

**KONSTANTA VON NEUMANN-JORDAN DAN MODIFIKASINYA
DI RUANG MORREY KECIL**

SKRIPSI

**OLEH
AMINAHTUZ ZAHRO
NIM. 16610088**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**KONSTANTA VON NEUMANN-JORDAN DAN MODIFIKASINYA
DI RUANG MORREY KECIL**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH
AMINAHTUZ ZAHRO
NIM.16610088**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**KONSTANTA VON NEUMANN-JORDAN DAN MODIFKASINYA
DI RUANG MORREY KECIL**

SKRIPSI

Oleh
AMINAHTUZ ZAHRO
NIM. 16610088

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 01 Mei 2020

Pembimbing I,

Pembimbing II,



Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003



Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.
NIP. 19571005 198203 1 006

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

**KONSTANTA VON NEUMANN-JORDAN DAN MODIFKASINYA
DI RUANG MORREY KECIL**

SKRIPSI

Oleh
AMINAHTUZ ZAHRO
NIM. 16610088

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 12 Mei 2020

Penguji Utama : Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.

.....

Ketua Penguji : Dewi Ismiarti, M.Si.

.....

Sekretaris Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

.....

Anggota Penguji : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aminahtuz Zahro

NIM : 16610088

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Konstanta Von Neumann-Jordan dan Modifikasinya di Ruang Morrey Kecil,

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas tindakan tersebut.

Malang,

Yang membuat pernyataan,



Aminahtuz Zahro

NIM. 16610088

MOTO

“Menyia-nyiakan waktu lebih buruk dari kematian. Karena kematian memisahkanmu dari dunia, sementara menyia-nyiakan waktu memisahkanmu dari Allah” (Imam Ibn Al-Qayyim).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Abi Hasan Zailani Alkaff, ummah Halimah Bafaqih, serta adik-adik tersayang
Fatmatuz Zahro Alkaff, Zaenah Azzahro Alkaff, Fairuzzah Azzahro Alkaff,
Nazua Azzahro Alkaff, yang selalu mendukung dan memberikan semangat yang
sangat berarti bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Segala puji dan syukur bagi kehadiran Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayahNya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis memperoleh berbagai bimbingan dan arahan dari banyak pihak. Oleh karenanya, ucapan terimakasih yang besar dan penghargaan yang sangat tinggi penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak arahan, nasihat, motivasi serta berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku dosen pembimbing II yang juga telah memberikan banyak arahan, nasihat serta ilmu dan pengalaman kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan dukungan doa, semangat, dan motivasi kepada penulis hingga saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2016, terutama Arina Fitri Rozani, Weka Dwi Kartika “Istrinya Zoro”, segenap keluarga tersayang “Bukan Keluarga Cemara”, Khanifatun Maisyaroh, Putri Lestari, Ilmiatul Muhibah dan Hellyatus Saadah yang telah bersedia berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih atas segala waktu yang diberikan dan kenangan indah yang tak dapat disebutkan dalam mengisi kesenggangan untuk menggapai sebuah impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, baik secara moril maupun materiil.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat baik bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamu’alaikum Warahmatullah Wabarakatuh.

Malang,

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
المخلص	xiv
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Ruang Metrik (Jarak).....	8
2.1.1 Bola Buka dan Himpunan Buka.....	9
2.1.2 Persekitaran (<i>Neighborhood</i>)	10
2.1.3 Himpunan Buka.....	10
2.1.4 Himpunan Tertutup	12
2.2 Ukuran Lebesgue	13
2.2.1 Ukuran Luar Lebesgue	14
2.3 Fungsi Terukur Lebesgue	15
2.4 Integral Lebesgue.....	17
2.5 Ruang Lebesgue	20
2.6 Ruang Vektor.....	21
2.7 Ruang Bernorma.....	26
2.8 Ruang Hilbert	30
2.8.1 Ruang Hasil Kali Dalam	30

2.8.2	Ketaksamaan Cauchy-Schwarz	31
2.9	Ruang Morrey	32
2.10	Ruang Morrey Kecil	33
2.11	Perumuman Konstanta Von Neumann-Jordan dan Konstanta Modifikasi Von Neumann Jordan	35
2.12	Pendeskripsian Bumi dalam Al-Qur'an.....	39

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Perumuman Konstanta Von Neumann-Jordan dan Konstanta Modifikasi von Neumann-Jordan di Ruang Morrey Kecil.....	42
-----	--	----

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	54
4.2	Saran	54

DAFTAR PUSTAKA.....	55
----------------------------	-----------

ABSTRAK

Zahro, Aminahtuz. 2020. **Konstanta Von Neumann-Jordan dan Modifikasinya di Ruang Morrey Kecil**. Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

Kata kunci: konstanta geometri, ruang Morrey kecil, konstanta von Neumann-Jordan

Konstanta geometri merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk mempelajari sifat-sifat geometri dari ruang Banach. Beberapa peneliti telah mendefinisikan berbagai konstanta geometri di ruang Banach, salah satunya yaitu perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan. Konstanta tersebut berlaku untuk setiap ruang Banach. Disamping itu terdapat beberapa definisi ruang lain yang merupakan ruang Banach, seperti ruang Morrey kecil. Oleh karenanya, pada penelitian ini penulis ingin mencari nilai konstanta tersebut di ruang Morrey kecil. Namun pada penelitian ini, penulis tidak langsung mengambil nilai perumuman secara keseluruhan, penulis membatasi nilai perumumannya hanya sampai dengan empat. Dalam pencarian nilai konstantanya, penulis mengikuti definisi konstanta yang diberikan dengan mendefinisikan beberapa norma di ruang Morrey kecil. Sebagai hasil, penulis memperoleh nilai yang sama untuk perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil yaitu 2.

