JUMLAH JARAK EKSENTRIK
DAN INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK TERHUBUNG
GRAF NON-SENTRALISATOR DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
DWI NOVIANA
NIM. 15610048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

JUMLAH JARAK EKSENTRIK
DAN INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK TERHUBUNG
GRAF NON-SENTRALISATOR DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dwi Noviana
NIM. 15610048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

JUMLAH JARAK EKSENTRIK
DAN INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK TERHUBUNG
GRAF NON-SENTRALISATOR DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Dwi Noviana
NIM. 15610048

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Desember 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	Juhari, M.Si
NIP. 19710420 200003 1 003	NIDT. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

JUMLAH JARAK EKSENTRIK
DAN INDEKS JUMLAH JARAK EKSENTRIK TERHUBUNG
GRAF NON-SENTRALISATOR DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Dwi Noviana
NIM. 15610048

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Desember 2019

Penguji Utama	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dewi Ismiarti, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Juhari, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	:	Dwi Noviana
NIM	:	15610048
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Jumlah Jarak Eksentrik dan Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung Graf Non Sentralisator dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
6000 ENAM RIBU RUPIAH

Dwi Noviana
NIM. 15610048

MOTO

“Kesempatan bukanlah hal yang kebetulan.

Kamu harus meciptakannya.”

(Chris Grosser)

PERSEMBAHAN

Do’a dan rasa syukur atas nikmat,

rahmat, berkah, dan karunia Allah Swt,

maka penulis persembahkan karya tulis ini teruntuk:

Kedua orang tua penulis, bapak Bagas Setiyo dan Ibu Samini.

Saudari penulis, kakak Agung Sasongko,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahi robbil'alamiin. Segala puji syukur hanya untuk Allah Swt. Hanya kata itulah yang mampu penulis ucapkan karena berkat rahmat, taufiq hidayah serta nikmat-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Jumlah Jarak Eksentrik dan Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung Graf Non-Sentralisator dari Grup Dihedral".

Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi besar Muhammad Saw, yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap ke zaman yang terang yaitu agama Islam.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran serta do'a dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.

5. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.
6. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen penguji utama yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.
7. Dewi Ismiarti, M.Si, selaku ketua penguji yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$d(u)$	: Jumlah Jarak Titik
$D(u)$	: Jumlah Jarak keseluruhan
$e(u)$	: Eksentrisitas Titik
$\deg(v)$	: Banyak Sisi yang terkait dalam satu titik
Γ_{cent}	: Graf Sentralisator
$\Upsilon(G)$	: Graf non-Sentralisator
$\xi^{d}(G)$	: Jumlah Jarak Eksentrik
$\xi^{sv}(G)$	: Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung

ABSTRAK

Noviana, Dwi. 2019. **Jumlah Jarak Eksentrik dan Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung Graf Non-Sentralisator dari Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: jumlah jarak eksentrik, indeks jumlah jarak eksentrik terhubung, graf non-sentralisator, grup dihedral.

Penelitian ini membahas pola umum jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator pada grup dihedral D_{2n}. Jumlah jarak eksentrik pada graf Gdidefinisikan sebagai penjumlahan dari perkalian antara jarak dengan eksentrisitas pada masing-masing titik pada G. Indeks jumlah jarak eksentrik terhubung merupakan penjumlahan dari perkalian antara jarak dan eksentrisitas yang dibagi dengan derajat titik pada masing-masing titik pada $\Upsilon_{D_{2n}}$. Keduanya diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan anggota grup dihedral yang sentralisator elemennya tidak sama sehingga membentuk graf non-sentralisator. Selanjutnya mencari jumlah jarak, eksentrisitas titik, dan derajat titik. Penelitian ini menghasilkan pola umum jumlah jarak eksentrik dan pola umum indeks jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator pada graf non-sentralisator ($\Upsilon_{D_{2n}}$).

ABSTRACT

Noviana, Dwi. 2019. **Eccentric Distance Sum and Adjacent Eccentric Distance Sum Index Of Non-Centralizer Graph of the Dihedral Group**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

Keywords: Eccentric Distance Sum, Adjacent Eccentric Distance Sum Index, Non-Centralized Graph, Dihedral Group.

This study discusses the general pattern of eccentric distance sum and adjacent eccentric distance sum index of the non-centralized graph in the dihedral group D_{2n}. The eccentric distance sumof a graph $G$is defined as the sum of the multiplications between the distance and the eccentricity at each vertex of G. The adjacent eccentric distance sum index is the sum of the multiplications between distance and eccentricity divided by the degree of vertices at each vertex on$\Upsilon(D_{2n})$. The next step is determin the distance sum, eccentricity of vertices, and degree of vertex. This study produces a general pattern of the number of eccentric distance sum and the general pattern of adjacent eccentric distance sum index non-centralizer graphs $\Upsilon(D_{2n})$.

ملخص

نوفيانا ، دوي. ***Eccentric Distance Sum*** و **Adjacent Eccentric Distance Sum Index من زمرة زوجية**.شعبة الرياضيات،كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعةالإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.المشرف: (١) الدكتور الحاج وحيو ح. إيراوان الماجستير ، ماجستير(٢)جوهاري الماجستير.

الكلمات المفتاحية: مؤشر عدد المسافات غريب الأطوار ، وعدد المسافات غريب الأطوار متصلة،رسم بياني غير مركزي ، زمرة زوجية

بحث هذا البحث عن عموم النمط من *eccentric distance sum* من مخطط تبادلية و غير تبادلية من زمرة زوجية. يتم الحصو. ثنائي السطوح. يتم تعريف لمخطط G بأنه مجموع الضرب بين المسافة والغرابة في كل رأس عند G. *Adjacent eccentric distance sum index* هو مجموع الضرب بين المسافة والغرابة غريب الأطوار مقسوما على درجة النقاط في كل نقطة على $\Upsilon(D_{2n})$ بعد ذلك ، ابحث عن مقدار المسافة ، و رأس الغرابة في رأوس ، ودرجة رأس. تنتج هذه الدراسة مخططات عامة *eccentric distance sum* وأنماط عامة *adjacent eccentric distance sum index* على المخططات غير المركزية على المخطط غير المركزية $\Upsilon(D_{2n})$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Eeccentric distance sum index (EDSI) atau dapat disebut dengan jumlah jarak eksentrisitas yang diperkenalkan oleh (Gupta, Singh, & Madan, 2002) sebagai sebuah graf invarian baru untuk memprediksi sifat biologis dan fisik yang didefinisikan sebagai penjumlahan dari perkalian antara eksentrisitas dan jarak pada masing-masing titik di G. Sardana & Madan (2003) memperkenalkan sebuah topologi deskripsi baru sebagai *adjacent eccentric distance sum index (ADSI)* yang merupakan penjumlahan dari perkalian antara eksentrisitas dan jarak yang dibagi dengan *degree* pada masing-masing titik di G. (Gao, Liang, & Gao, 2014) juga melakukan penelitian tentang *adjacent eccentric distance sum index (AEDSI)* pada graf molekular. Sampai sekarang kajian tentang *EDSI* dan *AEDSI* telah banyak dikaji dengan menggunakan berbagai macam jenis graf.

Konsep terbaru yang dikembangkan oleh para ilmuwan matematika dari teori graf yang dibangun oleh grup, sebagai contoh graf sentralisator dan non sentralisator pada grup dihedral. Graf sentralisator diperkenalkan oleh Omer dan Sarmin (2014) yang diberlakukan pada grup abelian berhingga. Omer dan Sarmin, mendefinisikan graf sentralisator sebagai berikut: misalkan G adalah grup non abelian. Graf sentralisator (Γ_{cent}), adalah graf yang titik-titiknya adalah sentraliser sejati, $|V(\Gamma_{cent})| = C(G) - A$, dimana $C(G)$ adalah bilangan dari sentraliser sejati di G dan A adalah bilangan sentraliser tak sejati di G. Dua titik dari graf sentralisator (Γ_{cent}) terhubung dengan sisi jika kardinalitas titik tersebut adalah identik. Graf non sentralisator dikembangkan oleh Behnaz Tolue (2015) yang diberlakukan pada grup berhingga. Tolue, menyatakan bahwa graf non sentralisator adalah graf yang dibangun dari sebuah grup berhingga. Berdasarkan definisi yang ditulis Tolue, misalkan G adalah grup. Graf yang terbentuk dimana titik-titiknya adalah elemen dari G dan lintasannya diperoleh dengan menghubungkan dua titik x dan y ketika $C_G(x) \neq C_G(y)$. Maka graf tersebut disebut dengan graf non sentralisator.

Misalkan G sebuah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$. Untuk sebuah titik $u \in V(G)$, $\deg_G(u)$ dinotasikan sebagai *degree* dari u. Untuk titik $u, v \in V(G)$, jarak $d_G(u,v)$ didefinisikan sebagai panjang lintasan terpanjang antara u dan v di G, dan $D_G(v)$ adalah jumlah dari semua jarak v. Eksentrisitas$e(v)$ dari titik v adalah jarak maksimum atau jarak terjauh dari v menuju titik-titik yang lain di G (Yu & Feng, 2011).

Dalam kehidupan sehari-hari manusia menjadikan al-Quran sebagai pedoman untuk berbuat dan bertingkahlaku, sebagaimana disebutkan dalam ayat al-Quran dalam surat ar-Rum ayat 38, yang artinya

"*Maka berikanlah haknya kepada kerabat dekat, juga kepada orang miskin dan orang-orang yang dalam perjalanan. Itulah yang lebih baik bagi orang-orang yang mencari keridhaan Allah. Dan mereka itulah orang-orang yang beruntung.*"

Berdasarkan hikmah dari ayat sebelumnya kita sebagai umat manusia dianjurkan untuk memberikan hak kepada kerabat dekat, orang miskin dan orang-orang yang sedang dalam perjalanan. Pemberian hak tersebut dapat ditafsirkan sama dengan silaturahmi yang dilakukan bersamaan dengan memberikan hak kepada kerabat. Dengan silaturahmi manusia dapat menjalin hubungan sosial yang baik antar sesama. Seperti anjuran dalam al-Quran, dalam ilmu matematika keterhubungan dipelajari dalam kajian teori yang disebut dengan teori graf.

Beberapa penelitian terdahulu tentang jumlah jarak eksentrisitas pada graf adalah Kurfia (2017) yang mengkaji tentang jumlah jarak eksentrik pada komplemen graf invers grup dihedral. Dalam penelitian Kurfia memperoleh pola umum jumlah jarak eksentrik pada graf invers grup dihedral. Safitri (2018) meneliti tentang jumlah jarak eksentrik pada graf dari latis himpunan kuasa dan diperoleh pola umum jumlah jarak eksentrik graf dari latis himpunan kuasa. Khasana (2018) yang meneliti tentang jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ dengan p, q bilangan prima dan diperoleh pola umum jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ dengan p, q bilangan prima.

Penelitian lainnya oleh Hidayati (2019) yang meneliti tentang jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf *commuting* dan *non commuting* dari grup dihedral. Dari penelitian Nurul ditunjukkan pola umum jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung graf *commuting* dan *non-commuting* grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil dan genap. Pola umum tersebut dituliskan dalam bentuk tabel sehingga pembaca mudah memahami.

Penelitian ini akan mengkaji tentang jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung. Namun, jenis graf yang akan diteliti berbeda. Peneliti mengkaji tentang graf non-sentralisator yang dibentuk dari grup dihedral D_{2n}. Hasil akhir yang ingin ditunjukkan dalam penelitian ini adalah pola umum jumlah jarak eksentrik dan pola umum indeks jumlah jarak eksentrik graf non sentralisator dari grup dihedral D_{2n}.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu mencari pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non sentralisator dari grup dihedral.

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dapat memperkaya informasi dalam perkembangan teori graf tentang jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung padagraf non-sentralisator dari grup dihedral yang nantinya dapat dijadikan sebagai bahan rujukan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, graf yang digunakan adalah graf non-sentralisator yang dibangun dari grup. Grup yang diteliti adalah grup dihedral (D_{2n}) dengan $n \geq 3$ pada n ganjil dan n genap.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari pembahasan yang khusus menuju pembahasan yang umum. Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kepustakaan. Penelitian dilakukan dengan mencari dan mengkaji buku-buku tentang graf dan aljabar, catatan-catatan, serta penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan obyek permasalahan yang diteliti. Langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuat tabel *Cayley* dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16}.
2. Menjabarkan anggota graf non-sentralisator yang dinotasikan dengan $C_G(x)$ dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16}.
3. Menggambar graf non-sentralisator dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, dan D_{16}.
4. Mencari derajat titik, jumlah jarak, dan eksentrisitas titik pada graf non-sentralisator dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16}.
5. Mencari nilai jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, dan D_{16}.

6. Merumuskan pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik dari graf non-sentralisator dari grup dihedral D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, dan D_{16}.
7. Menentukan konjektur tentang pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} dan menuliskannya dalam bentuk teorema.
8. Menghasilkan suatu teorema dari pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16} dan disertai bukti.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sitematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri operasi biner, definisi grup, grup berhingga, grup dihedral, graf, definisi graf, derajat titik, jumlah jarak dalam graf, eksentrisitas, graf sentralisator, graf non-sentralisator, jumlah jarak eksentrik, indeks jumlah jarak eksentrik terhubung, dan nilai-nilai ajaran

Islam dalam graf.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi pembahasan bagaimana pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator pada grup dihedral, pembuktian teorema yang dirumuskan dan nilai-nilai keislaman pada teori graf.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Operasi biner

Suatu operasi biner pada himpunan tak kosong A merupakan pemetaan f dari $A \times A$ ke A (Gilbert dan Gilbert, 2015:30).

Contoh 2.1

Diberikan $\mathbb{N}$ yaitu himpunan semua bilangan asli dan $\star$ adalah operasi pada $\mathbb{N}$ dengan syarat $\forall a, b \in \mathbb{N}, a \star b = a + b$. Karena $a \in \mathbb{N}$ dan $b \in \mathbb{N}$. Maka penjumlahan dari kedua bilangan asli akan menghasilkan bilangan asli, dinotasikan $a + b \in \mathbb{N}$. Jadi, operasi $\star$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{N}$.

2.2 Definisi Grup

Misalkan G adalah himpunan dengan operasi biner yang memasangkan setiap pasangan berurutan (a, b) di G. G dikatakan grup dengan operasi biner tersebut jika memenuhi aksioma berikut (Gallian, 2013:43):

1. Asosiatif, yaitu jika $(ab)c = a(bc), \forall\, a, b, c \in G$.
2. Identitas. Terdapat elemen e (yang disebut identitas) di G sedemikian hingga $ae = ea = a, \forall a \in G$.
3. Invers. Untuk setiap elemen a di G ada elemen b di G (disebut invers dari a) sedemikian hingga $ab = ba = e$.

Contoh 2.2

Misalkan $(G, \star)$ adalah himpunan bilangan bulat, $a \star b = a + b + ab, \forall a, b \in G$. Buktikan bahwa $(G, \star)$ adalah grup

1. Sifat Asosiatif

$\forall a, b, c \in G$ berlaku $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$

Ambil sebarang $a, b, c \in G$

Perhatikan bahwa:

$a \star (b \star c) = a \star (b + c + bc)$

$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc)$

$= a + b + c + bc + ab + ac + abc$

$= (a + b + ab) + c + bc + ac + abc$

$= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c$

$= (a + b + ab) \star c$

$= (a \star b) \star c$

Jadi, $(G,\star)$ bersifat asosiatif.

2. Unsur Identitas

$$\forall a \in G \exists e \in G \backslash \ni e \star a = a \star e = a$$

Perhatikan bahwa:

$a \star b = b \star a$

$= ba + b + a$

$= b + a + ba$

$= ba(1 + b)$

$= a(1 + b)$

$= b - ba(1 + b)$

$= a(1 + b)$

$= 0a = 0$

Sehingga $e = 0 \in G$ adalah identitas.

3. Unsur Invers

$$\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G \ni a^{-1} \star a = a \star a^{-1} = e$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} a \star b = b \star a \\ &= 0a + b + ab \\ &= b + a + ba \\ &= 0a(1 + b) \\ &= a(1 + b) \\ &= -ba \\ &= -\frac{b}{a + b} \notin G \end{aligned}$$

Karena a tidak terdapat di G maka $(G,\star)$ tidak memiliki unsur invers. Sehingga berdasarkan definisi 2.3 $(G,\star)$ bukan merupakan grup.□

2.3 Grup Berhingga

Jika suatu grup G mempunyai anggota yang berhingga, maka G disebut grup berhingga. Banyaknya anggota di G disebut order dari G dan dinotasikan $o(G)$ atau $|G|$. Jika G tidak memiliki anggota yang berhingga, maka G disebut grup tak berhingga (Gilbert dan Gilbert, 2015: 141)

Contoh 2.3

Grup $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ dengan $\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ adalah grup berhingga dan memiliki order $o(\mathbb{Z}_8) = 8$.

