8 merupakan homomorfisme bijektif, maka α_8 merupakan fungsi yang isomorfisme. Jadi, fungsi α_8 adalah suatu automorfisme di $IG(\mathbb{Z}_{14})$.

3.1.4 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{22}$

Diberikan $(\mathbb{Z}_{22}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 22. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{22} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\}$. Maka himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{22}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{22}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}\}$, sehingga graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{22}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



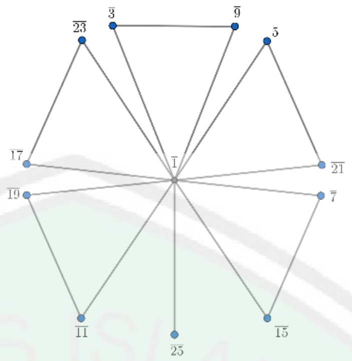
Gambar 3.16 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{22}, IG(\mathbb{Z}_{22})$

Himpunan titik pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{22}$ adalah $V\big(I(\mathbb{Z}_{22})\big) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}\}$. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas $I(\mathbb{Z}_{22})$ ke dirinya sendiri yaitu $\alpha: IG(\mathbb{Z}_{22}) \rightarrow IG(\mathbb{Z}_{22})$. Maka diperoleh banyaknya fungsi automorfisme yang mungkin pada graf tersebut sebanyak 384.

3.1.5 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{26}$

Diberikan $(\mathbb{Z}_{26}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 26. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{26} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{24}, \overline{25}\}$. Maka himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{26}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{26}) =$

$\{\overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7},\overline{9},\overline{11},\overline{15},\overline{17},\overline{19},\overline{21},\overline{23},\overline{25}\}$, sehingga graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{26}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



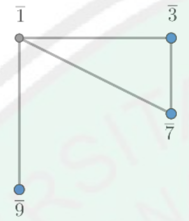
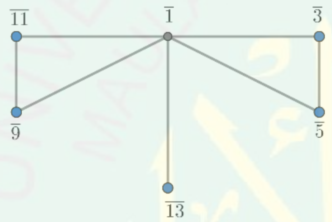
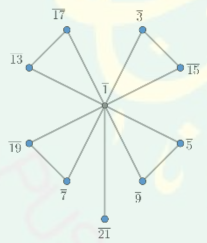
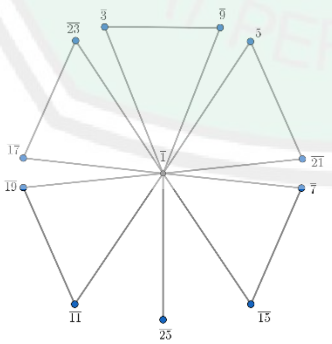
Gambar 3.17 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{26}, IG(\mathbb{Z}_{26})$

Himpunan titik pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{22}$ adalah $V\big(I(\mathbb{Z}_{26})\big) = \{\overline{1},\overline{3},\overline{5},\overline{7},\overline{9},\overline{11},\overline{15},\overline{17},\overline{19},\overline{21},\overline{23},\overline{25}\}$. Diberikan suatu fungsi dari graf identitas $I(\mathbb{Z}_{26})$ ke dirinya sendiri yaitu $\alpha: IG(\mathbb{Z}_{26}) \to IG(\mathbb{Z}_{26})$. Maka diperoleh banyaknya fungsi automorfisme yang mungkin pada graf tersebut sebanyak 3840.

3.1.6 Pola automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$

Graf identitas yang diperoleh dari perhitungan di atas dapat disajikan dalam tabel dengan menghitung banyaknya sikel tiga dalam graf tersebut, banyaknya titik yang mempunyai derajat satu, banyaknya titik yang mempunyai derajat dua dan banyaknya titik yang ada dalam graf tersebut. Graf identitas yang diperoleh dari himpunan bilangan bulat modulo $2p$, $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ dapat disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.16 Banyak C_3, titik berderajat satu, titik berderajat dua dan anggota dari $IG(\mathbb{Z}_{2p})$

$\boldsymbol{p}$	**Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{2p})\right)$**	**Banyak C_3 dalam $IG(\mathbb{Z}_{2p})$**	**Banyak titik berderajat satu dalam $IG(\mathbb{Z}_{2p})$**	**Banyak titik berderajat dua dalam $IG(\mathbb{Z}_{2p})$**	**Banyaknya Anggota $I(\mathbb{Z}_{2p})$**
3		0	2	0	2
5		1	1	2	3
7		2	1	4	6
11		4	1	8	10
13		5	1	10	12

Lemma 1

$$I(\mathbb{Z}_{2p}) = \left\{\overline{2m-1} \mid m = 1,2,\dots,p \text{ dimana } m \neq \tfrac{p+1}{2}\right\}.$$

Bukti:

Akan dicari $x \in \mathbb{Z}_{2p}$ sedemikian sehingga $(2m-1)\cdot x \equiv 1(mod\ 2p)$ untuk $m = 1,2,\ldots,p$ dan $m \neq \frac{p+1}{2}$.

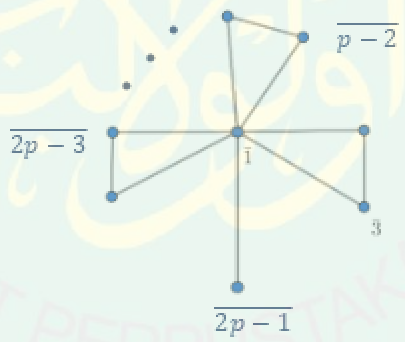
Karena $\text{FPB}(2m-1,2p) = 1$ dan 1 membagi 1, maka menurut Teorema 2.3 $(2m-1)\cdot x \equiv 1(mod\ 2p)$ pasti mempunyai satu selesaian.

Akan dibuktikan bahwa $(2m-1)$ dengan $m = \frac{p+1}{2}$ tidak termasuk dalam anggota $I(\mathbb{Z}_{2p})$.

Misalkan $p \cdot x \equiv 1(mod\ 2p)$

Faktor dari p adalah 1 dan p, faktor dari $2p$ adalah $1, p, 2$ dan $2p$.

Karena $\text{FPB}(p, 2p) = p$ dan $p \nmid 1$ maka menurut Teorema 2.3 $p \cdot x \equiv 1(mod\ 2p)$ tidak mempunyai selesaian (tidak ada x yang memenuhi). Sehingga $p \notin I(\mathbb{Z}_{2p})$.

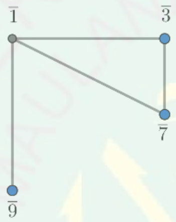
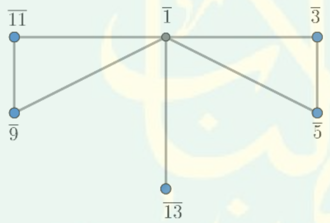
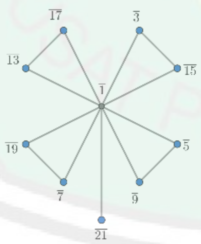


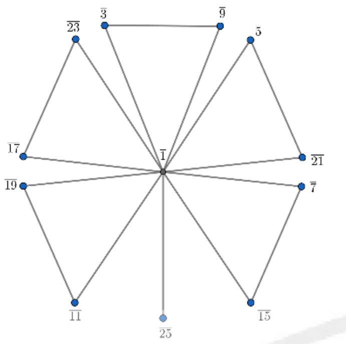
Gambar 3.18 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}, IG(\mathbb{Z}_{2p})$

Graf di atas merupakan gambar graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ secara umum dimana terdapat $\frac{1}{2}(p-3)\ C_3$, 1 titik berderajat satu, $(p-3)$ titik yang berderajat dua dan banyak titik dalam graf identitas $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah $p-1$.