ABSTRACT

Zahro, Aminahtuz. 2020. **Von Neumann-Jordan Constant dan Its Modified on Morrey Small Spaces.** Final project/thesis. Mathematics Departement Science and Technology Faculty, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

Keywords: geometric constant, small Morrey spaces, von Neumann-Jordan constant.

Geometric constant is one way to study geometric properties of Banach spaces. Some of researchers have defined various geometric constants on Banach spaces, for example the generalized von Neumann-Jordan constant and the generalized modified von Neumann-Jordan constant. Both constants is hold for every Banach spaces. Beside of that, there are some of definitions of the other spaces which are Banach spaces, like small Morrey spaces. Hence, in this thesis, the author discussed both constants on small Morrey spaces. However, the author did not take the whole generalized value, but author restricted the generalized value up to four. In obtaining the constants, the author followed the definition of constants by defining some norma functions on small Morrey spaces. As the result, the author obtained the same value of generalized von Neumann-Jordan constant and generalized of modified von Neumann-Jordan constant on small Morrey spaces that is 2.

الملخص

الزهرى، أمينة. ٢٠٢٠. تعديل ثابت فون نيومان-الأردن (Von Neumann-Jordan) على مساحات موري الصغيرة. البحث الجامعي. كلية العلوم والتكنولوجيا قسم الرياضيات، جامعة مولانا الإسلامية مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) دكتور خير الرحمن. (٢) دكتور الحاج ترموذي.

الكلمات المفتاحية: الثابت الهندسي، مساحات موري الصغيرة، ثابت فون نيومان-الأردن (von Neumann Jordan).

الثابت الهندسي هو إحدى الطرق لدراسة الخصائص الهندسية لمساحات باناش. حدد بعض الباحثين من الثوابت الهندسية في مساحات باناش، على سبيل المثال تعميم ثابت فون نيومان-الأردن المعموم و ثابت فون نيومان-الأردن المعدل. إنّ الثوابت قابلة للتطبيق لكل مسافات باناش. إلى جانب ذلك، هناك بعض التعريفات للمساحات الأخرى وهي مساحات باناش، مثل مساحات موري الصغيرة. ومن ثم، في هذا البحث، ستبحث الباحثة قيمة الثوابت في مساحات موري الصغيرة. في هذا البحث، ما أخذت الباحثة قيمة التعميم شمولياً، ولكن حددت قيمتها إلى ٤ قيم. في بحث عن قيمة الثوابت، اتبعت الباحثة تعريف الثابت الموصول بتعريف بعض المعايير في مساحات موري الصغيرة. ونتيجة على ذلك، حصلت الباحثة على نفس قيمة في تعميم ثابت فون نيومان-الأردن المعمم وتعميم ثابت فون نيومان-الأردن المعدل في مساحات موري الصغيرة و هو ٢.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mendesripsikan suatu ruang, tentunya diperlukan pengetahuan mengenai karakteristik dan sifat-sifat dari ruang tersebut. Pencarian karakteristik suatu ruang dapat dilakukan dengan mengkaji sifat-sifat geometris dari ruang tersebut. Ruang yang sering dikaji dalam bidang analisis adalah ruang Lebesgue, dimana ruang Lebesgue merupakan ruang Banach. Secara umum, pembelajaran mengenai sifat-sifat geometris dari ruang Banach tidaklah mudah, namun terdapat cara lain untuk mempelajari sifat-sifat tersebut yakni dengan mencari konstanta atau modulusnya (Yang, 2016).

Konstanta atau modulus dapat digunakan untuk mempelajari struktur geometri dari ruang Banach. Konstanta geometri yang cukup banyak dipelajari oleh para peneliti adalah konstanta von Neumann-Jordan. Bermula dari penemuan Jordan dan von Neumann yang terkenal mengenai hasil kali dalam, lalu Clarkson (1937), memperkenalkan konstan von Neumann-Jordan pada ruang Banach X sebagai konstanta terkecil yang diestimasi sebagai

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq C$$

dan terpenuhi untuk setiap $x, y \in X$ dengan $(x, y) \neq (0, 0)$. Secara ekuivalen, Clarkson juga mendefinisikan konstanta von Neumann-Jordan yaitu

$$C_{NJ}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : x, y \in X \text{ dengan } (x, y) \neq (0, 0) \right\}$$

dengan $1 \leq C_{NJ} \leq 2$ terpenuhi untuk setiap ruang Banach X , dan $C_{NJ} = 1$ jika hanya jika X merupakan ruang Hilbert (Kato, 1997). Selanjutnya konstanta von Neumann-Jordan tersebut diperumum oleh Cui, dkk (2015), yang didefinisikan sebagai:

$$C_{NJ}^{(k)}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|_X^k + \|x-y\|_X^k}{2^{k-1}(\|x\|_X^k + \|y\|_X^k)} : x, y \in X \setminus \{0\} \right\}$$

dimana $1 \leq k < \infty$ dengan $C_{NJ}^{(k)}(X) \leq 2$ terpenuhi untuk setiap ruang Banach X .