2.4 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah grup himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan yang dinotasikan dengan D_{2n} untuk setiap n bilangan positif dan $n \geq 3$. Karena grup dihedral akan digunakan secara ekstensif, maka akan diberikan beberapa notasi dan perhitungan yang akan mempermudah pengamatan grup dihedral D_{2n} sebagai grup abstrak, diantaranya (Dummit & Foote, 1991: 23):

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ adalah seluruh anggota yang berbeda dan $r^n = 1$, jadi $|r| = n$.
2. $|s| = 2$.
3. $s \neq r^i, \forall i$.
4. $sr^i \neq sr^j, \forall 0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

   $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

   Yaitu setiap anggota dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.
5. $sr = sr^i = r^{-i}s, \forall\, 0 \leq i \leq n$.

Sebagai contoh D_8 adalah grup dihedral yang memuat semua simetri pada bangun segi empat sehingga anggotanya adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

2.5 Sentralisator Grup

Misalkan $(G, \#)$ adalah grup dengan operasi biner # dan misalkan A adalah sub himpunan tak kosong dari grup G. Sentralisator dari A di G ditulis $C_G(A)$ didefinisikan sebagai

$$C_G(A) = \{g \in G | g\#a\#g^{-1} = a, \forall a \in A\}$$

Karena $g\#a\#g^{-1} = a$ jika dan hanya jika $g\#a = a\#g$, maka $C_G(A)$ dapat dinyatakan sebagai himpunan elemen-elemen di G yang komutatif dengan semua elemen di A. $C_G(A) = \{g \in G | g\#a = a\#g, \forall a \in A\}$ (Dummit dan Foote, 2003:49).

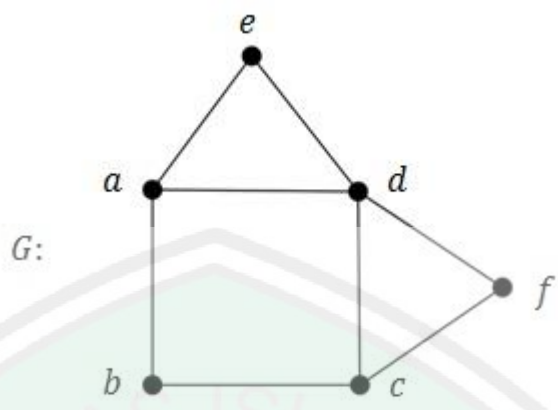
2.6 Graf

2.6.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sebagai sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di G disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Sisi $e = (u, v)$ (dapat ditulis $e = uv$) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Contoh 2.5



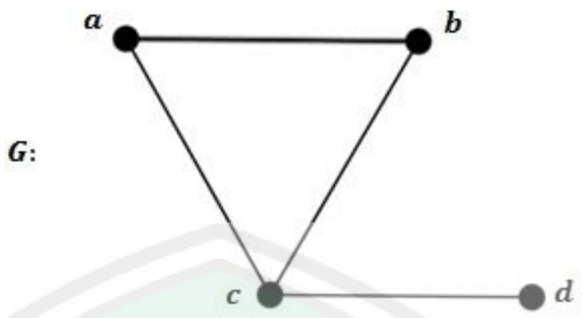
Gambar 2.1 Graf G

2.6.2 Derajat Titik

Derajat titik v di graf G adalah banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan v. Dengan demikian, derajat titik v adalah banyaknya titik di lingkungan $N(v)$. derajat titik v dinotasikan sebagai $\deg_G v$ atau, lebih sederhana, dengan deg v jika graf G yang didiskusikan jelas. Sehingga, $\deg v = |N(v)|$ (Chartrand et al., 2016).

Titik dengan derajat 1 disebut titik akhir (*end-vertex*). Sedangkan sisi yang terkait langsung dengan titik akhir tersebut disebut *pendant edge*. Titik di G dapat disebut titik ganjil atau titik genap, bergantung pada derajat titik itu di G genap atau ganjil (Chartrand, dkk, 2016). Sebagai contoh, akan dihitung derajat titik dari graf berikut

Contoh 2.6



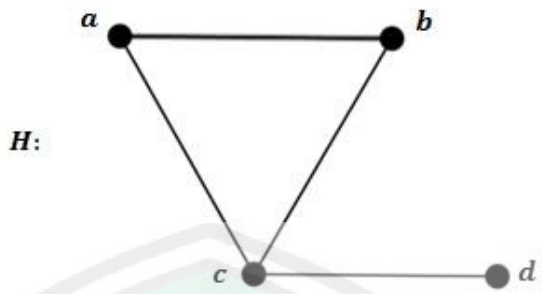
Gambar 2.2 Graf G dengan 4 Titik

Berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh derajat titik dari graf G yaitu $\deg(a) = 2; \deg(b) = 2; \deg(c) = 3; \deg(d) = 1$.

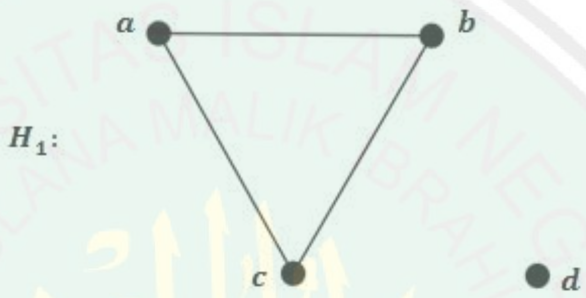
2.6.3 Graf Terhubung

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:55). Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap u dan v di G terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaliknya, jika dua titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G, maka G dikatakan tak terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:56).

Contoh 2.7



Gambar 2.3 Graf Terhubung



Gambar 2.4 Graf tak terhubung

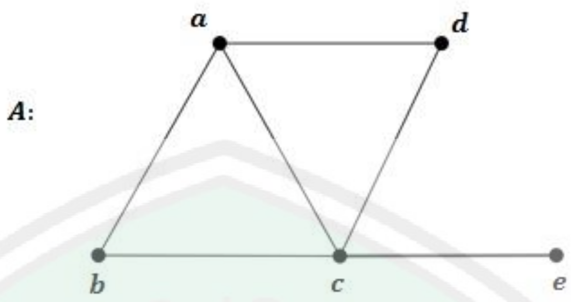
2.6.4 Jumlah Jarak Dalam Graf

Jika u dan v adalah sebarang titik yang terhubung di graf G, maka terdapat lintasan $u - v$ di G. Sehingga terdapat beberapa kemungkinan lintasan $u - v$ di G dengan panjang yang berbeda-beda. Definisi paling umum dari jarak antara dua titik pada graf terhubung adalah sebagai berikut. Jarak $d_G(u, v)$ dari titik u menuju titik v pada graf terhubung G adalah panjang lintasan terkecil dari $u - v$ di G. Kemudian secara sederhana dituliskan sebagai $d(u, v)$ (Chartrand et al., 2016). Jumlah jarak eksentrik dari semua titik $v \in G$ dinotasikan dengan $D(v)$ (Yu dan Feng, 2011):

$$D(v) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)$$

Contoh 2.8

Diketahui graf A sebagai berikut



Gambar 2.5 Graf A

Berdasarkan graf pada Gambar 2.5 Jumlah jarak titik dalam graf A adalah sebagai berikut

$$D(a) = d(a,b) + d(a,c) + d(a,d) + d(a,e)$$
$$= 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$
$$D(b) = d(b,a) + d(b,c) + d(b,d) + d(b,e)$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$
$$D(c) = d(c,a) + d(c,b) + d(c,d) + d(c,e)$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$
$$D(d) = d(d,a) + d(d,b) + d(d,c) + d(d,e)$$
$$= 1 + 2 + 1 + 2 = 6$$
$$D(e) = d(e,a) + d(e,b) + d(e,c) + d(e,d)$$
$$= 2 + 2 + 1 + 2 = 7$$

Eksentrisitas titik v pada suatu graf terhubung G dinotasikan $e(v)$ adalah jarak terbesar antara titik v dengan sebarang titik pada graf G. Eksentrisitas titik v

didefinisikan sebagai $e(v) = \max\{d(v,u) | u \in V(G)\}$ (Padmapriya dan Mathad, 2017). Berdasarkan Gambar 2.5, diperoleh eksentrisitas titik sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
e(a) &= \max\{d(a,b), d(a,c), d(a,d), d(a,e)\} \\
&= \max\{1,1,1,2\} = 2 \\
e(b) &= \max\{d(b,a), d(b,c), d(b,d), d(b,e)\} \\
&= \max\{1,1,2,2\} = 2 \\
e(c) &= \max\{d(c,a), d(c,b), d(c,d), d(c,e)\} \\
&= \max\{1,1,1,1\} = 1 \\
e(d) &= \max\{d(d,a), d(d,b), d(d,c), d(d,e)\} \\
&= \max\{1,2,1,2\} = 2 \\
e(e) &= \max\{d(e,a), d(e,b), d(e,c), d(e,d)\} \\
&= \max\{2,2,1,2\} = 2
\end{aligned}
$$

2.7 Graf Sentralisator

Misalkan G grup non-abelian. Graf sentralisator (Γ_{cent}), adalah graf yang titik-titiknya adalah sentraliser sejati, $|V(\Gamma_{cent})| = C(G) - A$, dimana $C(G)$ adalah bilangan dari sentraliser sejati di G dan A adalah bilangan dari sentraliser tak sejati di G. Dua titik dari dari Γ_{cent} terhubung dengan sisi jika kardinalitas titik tersebut adalah identik (Sarmin & Omar, 2014:231-232).

Contoh 2.9

Misalkan $(D_6, \circ)$ adalah grup dihedral D_6 dengan $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ yang dioperasikan terhadap operasi komposisi, maka diperoleh tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh bahwa himpunan sentralisator di grup D_6 sebagai berikut:

$C_{D6}(1) = D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

$C_{D6}(r) = \{1, r, r^2\}$

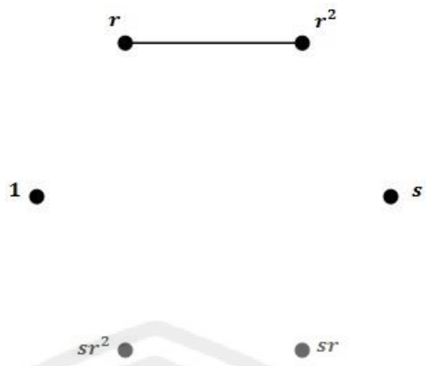
$C_{D6}(r^2) = \{1, r, r^2\}$

$C_{D6}(s) = \{1, s\}$

$C_{D6}(sr) = \{1, sr\}$

$C_{D6}(sr^2) = \{1, sr^2\}$

Berdasarkan himpunan sentralisator yang diketahui diperoleh anggota grup dihedral yang memiliki himpunan sentralisator sama yaitu r dan r^2, sehingga diperoleh graf sentralisator sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf sentralisator D_6

2.8 Graf non-Sentralisator

Misalkan G adalah grup berhingga. Graf yang titik-titiknya adalah elemen dari G dan sisi-sisinya diperoleh dengan menghubungkan dua titik x dan y di G yang memenuhi $C_G(x) \neq C_G(y)$. Maka graf tersebut disebut dengan graf non-sentralisator yang dinotasikan sebagai $\Upsilon(G)$ (Tolue, Behnaz, 2015:2).

Contoh 2.10

Misalkan $(D_6,\circ)$ adalah grup dihedral D_6 dengan $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ yang dioperasikan terhadap operasi komposisi, maka diperoleh tabel Cayley sebagai berikut

Tabel 2.2 Tabel Cayley Grup Dihedral-6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh bahwa himpunan sentralisator di grup D_6 sebagai berikut:

$C_{D6}(1) = D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

$C_{D6}(r) = \{1, r, r^2\}$

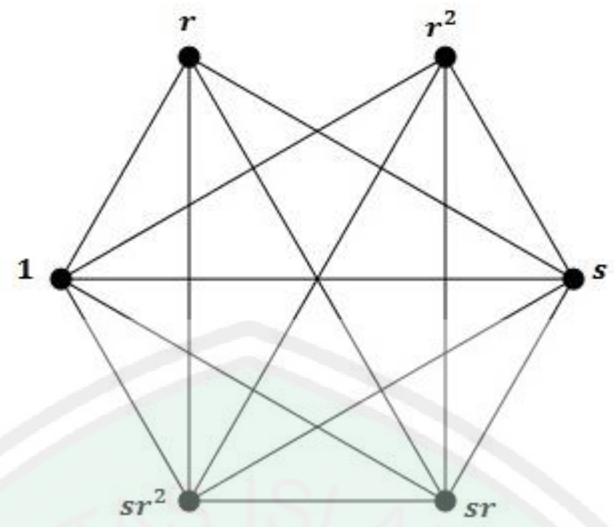
$C_{D6}(r^2) = \{1, r, r^2\}$

$C_{D6}(s) = \{1, s\}$

$C_{D6}(sr) = \{1, sr\}$

$C_{D6}(sr^2) = \{1, ssr^2\}$

Berdasarkan himpunan sentralisator yang diketahui diperoleh anggota grup dihedral yang memiliki himpunan sentralisator sama yaitu r dan r^2, sehingga titik r dan r^2 tidak terhubung langsung, diperoleh graf non-sentralisator sebagai berikut



Gambar 2.7 Graf non-sentralisator dari D_6

2.9 Jumlah Jarak Eksentrik

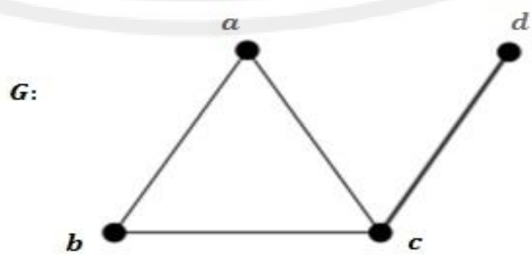
Jumlah jarak eksentrik didefinisikan sebagai jumlah perkalian antara total jarak dan eksentrisitas titik yang didefinisikan sebagai berikut

$$\xi^d(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v) D_G(v)$$

(Bielak & Broniszewska, 2017).

Contoh 2.11

Diketahui graf sebagai berikut



Gambar 2.8Graf G

Berdasarkan Gambar 2.8, diperoleh jumlah jarak masing-masing titik pada graf G yang merupakan jumlah jarak dari titik v dengan semua titik di G. Jumlah jarak masing-masing titik pada G diperoleh sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
D(a) &= d(a,b) + d(a,c) + d(a,d) \\
&= 1 + 1 + 2 = 4 \\
D(b) &= d(b,a) + d(b,c) + d(b,d) \\
&= 1 + 1 + 2 = 4 \\
D(c) &= d(c,a) + d(c,b) + d(c,d) \\
&= 1 + 1 + 1 = 3 \\
D(d) &= d(d,a) + d(d,b) + d(d,c) \\
&= 2 + 2 + 1 = 5
\end{aligned}
$$

Dapat diperoleh juga eksentrisitas titik pada graf G yang merupakan jarak terjauh dari titik v ke sebarang titik di G. Eksentrisitas titik pada G diperoleh sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
e(a) &= \max\{d(a,b), d(a,c), d(a,d)\} \\
&= \max\{1,1,2\} = 2 \\
e(b) &= \max\{d(b,a), d(b,c), d(b,d)\} \\
&= \max\{1,1,2\} = 2 \\
e(c) &= \max\{d(c,a), d(c,b), d(c,d)\} \\
&= \max\{1,1,1\} = 1 \\
e(d) &= \max\{d(d,a), d(d,b), d(d,c)\} \\
&= \max\{2,2,1\} = 2
\end{aligned}
$$

Berdasarkan jumlah jarak dan eksentrisitas yang diperoleh maka dapat diketahui jumlah jarak eksentrik pada graf G sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\xi^d(G) &= \sum_{v \in V(G)} e(v) D_G(v) \\
&= \big(e(a)D(a)\big) + \big(e(b)D(b)\big) + \big(e(c)D(c)\big) + \big(e(d)D(d)\big) \\
&= (2 \times 4) + (2 \times 4) + (1 \times 3) + (2 \times 5) \\
&= 8 + 8 + 3 + 10 \\
&= 29
\end{aligned}$$

Jadi, jumlah jarak eksentrik dari grah G pada Gambar 2.3 adalah 29

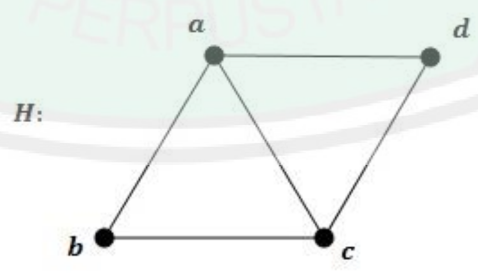
2.10 Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung

Diberikan graf $G, e(v)$ dan $\deg(v)$ yang dinotasikan sebagai eksentrisitas dan derajat titik dari titik v di G. Indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf G didefinisikan sebagai (Qu & Cao, 2015).

$$\xi^{sv}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

Contoh 2.12

Diketahui graf sebagai berikut



Gambar 2.9 Graf H

Berdasarkan Gambar 2.9, diperoleh jumlah jarak masing-masing titik pada graf H yang merupakan jumlah jarak dari titik v dengan semua titik di H. Jumlah jarak masing-masing titik pada H diperoleh sebagai berikut

$$D(a) = d(a,b) + d(a,c) + d(a,d)$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$
$$D(b) = d(b,a) + d(b,c) + d(b,d)$$
$$= 1 + 1 + 2 = 4$$
$$D(c) = d(c,a) + d(c,b) + d(c,d)$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$
$$D(d) = d(d,a) + d(d,b) + d(d,c)$$
$$= 1 + 2 + 1 = 4$$

Diperoleh pula eksentrisitas titik pada graf H yang merupakan jarak terjauh dari titik v ke sebarang titik di H. Eksentrisitas titik pada H diperoleh sebagai berikut

$$e(a) = \max\{d(a,b), d(a,c), d(a,d)\}$$
$$= \max\{1,1,1\} = 1$$
$$e(b) = \max\{d(b,a), d(b,c), d(b,d)\}$$
$$= \max\{1,1,2\} = 2$$
$$e(c) = \max\{d(c,a), d(c,b), d(c,d)\}$$
$$= \max\{1,1,1\} = 1$$
$$e(d) = \max\{d(d,a), d(d,b), d(d,c)\}$$
$$= \max\{1,2,1\} = 2$$

Dapat diketahui juga derajat titik pada graf H yang merupakan banyaknya titik di lingkungan v ada H yaitu $\deg(a) = 3, \deg(b) = 2, \deg(c) = 3, \deg(d) = 2$.