Berdasarkan pembahasan automorfisme pada masing-masing graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ dengan $p \geq 3$, dibentuk suatu pola banyaknya automorfisme yang mengacu pada pemetaan titik. Pola banyaknya automorfisme dalam masing-masing graf disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 3.17 Pola banyaknya automorfisme dari $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ dimana $p \geq 3$ dengan p prima

p	**Graf Identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$**	**Banyaknya Automorfisme pada $IG(\mathbb{Z}_{2p})$**	**Pola Banyaknya Automorfisme pada $IG(\mathbb{Z}_{2p})$**
3		2	$(2) \cdot 0!$
5		2	$(2) \cdot 1!$
7		8	$(2 \cdot 2) \cdot 2!$
11		384	$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot) \cdot 4!$

13		3840	$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 5!$

Berdasarkan Tabel 3.17 maka diperoleh hasil berikut:

Proposisi 3.1

Banyaknya automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ dengan $p = 3$ dan p bilangan prima adalah 2.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa terdapat dua automorfisme yakni dua permutasi yang mengawetkan keterhubungan (ke-tidak-terhubungan) dalam $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p = 3$.

Misalkan α adalah suatu fungsi pada himpunan titik dari $IG(\mathbb{Z}_6)$ ke dirinya sendiri. Himpunan titik-titik dari $IG(\mathbb{Z}_6)$ adalah $\bar{1}$ dan $\bar{5}$.

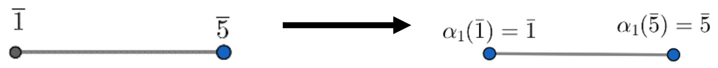
Dari Teorema 2.1, dijelaskan bahwa banyaknya permutasi dari $\{1,2,3,\dots,n\}$ ke dirinya sendiri adalah $n!$.

Oleh sebab itu, banyaknya permutasi dari himpunan titik-titik dari $IG(\mathbb{Z}_6)$ ke dirinya sendiri adalah $2! = 2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa kedua permutasi tersebut mengawetkan keterhubungan. Kedua permutasinya adalah sebagai berikut:

1. $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{5})$

Permutasi ini berarti bahwa $\alpha_1(\bar{1}) = \bar{1}$ dan $\alpha_1(\bar{5}) = (\bar{5})$.



$\bar{1}\bar{5} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$, maka $\alpha_1(\bar{1}\bar{5}) = \left(\alpha_1(\bar{1})\alpha_1(\bar{5})\right) = (\bar{1}\bar{5}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$.

Oleh karena itu, α_1 mengawetkan keterhubungan.

2. $\alpha_2 = (\bar{1}\ \bar{5})$

Permutasi ini berarti bahwa $\alpha_2(\bar{1}) = \bar{5}$ dan $\alpha_2(\bar{5}) = (\bar{1})$.

$\bar{1}\bar{5} \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$, maka $\alpha_2(\bar{1}\bar{5}) = \left(\alpha_2(\bar{1})\alpha_2(\bar{5})\right) = (\bar{5}\bar{1}) \in E(\mathrm{IG}(\mathbb{Z}_6))$.

Oleh karena itu, α_2 mengawetkan keterhubungan.

Jadi, terbukti bahwa banyaknya automorfisme graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ dengan $p = 3$ adalah 2.

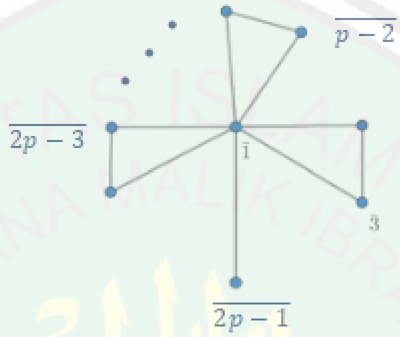
Proposisi 3.2

Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ dengan $p \geq 5$ dan p bilangan prima mempunyai automorfisme sebanyak $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$.

Bukti:

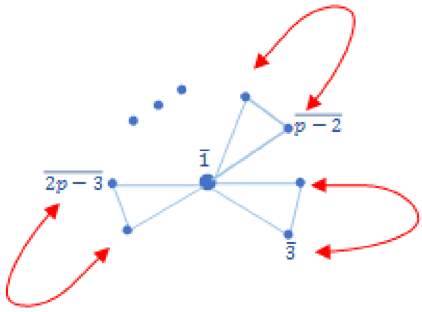
Akan dibuktikan bahwa terdapat $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$ Automorfisme dari $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ dengan $p \geq 5$.

Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{2p})\right)$ dengan $p \geq 5$ dan p bilangan prima mempunyai $p-1$ titik dimana titik $\overline{2p-1}$ berderajat 1, titik $\bar{1}$ berderajat $p-2$ dan titik yang berderajat 2 sebanyak $p-3$ titik. Graf identitas ini juga mempunyai C_3 sebanyak $\frac{1}{2}(p-3)$. Sehingga gambar grafnya adalah



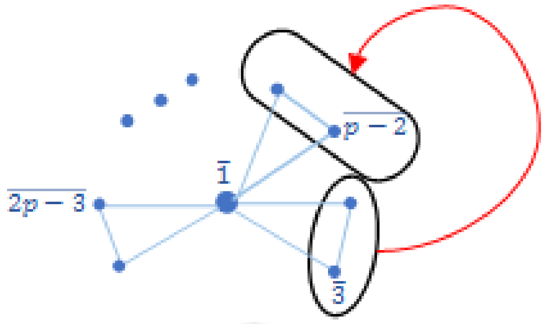
Himpunan sisi dari graf $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah $E\left(IG(\mathbb{Z}_{2p})\right) = \{(\bar{1}\bar{3}), (\bar{1}\overline{p-2}), (\bar{1}\overline{2p-3}), (\bar{1}\overline{2p-1}), \dots, (\bar{3}\bar{x}), (\overline{p-2}\bar{y}), (\overline{2p-3}\bar{z}) | x, y, z \in I(\mathbb{Z}_{2p})\}$.