Sebelum konstanta von Neumann-Jordan diperumum, Alonso (2008) telah memodifikasi konstanta von Neumann-Jordan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$C'_{NJ}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2}{4} : x, y \in X, \|x\|_X = \|y\|_X = 1 \right\}$$

dengan $1 \leq C'_{NJ}(X) \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ terpenuhi untuk setiap ruang Banach X , dan $C_{NJ} = 1$ jika hanya jika X merupakan ruang Hilbert. Lebih lanjut, konstanta tersebut diperumum oleh Yang, dkk (2017), yang didefinisikan dengan:

$$\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|_X^k + \|x-y\|_X^k}{2^k} : x, y \in X, \|x\|_X = \|y\|_X = 1 \right\}$$

dimana $1 \leq k < \infty$. Yang, dkk (2017) pun telah membuktikan bahwa untuk $k > 1$

dan $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$, maka $\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) \leq C_{NJ}^{(k)} \leq 2^{2-k} \left[1 + \left(2^{\frac{1}{l}} \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)^l \right]^{k-1}$

terpenuhi untuk setiap ruang Banach X .

Definisi-definisi konstanta tersebut berlaku hanya pada ruang Banach, hal ini pada akhirnya menarik banyak peneliti untuk mencari sifat geometri pada ruang topologi lain, dimana ruang tersebut juga ruang Banach. Seperti halnya C.B.

Morrey (1938) memperkenalkan perumuman dari ruang Lebesgue yaitu $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q < \infty$. Kemudian Nakai (1994) memperkenalkan ruang Morrey yang diperumum dimana ruang tersebut juga merupakan salah satu perumuman dari ruang Lebesgue. Selanjutnya Sawano (2018) mendefinisikan perumuman dari ruang Morrey yang cukup berbeda dari Nakai yaitu dengan membatasi jari-jari dalam definisi ruang Morrey pada interval $(0,1)$, ruang ini kemudian dinamai dengan ruang Morrey kecil. Dikarenakan definisi ruang Morrey kecil berasal dari perumuman ruang Lebesgue yang merupakan ruang Banach, maka ruang Morrey kecil pun merupakan ruang Banach (Sawano, 2018).

Penelitian untuk mempelajari sifat-sifat geometri pun terus berlanjut dengan mencari nilai konstanta geometrinya. Seperti halnya konstanta von Neumann-Jordan yang telah dihitung oleh beberapa peneliti di beberapa ruang, diantaranya pada penelitian baru-baru ini, Gunawan (2019) menghitung beberapa nilai konstanta geometri termasuk diantaranya konstanta von Neumann-Jordan di ruang Morrey dan di ruang Morrey kecil. Sebelumnya Mikio Kato dan Lech Maligranda (2001) pun menghitung konstanta von Neumann-Jordan di ruang barisan Lorentz, lalu Chansen Yang dan Fenghui Wang (2016) juga mencari konstanta tersebut pada kelas ruang Day-James. Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, penulis akhirnya ingin mencari nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil, namun dengan membatasi nilai perumumannya yaitu $1 \leq k \leq 4$.

Pencarian nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil merupakan salah satu cara dalam pendeskripsian sifat-sifat geometri ruang tersebut. Hal ini sejalan dengan

cara Allah dalam mendeskripsikan bumi yang tertuang dalam al-Qur'an pada surat az-Zumar ayat 5, yaitu:

خَلَقَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ بِالْحَقِّ يُكَوِّرُ اللَّيْلَ عَلَى النَّهَارِ وَيُكَوِّرُ النَّهَارَ عَلَى اللَّيْلِ وَسَخَّرَ الشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ يَجْرِي لِأَجَلٍ مُّسَمًّى أَلَا هُوَ الْعَزِيزُ الْغَفَّارُ

“Dia menciptakan langit dan bumi dengan (tujuan) yang benar; Dia menutupkan malam atas siang dan menutupkan siang atas malam dan menundukkan matahari dan bulan, masing-masing berjalan menurut waktu yang ditentukan. Ingatlah Dialah Yang Maha Perkasa lagi Maha Pengampun.”

Dalam ayat tersebut, Allah mendeskripsikan bumi secara implisit melalui proses pergantian siang dan malam dengan kata ‘يُكَوِّرُ’ yang makna asalnya adalah melilitkan sesuatu yang bulat. Sesuatu yang bulat yang dimaksudkan yakni bumi, dalam artian pergantian siang dan malam ini terus melilit atau mengitari bumi.

Penegasan makna kata ‘يُكَوِّرُ’ pada akhirnya menjelaskan dengan pasti bentuk dari bumi yang Allah coba deskripsikan kepada hambaNya, sehingga hal ini menyiratkan bahwa pergantian siang dan malam merupakan salah satu karakteristik bumi. Dengan menjelaskan satu karakteristik bumi, maka dapat diketahui bentuk bumi yang Allah deskripsikan.

Berdasarkan hikmah dari surat az-Zumar ayat 5 tersebut, dapat dikatakan bahwa untuk mendeskripsikan ruang, akan membutuhkan satu atau dua karakteristik dari ruang yang akan dideskripsikan. Oleh karena itu, pada penelitian ini, penulis akan mencari nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan yang didefinisikan oleh Cui, dkk (2015) dan perumuan konstanta modifikasi von Neumann-Jordan yang didefinisikan oleh Yang, dkk (2017) di ruang Morrey kecil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini yaitu bagaimana perumuman konstanta von Neumann-Jordan $(C_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan $(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ di ruang Morrey kecil?