Berdasarkan jumlah jarak, eksentrisitas, dan derajat titik yang diperoleh maka indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada H adalah sebagai berikut

$$\xi^{sv}(H) = \sum_{v \in V(G)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(a)D(a)}{\deg(a)}\right) + \left(\frac{e(b)D(b)}{\deg(b)}\right) + \left(\frac{e(c)D(c)}{\deg(c)}\right) + \left(\frac{e(d)D(d)}{\deg(d)}\right)$$

$$= \left(\frac{1 \times 3}{3}\right) + \left(\frac{2 \times 4}{2}\right) + \left(\frac{1 \times 3}{3}\right) + \left(\frac{2 \times 4}{2}\right)$$

$$= 1 + 4 + 1 + 4$$

$$= 10$$

Jadi, indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf H pada Gambar 2.4 adalah 10.

2.11 Nilai-nilai Ajaran Islam dalam Graf

Kodrat manusia di muka bumi ialah sebagai makhluk individu dan makhluk sosial. Sebagai makhluk sosial, manusia dianjurkan untuk menjalin hubungan yang baik dengan sesamanya. Begitu pula dengan perintah agama Islam yang mengajarkan kepada manusia untuk senantiasa berbuat baik terutama dalam menjalin hubungan, atau yang sering disebut dengan silaturrahim. Terdapat beberapa cara atau tindakan yang dapat dilakukan untuk mewujudkan silaturrahim. Salah satunya ialah dengan memberikan bantuan kepada saudara ataupun kerabat dekat seperti firman Allah dalam al-Quran surat an-Nahl/16:90, yang artinya sebagai berikut:

"*Sesungguhnya Allah menyuruh (kamu) berlaku adil dan berbuat kebajikan, memberi kepada kaum kerabat, dan Allah melarang dari perbuatan kejih, kemungkaran, dan permusuhan.Dia memberi pengajaran kepada kalian agar kalian dapat mengambil pelajaran".*

Allah Swt. berfirman menganjurkan makhluknya berlaku adil dan berbuat amal kebajikan, bersilaturrahmi dan memberi kepada kaum kerabat. Sebaliknya Allah melarang orang melakukan perbuatan keji dan mungkar secara terang terangan atau secara bersembunyi. Allah memberi pengajaran kepada kamu dengan menyuruh berbuat baik dan melarang berbuat keji adalah agar kamu ingat dan mengambil serta menggunakan pengajaran ini (Katsir, 1998).

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Jumlah Jarak Eksentrik dan Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung Graf non-Sentralisator dari Grup Dihedral $2n$

Bab ini membahas tentang pola jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dari grup dihedral. Dalam pencarian pola, terlebih dahulu dicari dan ditunjukkan nilai jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dari $D_6, D_8,\ D_{10}, D_{12}, D_{14}, dan\ D_{16}$.

3.1.1 Grup Dihedral D_6

Himpunan anggota dari grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-6 dioperasikan dengan operasi " $\circ$ " , maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 3.1 dapat dicari sentralisator dari masing-masing anggota D_6 ialah sebagai berikut:

$C_{D6}(1) = D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

$C_{D6}(r) = \{1, r, r^2\}$

$C_{D6}(r^2) = \{1, r, r^2\}$

$C_{D6}(s) = \{1, s\}$

$C_{D6}(sr) = \{1, sr\}$

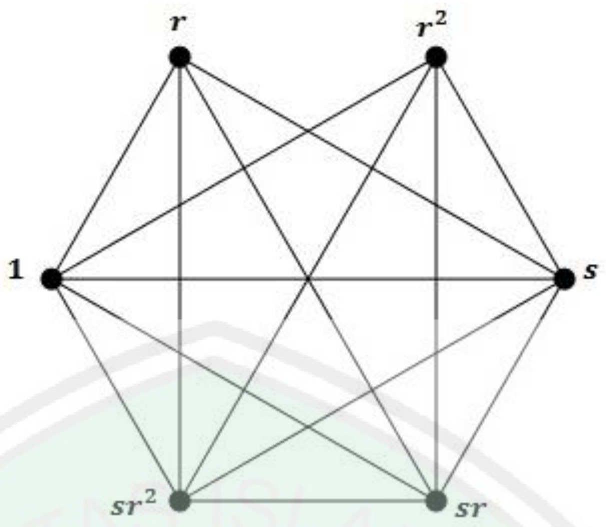
$C_{D6}(sr^2) = \{1, sr^2\}$

Berdasarkan uraian setralisator dari masing-masing anggota D_6, didapatkan bahwa ada himpunan sentralisator dari anggota D_6 memiliki anggota yang sama. Misalkan G adalah graf. Berdasarkan definisi graf non-sentralisator dua titik berbeda x dan y di D_6 terhubung langsung (*adjacent*) jika $C_{D_6}(x) \neq C_{D_6}(y) \in D_6$. Sehingga titik-titik yang menjadi graf yaitu $V_{D_6}(G) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

Berdasarkan Definisi 2.8, graf non-sentralisator yang dibentuk dari grup dihedral-6 dinotasikan $\Upsilon(D_6)$. Himpunan titik pada graf non-sentralisator $\Upsilon(D_6)$ adalah $V(\Upsilon(D_6)) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Upsilon(D_6))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $C_{V(\Upsilon(D_6))}(u) \neq C_{V(\Upsilon(D_6))}(v)$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh $E(\Upsilon(D_6)) = \{(1, r), (1, r^2), (1, s), (1, sr),$

$(1, sr^2), (r, s), (r, sr), (r, sr^2), (r^2, s), (r^2, sr), (r^2, sr^2), (s, sr), (s, sr^2), (sr, s),$

$(sr, sr), (sr, sr^2)\}$. Oleh karena itu, graf non-sentralisator grup dihedral-6 $\Upsilon(D_6)$ ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1Graf Non-Sentralisator di D_6

Berdasarkan Gambar 3.1, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_6)$. Jumlah jarak titik x $D(x)$ pada $\Upsilon(D_6)$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di $\Upsilon(D_6)$. Nilai jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_6)$ diperoleh sebagai berikut:

$$D(1) = d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,s) + d(1,sr) + d(1,sr^2)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$D(r) = d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,s) + d(r,sr) + d(r,sr^2)$$

$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$D(r^2) = d(r^2,1) + d(r^2,r) + d(r^2,s) + d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2)$$

$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,sr) + d(s,sr^2)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$D(sr) = d((sr,1)) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,s) + d(sr,sr^2)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,s) + d(sr^2,sr)$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Berdasarkan Gambar 3.1, dapat diperoleh nilai eksentrisitas titik x $e(x)$ pada $\Upsilon(D_6)$ yang merupakan jarak terjauh dari titik x ke sebarang titik di $\Upsilon(D_6)$. Eksentrisitas titik pada $\Upsilon(D_6)$ diperoleh sebagai berikut.

$$e(1) = max\{d(1,r), d(1,r^2), d(1,s), d(1,sr), d(1,sr^2)\}$$
$$= max\{1,1,1,1,1\} = 1$$
$$e(r) = max\{d(r,1), d(r,r^2), d(r,s), d(r,sr), d(r,sr^2)\}$$
$$= max\{1,2,1,1,1\} = 2$$
$$e(r^2) = max\{d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,s), d(r^2,sr), d(r^2,sr^2)\}$$
$$= max\{1,2,1,1,1\} = 2$$
$$e(s) = max\{d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,sr), d(s,sr^2)\}$$
$$= max\{1,1,1,1,1\} = 1$$
$$e(sr) = max\{d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,s), d(sr,sr^2)\}$$
$$= max\{1,1,1,1,1\} = 1$$
$$e(sr^2) = max\{d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,s), d(sr^2,sr)$$
$$= max\{1,1,1,1,1\} = 1$$

Berdasarkan uraian eksentrisitas tersebut disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada graf non-sentralisator grup dihedral-6 ($\Upsilon(D_6)$) adalah $e(x) = 2, \forall x \in V(\Upsilon(D_6))$.

Selanjutnya dengan diperolehnya nilai jumlah jarak dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Upsilon(D_6)$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $\Upsilon(D_6)$ sebagai berikut.

$$\xi^{d}(\Upsilon(D_6)) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_6))} e(v) \times d(v)$$

$$= (e(1) \times d(1)) + (e(r) \times d(r)) + (e(r^2) \times d(r^2))$$

$$+ (e(s) \times d(s)) + (e(sr) \times d(sr)) + (e(sr^2) \times d(sr^2))$$

$$= (1 \times 5) + (2 \times 6) + (2 \times 6) + (1 \times 5) + (1 \times 5) + (1 \times 5)$$

$$= 5 + 12 + 12 + 5 + 5 + 5$$

$$= 44$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator grup dihedral-6 ($\Upsilon(D_6)$) adalah 44.

Dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(\Upsilon(D_6)) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_6))} \frac{e(v) \times d(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1) \times d(1)}{\deg(1)}\right) + \left(\frac{e(r) \times d(r)}{\deg(r)}\right) + \left(\frac{e(r^2) \times d(r^2)}{\deg(r^2)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(s) \times d(s)}{\deg(s)}\right) + \left(\frac{e(sr) \times d(sr)}{\deg(sr)}\right) + \left(\frac{e(sr^2) \times d(sr^2)}{\deg(sr^2)}\right)$$

$$= \left(\frac{1 \times 5}{5}\right) + \left(\frac{2 \times 6}{4}\right) + \left(\frac{2 \times 6}{4}\right) + \left(\frac{1 \times 5}{5}\right) + \left(\frac{1 \times 5}{5}\right) + \left(\frac{1 \times 5}{5}\right)$$

$$= \frac{5}{5} + \left(2 \times \frac{12}{4}\right) + \left(3 \times \frac{5}{5}\right)$$

$$= \frac{5}{5} + \frac{24}{4} + \frac{15}{5}$$

$$= \frac{20 + 120 + 60}{20}$$

$$= \frac{200}{20}$$

$$= 10$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator grup dihedral-6 ($\Upsilon(D_6)$) adalah 10.

3.1.2 Grup Dihedral D_8

Himpunan anggota dari grup dihedral-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-8 dioperasikan dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley Grup Dihedral-8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.2 dapat dicari sentralisator dari masing-masing anggota D_8 ialah sebagai berikut:

$C_{D8}(1) = D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$C_{D8}(r) = \{1, r, r^2, r^3\}$

$C_{D8}(r^2) = D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$C_{D8}(r^3) = \{1, r, r^2, r^3\}$

$C_{D8}(s) = \{1, r^2, s, sr^2\}$

$C_{D8}(sr) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$

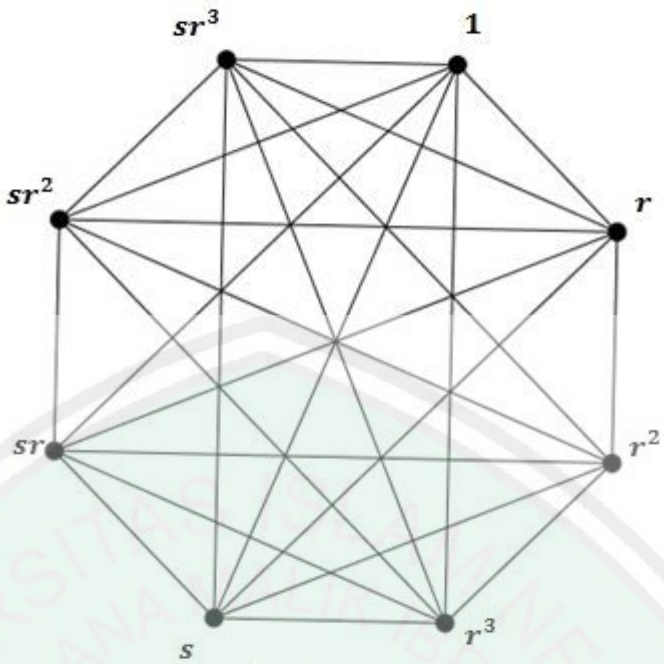
$C_{D8}(sr^2) = \{1, r^2, s, sr^2\}$

$C_{D8}(sr^3) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$

Berdasarkan uraian setralisator dari masing-masing anggota D_8, didapatkan bahwa ada himpunan sentralisator dari anggota D_8 memiliki anggota yang sama. Misalkan G adalah graf. Berdasarkan definisi graf non-sentralisator dua titik berbeda x dan y di D_8 terhubung langsung (*adjacent*) jika $C_{D_8}(x) \neq C_{D_8}(y) \in D_8$. Sehingga titik-titik yang menjadi graf yaitu $V_{D_8}(G) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

Berdasarkan Definisi 2.8, graf non-sentralisator yang dibentuk dari grup dihedral-8 dinotasikan $\Upsilon(D_8)$. Himpunan titik pada graf non-sentralisator $\Upsilon(D_8)$ adalah $V(\Upsilon(D_8)) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Upsilon(D_8))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $C_{V(\Upsilon(D_8))}(u) \neq C_{V(\Upsilon(D_8))}(v)$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh

$E(\Upsilon(D_8)) = \{(1,r), (1,r^3), (1,s), (1,sr), (1,sr^2), (1,sr^3), (r,r^2), (r,s), (r,sr), (r,sr^2), (r,sr^3), (r^2,r^3), (r^2,s), (r^2,sr), (r^2,sr^2), (r^2,sr^3), (r^3,s), (r^3,sr), (r^3,sr^2), (r^3,sr^3), (s,sr), (s,sr^3), (sr,sr^2), (sr^2,sr^3)\}$. Oleh karena itu, graf non-sentralisator grup dihedral-8 ($\Upsilon(D_8)$) ditunjukkan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Graf Non-Sentralisator di D_8 ($\Upsilon(D_8)$)

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_8)$. Jumlah jarak titik $xD(x)$ pada $\Upsilon(D_8)$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di $\Upsilon(D_8)$. Nilai jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_8)$ diperoleh sebagai berikut:

$$D(1) = d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,r^3) + d(1,s) + d(1,sr) + d(1,sr^2) + d(1,sr^3)$$

$$= 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 += 8$$

$$D(r) = d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,r^3) + d(r,s) + d(r,sr) + d(r,sr^2) + d(r,sr^3)$$

$$= 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$

$$D(r^2) = d(r^{2,1}) + d(r^2,r) + d(r^2,r^3) + d(r^2,s) + d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2) + d(r^2,sr^3)$$

$$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$

$$D(r^3) = d(r^3,1) + d(r^3,r) + d(r^3,r^2) + d(r^3,s) + d(r^3,sr) + d(r^3,sr^2) + d(r^3,sr^3)$$
$$= 1+2+1+1+1+1+1 = 8$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,sr) + d(s,sr^2) + d(s,sr^3)$$
$$= 1+1+1+1+1+2+1 = 8$$

$$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,s) + d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+2 = 8$$

$$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3)$$
$$= 1+1+1+1+2+1+1 = 8$$

$$D(sr^3) = d(sr^3,1) + d(sr^3,r) + d(sr^3,r^2) + d(sr^3,r^3) + d(sr^3,s) + d(sr^3,sr) + d(sr^3,sr^2)$$
$$= 1+1+1+1+1+2+1 = 8$$