Misalkan α adalah fungsi dari himpunan titik dari $IG(\mathbb{Z}_{2p})$ ke dirinya sendiri. Dari definisi 2.22, maka α harus mengawetkan derajat titik dan berbentuk permutasi, sehingga $\alpha(\overline{2p-1}) = \overline{2p-1}, \alpha(\bar{1}) = \bar{1}$, akibatnya titik $\overline{2p-1}$ dan $\bar{1}$ hanya bisa dipetakan ke dirinya sendiri. Untuk mempermudah pembuktian selanjutnya, digunakan gambar dibawah ini



Kasus I:

Suatu permutasi yang memetakan suatu titik yang berderajat 2 ke titik yang terhubung langsung dengannya. Dengan syarat α hanya memetakan setiap titik di C_3 ke titik yang terhubung langsung dengan dirinya sendiri dan berderajat sama (seperti ilustrasi pada gambar di atas), seperti $(\overline{3}\ \bar{x}), (\overline{p-2}\ \bar{y}), (\overline{2p-3}\ \bar{z}), \ldots, (\overline{3}\ \bar{x})(\overline{p-2}\ \bar{y}), (\overline{3}\ \bar{x})\ (\overline{2p-3}\ \bar{z}), (\overline{p-2}\ \bar{y})\ (\overline{2p-3}\ \bar{z}), \ldots$ dengan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in I(\mathbb{Z}_{2p})$. Fungsi α memetakan $\overline{3}$ ke $\bar{x}$, fungsi α memetakan $\overline{p-2}$ ke $\bar{y}$, dan seterusnya sebanyak $\frac{1}{2}(p-3)$ permutasi. Kemudian, fungsi α memetakan $\overline{3}$ ke $\bar{x}$ dan $\overline{p-2}$ ke $\bar{y}$, fungsi α memetakan $\overline{3}$ ke $\bar{x}$ dan $\overline{2p-3}$ ke $\bar{z}$, dan seterusnya sebanyak $\left(\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)-1\right)$ permutasi. Kemudian, fungsi α memetakan $\overline{3}$ ke $\bar{x}$, $\overline{p-2}$ ke $\bar{y}$ dan $\overline{2p-3}$ ke $\bar{z}$, begitu seterusnya sebanyak $\left(\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)-2\right)$. Oleh karena itu, terdapat $\frac{1}{2}(p-3) \times \left(\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)-1\right) \times \left(\left(\frac{1}{2}(p-3)\right)-2\right) \times \ldots \times 2 \times 1 = \frac{1}{2}(p-3)!$ kemungkinan permutasi.



Kasus II:

Suatu permutasi yang memetakan pasangan titik. Dari gambar di atas, yang dimaksud pasangan titik adalah sisi yang kedua titiknya berderajat dua dan terhubung langsung pada C_3 yang sama. Suatu permutasi yang memetakan suatu pasangan titik di C_3 ke pasangan titik lain yang ada di C_3 yang lain dimana pemetaan identitas termasuk didalamnya. Dimana satu pasangan titik mempunyai dua permutasi sehingga banyaknya permutasi yakni $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\frac{1}{2}(p-3)\ kali}$.

Oleh karena itu, banyaknya automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ yakni $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$.

3.2 Automorfisme pada Graf Identitas pada $\mathbb{Z}_{3p}$

Subbab ini menjelaskan bagaimana proses mencari banyaknya automorfisme pada graf identitas dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo $3p$ bersama operasi penjumlahan dan perkalian $(\mathbb{Z}_{3p}, +, \times)$ dengan menggunakan $p = 3,5,7,11$ dan 13. Setelah menemukan banyaknya automorfisme graf identitas pada masing-masing gelanggang, maka akan menghasilkan dugaan banyaknya automorfisme dari $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ dan dugaan tersebut akan dibuktikan.

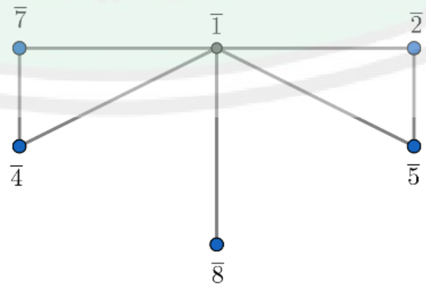
3.2.1 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_9$

Diberikan $(\mathbb{Z}_9, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 9. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_9$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}$. Jika dua anggota $\mathbb{Z}_9$ dioperasikan dengan operasi $\times$, dapat disajikan dalam tabel $Cayley$ berikut:

Tabel 3.18 Tabel $Cayley$ dari $\mathbb{Z}_9$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	3	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Menurut definisi graf identitas, diperoleh himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_9$ yaitu $I(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$ dai Tabel 3.18. Dua unsur x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \bar{1}$. Jadi, graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_9$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_9, IG(\mathbb{Z}_9)$

Banyaknya automorfisme pada $IG(\mathbb{Z}_9)$ adalah 8 seperti dalam pembahasan 3.1.2.

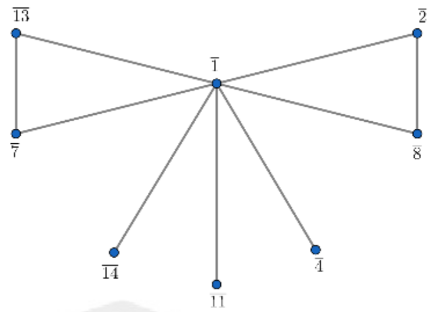
3.2.2 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{15}$

Diberikan $(\mathbb{Z}_{15}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 15. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{15} = \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}$. Jika dua anggota $\mathbb{Z}_{15}$ dioperasikan dengan operasi $\times$, dapat disajikan dalam tabel *Cayley* berikut:

Tabel 3.19 Tabel *Cayley* dari $\mathbb{Z}_{15}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	3
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Menurut definisi graf identitas, diperoleh himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{15}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{15}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$ dari Tabel 3.19. Dua unsur x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \overline{1}$. Jadi, graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{15}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.20 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{15}, IG(\mathbb{Z}_{15})$

Himpunan titik pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $V\big(I(\mathbb{Z}_{15})\big) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$. Diberikan suatu fungsi dari graf $I(\mathbb{Z}_{15})$ ke dirinya sendiri yaitu $\alpha: IG(\mathbb{Z}_{15}) \to IG(\mathbb{Z}_{15})$. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut sebanyak 48 yakni:

1. $\alpha_1 = (\bar{1})(\bar{2})(\bar{4})(\bar{7})(\bar{8})(\overline{11})(\overline{13})(\overline{14})$
2. $\alpha_2 = (\bar{2}\ \bar{8})$
3. $\alpha_3 = (\bar{2}\ \overline{13})(\bar{7}\ \bar{8})$
4. $\alpha_4 = (\bar{2}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \overline{13})$
5. $\alpha_5 = (\bar{7}\ \overline{13})$
6. $\alpha_6 = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{7}\ \overline{13})$
7. $\alpha_7 = (\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$
8. $\alpha_8 = (\bar{2}\ \bar{7})(\bar{8}\ \overline{13})$
9. $\alpha_9 = (\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})$
10. $\alpha_{10} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})$
11. $\alpha_{11} = (\bar{2}\ \overline{13})(\bar{7}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})$
12. $\alpha_{12} = (\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})(\bar{2}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \overline{13})$
13. $\alpha_{13} = (\bar{7}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})$