1.3 Tujuan

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah tersebut, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana perumuman konstanta von Neumann-Jordan $(C_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan $(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ di ruang Morrey kecil.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yakni hanya mencari dua nilai konstanta geometri, yakni perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil. Penulis juga hanya membatasi nilai perumumannya yaitu untuk $1 \leq k \leq 4$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yakni sebagai tambahan bahan kajian literatur bagi peneliti selanjutnya mengenai konstanta geometri di ruang Morrey kecil.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu studi literatur (*literature study*). Studi literatur (*literature study*) adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelolah bahan penelitian. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk mencari konstanta perumuman von Neumann-Jordan $(C_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ dan konstanta perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan $(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ di ruang Morrey kecil, yakni sebagai berikut:

1. Membuktikan nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil dengan mendefinisikan beberapa fungsi di ruang Morrey kecil.
2. Membuktikan nilai perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil dengan definisi fungsi yang digunakan pada pembuktian nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil.
3. Menarik kesimpulan dari pembuktian.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, terdapat empat bagian sistematika penulisan yang digunakan, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bagian ini berisikan latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini berisikan teori-teori yang akan digunakan sebagai pendukung dalam menjawab rumusan masalah. Dalam penelitian ini, pustaka yang dikaji meliputi; ruang metrik, ukuran Lebesgue, ruang Lebesgue, ruang vektor, ruang bernormaa, ruang Hilbert, ruang Morrey kecil, dan kajian al-Qur'an terkait penelitian ini.

Bab III Pembahasan

Pada bagian ini akan diuraikan pembuktian nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan sesuai dengan langkah-langkah yang tertulis dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Pada bagian penulisan terakhir ini berisikan kesimpulan dari uraian pembahasan, serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik (Jarak)

Definisi 2.1 (Kadets, 2018: 12): Suatu jarak atau metrik pada himpunan X merupakan suatu fungsi

$$\begin{aligned} d: X^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi sifat-sifat berikut,

- a. $d(x, x) = 0$;
- b. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;
- c. $d(y, x) = d(x, y)$;
- d. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$.

Sifat-sifat tersebut dinamakan aksioma metrik. Kemudian, suatu himpunan yang dilengkapi dengan suatu metrik dinamakan ruang metrik (Kadets, 2018: 12). Suatu ruang metrik tidak hanya sebuah himpunan, yang mana unsur-unsurnya tidak memiliki relasi satu sama lain, melainkan suatu himpunan X yang dilengkapi dengan struktur berbeda, yang jaraknya d . Fungsi jarak tersebut mengembangkan suatu ide mengenai persekitaran titik. Diberikan suatu titik a dan suatu bilangan $r > 0$, maka dapat ditunjukkan adanya titik-titik dekat titik a yang memenuhi $d(x, a) < r$ (Muscat, 2014:13).

2.1.1 Bola Buka dan Himpunan Buka

Definisi 2.2 (Muscat, 2014: 16): Suatu bola buka yang berpusat di $a \in X$ dengan radius $r > 0$ merupakan himpunan

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Menyesuaikan dengan namanya, maka dapat diasumsikan bola tersebut ‘bulat’ atau simetris. Berikut sifat dari bola buka, yakni:

Proposisi 2.3: *Titik-titik yang berbeda dari ruang metrik dapat dipisahkan dengan bola-bola yang disjoint (terpisah),*

$$x \neq y \rightarrow \exists r > 0, \exists B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset.$$

Bukti. Berdasarkan aksioma (d) serta definisi fungsi d , jika $x \neq y$ maka dapat dikatakan $d(x, y) > 0$. Kemudian jika dimisalkan $r := \frac{d(x, y)}{2}$, maka untuk sebarang $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$ akan diperoleh

$$d(x, z) < r \text{ dan } d(y, z) < r$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

$$\leq 2r$$

$$\leq d(x, y)$$

$$\leq 0.$$

Hal ini kontradiksi dengan $d(x, y) > 0$, sehingga haruslah $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

Definisi 2.4 (Muscat, 2014: 100): Lapisan adalah batas dari bola buka $B(a, r)$ yang dinotasikan dengan $S_r(x)$, serta didefinisikan sebagai,

$$S_r(x) := \{y \in X : d(x, y) = r\}.$$

Contoh 2.5 (Muscat, 2014: 17):

1. Pada $\mathbb{R}$, setiap bola buka merupakan interval buka dengan

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Sebaliknya, untuk sebarang interval buka yang berbentuk (a, b) merupakan sebuah bola buka di $\mathbb{R}$, dengan bentuk $B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{|b-a|}{2}\right)$.

2. Pada $\mathbb{R}^2$, bola buka $B(a, r)$ merupakan suatu cakram dengan pusat a dan radius atau jari-jari r tanpa garis keliling.
3. Pada $\mathbb{Z}$, $B\left(m, \frac{1}{2}\right) = \left\{n \in \mathbb{Z}: |n - m| < \frac{1}{2}\right\} = \{m\}$ sedangkan $B(m, 2) = \{m - 1, m, m + 1\}$.
4. Jelas bahwa, bola-bola buka tersebut berbeda, hal ini tergantung pada konteks ruang metriknya; dengan demikian $B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ di $\mathbb{R}$, tetapi $B\left(0, \frac{1}{2}\right) = \{0\}$ di $\mathbb{Z}$.

2.1.2 Persekitaran (*Neighborhood*)

Definisi 2.6 (Hoffman, 1975: 31): Suatu persekitaran atau *neighborhood* dari titik $a \in \mathbb{R}^n$ merupakan suatu subset dari $\mathbb{R}^n$ yang mengandung bola buka.

Suatu persekitaran dari a mengandung setiap titik yang cukup dekat dengan a . Persekitaran dari a yang paling penting adalah bola buka yang berpusat di a (Hoffman, 1975: 31).

2.1.3 Himpunan Buka

Definisi 2.7 (Hoffman, 1975: 55): Suatu himpunan U dikatakan himpunan buka di $\mathbb{R}^n$ jika U merupakan persekitaran (*neighborhood*) untuk setiap titik-titikanya.

Dengan demikian, U himpunan buka jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi: Untuk setiap titik $x \in U$, terdapat suatu bilangan positif r sedemikian sehingga bola buka $B(x, r)$ termuat di U (Hoffman, 1975: 56).