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat diperoleh nilai eksentrisitas titik x $e(x)$ pada $\Upsilon(D_8)$ yang merupakan jarak terjauh dari titik x ke sebarang titik di $\Upsilon(D_8)$. Eksentrisitas titik pada $\Upsilon(D_8)$ diperoleh sebagai berikut.

$$e(1) = \max\{d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,s), d(1,sr), d(1,sr^2), d(1,sr^3)\}$$
$$= \max\{1,2,1,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(r) = \max\{d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,s), d(r,sr), d(r,sr^2), d(r,sr^3)\}$$
$$= \max\{1,1,2,1,1,1,1\} = 2$$

$$e(r^2) = \max\{d(r^2,1), d(r^2,r), d(r^2,r^3), d(r^2,s), d(r^2,sr), d(r^2,sr^2),$$

$d(r^2, sr^3)\}$

$= \max\{21,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(r^3) = \max\{d(r^3, 1), (r^3, r), d(r^3, r^2), d(r^3, s), d(r^3, sr), d(r^3, sr^2),$

$d(r^3, sr^3)\}$

$= max\{1,2,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(s) = max\{(s, 1), d(s, r), d(s, r^2), d(s, r^3), d(s, sr), d(s, sr^2), d(s, sr^3)\}$

$= max\{1,1,1,1,1,2,1\} = 2$

$e(sr) = max\{d(sr, 1), d(sr, r), d(sr, r^2), d(sr, r^3), d(sr, s), d(sr, sr^2),$

$d(sr, sr^3)\}$

$= max\{1,1,1,1,1,1,2\} = 2$

$e(sr^2) = max\{d(sr^2, 1), d(sr^2, r), d(sr^2, r^2), d(sr^2, r^3), d(sr^2, s),$

$d(sr^2, sr), d(sr^2, sr^3)\}$

$= max\{1,1,1,1,2,1,1\} = 2$

$e(sr^3) = max\{d(sr^3, 1) , d(sr^3, r), d(sr^3, r^2), d(sr^3, r^3), d(sr^3, s),$

$d(sr^3, sr), d(sr^3, sr^2)\}$

$= max\{1,1,1,1,1,2,1\} = 2$

Berdasarkan eksentrisitas yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada graf non-sentralisator grup dihedral-8 ($\Upsilon(D_8)$) adalah 2.

Berdasarkan nilai jumlah jarak dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Upsilon(D_8)$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $\Upsilon(D_8)$ sebagai berikut.

$$\xi(\Upsilon(D_8)) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_8))} e(v) \times d(v)$$

$$= \left(e(1) \times d(1)\right) + \left(e(r) \times d(r)\right) + \left(e(r^2) \times d(r^2)\right)$$
$$+ \left(e(r^3) \times d(r^3)\right) + \left(e(s) \times d(s)\right) + \left(e(sr) \times d(sr)\right)$$
$$+ \left(e(sr^2) \times d(sr^2)\right) + \left(e(sr^3) \times d(sr^3)\right)$$

$$= (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8) + (2 \times 8)$$
$$+ (2 \times 8) + (2 \times 8)$$

$$= 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16$$

$$= 128$$

Dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(\Upsilon(D_8)) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_8))} \frac{e(v) \times d(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1) \times d(1)}{\deg(1)}\right) + \left(\frac{e(r) \times d(r)}{\deg(r)}\right) + \left(\frac{e(r^2) \times d(r^2)}{\deg(r^2)}\right)$$
$$+ \left(\frac{e(r^3) \times d(r^3)}{\deg(r^3)}\right) + \left(\frac{e(s) \times d(s)}{\deg(s)}\right) + \left(\frac{e(sr) \times d(sr)}{\deg(sr)}\right)$$
$$+ \left(\frac{e(sr^2) \times d(sr^2)}{\deg(sr^2)}\right) + \left(\frac{e(sr^3) \times d(sr^3)}{\deg(sr^3)}\right)$$

$$= \left(\frac{2 \times 8}{6}\right) + \left(\frac{2 \times 8}{6}\right) + \left(\frac{2 \times 8}{6}\right) + \left(\frac{2 \times 8}{6}\right) + \left(\frac{2 \times 8}{6}\right) + \left(\frac{2 \times 8}{6}\right)$$
$$+ \left(\frac{2 \times 8}{6}\right) + \left(\frac{2 \times 8}{6}\right)$$

$$= \frac{16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16}{6}$$

$$= \frac{128}{6}$$

$$= 21{,}3$$

Jadi, berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator dihedral-8 ($\Upsilon(D_8)$) adalah 128 dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dihedral-8 ($\Upsilon(D_8)$) adalah 21,3.

3.1.3 Grup Dihedral D_{10}

Himpunan anggota dari grup dihedral-10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-6 dioperasikan dengan operasi " $\circ$ " , maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral-10

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.3 dapat dicari sentralisator dari masing-masing anggota D_6 ialah sebagai berikut:

$C_{D10}(1) = \{D_{10}\} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

$C_{D10}(r) = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$C_{D10}(r^2) = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$C_{D10}(r^3) = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$C_{D10}(r^4) = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$C_{D10}(s) = \{1, s\}$

$C_{D10}(sr) = \{1, sr\}$

$C_{D10}(sr^2) = \{1, sr^2\}$

$C_{D10}(sr^3) = \{1, sr^3\}$

$C_{D10}(sr^4) = \{1, sr^4\}$

Berdasarkan uraian setralisator dari masing-masing anggota D_{10}, didapatkan bahwa ada himpunan sentralisator dari anggota D_{10} memiliki anggota yang sama. Misalkan G adalah graf. Berdasarkan definisi graf non-sentralisator dua titik berbeda x dan y di D_{10} terhubung langsung (*adjacent*) jika $C_{D_{10}}(x) \neq C_{D_{10}}(y) \in D_{10}$. Sehingga titik-titik yang menjadi graf yaitu $V_{D_{10}}(G) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$.

Berdasarkan Definisi 2.8, graf non-sentralisator yang dibentuk dari grup dihedral-10 dinotasikan $\Upsilon(D_{10})$. Himpunan titik pada graf non-sentralisator $\Upsilon(D_{10})$ adalah $V(\Upsilon(D_{10})) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Upsilon(D_{10}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $C_{V(\Upsilon(D_{10}))}(v) \neq C_{V(\Upsilon(D_{10}))}(v)$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh

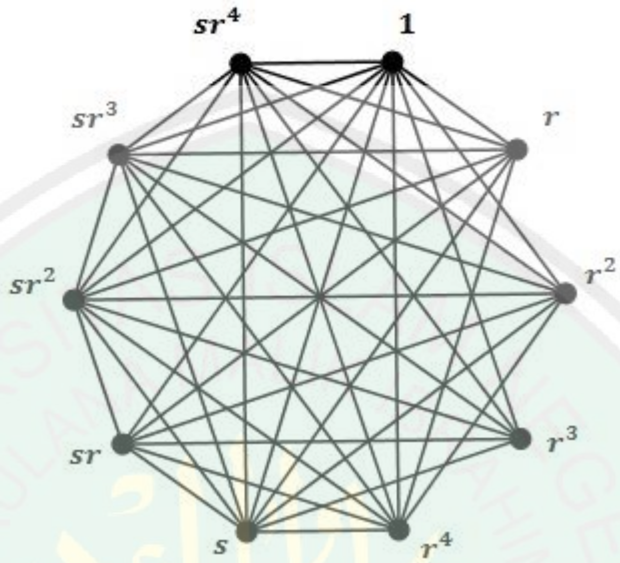
$E(\Upsilon(D_{10})) = \{(1, r), (1, r^2), (1, r^3), (1, r^4), (1, s), (1, sr), (1, sr^2), (1, sr^3),$

$(1, sr^4), (r, s), (r, sr), (r, sr^2), (r, sr^3), (r, sr^4), (r^2, s), (r^2, sr), (r^2, sr^2), (r^2, sr^3),$

$(r^2, sr^4), (r^3, s), (r^3, sr), (r^3, sr^2), (r^3, sr^3), (r^3, sr^4), (r^4, s), (r^4, sr), (r^4, sr^2),$

$(r^4, sr^3), (s, sr), (s, sr^2), (s, sr^3), (s, sr^4)(sr, sr^2), (sr, sr^3), (sr, sr^4), (sr^2, sr^3),$

$(sr^2, sr^4), (sr^3, sr^4)\}$. Oleh karena itu, graf non-sentralisator grup dihedral-10 $\Upsilon(D_{10})$ ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Graf Non-Sentralisator di D_{10} ($\Upsilon(D_{10})$)

Berdasarkan Gambar 3.3, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{10})$. Jumlah jarak titik $xD(x)$ pada $\Upsilon(D_{10})$ adalah jumlah jarak antara titik x dengan semua titik di $\Upsilon(D_{10})$. Nilai jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{10})$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D(1) &= d(1,r) + d(1,r^2) + d(1,r^3) + d(1,r^4) + d(1,s) + d(1,sr) \\ &\quad + d(1,sr^2) + d(1,sr^3) + d(1,sr^4) \\ &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9 \\ D(r) &= d(r,1) + d(r,r^2) + d(r,r^3) + d(r,r^4) + d(r,s) + d(r,sr) \\ &\quad + d(r,sr^2) + d(r,sr^3) + d(r,sr^4) \\ &= 1+2+2+2+1+1+1+1+1 = 12 \end{aligned}$$

$$D(r^2) = d(r^2,1) + d(r^2,r) + d(r^2,r^3) + d(r^2,r^4) + d(r^2,s)$$
$$+d(r^2,sr) + d(r^2,sr^2) + d(r^2,sr^3) + d(r^2,sr^4)$$
$$= 1+2+2+2+1+1+1+1+1 = 12$$

$$D(r^3) = d(r^3,1) + d(r^3,r) + d(r^3,r^2) + d(r^3,r^4) + d(r^3,s) + (r^3,sr)$$
$$+d(r^3,sr^2) + d(r^3,sr^3) + d(r^3,sr^4)$$
$$= 1+2+2+2+1+1+1+1+1 = 12$$

$$D(r^4) = d(r^4,1) + d(r^4,r) + d(r^4,r^2) + d(r^4,r^3) + d(r^4,s)$$
$$+d(r^4,sr) + d(r^4,sr^2) + d(r^4,sr^3) + d(r^4,sr^4)$$
$$= 1+2+2+2+1+1+1+1+1 = 12$$

$$D(s) = d(s,1) + d(s,r) + d(s,r^2) + d(s,r^3) + d(s,r^4) + d(s,sr)$$
$$+d(s,sr^2) + d(s,sr^3) + d(s,sr^4)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$$

$$D(sr) = d(sr,1) + d(sr,r) + d(sr,r^2) + d(sr,r^3) + d(sr,r^4) + d(sr,s)$$
$$+d(sr,sr^2) + d(sr,sr^3) + d(sr,sr^4)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$$

$$D(sr^2) = d(sr^2,1) + d(sr^2,r) + d(sr^2,r^2) + d(sr^2,r^3) + d(sr^2,r^4)$$
$$+d(sr^2,s) + d(sr^2,sr) + d(sr^2,sr^3) + d(sr^2,sr^4)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$$

$$D(sr^3) = d(sr^3,1) + d(sr^3,r) + d(sr^3,r^2) + d(sr^3,r^3) + d(sr^3,r^4)$$
$$+d(sr^3,s) + d(sr^3,sr) + d(sr^3,sr^2) + d(sr^3,sr^4)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$$

$$D(sr^4) = d(sr^4,1) + d(sr^4,r) + d(sr^4,r^2) + d(sr^4,r^3) + d(sr^4,r^4)$$
$$+d(sr^4,s) + d(sr^4,sr) + d(sr^4,sr^2) + d(sr^4,sr^3)$$
$$= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$$

Berdasarkan Gambar 3.3, dapat diperoleh nilai eksentrisitas titik $xe(x)$ pada $\Upsilon(D_{10})$ yang merupakan jarak terjauh dari titik x ke sebarang titik di $\Upsilon(D_{10})$. Eksentrisitas titik pada $\Upsilon(D_{10})$ diperoleh sebagai berikut.

$e(1)$ $= \max\{d(1,r), d(1,r^2), d(1,r^3), d(1,r^4), d(1,s), d(1,sr),$

$d(1,sr^2), d(1,sr^3), d(1,sr^4)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 1$

$e(r)$ $= \{\max\{d(r,1), d(r,r^2), d(r,r^3), d(r,r^4), d(r,s), d(r,sr), d(r,sr^2$

$= \max\{1,2,2,2,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(r^3)$ $= \max\{d(r^3,1), d(r^3,r), d(r^3,r^2), d(r^3,r^4), d(r^3,s), (r^3,sr),$

$d(r^3,sr^2), d(r^3,sr^3), d(r^3,sr^4)\}$

$= \max\{1,2,2,2,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(r^4)$ $= \max\{d(r^4,1), d(r^4,r), d(r^4,r^2), d(r^4,r^3), d(r^4,s), d(r^4,sr),$

$d(r^4,sr^2), d(r^4,sr^3), d(r^4,sr^4)\}$

$= \max\{1,2,2,2,1,1,1,1,1\} = 2$

$e(s)$ $= \max\{d(s,1), d(s,r), d(s,r^2), d(s,r^3), d(s,r^4), d(s,sr), d(s,sr^2),$

$d(s,sr^3), d(s,sr^4)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 1$

$e(sr)$ $= \max\{d(sr,1), d(sr,r), d(sr,r^2), d(sr,r^3), d(sr,r^4), d(sr,s),$

$d(sr,sr^2), d(sr,sr^3), d(sr,sr^4)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 1$

$e(sr^2)$ $= \max\{d(sr^2,1), d(sr^2,r), d(sr^2,r^2), d(sr^2,r^3), d(sr^2,r^4),$

$d(sr^2,s), d(sr^2,sr), d(sr^2,sr^3), d(sr^2,sr^4)\}$

$= \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 1$

$$e(sr^3) = \max(d(sr^3,1), d(sr^3,r), d(sr^3,r^2), d(sr^3,r^3), d(sr^3,r^4), d(sr^3,s), d(sr^3,sr), d(sr^3,sr^2), d(sr^3,sr^4)\} = \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 1$$

$$e(sr^4) = \max\{d(sr^4,1), d(sr^4,r), d(sr^4,r^2), d(sr^4,r^3), d(sr^4,r^4), d(sr^4,s), d(sr^4,sr), d(sr^4,sr^2), d(sr^4,sr^3)\} = \max\{1,1,1,1,1,1,1,1,1\} = 1$$

Berdasarkan nilai jumlah jarak dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{10})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $\Upsilon(D_{10})$ sebagai berikut.

$$\xi^d(\Upsilon(D_{10})) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_{10}))} e(v) \times d(v)$$

$$= (e(1) \times d(1)) + (e(r) \times d(r)) + (e(r^2) \times d(r^2)) + (e(r^3) \times d(r^3)) + (e(r^4) \times d(r^4)) + (e(s) \times d(s)) + (e(sr) \times d(sr)) + (e(sr^2) \times d(sr^2)) + (e(sr^3) \times d(sr^3)) + (e(sr^4) \times d(sr^4))$$

$$= (1 \times 9) + (2 \times 12) + (2 \times 12) + (2 \times 12) + (2 \times 12) + (1 \times 9) + (1 \times 9) + (1 \times 9) + (1 \times 9) + (1 \times 9)$$

$$= 9 + 24 + 24 + 24 + 24 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9$$

$$= 150$$

Dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(\Upsilon(D_{10})) = \sum_{v\in V(\Upsilon(D_{10}))} \frac{e(v)\times d(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1)\times d(1)}{\deg(1)}\right) + \left(\frac{e(r)\times d(r)}{\deg(r)}\right) + \left(\frac{e(r^2)\times d(r^2)}{\deg(r^2)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(r^3)\times d(r^3)}{\deg(r^3)}\right) + \left(\frac{e(r^4)\times d(r^4)}{\deg(r^4)}\right) + \left(\frac{e(s)\times d(s)}{\deg(s)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(sr)\times d(sr)}{\deg(sr)}\right) + \left(\frac{e(sr^2)\times d(sr^2)}{\deg(sr^2)}\right) + \left(\frac{e(sr^3)\times d(sr^3)}{\deg(sr^3)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(sr^4)\times d(sr^4)}{\deg(sr^4)}\right)$$

$$= \left(\frac{1\times 9}{9}\right) + \left(\frac{2\times 12}{6}\right) + \left(\frac{2\times 12}{6}\right) + \left(\frac{2\times 12}{6}\right) + \left(\frac{2\times 12}{6}\right)$$

$$+ \left(\frac{1\times 9}{9}\right) + \left(\frac{1\times 9}{9}\right) + \left(\frac{1\times 9}{9}\right) + \left(\frac{1\times 9}{9}\right) + \left(\frac{1\times 9}{9}\right)$$

$$= 1 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + +1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 22$$

Jadi, berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator dihedral-10 ($\Upsilon(D_{10})$) adalah 150 dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dihedral-10 ($\Upsilon(D_{10})$) adalah 22.