25. $\alpha_{25} = (\bar{4}\ \overline{14})$
26. $\alpha_{26} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{14})$
27. $\alpha_{27} = (\bar{2}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{14})(\bar{7}\ \bar{8})$
28. $\alpha_{28} = (\bar{4}\ \overline{14})(\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$
29. $\alpha_{29} = (\bar{4}\ \overline{14})(\bar{7}\ \overline{13})$
30. $\alpha_{30} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{14})(\bar{7}\ \overline{13})$
31. $\alpha_{31} = (\bar{4}\ \overline{14})(\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$
32. $\alpha_{32} = (\bar{2}\ \bar{7})(\bar{4}\ \overline{14})(\bar{8}\ \overline{13})$
33. $\alpha_{33} = (\overline{11}\ \overline{14})$
34. $\alpha_{34} = (\bar{2}\ \bar{8})(\overline{11}\ \overline{14})$
35. $\alpha_{35} = (\bar{2}\ \overline{13})(\bar{7}\ \bar{8})(\overline{11}\ \overline{14})$
36. $\alpha_{36} = (\overline{11}\ \overline{14})(\bar{2}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \overline{13})$
37. $\alpha_{37} = (\bar{7}\ \overline{13})(\overline{11}\ \overline{14})$

14. $\alpha_{14} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{7}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})$

15. $\alpha_{15} = (\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})(\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$

16. $\alpha_{16} = (\bar{2}\ \bar{7})(\bar{8}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{11}\ \overline{14})$

17. $\alpha_{17} = (\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})$

18. $\alpha_{18} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})$

19. $\alpha_{19} = (\bar{2}\ \overline{13})(\bar{7}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})$

20. $\alpha_{20} = (\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})(\bar{2}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \overline{13})$

21. $\alpha_{21} = (\bar{7}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})$

22. $\alpha_{22} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{7}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})$

23. $\alpha_{23} = (\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})(\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$

24. $\alpha_{24} = (\bar{2}\ \bar{7})(\bar{8}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{14}\ \overline{11})$

38. $\alpha_{38} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{7}\ \overline{13})(\overline{11}\ \overline{14})$

39. $\alpha_{39} = (\overline{11}\ \overline{14})(\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$

40. $\alpha_{40} = (\bar{2}\ \bar{7})(\bar{8}\ \overline{13})(\overline{11}\ \overline{14})$

41. $\alpha_{41} = (\bar{4}\ \overline{11})$

42. $\alpha_{42} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{11})$

43. $\alpha_{43} = (\bar{2}\ \overline{13})(\bar{4}\ \overline{11})(\bar{7}\ \bar{8})$

44. $\alpha_{44} = (\bar{4}\ \overline{11})(\bar{2}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \overline{13})$

45. $\alpha_{45} = (\bar{4}\ \overline{11})(\bar{7}\ \overline{13})$

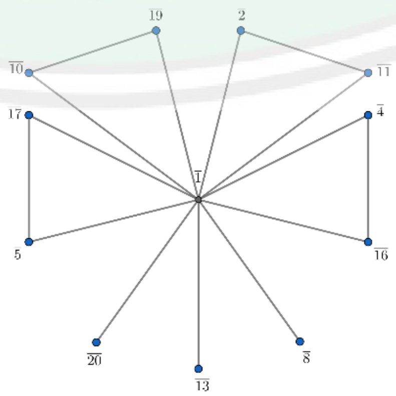
46. $\alpha_{46} = (\bar{2}\ \bar{8})(\bar{4}\ \overline{11})(\bar{7}\ \overline{13})$

47. $\alpha_{47} = (\bar{4}\ \overline{11})(\bar{2}\ \overline{13}\ \bar{8}\ \bar{7})$

48. $\alpha_{48} = (\bar{2}\ \bar{7})(\bar{4}\ \overline{11})(\bar{8}\ \overline{13})$

3.2.3 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{21}$

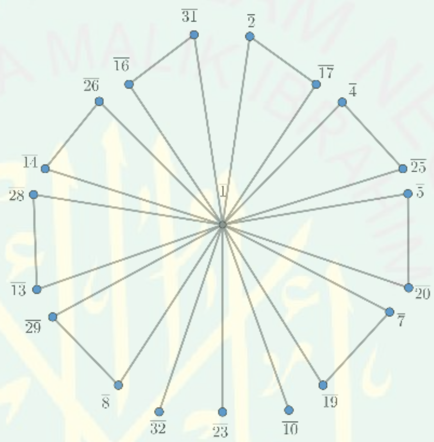
Diberikan $(\mathbb{Z}_{21}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 21. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{19}, \overline{20}\}$. Maka himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{21}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{21}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$, sehingga graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{21}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.21 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{21}, IG(\mathbb{Z}_{21})$

3.2.4 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{33}$

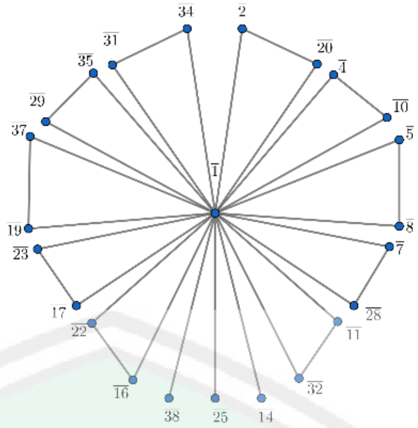
Diberikan $(\mathbb{Z}_{33}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 33. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, 1, \overline{32}\}$. Maka himpunan *unit* dari $\mathbb{Z}_{33}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{33}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}\}$, sehingga graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{33}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.22 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{33}, IG(\mathbb{Z}_{33})$

3.2.5 Automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{39}$

Diberikan $(\mathbb{Z}_{39}, +, \times)$ gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 39. Unsur-unsur himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}_{39} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{37}, \overline{38}\}$. Maka himpunan unsur identitas dari $\mathbb{Z}_{39}$ yaitu $I(\mathbb{Z}_{39}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{38}\}$, sehingga graf identitas dari gelanggang komutatif dengan elemen kesatuan $\mathbb{Z}_{39}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

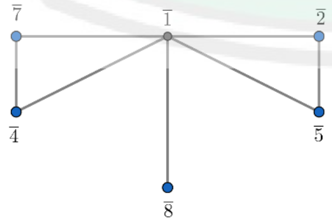


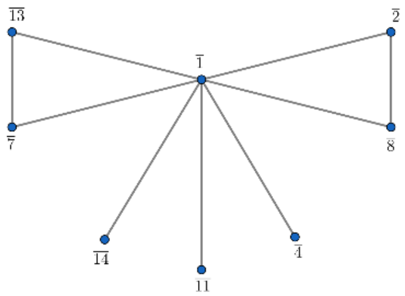
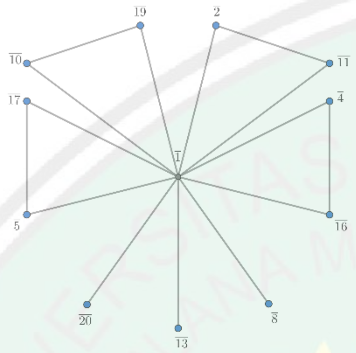
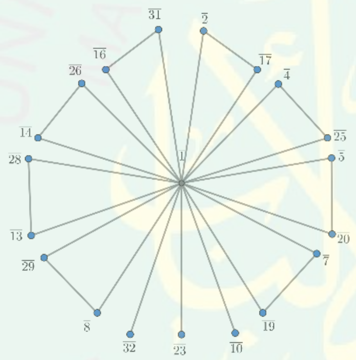
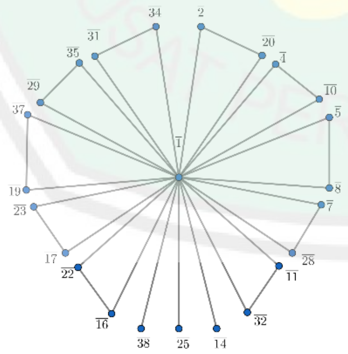
Gambar 3.23 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{39}, IG(\mathbb{Z}_{39})$