Teorema 2.8 (Hoffman, 1975: 56): *Gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka merupakan himpunan buka. Irisan dari sebarang koleksi berhingga dari himpunan buka merupakan himpunan buka.*

Bukti. Dianggap $\{U_\alpha\}$ merupakan famili dari himpunan buka. Misalkan

$$U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Jika $x \in U$, maka $x \in U_{\alpha}$ untuk beberapa α . Sehingga U_{α} merupakan persekitaran dari x . Karena U memuat U_{α} , maka U merupakan persekitaran dari x .

Anggap $U_1, \dots, U_n$ merupakan himpunan buka. Misalkan

$$U = \bigcap_{k=1}^n U_k.$$

Misalkan $x \in U$. Untuk setiap k , $1 \leq k \leq n$, terdapat suatu bilangan $r_k > 0$ sedemikian sehingga

$$B(x, r_k) \subset U_k.$$

Misalkan r merupakan bilangan terkecil dari $r_1, \dots, r_n$. Sehingga

$$B(x, r) \subset U.$$

Teorema 2.8 pada dasarnya merupakan suatu pernyataan yang mudah. Namun, ia dinamakan teorema karena menyatakan sifat dari himpunan buka yang cukup sering digunakan.

Contoh 2.9 (Hoffman, 1975: 56) :

Setiap bola buka $B(x, r)$ merupakan himpunan buka. Jika $y \in B(x, r)$ maka $B(y, t) \subset B(x, r)$ dimana

$$t = r - |x - y|.$$

Sehingga, gabungan dari sebarang koleksi bola buka merupakan himpunan buka:

$$\bigcup_{\alpha} B(x_{\alpha}, r_{\alpha}).$$

Definisi 2.10 (Hoffman, 1975: 57): Suatu titik c dikatakan titik klaster atau (*cluster point*) dari himpunan A jika setiap persekitaran dari c memuat paling sedikit satu titik dari A berbeda dari c .

2.1.4 Himpunan Tertutup

Definisi 2.11 (Hoffman, 1975: 58): Suatu himpunan K merupakan himpunan tertutup jika setiap titik klaster dari K berada di K .

Hoffman (1975: 58) menyatakan bahwa pernyataan berikut ekuivalen terhadap himpunan tertutup K :

- a. K tertutup.
- b. Jika $\{x_n\}$ merupakan suatu barisan dari titik-titik di K dan jika barisan konvergen, maka limit dari barisan berada di K .

Teorema 2.12 (Hoffman, 1975: 58): Suatu himpunan A adalah himpunan terbuka jika hanya jika himpunan komplementnya tertutup.

Bukti. Misalkan T merupakan komplemen dari A :

$$T = \{c \in \mathbb{R}^n; c \notin A\}.$$

Untuk mengetahui bahwa T himpunan tertutup, cukup ditunjukkan jika $c \notin T$, maka c bukan titik klaster dari T . Namun, berdasarkan definisi T , dapat diketahui bahwa $c \in T$. Sehingga untuk setiap $c \notin A$, maka $c \in T$. Dengan demikian, c merupakan titik klaster dari T , maka T adalah himpunan tertutup.

Akibat 2.13: Irisan dari sebarang koleksi himpunan tertutup merupakan himpunan tertutup. Gabungan dari sebarang koleksi berhingga dari himpunan tertutup merupakan himpunan tertutup.

Bukti. Mengikuti Teorema 2.8 dan Teorema 2.12, dapat dijelaskan bukti dari pernyataan pertama. Misalkan $\{K_\alpha\}$ merupakan koleksi dari himpunan tertutup. Untuk setiap α , misalkan U_α merupakan komplemen dari K_α . Maka setiap U_α merupakan himpunan buka, begitu juga untuk gabungan

$$U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$$

merupakan himpunan buka. Gabungan tersebut merupakan komplemen dari

$$K = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha},$$

irisian dari komplemen himpunan-himpunan U_α . Karena U himpunan buka, maka K himpunan tertutup.

2.2 Ukuran Lebesgue

Definisi 2.14 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 29): Panjang dari interval I yang dinotasikan sebagai $\ell(I)$. Jika I terbatas, maka panjang intervalnya adalah selisih dari titik akhir dari I . Jika I tidak terbatas, maka panjang intervalnya ∞ .

Panjang interval merupakan salah satu contoh dari fungsi himpunan, yaitu suatu fungsi yang menghubungkan bilangan riil diperluas ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) ke setiap himpunan pada koleksi himpunan. Pada kasus ini, domainnya yaitu koleksi dari semua interval. Royden dan Fitzpatrick (2010: 29-30) memperluas fungsi himpunan panjang interval kepada koleksi himpunan yang lebih luas dari bilangan riil, dan membentuk suatu koleksi himpunan yang dinamakan ***himpunan terukur***

Lebesgue, dan membentuk suatu fungsi himpunan dari koleksi ini yang dinamakan **ukuran Lebesgue** dengan notasi m . Fungsi himpunan m mempunyai tiga sifat aksioma berikut:

1. Ukuran Lebesgue dari suatu interval merupakan panjang interval tersebut.

Setiap interval tak kosong I terukur Lebesgue dan

$$m(I) = \ell(I).$$

2. Ukuran Lebesgue merupakan translasi invarian. Jika E merupakan ukuran Lebesgue dan y sebarang bilangan, maka translasi dari E oleh y yaitu $E + y = \{x + y | x \in E\}$ juga ukuran Lebesgue dan

$$m(E + y) = m(E).$$

3. Ukuran Lebesgue merupakan penjumlahan secara terhitung atas gabungan himpunan-himpunan yang disjoint terhitung. Jika $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ merupakan suatu koleksi disjoint terhitung dari himpunan terukur Lebesgue, maka