3.1.4 Grup Dihedral D_{12}

Himpunan anggota dari grup dihedral-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-6 dioperasikan dengan operasi " $\circ$ " , maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.4 sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel Cayley Grup Dihedral-12

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel. 3.4 dapat dicari sentralisator dari masing-masing anggota D_{12} ialah sebagai berikut:

$C_{D12}(1) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$C_{D12}(r) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

$C_{D12}(r^2) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

$C_{D12}(r^3) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$C_{D12}(r^4) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

$C_{D12}(r^5) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

$C_{D12}(s) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

$C_{D12}(sr) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

$C_{D12}(sr^2) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

$C_{D12}(sr^3) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

$C_{D12}(sr^4) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

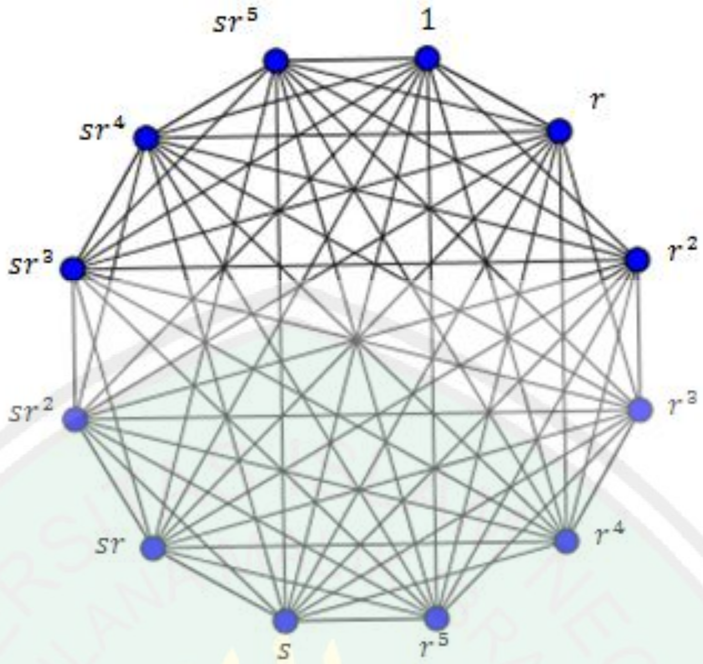
$C_{D12}(sr^5) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

Berdasarkan uraian sentralisator dari masing-masing anggota D_{12}, diketahui bahwa ada himpunan sentralisator dari anggota D_{12} yang memiliki anggota sama. Misalkan G adalah graf. Berdasarkan definisi graf non-sentralisator dua titik berbeda x dan y di D_{12} terhubung langsung (*adjacent*) jika $C_{D_{12}}(x) \neq C_{D_{12}}(y) \in D_{12}$. Sehingga titik-titik yang menjadi graf yaitu $V_{D_{12}}(G) = 1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$.

Berdasarkan Definisi 2.8, graf non-sentralisator yang terbentuk dari grup dihedral-12 dinotasikan $\Upsilon(D_{12})$. Himpunan titik pada graf non-sentralisator $\Upsilon(D_{12})$ adalah $V(\Upsilon(D_{12})) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Upsilon(D_{12}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $C_{V(\Upsilon(D_{12}))}(u) \neq C_{V(\Upsilon(D_{12}))}(v)$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.4 diperoleh $E(\Upsilon(D_{12})) =$

$$\{(1,r),(1,r^2),(1,r^3),(1,r^4),(1,r^5),(1,s),(1,sr),(1,sr^2),(1,sr^3),(1,sr^4),$$
$$(1,sr^5),(r,r^3),(r,r^4),(r,r^5),(r,s),(r,sr),(r,sr^2),(r,sr^3),(r,sr^4),(r,sr^5),$$
$$(r^2,r^4),(r^2,r^5),(r^2,s),(r^2,sr),(r^2,sr^2),(r^2,sr^3),(r^2,sr^4),(r^2,sr^5),(r^3,r^4),$$
$$(r^3,r^5),(r^3,s),(r^3,sr),(r^3,sr^2),(r^3,sr^3),(r^3,sr^4),(r^3,sr^5),(r^4,s),(r^4,sr),$$
$$(r^4,sr^2),(r^4,sr^3),(r^4,sr^4),(r^4,sr^5),(r^5,s),(r^5,sr),(r^5,sr^2),(r^5,sr^3),(r^5,sr^4),$$
$$(r^5,sr^5),(s,sr),(s,sr^2),(s,sr^5),(sr,sr^3),(sr,sr^5),(sr^2,sr^3),(sr^2,sr^4),$$

$(sr^3,sr^4),(sr^3,sr^5),(sr^4,sr^5)\}$. Oleh karena itu, graf non-sentralisator grup dihedral-12 $\Upsilon(D_{12})$ ditunjukan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Graf Non-Sentralisator di $D_{12}(\Upsilon(D_{12}))$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{12})$. Jumlah jarak titik $uD(u)$ pada $\Upsilon(D_{12})$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\Upsilon(D_{12})$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.1 maka dapat diketahui bahwa pada $\Upsilon(D_{12})$

$D(1) = 12$	$D(s) = 12$
$D(r) = 14$	$D(sr) = 12$
$D(r^2) = 14$	$D(sr^2) = 12$
$D(r^3) = 12$	$D(sr^3) = 12$
$D(r^4) = 14$	$D(sr^4) = 12$
$D(r^5) = 14$	$D(sr^5) = 12$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dicari eksentrisitas titik $u\, e(u)$ pada $\Upsilon(D_{12})$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Upsilon(D_{12})$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.1 maka dapat disimpulkan bahwa eksentrisitas setiap titik pada $\Upsilon(D_{12})$

$$e(1) = 2 \qquad e(s) = 2$$
$$e(r) = 2 \qquad e(sr) = 2$$
$$e(r^2) = 2 \qquad e(sr^2) = 2$$
$$e(r^3) = 2 \qquad e(s\Upsilon^3) = 2$$
$$e(r^4) = 2 \qquad e(sr^4) = 2$$
$$e(r^5) = 2 \qquad e(sr^5) = 2$$

Berdasarkan nilai jumlah dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{12})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $\Upsilon(D_{12})$ sebagai berikut

$$\xi^d(\Upsilon(D_{12})) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_{12}))} e(v) \times d(v)$$
$$= \big(e(1) \times d(1)\big) + \big(e(r) \times d(r)\big) + \big(e(r^2) \times d(r^2)\big)$$
$$+ \big(e(r^3) \times d(r^3)\big) + \big(e(r^4) \times d(r^4)\big) + \big(e(r^5) \times d(r^5)\big)$$
$$+ \big(e(s) \times d(s)\big) + \big(e(sr) \times d(sr)\big) + \big(e(sr^2) \times d(sr^2)\big)$$
$$+ \big(e(sr^3) \times d(sr^3)\big) + \big(e(sr^4) \times d(sr^4)\big) + \big(e(sr^5) \times d(sr^5)\big)$$
$$= (2 \times 12) + (2 \times 14) + (2 \times 14) + (2 \times 12)(2 \times 14) + (2 \times 14)$$
$$+ (2 \times 12) + (2 \times 12)(2 \times 12) + (2 \times 12)(2 \times 12) + (2 \times 12)$$
$$= 24 + 28 + 28 + 24 + 28 + 28 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24$$
$$= 304$$

Dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(\Upsilon(D_{12})) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_{12}))} \frac{e(v) \times d(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1) \times d(1)}{de\,g(1)}\right) + \left(\frac{e(r) \times dr}{de\,g(r)}\right) + \left(\frac{e(r^2) \times d(r^2)}{de\,g(r^2)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(r^3) \times d(r^3)}{de\,g(r^3)}\right) + \left(\frac{e(r^4) \times d(r^4)}{de\,g(r^4)}\right) + \left(\frac{e(r^5) \times d(r^5)}{de\,g(r^5)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(s) \times d(s)}{de\,g(s)}\right) + \left(\frac{e(sr) \times d(sr)}{de\,g(sr)}\right) + \left(\frac{e(sr^2) \times d(sr^2)}{de\,g(sr^2)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(sr^3) \times d(sr^3)}{de\,g(sr^3)}\right) + \left(\frac{e(sr^4) \times d(sr^4)}{de\,g(sr^4)}\right) + \left(\frac{e(sr^5) \times d(sr^5)}{de\,g(sr^5)}\right)$$

$$= \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 14}{8}\right) + \left(\frac{2 \times 14}{8}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 14}{8}\right)$$

$$+ \left(\frac{2 \times 14}{8}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right)$$

$$+ \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right) + \left(\frac{2 \times 12}{10}\right)$$

$$= \frac{24}{10} + \frac{28}{8} + \frac{28}{8} + \frac{24}{10} + \frac{28}{8} + \frac{28}{8} + \frac{24}{10} + \frac{24}{10} + \frac{24}{10} + \frac{24}{10} + \frac{24}{10} + \frac{24}{10}$$

$$= 33{,}2$$

Dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator dihedral-12 $(\Upsilon(D_{12}))$ adalah 304 dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dihedral-12 $(\Upsilon(D_{12}))$ adalah 33,2.

3.1.5 Grup Dihedral D_{14}

Himpunan anggota dari grup dihedral-14 adalah $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-12 dioperasikan dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.5 sebagai berikut:

Tabel 3.5 Tabel Cayley Grup Dihedral-14

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan Tabel 3.5 dapat dicari sentralisator dari masing-masing anggota D_{14} ialah sebagai berikut:

$C_{D14}(1) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

$C_{D14}(r) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

$C_{D14}(r^2) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

$C_{D14}(r^3) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

$C_{D14}(r^4) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

$C_{D14}(r^5) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

$C_{D14}(r^6) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$

$C_{D14}(s) = \{1, s\}$

$C_{D14}(sr) = \{1, sr\}$

$C_{D14}(sr^2) = \{1, sr^2\}$

$C_{D14}(sr^3) = \{1, sr^3\}$

$C_{D14}(sr^4) = \{1, sr^4\}$

$C_{D14}(sr^5) = \{1, sr^5\}$

$C_{D14}(sr^6) = \{1, sr^6\}$

Berdasarkan uraian sentralisator dari masing-masing anggota D_{14}, didapatkan bahwa ada himpunan sentralisator dari anggota D_{14} memiliki anggota yang sama. Misalkan G adalah graf. Berdasarkan definisi graf non-sentralisator dua titik berbeda x dan y di D_{14} terhubung langsung (*adjacent*) jika$C_{D_{14}}(x) \neq C_{D_{14}}(y) \in D_{14}$. Sehingga titik-titik yang menjadi graf yaitu $V_{D_{14}}(G) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$.

Berdasarkan definisi 2.8, graf non-sentralisator yang dibentuk dari grup dihedral-14 disimbolkan $\Upsilon(D_{14})$. Himpunan titik pada graf non-sentralisator $\Upsilon(D_{14})$ adalah $V(\Upsilon(D_{14})) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Upsilon(D_{14}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $C_{V(\Upsilon(D_{14}))}(u) \neq C_{V(\Upsilon(D_{14}))}(v)$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.5 diperoleh

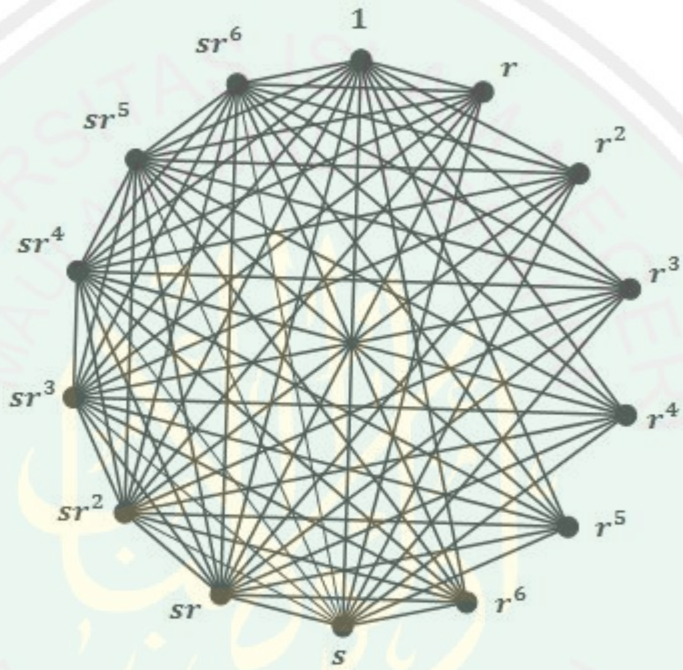
$$E(\Upsilon(D_{14})) = \{(1, r), (1, r^2), (1, r^3), (1, r^4), (1, r^5), (1, r^6), (1, s), (1, sr), (1, sr^2), (1, sr^3), (1, sr^3), (1, sr^4), (1, sr^5), (1, sr^6), (r, s), (r, sr), (r, sr^2), (r, sr^3), (r, sr^3), (r, sr^4), (r, sr^5), (r, sr^6), (r^2, sr), (r^2, sr^2), (r^2, sr^3), (r^2, sr^3), (r^2, sr^4), (r^2, sr^5), (r^2, sr^6), (r^3, sr), (r^3, sr^2), (r^3, sr^3), (r^3, sr^3), (r^3, sr^4), (r^3, sr^5), (r^3, sr^6), (r^4, sr), (r^4, sr^2), (r^4, sr^3), (r^4, sr^3), (r^4, sr^4), (r^4, sr^5), (r^4, sr^6), (r^5, sr), (r^5, sr^2), (r^5, sr^3), (r^5, sr^3), (r^5, sr^4), (r^5, sr^5), (r^5, sr^6),$$

$(r^6, sr), (r^6, sr^2), (r^6, sr^3), (r^6, sr^3), (r^6, sr^4), (r^6, sr^5), (r^6, sr^6), (s, sr),$

$(s, sr^2), (s, sr^3), (s, sr^4), (s, sr^5), (s, sr^6), (sr, sr^2), (sr, sr^3), (sr, sr^4),$

$(sr, sr^5), (sr, sr^6), (sr^2, sr^3), (sr^2, sr^4), (sr^2, sr^5), (sr^2, sr^6), (sr^3, sr^4),$

$(sr^3, sr^5), (sr^3, sr^6), (sr^4, sr^5), (sr^4, sr^6), (sr^5, sr^6)\}$. Oleh karena itu, graf non-sentralisator grup dihedral-14 $\Upsilon(D_{14})$ ditunjukkan pada Gambar 3.5



Gambar 3.5 Graf non-Sentralisator di D_{14}

Berdasarkan Gambar 3.5, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{14})$. Jumlah jarak titik $uD(u)$ pada $\Upsilon(D_{14})$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\Upsilon(D_{14})$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.1 maka dapat diketahui bahwa pada $\Upsilon(D_{14})$

$D(1) = 13$	$D(s) = 13$
$D(r) = 18$	$D(sr) = 13$
$D(r^2) = 18$	$D(sr^2) = 13$

$D(r^3) = 18$ $D(sr^3) = 13$

$D(r^4) = 18$ $D(sr^4) = 13$

$D(r^5) = 18$ $D(sr^5) = 13$

$D(r^6) = 18$ $D(sr^6) = 13$

Berdasarkan Gambar 3.5, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\Upsilon(D_{14})$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Upsilon(D_{14})$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.1 maka dapat diperoleh bahwa eksentrisitas setiap titik pada $\Upsilon(D_{14})$

$e(1) = 1$ $e(s) = 1$

$e(r) = 2$ $e(sr) = 1$

$e(r^2) = 2$ $e(sr^2) = 1$

$e(r^3) = 2$ $e(sr^3) = 1$

$e(r^4) = 2$ $e(sr^4) = 1$

$e(r^5) = 2$ $e(sr^5) = 1$

$e(r^6) = 2$ $e(sr^6) = 1$

Berdasarkan nilai jumlah jarak dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{14})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $\Upsilon(D_{14})$ sebagai berikut.

$$\xi^{d}\big(\Upsilon(D_{14})\big) = \sum_{v\in V(\Upsilon(D_{14}))} e(v)\times d(v)$$

$$= \big(e(1)\times d(1)\big) + \big(\big(e(r)\times d(r)\big) + \big(e(r^2)\times d(r^2)\big)$$

$$+ \big(e(r^3)\times d(r^3)\big) + \big(e(r^4)\times d(r^4)\big) + \big(e(r^5)\times d(r^5)\big)$$

$$+ \big(e(r^6)\times d(r^6)\big) + \big(e(s)\times d(s)\big) + \big(e(sr)\times d(sr)\big)$$

$$+ \big(e(sr^2)\times d(sr^2)\big) + \big(e(sr^3)\times d(sr^3)\big) + \big(e(sr^4)\times d(sr^4)\big)$$

$$+ \big(e(sr^5)\times d(sr^5)\big) + \big(e(sr^6)\times d(sr^6)\big)$$

$$= (1\times 13) + (2\times 18) + (2\times 18) + (2\times 18) + (2\times 18)$$

$$+ (2\times 18) + (2\times 18) + (1\times 13) + (1\times 13) + (1\times 13)$$

$$+ (1\times 13) + (1\times 13) + (1\times 13) + (1\times 13)$$

$$= 13 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13$$

$$+ 13 + 13$$

$$= 320$$

Dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}\big(\Upsilon(D_{14})\big) = \sum_{v\in V(\Upsilon(D_{14}))} \frac{e(v)\times d(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{1\times 13}{13}\right) + \left(\frac{2\times 18}{8}\right) + \left(\frac{2\times 18}{8}\right) + \left(\frac{2\times 18}{8}\right) + \left(\frac{2\times 18}{8}\right) + \left(\frac{2\times 18}{8}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times 18}{14}\right) + \left(\frac{1\times 13}{13}\right) + \left(\frac{1\times 13}{13}\right) + \left(\frac{1\times 13}{13}\right) + \left(\frac{1\times 13}{13}\right)$$

$$+ \left(\frac{1\times 13}{13}\right) + \left(\frac{1\times 13}{13}\right) + \left(\frac{1\times 13}{13}\right)$$

$$= \frac{13}{13} + \frac{36}{8} + \frac{36}{8} + \frac{36}{8} + \frac{36}{8} + \frac{36}{8} + \frac{36}{8} + \frac{13}{13} + \frac{13}{13} + \frac{13}{13} + \frac{13}{13} + \frac{13}{13} + \frac{13}{13}$$

$$+ \frac{13}{13}$$

$$= 35$$

Jadi, berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator dihedral-14 $(\Upsilon(D_{14}))$ adalah 320 dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dihedral-14 $(\Upsilon(D_{14}))$ adalah 35.