3.2.6 Pola automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$

Graf identitas yang diperoleh dari perhitungan di atas dapat disajikan dalam tabel dengan menghitung banyaknya sikel tiga dalam graf tersebut, banyaknya titik yang mempunyai derajat satu, banyaknya titik yang mempunyai derajat dua dan banyaknya titik yang ada dalam graf tersebut. Graf identitas yang diperoleh dari himpunan bilangan bulat modulo $3p$, $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ dapat disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.20 Banyak C_3, titik berderajat satu, titik berderajat dua dan anggota dari $IG(\mathbb{Z}_{3p})$

p	**Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{3p})\right)$**	**Banyak C_3 dalam $IG(\mathbb{Z}_{3p})$**	**Banyak titik berderajat satu dalam $IG(\mathbb{Z}_{3p})$**	**Banyak titik berderajat dua dalam $IG(\mathbb{Z}_{3p})$**	**Banyaknya Anggota $I(\mathbb{Z}_{3p})$**
3		2	1	4	6

5		2	3	4	8
7		4	3	8	12
11		8	3	16	20
13		10	3	20	24

Lemma II

$$I(\mathbb{Z}_{3p}) = \left\{\bar{1}, \overline{3m-1}, \overline{3m+1} \middle| m = 1,2,\dots,p \text{ dimana } m \neq \frac{p+1}{3}\ atau \frac{p-1}{3}\right\}.$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $1 \in I(\mathbb{Z}_{3p})$ berarti terdapat $x \in \mathbb{Z}_{2p}$ yang memenuhi $1 \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$.

Faktor dari 1 adalah 1, faktor dari $3p$ adalah $1,3,p$ dan $3p$.

Karena FPB$(1,3p) = 1$ dan 1 membagi 1, maka menurut Teorema 2.3 $1 \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ memiliki satu selesaian yakni $x = 1$.

Akan dicari $x \in \mathbb{Z}_{3p}$ sedemikian sehingga $(3m-1) \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ untuk $m = 1,2,\dots,p$ dan $m \neq \frac{p+1}{3}$.

Karena FPB$(3m-1,3p) = 1$ dan 1 membagi 1, maka menuurt Teorema 2.3 $(3m-1) \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ pasti mempunyai satu selesaian.

Akan dicari $x \in \mathbb{Z}_{3p}$ sedemikian sehingga $(3m+1) \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ untuk $m = 1,2,\dots,p$ dan $m \neq \frac{p-1}{3}$.

Karena FPB$(3m+1,3p) = 1$ dan 1 membagi 1, maka menurut Teorema 2.3 $(3m+1) \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ pasti mempunyai satu selesaian.

Akan dibuktikan bahwa $(3m-1)$ dengan $m = \frac{p+1}{3}$ tidak termasuk dalam anggota $I(\mathbb{Z}_{3p})$.

Misalkan $p \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$

Faktor dari p adalah 1 dan p, faktor dari $3p$ adalah $1,3,p$ dan $3p$.

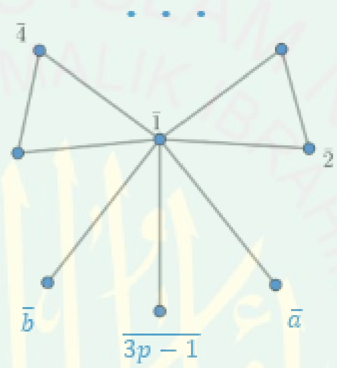
Karena FPB$(p,3p) = p$ dan $p \nmid 1$ maka menurut Teorema 2.3 $p \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ tidak mempunyai selesaian (tidak ada x yang memenuhi). Sehingga $p \notin I(\mathbb{Z}_{3p})$.

Akan dibuktikan bahwa $(3m+1)$ dengan $m = \frac{p-1}{3}$ tidak termasuk dalam anggota $I(\mathbb{Z}_{3p})$.

Misalkan $p \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$

Faktor dari p adalah 1 dan p, faktor dari $3p$ adalah $1,3,p$ dan $3p$.

Karena FPB$(p, 3p) = p$ dan $p \nmid 1$ maka menurut Teorema 2.3 $p \cdot x \equiv 1(mod\ 3p)$ tidak mempunyai selesaian (tidak ada x yang memenuhi). Sehingga $p \notin I(\mathbb{Z}_{3p})$.

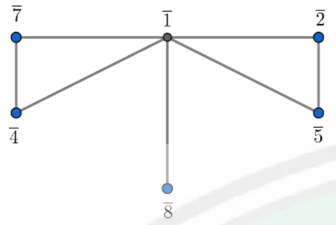
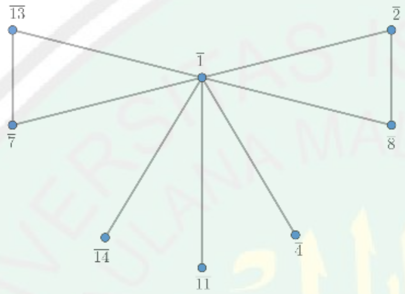
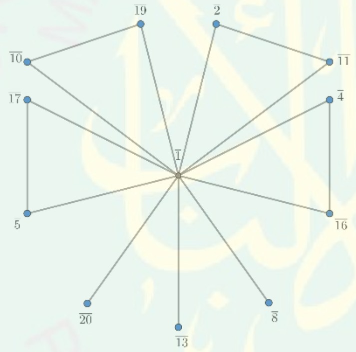
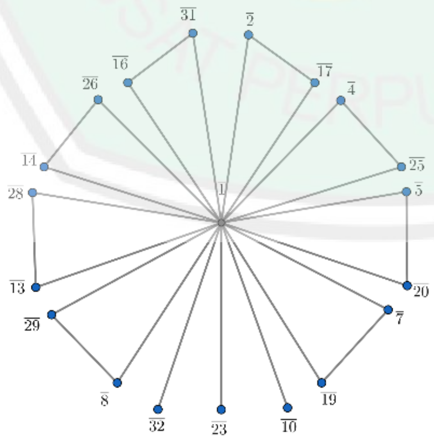


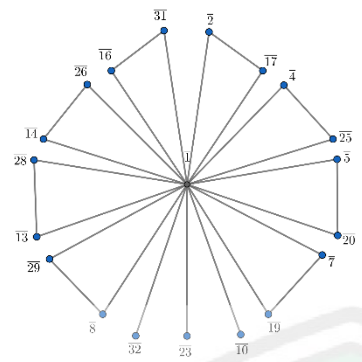
Gambar 3.24 Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$, $IG(\mathbb{Z}_{3p})$

Graf di atas merupakan gambar graf identitas dari $\mathbb{Z}_{2p}$ secara umum dimana terdapat $(p-3)$ C_3, 3 titik berderajat satu, $(2p-6)$ titik yang berderajat dua dan banyak titik dalam graf identitas $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $2p-2$.