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

2.2.1 Ukuran Luar Lebesgue

Berkaitan dengan konsep ukuran luar Lebesgue, Royden dan Fitzpatrick (2010: 31-32) memperumum konsep ukuran luar Lebesgue dari suatu himpunan. Untuk suatu himpunan A dari bilangan riil, misalkan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ interval terbuka tak kosong dan terbatas yang menyelimuti A , yakni suatu koleksi sehingga $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Mereka mendefinisikan ukuran luar Lebesgue dari A , yang dinotasikan dengan $m^*(A)$, yaitu

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Mengikuti definisi dari ukuran luar Lebesgue, maka $m^*(\emptyset) = 0$. Lebih lanjut lagi, karena untuk suatu selimut dari himpunan B juga menyelimuti sebarang sub himpunan dari B , sehingga ukuran luar Lebesgue memiliki sifat monoton, yakni

$$\text{jika } A \subseteq B, \text{ maka } m^*(A) \leq m^*(B).$$

Contoh 2.15 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 31):

Suatu himpunan terhitung memiliki ukuran luar Lebesgue nol. Selain itu, C merupakan suatu himpunan terhitung yang dihitung sebagai $C = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Dimisalkan $\varepsilon > 0$, untuk setiap bilangan asli k , didefinisikan $I_k = \left\{ c_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, c_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right\}$. Koleksi terhitung dari interval buka $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ menyelimuti C . Dengan demikian

$$0 \leq m^*(C) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Ketaksamaan tersebut terpenuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan demikian $m^*(C) = 0$.

Definisi 2.16 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 35): Suatu himpunan E merupakan himpunan terukur Lebesgue, jika untuk sebarang himpunan A berlaku

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

2.3 Fungsi Terukur Lebesgue

Definisi 2.17 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 55): Suatu fungsi f yang bernilai riil diperluas pada E merupakan fungsi terukur Lebesgue, jika E terukur Lebesgue dan memenuhi aksioma berikut:

- Untuk setiap bilangan riil c , himpunan $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ terukur Lebesgue.

- b. Untuk setiap bilangan riil c , himpunan $\{x \in E | f(x) \leq c\}$ terukur Lebesgue.
- c. Untuk setiap bilangan riil c , himpunan $\{x \in E | f(x) < c\}$ terukur Lebesgue.
- d. Untuk setiap bilangan riil c , himpunan $\{x \in E | f(x) \geq c\}$ terukur Lebesgue.
- e. Untuk setiap bilangan riil diperluas c , himpunan $\{x \in E | f(x) = c\}$ terukur Lebesgue.

Definisi 2.18 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 61): Untuk sebarang himpunan A , fungsi karakteristik dari A yang dinotasikan dengan $\chi_A(x)$ merupakan fungsi pada $\mathbb{R}$ yang dapat dituliskan sebagai,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A. \end{cases}$$

Dengan demikian, jelas bahwa fungsi χ_A terukur Lebesgue jika dan hanya jika himpunan A pun terukur Lebesgue. Kombinasi linier dari fungsi karakteristik himpunan terukur berperan penting dalam integral Lebesgue seperti halnya fungsi langkah (*step function*) pada integral Riemann, fungsi-fungsi tersebut dinamakan fungsi sederhana.

Definisi 2.19 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 61): Suatu fungsi bernilai riil φ pada himpunan terukur E dinamakan fungsi sederhana jika fungsi tersebut terukur dan hanya mengambil nilai bilangan berhingga.

Kombinasi linier dan hasil kali dalam dari fungsi-fungsi sederhana merupakan fungsi sederhana, karena masing-masing dari keduanya hanya mengambil nilai bilangan berhingga. Jika φ merupakan fungsi sederhana pada domain E dan mengambil nilai berbeda $c_1, \dots, c_n$, maka

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{E_k},$$

dimana $E_k = \{x \in E | \varphi(x) = c_k\}$. Penulisan φ sebagai kombinasi linier dari fungsi karakteristik kemudian dinamakan **representasi resmi dari fungsi sederhana φ** .

2.4 Integral Lebesgue

Definisi 2.20 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 71): Untuk sebarang fungsi sederhana ψ pada himpunan terukur berhingga E , integral dari ψ atas E yaitu

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(E_i),$$

dimana $E_i = \{x \in E | \psi(x) = a_i\}$ terpisah dan a_i berbeda.

Lemma 2.21 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 71): Misalkan $\{E_i\}_{i=1}^n$ adalah koleksi disjoint (terpisah) subhimpunan terukur dari himpunan terukur berhingga E . Untuk $1 \leq i \leq n$, misalkan a_i merupakan bilangan riil, sedemikian sehingga jika

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{E_i},$$

maka

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(E_i).$$

Bukti. Koleksi $\{E_i\}_{i=1}^n$ disjoint (terpisah), namun pernyataan dari Lemma 2.21 kemungkinan bukan merupakan representasi resmi dari fungsi sederhana φ , karena ada kemungkinan bahwa a_i tidak berbeda. Sehingga dapat dihitung kemungkinan nilai berulang. Misalkan $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ adalah nilai berbeda yang diambil oleh φ . Untuk $1 \leq j \leq m$, dibentuk himpunan $A_j = \{x \in E | \varphi(x) = \lambda_j\}$. Berdasarkan definisi integral fungsi sederhana, maka

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot m(A_j).$$

Untuk $1 \leq j \leq m$, dimisalkan I_j adalah himpunan dari indeks i , sedemikian sehingga $a_i = \lambda_j$. Maka $\{1, \dots, n\} = \bigcup_{j=1}^m I_j$ serta gabungannya disjoint (terpisah).