3.1.6 Grup Dihedral D_{16}

Himpunan anggota dari grup dihedral-16 adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Jika setiap anggota pada grup dihedral-16 dioperasikan dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel Cayley pada Tabel 3.6 sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Cayley Grup Dihedral-16

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^{6^6}	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.6 dapat dicari sentralisator dari masing-masing anggota D_{16} ialah sebagai berikut:

$C_{D16}(1) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$C_{D16}(r) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

$C_{D16}(r^2) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

$C_{D16}(r^3) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

$C_{D16}(r^4) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$C_{D16}(r^5) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

$C_{D16}(r^6) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

$C_{D16}(r^7) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$

$C_{D16}(s) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

$C_{D16}(sr) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

$C_{D16}(sr^2) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

$C_{D16}(sr^3) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

$C_{D16}(sr^4) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

$C_{D16}(sr^5) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

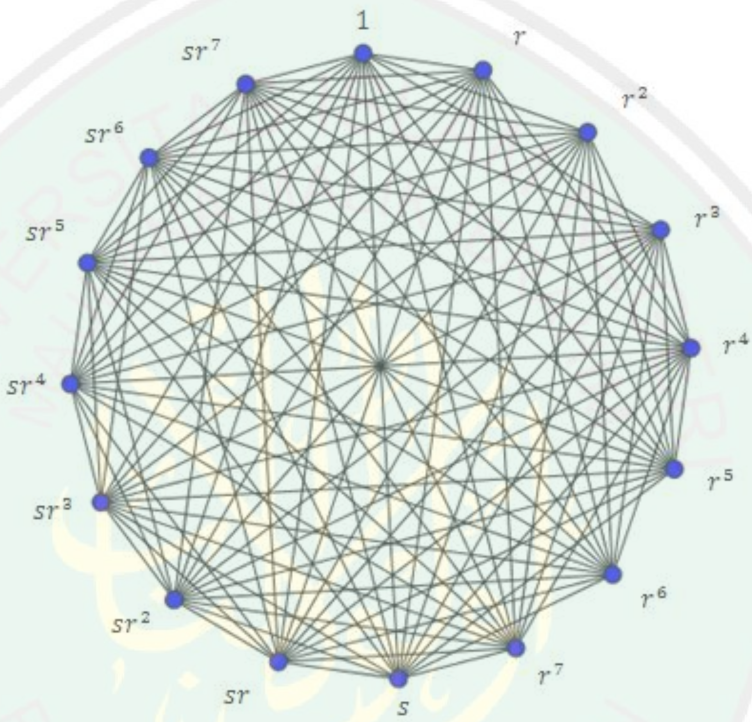
$C_{D16}(sr^6) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

$C_{D16}(sr^7) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

Berdasarkan uraian sentralisator dari masing-masing anggota D_{16}, didapatkan bahwa ada himpunan sentralisator dari anggota D_{16} memiliki anggota yang sama. Misalkan G adalah graf. Berdasarkan definisi graf non-sentralisator dua titik berbeda x dan y di D_{16} terhubung langsung (*adjacent*) jika $C_{D_{16}}(x) \neq C_{D_{16}}(y) \in D_{16}$. Sehingga titik-titik yang menjadi graf yaitu $V_{D_{16}}(G) = \{1, r, r^2,$ $r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Upsilon(D_{16}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $C_{V(\Upsilon(D_{16}))}(u) \neq C_{V(\Upsilon(D_{16}))}(v)$. Sehingga berdasarkan Tabel 3.6 diperoleh

$$E(\Upsilon(D_{16})) = \{(1,r),(1,r^2),(1,r^3),(1,r^4),(1,r^5),(1,r^6),(1,s),(1,sr),$$
$$(1,sr^2),(1,sr^3),(1,sr^3),(1,sr^4),(1,sr^5),(1,sr^6),(r,s),(r,sr),(r,sr^2),$$
$$(r,sr^3),(r,sr^3),(r,sr^4),(r,sr^5),(r,sr^6),(r,sr^7),(r^2,sr),(r^2,sr^2),(r^2,sr^3),$$
$$(r^2,sr^3),(r^2,sr^4),(r^2,sr^5),(r^2,sr^6),(r^2,sr^7),(r^3,sr),(r^3,sr^2),(r^3,sr^3),$$
$$(r^3,sr^3),(r^3,sr^4),(r^3,sr^5),(r^3,sr^6),(r^3,sr^7),(r^4,sr),(r^4,sr^2),(r^4,sr^3),$$
$$(r^4,sr^3),(r^4,sr^4),(r^4,sr^5),(r^4,sr^6),(r^4,sr^7),(r^5,sr),(r^5,sr^2),(r^5,sr^3),$$
$$(r^5,sr^3),(r^5,sr^4),(r^5,sr^5),(r^5,sr^6),(r^5,sr^7),(r^6,sr),(r^6,sr^2),(r^6,sr^3),$$
$$(r^6,sr^3),(r^6,sr^4),(r^6,sr^5),(r^6,sr^6),(r^6,sr^7),(s,sr),(s,sr^2),(s,sr^3),$$

$(s,sr^4),(s,sr^5),(s,sr^6),(s,sr^7),(sr,sr^2),(sr,sr^3),(sr,sr^4),(sr,sr^5),$
$(sr,sr^6),(sr,sr^7)(sr^2,sr^3),(sr^2,sr^4),(sr^2,sr^5),(sr^2,sr^6),(sr^2,sr^7),$
$(sr^3,sr^4),(sr^3,sr^5),(sr^3,sr^6),(sr^3,sr^7),(sr^4,sr^5),(sr^4,sr^6),(sr^4,sr^7),$
$(sr^5,sr^6),(sr^5,sr^7),(sr^6,sr^7)\}$. Oleh karena itu, graf non-sentralisator grup dihedral-16 $\Upsilon(D_{16})$ ditunjukkan pada Gambar 3.6



Gambar 3.6 Graf non-Sentralisator di D_{16}

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat dicari jumlah jarak masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{16})$. Jumlah jarak titik $uD(u)$ pada $\Upsilon(D_{16})$ merupakan jumlah jarak antara titik u dengan semua titik di $\Upsilon(D_{16})$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.1 maka dapat diketahui bahwa pada $\Upsilon(D_{16})$

$D(1) = 16$ $\qquad$ $D(s) = 16$

$D(r) = 20$ $\qquad$ $D(sr) = 16$

$D(r^2) = 20$ $D(sr^2) = 16$

$D(r^3) = 20$ $D(sr^3) = 16$

$D(r^4) = 16$ $D(sr^4) = 16$

$D(r^5) = 20$ $D(sr^5) = 16$

$D(r^6) = 20$ $D(sr^6) = 16$

$D(r^7) = 20$ $D(sr^7) = 16$

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat dicari eksentrisitas titik u $e(u)$ pada $\Upsilon(D_{16})$ yang merupakan jarak terjauh dari titik u kesebarang titik di $\Upsilon(D_{16})$. Dengan menggunakan cara yang sama pada 3.1.1 maka dapat diperoleh bahwa eksentrisitas setiap titik pada $\Upsilon(D_{16})$

$e(1) = 2$ $e(s) = 2$

$e(r) = 2$ $e(sr) = 2$

$e(r^2) = 2$ $e(sr^2) = 2$

$e(r^3) = 2$ $e(sr^3) = 2$

$e(r^4) = 2$ $e(sr^4) = 2$

$e(r^5) = 2$ $e(sr^5) = 2$

$e(r^6) = 2$ $e(sr^6) = 2$

$e(r^7) = 2$ $e(sr^7) = 2$

Berdasarkan nilai jumlah jarak dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Upsilon(D_{16})$, maka dapat dihitung jumlah jarak eksentrik dari $\Upsilon(\mathrm{D}_{16})$ sebagai berikut.

$$\xi^d(\Upsilon(D_{16})) = \sum_{v \in V(\Upsilon(D_{16}))} e(v) \times d(v)$$

$$= (e(1) \times d(1)) + (e(r) \times d(r)) + (e(r^2) \times d(r^2))$$
$$+ (e(r^3) \times d(r^3)) + (e(r^4) \times d(r^4)) + (e(r^5) \times d(r^5))$$
$$+ (e(r^6) \times d(r^6)) + (e(r^7) \times d(r^7)) + (e(s) \times d(s))$$
$$+ (e(sr) \times d(sr)) + (e(sr^2) \times d(sr^2)) + (e(sr^3) \times d(sr^3))$$
$$+ (e(sr^4) \times d(sr^4)) + (e(sr^5) \times d(sr^5)) + (e(sr^6) \times d(sr^6))$$
$$+ (e(sr^7) \times d(sr^7))$$
$$= (2 \times 16) + (2 \times 20) + (2 \times 20) + (2 \times 20) + (2 \times 16) + (2$$
$$\times 20) + (2 \times 20) + (2 \times 20) + (2 \times 16) + (2 \times 16) + (2 \times 16)$$
$$+ (2 \times 16) + (2 \times 16) + (2 \times 16) + (2 \times 16) + (2 \times 16)$$
$$= 32 + 40 + 40 + 40 + 32 + 40 + 40 + 40 + 32 + 32 + 32 + 32$$
$$+ 32 + 32 + 32 + 32$$
$$= 560$$

Dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(\Upsilon(D_{16})) = \sum_{v\in V(\Upsilon(D_{16}))} \frac{e(v)\times d(v)}{\deg(v)}$$

$$= \left(\frac{e(1)\times d(1)}{\deg(1)}\right) + \left(\frac{e(r)\times dr}{\deg(r)}\right) + \left(\frac{e(r^2)\times d(r^2)}{\deg(r^2)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(r^3)\times d(r^3)}{\deg(r^3)}\right) + \left(\frac{e(r^4)\times d(r^4)}{\deg(r^4)}\right) + \left(\frac{e(r^5)\times d(r^5)}{\deg(r^5)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(r^6)\times d(r^6)}{\deg(r^6)}\right) + \left(\frac{e(r^7)\times d(r^7)}{\deg(r^7)}\right)\left(\frac{e(s)\times d(s)}{\deg(s)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(sr)\times d(sr)}{\deg(sr)}\right) + \left(\frac{e(sr^2)\times d(sr^2)}{\deg(sr^2)}\right) + \left(\frac{e(sr^3)\times d(sr^3)}{\deg(sr^3)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(sr^4)\times d(sr^4)}{\deg(sr^4)}\right) + \left(\frac{e(sr^5)\times d(sr^5)}{\deg(sr^5)}\right)$$

$$+ \left(\frac{e(sr^6)\times d(sr^6)}{\deg(sr^6)}\right) + \left(\frac{e(sr^7)\times d(sr^7)}{\deg(sr^7)}\right)$$

$$= \left(\frac{2\times 16}{14}\right) + \left(\frac{2\times 20}{10}\right) + \left(\frac{2\times 20}{10}\right)\left(\frac{2\times 20}{10}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times 20}{10}\right) + \left(\frac{2\times 20}{10}\right)\left(\frac{2\times 20}{10}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times 16}{14}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right) + \left(\frac{2\times 16}{14}\right)$$

$$+ \left(\frac{2\times 16}{14}\right)$$

$$= 46{,}8$$

Berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa nilai jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator dihedral-16 $(\Upsilon(D_{16}))$ adalah 560 dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator dihedral-16 $(\Upsilon(D_{16}))$ adalah 46,8.

Berdasarkan jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$ diperoleh pola umum jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung D_{2n} sebagai berikut.

Tabel 3.7 Jumlah Jarak Eksentrikdan Indeks Jumlah Jarak EksentrikGraf non-Sentralisator Grup Dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$ dan n ganjil

n	Graf Non-Sentralisator	Jumlah Jarak Eksentrik	Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung
3	D_6	$44 = 72 - 28$ $= 8(9) - 33 + 5$ $= 8(3^2) - 11(3) + 5$	$10 = \frac{40}{4} = \frac{33+7}{4}$ $= \frac{63-30+7}{4}$ $= \frac{7(9)-10(3)+7}{3+1}$ $= \frac{7(3^2)-10(3)+7}{3+1}$
5	D_{10}	$150 = 200 - 50$ $= 8(25) - 55 + 5$ $= 8(5^2) - 11(5) + 5$	$22 = \frac{132}{6} = \frac{125+7}{6}$ $= \frac{175-50+7}{6}$ $= \frac{7(25)-10(5)+7}{6}$ $= \frac{7(5^2)-10(5)+7}{5+1}$
7	D_{14}	$320 = 392 - 72$ $= 8(49) - 77 + 5$ $= 8(7^2) - 11(7) + 5$	$35 = \frac{280}{8}$ $= \frac{273+7}{8}$ $= \frac{343-70+7}{8}$

			$= \frac{7(49) - 10(7) + 7}{8}$ $= \frac{7(7^2) - 10(7) + 7}{7 + 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$8n^2 - 11n + 5$	$\frac{7n^2 - 10n + 7}{n + 1}$

Tabel 3.8 Jumlah Jarak Eksentrikdan Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung Graf Non-Sentralisator Grup Dihedral D_{2n} dengan $n \geq 4$ dan n genap

n	Graf Non-Sentralisator	Jumlah Jarak Eksentrik	Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung
4	D_8	$128 = 160 - 32$ $= 10(16) - 48 + 16$ $= 10(4^2) - 12(4)$ $+ 16$	$21{,}3 = \frac{384}{18} = \frac{224 + 160}{18}$ $= \frac{512 - 288 + 176 - 16}{(3)(6)}$ $= \frac{8(4^3) - 18(4^2) + 44(4) - 16}{(4 - 1)(4 + 2)}$
6	D_{12}	$304 = 360 - 56$ $= 10(36) - 72 + 16$ $= 10(6^2) - 12(6)$ $+ 16$	$33{,}2 = \frac{1328}{40}$ $= \frac{1080 + 248}{40}$ $= \frac{1728 - 648 + 264 - 16}{(5)(8)}$ $= \frac{8(216) - 18(64) + 44(6) - 1}{(5)(8)}$ $= \frac{8(6^3) - 18(6^2) + 44(6) - 16}{(6 - 1)(6 + 2)}$

8	D_{16}	$560 = 640 - 80$ $= 10(64) - 96 + 16$ $= 10(8^2) - 12(8)$ $+ 16$	$46{,}8 = \frac{3280}{70}$ $= \frac{2944 + 336}{70}$ $= \frac{1096 - 1152 + 352 - 16}{(7)(10)}$ $= \frac{8(512) - 18(64) + 44(8) - 16}{(7)(10)}$ $= \frac{8(8^3) - 18(8^2) + 44(8) - 16}{(8-1)(8+2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$10n^2 - 12n + 16$	$\frac{8n^3 - 18n^2 + 44n - 16}{(n-1)(n+2)}$

Berdasarkan pengamatan pada beberapa graf non-sentralisator grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16}, maka diperoleh sentralisator dari setiap unsur-unsur di $\Upsilon(D_{2n})$ yang ditunjukkan sebagai berikut.