Berdasarkan pembahasan automorfisme pada masing-masing graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$ dengan $p \geq 3$, dibentuk suatu pola banyaknya automorfisme yang mengacu pada pemetaan titik. Pola banyaknya automorfisme dalam masing-masing graf disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 3.21 Pola banyaknya automorfisme dari $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ dimana $p \geq 3$ dengan p prima

$\boldsymbol{p}$	**Graf Identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$**	**Banyaknya Automorfisme pada $IG(\mathbb{Z}_{3p})$**	**Pola Banyaknya Automorfisme pada $IG(\mathbb{Z}_{3p})$**
3		8	$1! \cdot (2 \cdot 2) \cdot 2!$
5		48	$3! \cdot (2 \cdot 2) \cdot 2!$
7		2304	$3! \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 4!$
11		61931520	$3! \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 8!$

13		22295347200	$3! \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 10!$

Berdasarkan Tabel 3.21 maka diperoleh hasil berikut:

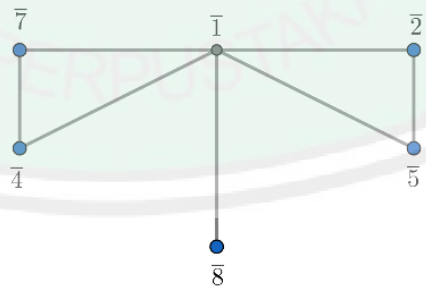
Proposisi 3.3

Banyaknya automorfisme dari graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ dengan $p = 3$ dan p bilangan prima adalah 8.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa terdapat 8 automorfisme yakni permutasi yang mengawetkan keterhubungan (ke-tidak-terhubungan) dalam $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ dengan $p = 5$.

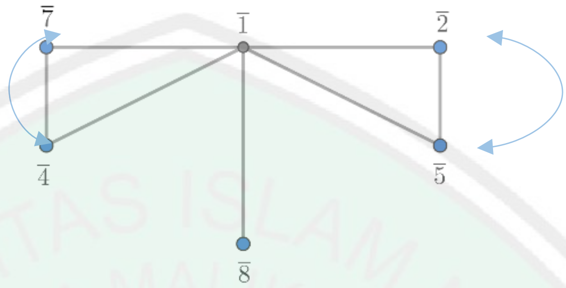
Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}, IG(\mathbb{Z}_9)$ adalah



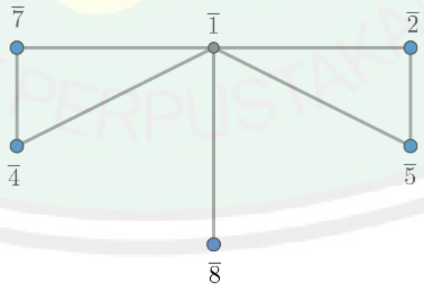
Himpunan sisi dari graf $IG(\mathbb{Z}_9)$ adalah $E(IG(\mathbb{Z}_9)) = \{(\bar{1},\bar{2}), (\bar{1},\bar{4}), (\bar{1},\bar{5}), (\bar{1},\bar{7}), (\bar{1},\bar{8}), (\bar{2},\bar{5}), (\bar{4},\bar{7})\}$.

Misalkan α adalah fungsi pada himpunan titik dari $IG(\mathbb{Z}_9)$ ke dirinya sendiri.

Dari definisi 2.22, maka α harus mengawetkan derajat titik dan berbentuk permutasi, sehingga $\alpha(\bar{8}) = \bar{8}, \alpha(\bar{1}) = \bar{1}$, akibatnya titik $\bar{8}$ dan $\bar{1}$ hanya bisa dipetakan ke dirinya sendiri. Untuk mempermudah pembuktian selanjutnya, digunakan gambar dibawah ini



Suatu permutasi yang memetakan titik yang berderajat dua ke titik yang terhubung langsung dengannya yakni $\alpha(\bar{2}) = \bar{5}$ dan $\alpha(\bar{4}) = \bar{7}$. Dengan syarat α hanya memetakan setiap titik di C_3 ke titik yang terhubung langsung dengan dirinya sendiri dan berderajat sama (seperti ilustrasi pada gambar di atas), sehingga banyaknya permutasi yang diperoleh sama dengan faktorial dari banyaknya C_3 yakni 2!.



Dari gambar di atas, yang dimaksud pasangan titik adalah sisi yang kedua titiknya berderajat dua dan terhubung langsung pada C_3 yang sama yakni $\bar{2}$ dan $\bar{5}$ dipetakan ke $\bar{4}$ dan $\bar{7}$. Suatu permutasi yang memetakan suatu pasangan titik di C_3 ke pasangan titik lain yang ada di C_3 yang lain dimana pemetaan identitas termasuk didalamnya. Dimana satu pasangan titik mempunyai 2 permutasi sehingga banyaknya permutasi yakni $2 \times 2 = 4$.

Oleh karena itu, banyaknya automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_9$ yakni $2^2 \cdot (2)! = 4 \cdot 2 = 8$.

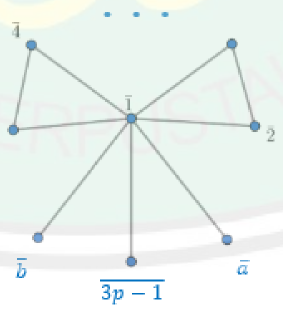
Proposisi 3.4

Banyaknya automorfisme dari graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ dengan $p \geq 5$ dan p bilangan prima adalah $\left(2^{(p-3)}\right) \cdot (p-3)!\,3!$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa terdapat $\left(2^{\frac{1}{2}(p-3)}\right) \cdot \frac{1}{2}(p-3)!\,3!$ automorfisme dari $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ dengan $p \geq 5$.

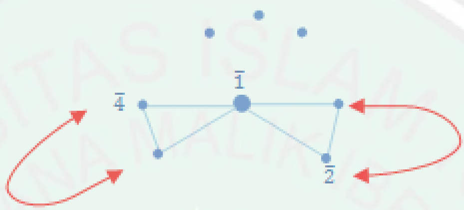
Graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$ $\left(IG(\mathbb{Z}_{3p})\right)$ dengan $p \geq 5$ dan p bilangan prima mempunyai $2p-2$ titik dimana titik $\overline{3p-1}$ berderajat 1, 3 titik berderajat 1 dan titik yang berderajat 2 sebanyak $2p-6$ titik. Graf identitas ini juga mempunyai C_3 sebanyak $p-3$. Sehingga gambar grafnya adalah



Himpunan sisi dari graf $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ adalah $E\left(IG(\mathbb{Z}_{3p})\right) = \{(\bar{1}\bar{2}), (\bar{1}\bar{4}), (\bar{1}\bar{a}), (\bar{1}\bar{b}), (\bar{1}\overline{3p-1}), \ldots, (\bar{2}\bar{x}), (\bar{4}\bar{y}), \ldots \mid a, b, x, y, \in I(\mathbb{Z}_{3p})\}$.