Lebih lanjut lagi, berdasarkan sifat penjumlahan ukuran, maka dapat ditulis

$$m(A_j) = \sum_{i \in I_j} m(E_i),$$

Untuk setiap $1 \leq j \leq m$. Dengan demikian, maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(E_i) &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i \in I_j} a_i \cdot m(E_i) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[\sum_{i \in I_j} m(E_i) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot m(A_j) \\ &= \int_E \varphi. \end{aligned}$$

Selanjutnya, proposisi berikut menjelaskan sifat dari kemonotonan dan kelinieran dari integral fungsi sederhana.

Proposisi 2.22 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 72): Misalkan φ dan ψ merupakan fungsi sederhana pada himpunan terukur berhingga E . Sehingga untuk sebarang α dan β ,

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi.$$

Lebih lanjut lagi, jika $\varphi \leq \psi$, maka $\int_E \varphi \leq \int_E \psi$.

Bukti. Karena kedua fungsi φ dan ψ hanya mengambil nilai berhingga pada E , maka dapat dipilih koleksi terpisah $\{E_i\}_{i=1}^n$ dari subhimpunan terukur E , sedemikian sehingga φ dan ψ merupakan konstanta pada setiap E_i . Untuk setiap $i, 1 \leq i \leq n$, misalkan a_i dan b_i masing-masing merupakan nilai yang diambil oleh φ dan ψ pada E_i . Berdasarkan Lemma 2.21, maka diperoleh

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(E_i) \text{ dan } \int_E \psi = \sum_{i=1}^n b_i \cdot m(E_i).$$

Bagaimanapun juga, fungsi sederhana $\alpha\varphi + \beta\psi$ pun mengambil nilai konstanta $\alpha a_i + \beta b_i$ pada E_i . Sehingga, berdasarkan Lemma 2.21, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i) \cdot m(E_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(E_i) + \beta \sum_{i=1}^n b_i \cdot m(E_i) \\ &= \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi. \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk membuktikan sifat kemonotonan, diasumsikan $\varphi \leq \psi$ pada E . Didefinisikan $\eta = \psi - \varphi$ pada E , maka berdasarkan sifat kelinieran integral fungsi sederhana, dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \int_E \psi - \int_E \varphi &= \int_E (\psi - \varphi) \\ &= \int_E \eta, \end{aligned}$$

Karena fungsi sederhana η adalah fungsi tak negatif, sehingga integral dari fungsi tersebut juga tak negatif. Dengan demikian benar bahwa untuk $\varphi \leq \psi$ maka

$$\int_E \varphi \leq \int_E \psi.$$

Definisi 2.23 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 73): Misalkan f adalah fungsi bernilai riil terbatas pada himpunan terukur berhingga E , maka integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah dari fungsi f pada E , masing-masing dapat ditulis sebagai berikut,

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \mid \varphi \text{ fungsi sederhana dan } \varphi \leq f \text{ pada } E, \right\}$$

dan

$$\inf \left\{ \int_E \psi \mid \psi \text{ fungsi sederhana dan } f \leq \psi \text{ pada } E. \right\}$$

Berdasarkan Definisi 2.23, fungsi f diasumsikan terbatas, sehingga mengikuti sifat kemonotonan dari integral fungsi sederhana dapat dikatakan bahwa integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah adalah integral berhingga dan integral Lebesgue atas selalu setidaknya sama luasnya dengan integral Lebesgue bawah.

Definisi 2.24 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 73): Suatu fungsi terbatas f pada domain himpunan terukur berhingga E dikatakan **terintegralisasi Lebesgue** pada E , jika integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah pada E memiliki nilai yang sama. Umumnya nilai integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah disebut **integral Lebesgue** dari f atas E yang dinotasikan dengan $\int_E f$.

2.5 Ruang Lebesgue

Definisi 2.25 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 135): Suatu ruang linier ($\mathcal{F}$) adalah koleksi dari semua fungsi-fungsi terukur bernilai riil diperluas yang berhingga pada himpunan terukur E . Selanjutnya dua fungsi f dan g pada $\mathcal{F}$ dikatakan ekuivalen atau dapat ditulis ($f \cong g$), jika memenuhi

$$f(x) = g(x),$$

untuk hampir setiap $x \in E$.

Berdasarkan relasi ekuivalensi yaitu refleksif, simetris dan transitif, mengakibatkan suatu partisi dari $\mathcal{F}$ pada sebuah koleksi disjoint (terpisah) dari kelas-kelas ekuivalensi yang dinotasikan dengan $\mathcal{F}/\cong$. Kemudian subhimpunan dari ruang linier dinamakan subruang yang tertutup terhadap bentuk kombinasi liniernya. Berikut didefinisikan koleksi $\{L^p(E)\}_{1 \leq p \leq \infty}$ yang merupakan subruang dari $\mathcal{F}/\cong$ (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 136).

Definisi 2.26 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 136): Untuk $1 \leq p < \infty$, didefinisikan ruang Lebesgue $L^p(E)$ sebagai koleksi dari kelas ekuivalen $[f]$ sedemikian sehingga

$$\int_E |f|^p < \infty.$$

Selanjutnya, berikut didefinisikan norma dari ruang Lebesgue $L^p(E)$ untuk $1 \leq p < \infty$.