Untuk setiap grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$ dan $C_{D_{2n}}$ adalah himpunan sentralisator setiap unsur di $\Upsilon(D_{2n})$.

Jika n ganjil, maka berlaku:

(i) $C_{D_{2n}}(1) = D_{2n}$, karena $1 \circ a = a \circ 1; \forall a \in D_{2n}$.

(ii) $C_{D_{2n}}(r^i) = \{r^j | j = 1, 2, \dots, n\}$, untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

karena $r^i \circ r^k = r^k \circ r^i, i \neq k, k = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

(iii) $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, sr^i\}, \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Jika n genap, maka berlaku:

(iv) $C_{D_{2n}}(1) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^n\}$ karena $1 \circ r^i = r^i \circ 1; \forall i \neq \frac{n}{2}$.

(v) $C_{D_{2n}}(r^i) = \{1, r^j, \dots, r^{n-1}\}$, untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$C_{D_{2n}}(r^k) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^n\}$, untuk $k = \frac{n}{2}$,

Karena $r^i \circ r^k = r^k \circ r^i, \forall i \neq k, k \neq \frac{n}{2}$.

(vi) $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, r^i, s, sr^i\}, \forall i = \frac{n}{2}$ dan $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, r^i, s, sr^j\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Karena $sr^i \circ sr^k = sr^k \circ sr^i, \forall i \neq k, k \neq \frac{n}{2}$.

Berdasarkan definisi graf non-sentralisator untuk n ganjil dan $n \geq 3$ maka (i) berakibat bahwa titik 1 akan terhubung langsung ke r^i karena $C_{D_{2n}}(1) \neq C_{D_{2n}}(r^i)$ dan berdasarkan (ii) diperoleh bahwa r^i tidak terhubung langsung ke r^j karena $C_{D_{2n}}(r^i) = C_{D_{2n}}(r^j), \forall\ i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Selanjutnya, berdasarkan (iii) diperoleh bahwa sr^i terhubung langsung ke sr^j karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(sr^j)$ dan sr^i terhubung langsung ke r^j karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(r^j)$. Sehingga diperoleh bahwa $E(\Upsilon(D_{2n})) = \{(1, r^i), (1, sr^i), (r^i, sr^j), (sr^i, sr^j)\}$ untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Selanjutnya, berdasarkan definisi graf non-sentralisator untuk n genap diperoleh bahwa titik 1 terhubung langsung dengan r^i dengan $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, i = \frac{n}{2}$ karena $C_{D_{2n}}(1) \neq C_{D_{2n}}(r^i)$, untuk $i \neq \frac{n}{2}$. r^i terhubung langsung ke r^k dengan $k = \frac{n}{2}, i \neq k$ karena $C_{D_{2n}}(r^i) \neq C_{D_{2n}}(r^k)$, $k = \frac{n}{2}$. Selanjutnya sr^i akan terhubung langsung ke r^j dengan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(r^k)$, sr^i terhubung langsung dengan sr^k untuk $k \in \{1, 2, \dots, n\}, k \neq \frac{n}{2}$, dan sr^i terhubung langsung ke $sr^{\frac{n}{2}}$. Sehingga dapat diperoleh $E(\Upsilon(D_{2n})) = \{(1, r^i), (1, sr^i), (r^i, sr^j), (sr^i, sr^j)\}$ untuk n genap $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Berdasarkan sisi-sisi graf tersebut dapat dihitung jumlah jarak titik setiap unsur di D_{2n} yang ditunjukkan sebagai berikut

Untuk n ganjil, maka

1. Jarak 1 ke setiap titik $a \in D_{2n}$ dan $a \neq 1$ adalah 1, sebanyak $2n - 1$ unsur sehingga diperoleh

$$D(1) = \sum_{\substack{a \neq 1 \\ a \in D_{2n}}}^{n-1} d(1, a)$$

$$= (2n - 1) \cdot 1$$

$$= 2n - 1$$

2. Jarak r^i ke r^j untuk $i \neq j$ adalah 2, sebanyak $n - 1$ unsur, dan jarak r^i ke sr^j adalah 1, sebanyak n unsur. Sehingga diperoleh

$$D(r^i) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} d(r^i, r^j) + \sum_{j=1}^{n} d(r^i, sr^j)$$

$$= (n - 1)2 + n \cdot 1$$

$$= 2n - 2 + n$$

$$= 3n - 2$$

3. Jarak sr^i ke sr^j untuk $i \neq j$ adalah 1, sebanyak n unsur, dan jarak sr^i ke r^j adalah 1, sebanyak n unsur. Sehingga diperoleh

$$D(sr^i) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} d(sr^i, sr^j) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} d(sr^i, r^j)$$

$$= n \cdot 1 + n \cdot 1$$

$$= n + n = 2n$$

Untuk n genap, maka

1. Jarak 1 ke $r^i, i \neq \frac{n}{2}$ adalah 1, sebanyak $n-2$ unsur, 1 tidak terhubung langsung dengan $r^{\frac{n}{2}}$ sehingga jarak lintasan $1 - r^{\frac{n}{2}}$ adalah 2. Selanjutnya, jarak 1 ke sr^i adalah 1, sebanyak n unsur. Sehingga diperoleh

$$D(1) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\frac{n}{2}}}^{n-1} d(1, r^i) + d\left(1, r^{\frac{n}{2}}\right) + \sum_{j=1}^{n} d(1, sr^j)$$

$$= (n-2)1 + 2 + (n)1$$

$$= n - 2 + 2 + n$$

$$= 2n$$

2. Jarak sr^i ke 1 adalah 1, jarak sr^i ke r^j adalah 1, sebanyak n, jarak sr^i ke $sr^j, j \neq \frac{n}{2}$ adalah 1, sebanyak $n-2$ unsur, dan jarak sr^i ke $sr^{\frac{n}{2}}$ adalah 2 karena tidak terhubung langsung. Sehingga diperoleh

$$D(sr^i) = d(sr^i, 1) + \sum_{j=1}^{n-1} d(sr^i, r^j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq\frac{n}{2}}}^{i} d(sr^i, sr^j) + d\left(sr^i, sr^{\frac{n}{2}}\right)$$

$$= 1 + (n)1 + (n-2)1 + (n-3)1$$

$$= 1 + n + n - 2 + n - 3$$

$$= 3n - 4$$

Berdasarkan Gambar 1. Maka dapat diperoleh pola jumlah jarak masing-masing titik di $\Upsilon(D_{2n})$ yang ditunjukkan pada Lemma 3.1 sebagai berikut

Lemma 3.1

Misalkan $\Upsilon(D_{2n})$ adalah graf non-sentralisator dari grup dihedral dengan $n \geq 3$.

Jika n ganjil, maka berlaku:

$$D(u) = \begin{cases} 2n-1, & untuk\ u = 1 \\ n+1, & untuk\ u \in \{r^i, \dots, r^j\} \\ 2n-1, & untuk\ u \in \{sr^i, \dots, sr^j\} \end{cases}$$

Jika n genap, maka berlaku:

$$D(u) = \begin{cases} 2n, & untuk\ u = 1 \\ 3n-4, & untuk\ u \in \{r^i, \dots, r^j\} \\ 2n, & untuk\ u \in \{sr^i, \dots, sr^j\} \end{cases}$$

Untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bukti:

Jika n ganjil, maka berlaku:

(i) $C_{D_{2n}}(1) = D_{2n}$, karena $1 \circ a = a \circ 1; \forall a \in D_{2n}$.

(ii) $C_{D_{2n}}(r^i) = \{r^j | j = 1, 2, \dots, n\}$, untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

karena $r^i \circ r^k = r^k \circ r^i, i \neq k, k = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

(iii) $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, sr^i\}, \forall\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$

karena $sr^i \circ sr^j \neq \tilde{}r^j \circ sr^i, i \neq j$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Berdasarkan definisi graf non-sentralisator untuk n ganjil dan $n \geq 3$ maka (i) berakibat bahwa titik 1 akan terhubung langsung ke r^i karena $C_{D_{2n}}(1) \neq C_{D_{2n}}(r^i)$ dan berdasarkan (ii) diperoleh bahwa r^i tidak terhubung langsung ke r^j karena $C_{D_{2n}}(r^i) = C_{D_{2n}}(r^j), \forall\ i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Selanjutnya, berdasarkan (iii) diperoleh bahwa sr^i terhubung langsung ke sr^j karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(sr^j)$ dan sr^i terhubung langsung ke r^j karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(r^j)$. Sehingga diperoleh bahwa $E(\Upsilon(D_{2n})) =$

$\{(1, r^i), (1, sr^i), (r^i, sr^j), (sr^i, sr^j)\}$ untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Maka diperoleh,

a) Titik $1 \in D_{2n}$ terhubung langsung ke titik $r^i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, dan titik 1 terhubung langsung dengan $sr^j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga

$$D(1) = \sum_{i=1}^{n-1} d(1, r^i) + \sum_{j=1}^{n} d(1, sr^j)$$

$$= d(1, r) + d(1, r^2) + \cdots + d(1, r^{n-1}) + d(1, s) + d(1, sr) + \cdots + d(1, sr^{n-1})$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{2n-1}$$

$$= 1 \times (2n - 1)$$

$$= 2n - 1$$

b) Titik $r^i = \{r^i | i = 1, 2, \dots, n-1\}$. Pada $\Upsilon(D_{2n})$, titik r^i terhubung langsung dengan titik $sr^k, \forall k = 1, 2, \dots, n$ dan r^i terhubung langsung dengan titik 1. Namun titik r^i tidak terhubung langsung dengan titik $r^j, \forall j \neq i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga

$$D(r^i) = d(r, 1) + \sum_{j=1}^{n} d(r^i, r^j) + \sum_{k=1}^{n} d(r^i, sr^k)$$

$$= d(r, 1) + d(r, r^2) + \cdots + d(1, r^{n-1}) + d(r, s) + d(r, sr) + \cdots + d(r, sr^{n-1})$$

$$= 1 + 2 + \cdots + 2 + 1 + 1 + \cdots + 1$$

$$= 1 + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{n-2} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}$$

$$= 1 + 2(n - 2) + 1(n)$$

$= 1 + 2n - 4 + n$

$= 3n - 3$

c) Titik $sr^i = \{sr^i | i = 1, 2, \dots, n\}$. Pada $\Upsilon(D_{2n})$, titik sr^i terhubung langsung ke 1, titik sr^i terhubung langsung pula dengan titik $r^j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan sr^i terhubung langsung ke $sr^k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga

$$D(sr^i) = d(sr^i, 1) + \sum_{j=1}^{n-1} d(sr^i, r^j) + \sum_{k=1}^{n} d(sr^i, sr^k)$$

$$= d(sr, 1) + d(sr, r) + \dots + d(sr, r^{n-1}) + d(sr, s) + d(sr^2) + \cdots$$
$$+ d(1, sr^{n-1})$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1}$$

$$= 1(n) + 1(n-1)$$

$$= n + n - 1$$

$$= 2n - 1$$

Untuk n genap, maka berlaku

(i) $C_{D_{2n}}(1) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^n\}$ karena $1 \circ r^i = r^i \circ 1; \forall i \neq \frac{n}{2}$.

(ii) $C_{D_{2n}}(r^i) = \{1, r^j, \dots, r^{n-1}\}$, untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$C_{D_{2n}}(r^k) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^n\}$, untuk $k = \frac{n}{2}$,

karena $r^i \circ r^k = r^k \circ r^i, \forall i \neq k, k \neq \frac{n}{2}$.

(iii) $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, r^i, s, sr^i\}, \forall i = \frac{n}{2}$ dan $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, r^i, s, sr^j\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Karena $sr^i \circ sr^k = sr^k \circ sr^i, \forall i \neq k, k \neq \frac{n}{2}$.

Selanjutnya, berdasarkan definisi graf non-sentralisator untuk n genap diperoleh bahwa titik 1 terhubung langsung dengan r^i dengan $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, i = \frac{n}{2}$ karena $C_{D_{2n}}(1) \neq C_{D_{2n}}(r^i)$, untuk $i \neq \frac{n}{2}$. Juga diperoleh r^i terhubung langsung ke r^k dengan $k = \frac{n}{2}, i \neq k$ karena $C_{D_{2n}}(r^i) \neq C_{D_{2n}}(r^k)$, $k = \frac{n}{2}$. Selanjutnya sr^i akan terhubung langsung ke r^j dengan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(r^k)$, sr^i terhubung langsung dengan sr^k untuk $k \in \{1,\ 2, \dots, n\}, k \neq \frac{n}{2}$, dan sr^i terhubung langsung ke $sr^{\frac{n}{2}}$. Sehingga dapat diperoleh $E(\Upsilon(D_{2n})) = \{(1, r^i),, (r^i, sr^j), (sr^i, sr^j)\}$ untuk n genap $\in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Maka diperoleh

a) Titik$1 \in D_{2n}$ terhubung langsung dengan $r^i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, i \neq \frac{n}{2}$ dan 1 terhubung langsung dengan $sr^i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga diperoleh

$$D(1) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} d(1, r^i) + d\left(1, r^{\frac{n}{2}}\right) + \sum_{i=1}^{n} d(1, sr^i)$$
$$= (n-2)1 + 2 + (n)1$$
$$= n - 2 + 2 + n$$
$$= 2n$$

b) Titik $r^i = \{r^i | i = 1, 2, \dots, n-1\}, i \neq \frac{n}{2}$, maka pada $\Upsilon(D_{2n})$, titik $r^i, i \neq \frac{n}{2}$ terhubung langsung ke r^j, $r^i, i = \frac{n}{2}$ terhubung langsung dengan titik 1, r^i terhubung langsung dengan $sr^j, j \neq \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga

$$D(r^i) = \sum_{i=1}^{n-1} d(r^i, r^j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} d(r^i, r^j) + \sum_{\substack{i=1 \\ 1 \neq j}}^{n} d(r^i, sr^j)$$

$$= (n-2)1 + (n-2) + (n)1$$

$$= n - 2 + n - 2 + n$$

$$= 3n - 4$$

c) Titik $sr^i = \{sr^i | i = 1, 2, \ldots, n-1\}, i \neq n/2$, $i \neq \frac{n}{2}$, maka pada $\Upsilon(D_{2n})$, titik $sr^i, i \neq \frac{n}{2}$ terhubung langsung ke sr^j, $sr^i, i = \frac{n}{2}$ terhubung langsung dengan titik 1, sr^i terhubung langsung dengan $r^j, j \neq \{1, 2, \ldots, n\}$. Sehingga

$$D(sr^i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} d(sr^i, 1) + d\left(sr^i, sr^{\frac{n}{2}}\right) + \sum_{i=1}^{n} d(sr^i, r^i)$$

$$= (n-2)1 + 2 + (n)1$$

$$= n - 2 + 2 + n$$

$$= 2n$$

Berdasarkan jumlah jarak yang diperoleh dapat diketahui derajat titik ($\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(v)$) masing-masing titik di $\Upsilon(D_{2n})$ untuk n ganjil yaitu $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(1) = 2n - 1$, $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(r^i) = n + 1$, dan $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(sr^i) = 2n - 1$. Dan diperoleh pula derajat titik untuk n genap yaitu $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(1) = 2n - 2$, $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(r^i) = n + 2, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, i \neq \frac{n}{2}$, $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}\left(r^{\frac{n}{2}}\right) = 2n$, dan $\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(sr^i) = 2n - 2$. Selain itu, diperoleh pola eksentrisitas titik setiap unsur dari $\Upsilon(D_{2n})$ yang ditunjukkan pada Lemma 3.2 sebagai berikut

Lemma 3.2

Eksentrisitas setiap titik pada graf non-sentralisator dari grup dihedral $\Upsilon(D_{2n})$ adalah

(i) Untuk n ganjil dan $n \geq 3$, maka

$$e(1) = 1$$

$$e(r^i) = 2$$

$$e(sr^i) = 1$$

Untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(ii) Untuk n genap dan $n \geq 3$, maka

$$e(1) = e(r^i) = e(sr^j) = 2$$

Untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Bukti:

Kasus 1. Jika n ganjil

Untuk $1 \in D_{2n}$ pada n ganjil dan $n \geq 3$ maka $C_{D_{2n}}(1) = D_{2n}$, karena $1 \circ a = a \circ 1; \forall a \in D_{2n}$. Akibatnya, titik 1 akan terhubung langsung dengan semua titik di $\Upsilon(D_{2n})$ dan diperoleh $d(1, u) = 1, \forall u \in V(\Upsilon(D_{2n}))$. Selanjutnya $C_{D_{2n}}(r^i) = \{r^j | j = 1, 2, \dots, n\}$, untuk $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ dan $C_{D_{2n}}(r^j) = \{r^i | i = 1, 2, \dots, n\}$, untuk $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ karena $r^i \circ r^k = r^k \circ r^i, i \neq k, k = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Sehingga setiap titik r^i tidak terhubung langsung ke r^k, maka terdapat lintasan yang menghubungkan $r^i - r^k$ dengan $d(r^i, r^k) > 1$. Selanjutnya $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, sr^i\}, \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mengakibatkan setiap titik sr^i akan terhubung langsung ke sr^k untuk $i \neq k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan mengakibatkan adanya lintasan yang menghubungkan $sr^i - sr^k$ dengan $d(sr^i, sr^k) = 1$. Sehingga diperoleh $e(1) = 1, e(r^i) = 2, e(sr^i) = 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Kasus 2. Jika n genap

Untuk titik $1 \in D_{2n}$ pada n genap dan $n \geq 3$ maka $C_{D_{2n}}(1) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^n\}$ karena $1 \circ r^i = r^i \circ 1; \forall i \neq \frac{n}{2}$, akibatnya diperoleh bahwa titik 1 tidak terhubung langsung dengan r^i dengan $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, i = \frac{n}{2}$ karena $C_{D_{2n}}(1) \neq C_{D_{2n}}(r^i)$ untuk $i \neq \frac{n}{2}$. Sehingga $d(1, r^i) > 1, r^i = \frac{n}{2}$ karena $C_{D_{2n}}(1) \neq C_{D_{2n}}(r^i), i = \frac{n}{2}$.$C_{D_{2n}}(r^i) = \{1, r^j, \dots, r^{n-1}\}$ untuk $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $C_{D_{2n}}(r^k) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^n\}$ untuk $k = \frac{n}{2}$, karena $r^i \circ r^k = r^k \circ r^i, \forall i \neq k, k \neq \frac{n}{2}$. Maka, $d(r^i, r^k) > 1, k = \frac{n}{2}, i \neq k$, karena tidak terhubung langsung akibat $C_{D_{2n}}(r^i) = C_{D_{2n}}(r^k)$, $k = \frac{n}{2}$. Selanjutnya, $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, r^i, s, sr^i\}, \forall i = \frac{n}{2}$ dan $C_{D_{2n}}(sr^i) = \{1, r^i, s, sr^j\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Karena $sr^i \circ sr^k = sr^k \circ sr^i, \forall i \neq k, k \neq \frac{n}{2}$. Selanjutnya sr^i akan terhubung langsung ke r^j dengan $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ karena $C_{D_{2n}}(sr^i) \neq C_{D_{2n}}(r^k)$ dan sr^i tidak terhubung langsung ke $sr^{\frac{n}{2}}$ karena $C_{D_{2n}}(sr^i) = C_{D_{2n}}\left(r^{\frac{n}{2}}\right)$ Sehingga dapat diperoleh $e(1) = e(r^i) = e(sr^i) = 2, i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Teorema 3.1

Untuk setiap $n \geq 3$, jumlah jarak eksentrik pada graf non-sentralisator grup dihedral $\xi^d(\Upsilon(D_{2n}))$ adalah

$$\xi^d(\Upsilon(D_{2n})) = \begin{cases} 8n^2 - 11n + 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 10n^2 - 12n + 16, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1. Jika n ganjil

Berdasarkan Lemma 3.1, 3.2 maka diperoleh

$$\xi^d \Upsilon(D_{2n}) = \sum_{u \in \Upsilon(D_{2n})} e(u)D(u)$$

$$= e(1)D(1) + \sum_{i=1}^{n-1} e(r^i)D(r^i) + \sum_{j=1}^{n} e(sr^j)D(sr^j)$$

$$= 1(2n-1) + 2(3n-3)(n-1) + 1(2n-1)(n)$$

$$= 2n - 1 + 6n^2 - 12 + 6 + 2n^2 - n = 8n^2 - 11n + 5$$

$\therefore\ \xi^d \Upsilon(D_{2n}) = 8n^2 - 11n + 5$ jika n ganjil.

Kasus 2. Jika $n$genap

Berdasarkan Lemma 3.1, 3.2 maka diperoleh

$$\xi \Upsilon(D_{2n}) = \sum_{u \in \Upsilon(D_{2n})} e(u)D(u) = e(1)D(1) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} e(r^i D(r^i) + \sum_{j=1}^{n} e(sr^i)D(sr^i)$$

$$= (2)2(2n) + (n-2)(2)(3n-4) + n(2)(2n)$$

$$= 8n + (2n-4)(3n-4) + n(2n^2)$$

$$= 8n + 6n^2 - 12n - 8n + 16 + 4n^2$$

$$= 10n^2 - 12n + 16$$

$\therefore\ \xi^d \Upsilon(D_{2n}) = 10n^2 - 12n + 16$ jika n genap.

Teorema 3.2

Untuk setiap $n \geq 3$, jumlah jarak eksentrik terhubung pada graf non-sentralisator grup dihedral $\xi^{sv}(\Upsilon(D_{2n}))$ adalah

$$\xi(\Upsilon(D_{2n})) = \begin{cases} \dfrac{7n^2 - 10n + 7}{n+1}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \dfrac{8n^3 - 18n^2 + 44n - 16}{(n-1)(n+2)}, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1. Jika n ganjil

Berdasarkan Lemma 3.1, 3.2, dan derajat titik maka akan diperoleh

$$\xi^{sv}\Upsilon(D_{2n}) = \sum_{u \in \Upsilon(D_{2n})} \frac{e(u)D(u)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(u)}$$

$$= \frac{e(1)D(1)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{e(r^i)D(r^i)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(r^i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{e(sr^j)D(sr^j)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(sr^j)}$$

$$= \frac{1(2n-1)}{n+2} + \frac{2(3n-3)(n-1)}{n+1} + \frac{1(2n-1)(n)}{n+2}$$

$$= \frac{(2n-1)(n+1) + (6n^2 - 12n + 6)(2n-1) + (2n-1)(n)(n+1)}{(2n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{n + 1 + 6n^2 - 12n + 6 + n^2 + n}{n+1}$$

$$= \frac{7n^2 - 10n + 7}{n+1}$$

$\therefore\ \xi^{sv}\Upsilon(D_{2n}) = \frac{7n^2-10n+7}{n+1}$ jika n ganjil.

Kasus 2.Jika n genap

Berdasarkan Lemma 3.1, 3.2, serta derajat titik maka akan diperoleh

$$\xi^{sv}\Upsilon(D_{2n}) = \sum_{u \in \Upsilon(D_{2n})} \frac{e(u)D(u)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(u)}$$

$$= \frac{e(1)D(1)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(1)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \frac{n}{2}}}^{n-1} \frac{e(r^i)D(r^i)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(r^i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{e(sr^i)D(sr^i)}{\deg_{\Upsilon(D_{2n})}(sr^i)}$$

$$= \frac{(2)2(2n)}{2n-2} + \frac{(n-2)(2)(3n-4)}{n+2} + \frac{n(2)(2n)}{2n-2}$$

$$= \frac{(2)2(2n) + n(2)(2n)}{2n-2} + \frac{(n-2)(2)(3n-4)}{n+2}$$

$$= \frac{(n+2)(2)(2n)}{2n-2} + \frac{6n^2 - 20n + 16}{n+2}$$

$$= \frac{(n+2)(2)(2n)}{(2)(n-1)} + \frac{6n^2 - 20n + 16}{n+2}$$

$$= \frac{2n^2 + 4n}{n-1} + \frac{6n^2 - 20n + 16}{n+2}$$

$$= \frac{(n+2)(2n^2 + 4n) + (n-1)(6n^2 - 20n + 16)}{(n-1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^3 + 8n^2 - 8n + 6n^3 - 26n^2 - 36n - 16}{(n-1)(n+2)}$$

$$= \frac{8n^3 - 18n^2 - 44n - 16}{(n-1)(n+2)}$$

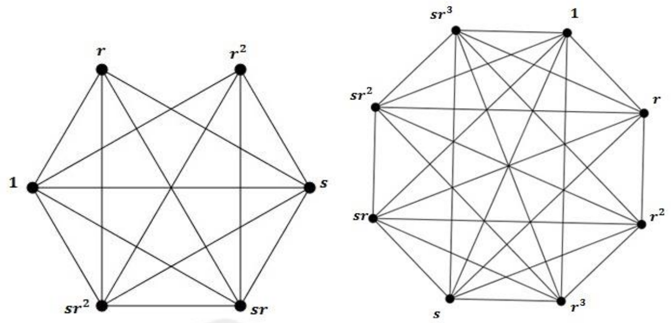
$\therefore \xi^{sv}\Upsilon(D_{2n}) = \frac{8n^3 - 18n^2 - 44n - 16}{(n-1)(n+2)}$ jika n genap.

3.2 Nilai-nilai Keislaman pada Teori Graf

Sebagaimana yang telah dianjurkan dalam surat ar-Rum bahwasanya manusia dimuka bumi memiliki kodrat untuk saling menyambung hubungan baik antar sesama. Cara–cara yang dapat dilakukan selain menyambung silaturrahmi ialah dengan menyampaikan hak-hak kerabat. Selain itu silaturrahmi antar sesama manusia dapat dilakukan dengan cara menyambung tali persaudaraan sesama satu keyakinan. Dalam agama islam diajarkan bahwa setiap makhluk individu ialah saudara dalam konteks agama yang sama. Oleh karena itu, manusia dianjurkan menyambung tali persaudaraan dengan baik dalam kehidupan sehari-hari.

Mencari nilai jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung haruslah pada graf yang terhubung. Jika suatu graf tidak terhubung maka nilai jumlah jarak eksentrik tidak dapat dicari dari graf tersebut. Oleh karena itu, keterhubungan antara titik dengan titik lainnya pada graf diperlukan sisi untuk menjadikan graf tersebut menjadi graf terhubung. Semakin banyak titik yang digunakan dalam graf maka akan semakin banyak pula sisi yang menghubungkan titik satu dengan titik yang ada dalam graf. Akibatnya, nilai jumlah jarak eksentrik dalam graf tersebut semakin besar pula dan berlaku sama pada nilai indeks jumlah jarak eksentrik terhubung suatu graf.

Sama halnya dengan silaturrahmi, semakin banyak relasi seseorang dalam menyambung hubungan silaturrahmi maka akan dipermudah rizkinya dan dipanjangkan umurnya.



Gambar 3.7 Graf $\Upsilon(D_6)$ dan Graf $\Upsilon(D_8)$

Misalkan pada gambar 3.7 merupakan representasi dari silaturrahmi dalam bentuk graf non-sentralisator. Dimisalkan bahwa titik 1 dan titik r, r^2, rs dan titik-titik yang ada di graf adalah saudara. Maka titik 1 dan titik yang ada dalam graf $\Upsilon(D_6)$ atau $\Upsilon(D_8)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika saling bersilaturrahmi. Graf $\Upsilon(D_8)$ memiliki nilai jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung lebih besar dibandingkan dengan graf $\Upsilon(D_6)$ karena $\Upsilon(D_8)$ memiliki anggota dan keterhubungan lebih banyak dibandingkan $\Upsilon(D_6)$.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan beberapa pola dari jumlah jarak eksentrikdan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator pada grup dihedral D_{2n}. Pola umum jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung graf non-sentralisator dari grup dihedral dengan $n \geq 3$ adalah

a. $\xi^{d}(\Upsilon(D_{2n})) = \begin{cases} 8n^2 - 11n + 5, n \ ganjil \\ 10n^2 - 12n + 16, n \ genap \end{cases}$

b. $\xi^{sv}(\Upsilon(D_{2n})) = \begin{cases} \frac{7n^2 - 10n + 7}{n+1}, n \ ganjil \\ \frac{8n^3 - 18n^2 + 44n - 16}{(n-1)(n+2)}, n \ genap \end{cases}$

4.2 Saran

Penelitian ini membahas pokok masalah jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung dari graf non-sentralisator dari grup dihedral. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji jumlah jarak eksentrik dan indeks jumlah jarak eksentrik terhubung pada dari graf yang dibangun dari grup berhingga lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, N.N. dan Nofandika, F.F. 2009. Teori Graf. Malang: UIN Malang Press.

Bielak, H.,dan Broniszewska, K. 2017. *Eccentric Distance Sum Index for Some Clasess of Connected Graphs*, LXXXI(2),25-32.

Behnaz, Tolue. 2015. *The Non-Centralizer Graph of Finite Group*. Mathematic Reports 17(67), 3, 265-275.

Chartrand, G. dan Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton:CRC Press.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice Hall, Inc.

Gallian, J. A. 2013. *Contemporary Abtract Algebra Nintth Edition*. Boston,: Cengage Learning.

Gao, W., Liang, L., dan Gao, Y. 2014. Total Eccentricity, Adjacent Eccentric Distance Sum and Gutman Index of Certain Special Molecular Graphs. *The BioTechnology: An Indian Journal*, 10(9), 3837-3845.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra*. Canada: Nelson Education, Ltd.

Gupta, S., Singh, M., dan Madan, A. K. 2002. Eccentric Distance Sum: A Novel Graph Invariant for Predicting Biological and Physical Properties. *Journal of Mathematica Analisys and Applications*, 275, 386-401.

Hidayati, Nurul. 2019. *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* pada Graf Commuting dan non Commuting dari Grup Dihedral. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Bahreisy, H. Salim. 1998. Terjemah singkat Tafsier Ibnu Katsier Jilid 4. Kuala Lumpur: Victory Agency.

Khasana, Ika Nur. 2018. Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ dengan p, q Bilangan Prima. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Kurfia, Mustika Ana. 2017. *Eccentric Distance Sum* Pada Komplemen Graf Invers Grup Dihedral. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Omar, S. M. S., dan Sarmin, H. 2014. *The Centralizer Graph of Finite Non-abelian Groups*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 529-534.

Safitri, Eka Restu. 2018. *Eccentric Distance Sum* Pada Graf Dari Latis Himpunan Kuasa. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Sardana, S., dan Madan, A. K. 2003. Relation of Wiener's Index and Adjacent Eccentric Distance Sum Index with Nitroxide Free Radicals and TheirPrecursor as Modifiers Againt Oxidative Damage. *Journal of Molecular Structure*: THEOCHIEM (Vol. 624).

Yu, G., dan Feng, L. 2011. On The Eccentric Distance Sum of Graph ⋆. *Journal of Mathematic Analysis and Application*, 381, 590-600.

RIWAYAT HIDUP

Dwi Noviana, biasa dipanggil Dwi atau Novi, lahir di Blitar pada tanggal 14 November 1996. Ia tinggal di Dusun Parang RT 01 RW 01 Desa Semen Kecamatan Gandusari Kabupaten Blitar. Anak bungsu dari bapak Bagas Setiyo dan ibu Samini serta adik dari Agung Sasongko.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Semen 05 dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan sekolah di SMPN 1 Gandusari, lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Talun sekaligus menempuh pendidikan nonformal di Pondok Pesantren Putra Putri Mamba'ul Hisan Kaweron Talun dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan sekolah tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, menempuh pendidikan nonformal di Pondok Pesantren Putri Al-Hikmah Al-Fatimiyyah dan aktif menjadi pengurus Madrasah Diniyah Al-Hikmah hingga sekarang. Pernah menjabat sebagai bendahara Madrasah Diniyah Al-Hikmah periode 2017/2018 dan menjadi ketua pelaksana Musabaqoh Gebyar Muharram se-Malang Raya pada tahun 2018. Dapat dihubungi lewat dwinoviana522@gmail.com .

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dwi Noviana
NIM : 15610048
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Jumlah Jarak Eksentrik dan Indeks Jumlah Jarak Eksentrik Terhubung Graf Non-Sentralisator dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	10 Mei 2019	Konsultasi BAB I, II, III	1.	
2.	2 September 2019	Konsultasi Ayat BAB I, II		2.
3.	2 September 2019	Konsultasi BAB III	3.	
4.	3 September 2019	ACC Agama BAB I, II		4.
5.	3 September 2019	ACC Seminar Proposal	5.	
6.	4 Desember 2019	Konsultasi BAB I, II, III		6.
7.	11 Desember 2019	Konsultasi BAB III	7.	
8.	12 Desember 2019	Konsultasi Agama BAB I,II, III		8.
9.	13 Desember 2019	Konsultasi BAB III	9.	
10.	17 Desember 2019	ACC Keagamaan		10.
11.	18 Desember 2019	ACCKeseluruhan	11.	

Malang, 18 Desember 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001