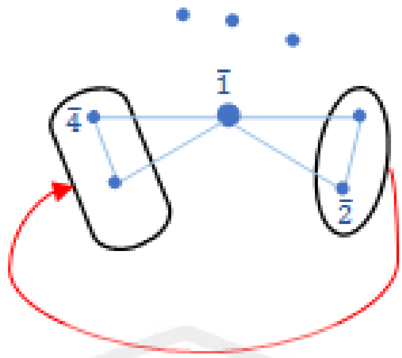
Misalkan α adalah fungsi pada himpunan titik dari $IG(\mathbb{Z}_{3p})$ ke dirinya sendiri. Dari definisi 2.22, maka α harus mengawetkan derajat titik dan berbentuk permutasi, sehingga $\alpha(\bar{1}) = \bar{1}$ akibatnya titik $\bar{1}$ hanya bisa dipetakan ke dirinya sendiri.

Untuk 3 titik yang berderajat 1 yakni $\overline{3p-1}, \bar{a}$ dan $\bar{b}$, Menurut Teorema 2.2 banyaknya automorfisme pada graf bintang-3 $(K_{1,3})$ adalah 3!. Sehingga banyaknya automorfisme pada $K_{1,3}$ adalah 3!.



Kasus I:

Suatu permutasi yang memetakan suatu titik yang berderajat dua ke titik yang terhubung langsung dengannya. Dengan syarat α hanya memetakan setiap titik di C_3 ke titik yang terhubung langsung dengan dirinya sendiri dan berderajat sama (seperti ilustrasi pada gambar di atas), seperti $(\bar{2}\ \bar{x}), (\bar{4}\ \bar{y}), \dots, (\bar{2}\ \bar{x})(\bar{4}\ \bar{y}), \dots$ dimana $\bar{x}, \bar{y} \in I(\mathbb{Z}_{3p})$. Fungsi α memetakan $\bar{2}$ ke $\bar{x}$, fungsi α memetakan $\bar{4}$ ke $\bar{y}$, dan seterusnya sebanyak $(p-3)$ permutasi. Kemudian fungsi α memetakan $\bar{2}$ ke $\bar{x}$ dan $\bar{4}$ ke $\bar{y}$, dan seterusnya sebanyak $\big((p-3)-1\big)$. Oleh karena itu, terdapat $(p-3) \times \big((p-3)-1\big) \times \dots \times 2 \times 1 = (p-3)!$ permutasi.



Kasus II:

Suatu permutasi yang memetakan pasangan titik. Dari gambar di atas, yang dimaksud pasangan titik adalah sisi yang kedua titiknya berderajat dua dan terhubung langsung pada C_3 yang sama. Suatu permutasi yang memetakan suatu pasangan titik di C_3 ke pasangan titik lain yang ada di C_3 yang lain dimana pemetaan identitas termasuk didalamnya. Dimana satu pasangan titik mempunyai dua permutasi sehingga banyaknya permutasi yakni $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{(p-3)\ kali}$.

Oleh karena itu, banyaknya automorfisme pada graf identitas dari $\mathbb{Z}_{3p}$ yakni $\left(2^{(p-3)}\right) \cdot (p-3)!\,3!$.

3.3 Kajian Automorfisme dalam Surat Al-Hujurat Ayat 15

Allah sudah menjanjikan kepada hambanya bahwa tidak ada yang luput dari keadilan-Nya. Kebaikan sekecilpun akan mendapatkan pahala untuk dirinya dan kejahatan sekecilpun akan mendapatkan dosa untuk dirinya sendiri. Kedua perbuatan tersebut nantinya akan kembali kepada dirinya sendiri. Seperti halnya dalam surat Al-Hujurat ayat 15:

مَنْ عَمِلَ صَالِحًا فَلِنَفْسِهِ ۖ وَمَنْ أَسَاءَ فَعَلَيْهَا ۖ ثُمَّ إِلَىٰ رَبِّكُمْ تُرْجَعُونَ

"Barangsiapa yang mengerjakan amal saleh, maka itu adalah untuk dirinya sendiri, dan barangsiapa mengerjakan kejahatan, maka itu akan menimpa

dirinya sendiri, kemudian kepada Tuhanmulah kamu dikembalikan"(QS.AL-Hujurat:15).

Ayat diatas menjelaskan bagaimana perbuatan kita akan kembali kepada diri kita sendiri. Apabila kita mengerjakan perbuatan baik, maka kebaikannya akan kembali kepada diri kita sendiri. Begitu juga sebaliknya, apabila kita mengerjakan perbuatan jahat, maka kejahatannya pun akan kembali kepada diri kita sendiri.

Automorfisme graf merupakan permutasi dari himpunan titik di Graf yang mengawetkan keterhubungan (ke-tidak-terhubungan). Langkah-langkah dalam menentukan automorfisme graf yakni menentukan unsur himpunan $I(\mathbb{Z}_{np})$. Setelah mendapatkan $I(\mathbb{Z}_{np})$, gambar graf identitas dari $\mathbb{Z}_{np}$ bisa digambarkan. Dilanjutkan dengan menentukan fungsi bijektif dari $V\left(IG(\mathbb{Z}_{np})\right)$ ke dirinya sendiri.

Menurut definisi automorfisme sebelumnya, maka fungsi bijektif yang dimaksud adalah permutasi. Permutasi yang jelas termasuk dalam automorfisme graf adalah permutasi identitas karena memetakan setiap titik ke dirinya sendiri. Sehingga jika dua titik terhubung langsung pada graf identitas $IG(\mathbb{Z}_{np})$, maka dua titik tersebut juga akan terhubung langsung pada graf identitas $IG(\mathbb{Z}_{np})$ setelah dipermutasikan. Oleh karena itu, permutasi identitas mengawetkan keterhubungan dan ke-tidak-terhubungan.

Gambaran konsep automorfisme pada kehidupan sehari-hari diibaratkan dengan perilaku manusia dimana setiap perilaku manusia akan kembali kepada dirinya sendiri. Jika manusia melakukan perbuatan baik maka pahala kebaikan nya akan kembali pada manusia itu sendiri. Perbuatan baik seperti menaati perintah Allah SWT. menjauhi larangannya, berbuat baik pada sesama manusia dan makhluk ciptaan Allah SWT yang lain. Begitupun sebaliknya, jika manusia melakukan perbuatan jahat maka dosa kejahatannya akan kembali pada dirinya sendiri. Sehingga, hubungan keduanya dapat digambarkan sebagai berikut

$$\alpha = \begin{pmatrix} kebaikan & kejahatan \\ kebaikan & kejahatan \end{pmatrix} = (kebaikan)(kejahatan)$$

Fungsi diatas merupakan permutasi identitas dimana kebaikan dipetakan ke kebaikan dan kejahatan dipetakan ke kejahatan dimana fungsi tersebut dari suatu himpunan ke dirinya sendiri. Himpunan disini diibaratkan dengan manusia, sehingga apapun yang dilakukan oleh manusia akan kembali ke manusia itu sendiri. Oleh karena itu, Allah sudah memerintahkan kita untuk berbuat baik kepada sesama ciptaan Allah karena perbuatan tersebut akan berdampak baik untuk kita sendiri.

Ayat lain yang menjelaskan tentang perbuatan baik akan dibalas kebaikan oleh Allah kepada diri sendiri yakni pada surat al-Qashash ayat 84:

مَن جَاء بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ خَيْرٌ مِّنْهَا وَمَن جَاء بِالسَّيِّئَةِ فَلَا يُجْزَى الَّذِينَ عَمِلُوا السَّيِّئَاتِ إِلَّا مَا كَانُوا يَعْمَلُونَ

"Barangsiapa datang dengan (membawa) kebaikan, maka dia akan mendapat (pahala) yang lebih baik daripada kebaikannya itu; dan barangsiapa datang dengan (membawa) kejahatan, maka orang-orang yang telah mengerjakan kejahatan itu hanya diberi balasan (seimbang) dengan apa yang dahulu mereka kerjakan." (Al-Qashas: 84).

Dari ayat diatas, Allah sudah menjanjika kita bahwa jika kita berbuat baik maka Allah akan memberi kita kebaikan yang lebih baik dari sebelumnya. Allah sudah menjanjika kita bahwa setiap kebikan tidak ada yang sia-sia, dengan itu kita mengetahui bahwa kebikan tidak akan berbuah menjadi kejahatan. Sehingga Allah memberikan motivasi untuk kita berbuat baik kepada semua makhluk ciptaan-Nya.

Ayat tersebut juga mengingatkan kita akan kebikan Allah yang sangat besar pada kita sebagai makhluk-Nya. Permutasi identitas akan berlaku dalam janji Allah, sehingga manusia tidak akan rugi dalam melakukan kebaikan walaupun hanya sedikit karena sekecil apapun kebaikan tersebut akan diberi balasan oleh Allah dengan kebaikan yang lebih baik lagi. Begitupun sebaliknya, sekecil apapun kejahatn yang kita lakukan maka Allah pun akan memberikan balasan yang setimpal oleh Allah. Dengan demikian, sudah seharusnya kita sebagai makhluk-Nya untuk selalu menebar kebaikan kepada sesama makhluk dan hindarkan diri dar perbuatan jahat.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa banyaknya automorfisme dari graf identitas pada gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima $(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah $2^{\frac{1}{2}(p-3)} \cdot \frac{1}{2}(p-3)!$ dimana $p \geq 5$ dan banyaknya automorfisme dari graf identitas pada gelanggang himpunan bilangan bulat modulo prima $(\mathbb{Z}_{3p})$ adalah $2^{p-3} \cdot (p-3)!\,3!$ dengan $p \geq 5$.

4.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkannya dengan meneliti dan mencari rumusan umum dari automorfisme dari graf-graf lainnya atau bisa meneruskan penelitian ini untuk $\mathbb{Z}_{np}$ dimana $n = 4,5,\dots$ dengan p bilangan prima.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang:UIN Malang Press.

Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 6*. Jakarta:Darus Sunnah.

Balakrishnan, V. K. 1991. *Introducatry Discreate Mathematics*. New Jersey:Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. USA:John Wiley and Sons, Inc.

Carol Leihitu, V., Patty, D., dan Patty, H. W. M. 2016. Struktur dalam Bentuk Graf Identitas. *In Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika*. Ambon:Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti.

Chartrand, Gery dan Linda Lesniak. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: A Division of Wadswoth, Inc.

Chartrand, G., Lesniak L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton:CRC Press.

Chartrand Gary dan Oellerman, Ortrud R. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory*. Canada:Mc Graw-Hill Inc.

Damayanti, Reni Tri. "Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan", ,*Jurnal CAUCHY – ISSN:2086-0382*, Volume 2 No. 1 November 2011.

Dummit, David S. dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. Hoboken:John Wiley and Sons, Inc.

Fitriyah, Any Tsalasatul. 2011. *Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford:Nelson Education,Ltd.

Gross, Jonathan L. dan Jay Yellen. 2006. *Graph Theory and its Applications Second Edition*. Singapore:Chapman & Hall/CRC.

Heydemann, M-C. 1997. Cayley Graphs and Interconnection Networks. *In Graph Symmetry* (Hal 167-224). Springer.

Hodge, Jonathan K, Steven Schlicker dan Ted Sundstrom. 2014. *Abstract Algebra an Inquiry-Based Approach*. Michigan:CRC Press.

Irawan, Wahyu Hengki dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang:UIN Maliki PRESS.

Mukarromah, Imroatul. 2015. *Automorfisme Graf Piramida dan Graf Berlian*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Kandasamy, W.B.Vasantha dan Florentin Smarandache. 2009. *Groups As Graphs*. Romania:Editura CuArt.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang. IKIP Malang.

Puspitasari, Lila Aryani. 2019. *Total Eccentricity and Eccentric Connectivity Index of Identity Graph of Commutative Ring with Unity*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Satyanarayana, Bhavanari dan Kuncham Syam Prasad. 2013. *Near Rings, Fuzzy Ideals, and Graph Theory*. Boca Raton:CRC Press.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah:Pesan, Kesan dan Keserasial Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Sugiarti, Kurniawan, Mamika Ujianita Romdhini dan Ni Wayan Switrayni, "Analisis Automorfisma Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan", *Eigen Mathematics Journal*, Volume 1 No 1 Juni 2018.

RIWAYAT HIDUP

Khanifatun Maisyaroh, lahir di Gresik pada tangga 18 November 1998, biasa dipanggil ifa. Anak ke-dua dari dua bersaudara dari pasangan bapak Konawi dan ibu Musriah. Kakak penulis bernama Khoirul Huda.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Babak Bawo Dukun Gresik dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu melanjutkan pendidikan ke MTs. Ihyaul Ulum Dukun Gresik, lulus pada tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMA Assa'adah Bungah Gresik dan lulus pada tahun 2016. Penulis melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Jurusan Matematika pada tahun yang sama.

Selama menjadi mahasiswa, penulis mengikuti Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Lembaga Kajian, Penelitian dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M) menjadi anggota dari biro keorganisasian bidang kepenulisan.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Khanifatun Maisyaroh
NIM	:	16610057
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Automorfisme Graf Identitas pada Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo Prima
Pembimbing I	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	20 Desember 2019	Konsultasi Bab 1 dan Bab III	1.	
2	31 Januari 2020	Melanjutkan Pembuktian		2.
3	05 Februari 2019	Konsultasi Kajian Agama	3.	
4	07 Februari 2020	Revisi pembuktian Lemma I dan II		4.
5	16 Mei 2020	Revisi Bab III	5.	
6	05 Maret 2020	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III		6.
7	30 Maret 2020	Revisi Bab I, Bab II & Bab III	7.	
8	21 April 2020	Revisi Kajian Agama		8
9	27 April 2020	Pembuktian Proposisi 1, 2, 3 & 4 dan Revisi Bab I, Bab II & Bab III	9.	
10	1 Mei 2020	ACC untuk disidangkan		10.
11	14 Juni 2020	ACC keseluruhan	11.	

Malang,
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001