Definisi 2.27 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 139): Untuk sebarang himpunan terukur E , misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $f \in L^p(E)$, maka norma dari f dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.6 Ruang Vektor

Definisi 2.28 (Muscat, 2014: 59): Suatu ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$ merupakan himpunan yang didefinisikan atas suatu operasi penjumlahan vektor $+: V^2 \rightarrow V$, untuk setiap $x, y, z \in V$ memenuhi sifat-sifat berikut:

- a. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- b. $x + y = y + x$,
- c. $0 + x = x$,
- d. $x + (-x) = 0$,

dan operasi perkalian skalar $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$, untuk setiap $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

- a. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- c. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
- d. $1x = x$.

Pada sifat penjumlahan (a) dinamakan hukum asosiatif atau sifat asosiatif, sedangkan sifat penjumlahan (b) dinamakan hukum komutatif atau sifat komutatif. Catatan untuk sifat penjumlahan (c), 0 merupakan suatu unsur yang tunggal pada V . Pada sifat yang terakhir, dapat dijelaskan untuk setiap $x \in V$, terdapat suatu unsur tunggal $x' \in V$ sedemikian sehingga $x + x' = 0$. Dengan demikian x' tersebut dinamakan invers dari x dan ditulis sebagai $-x$ (Yamamoto, 2012).

Berikut terdapat beberapa catatan terkait operasi perkalian skalar. Pertama, maksud dari penjumlahan berbeda pada ruas kanan dan ruas dari sifat perkalian (b). Pada penjumlahan $\alpha + \beta$ pada ruas kiri bermakna penjumlahan skalar, sementara $\alpha x + \beta x$ pada sisi kanan merupakan penjumlahan pada ruang vektor V . Secara prinsip, mereka perlu dibedakan. Tetapi dua penjumlahan tersebut mengikuti aturan yang sama. Sehingga agar tidak menyulitkan dalam notasi, biasanya digunakan simbol yang sama yaitu $+$ untuk kedua operasi. Catatan yang sama juga berlaku

pada sifat perkalian (c). Kondisi sifat perkalian skalar pada (a) dan (b) merujuk pada hukum distributif (Yamamoto, 2012).

Contoh 2.29:

Diketahui himpunan $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ dilengkapi dengan operasi

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

dan

$$k(x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n).$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ ruang vektor, dengan menunjukkan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian $\mathbb{R}^n$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

1. Sifat Asosiatif

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ dan $z = (z_1, \dots, z_n)$ untuk $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$. Sehingga,

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)] \\ &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)] \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] + (z_1, \dots, z_n) \\ &= [(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] + (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $x + (y + z) = (x + y) + z$.

2. Sifat Komutatif

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$, artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, \dots, y_n)$ untuk $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Sehingga,

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n), \quad \text{Karena } \mathbb{R} \text{ komutatif } + \\
&= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) \\
&= y + x
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $x + y = y + x$.

3. Identitas Penjumlahan

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$, dengan $y = 0$ artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$ dan $y = (0, \dots, 0)$ untuk $x_i, 0 \in \mathbb{R}$. Sehingga,

$$\begin{aligned}
x + 0 &= (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) \\
&= (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) \\
&= (x_1, \dots, x_n) \\
&= x \\
0 + x &= (0, \dots, 0) + (x_1, \dots, x_n) \\
&= (0 + x_1, \dots, 0 + x_n) \\
&= (x_1, \dots, x_n) \\
&= x
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $x + 0 = 0 + x = x$.

4. Invers Penjumlahan

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$, dengan $y = -x$ artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$ dan $y = (-x_1, \dots, -x_n)$ untuk $x_i, -x_i \in \mathbb{R}$. Sehingga,

$$\begin{aligned}
x + y &= (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) \\
&= (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) \\
&= (0, \dots, 0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y + x &= (-x_1, \dots, -x_n) + (x_1, \dots, x_n) \\
&= (-x_1 + x_1, \dots, -x_n + x_n) \\
&= (0, \dots, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, maka y dengan $y = (-x_1, \dots, -x_n)$ merupakan invers jumlah dari x , karena

$x + y = y + x = 0$ dimana 0 merupakan identitas jumlah dari x .

5. Distributif

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$, artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, \dots, y_n)$ untuk $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

Ambil sebarang konstan $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\lambda(x + y) &= \lambda((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\
&= \lambda(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\
&= \lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n) \\
&= \lambda(x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n) \\
&= \lambda x + \lambda y
\end{aligned}$$

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}^n$, artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$ untuk $x_i \in \mathbb{R}$.

Ambil sebarang konstan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)x &= (\lambda + \mu)(x_1, \dots, x_n) \\
&= ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) \\
&= \lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x_1, \dots, x_n) \\
&= \lambda x + \mu x
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi bersifat distributif.

6. Asosiatif Perkalian

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}^n$, artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$ untuk $x_i \in \mathbb{R}$.

Ambil sebarang konstan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)x &= (\lambda\mu)(x_1, \dots, x_n) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n) \\ &= (\lambda(\mu x_1), \dots, \lambda(\mu x_n)) \\ &= \lambda(\mu(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \lambda(\mu x) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa operasi perkalian bersifat asosiatif.

7. Identitas Perkalian

Ambil sebarang $x \in \mathbb{R}^n$, artinya $x = (x_1, \dots, x_n)$. Sehingga,

$$\begin{aligned} 1x &= 1(x_1, \dots, x_n) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= x. \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor.

2.7 Ruang Bernorma

Definisi 2.30 (Stein dan Shakarchi, 2011): Suatu ruang bernorma merupakan ruang vektor V atas lapangan skalar (bilangan real atau bilangan kompleks), bersama dengan sebuah norma $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ yang memenuhi:

- a. $\|v\| = 0$ jika hanya jika $v = 0$,
- b. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, untuk sebarang skalar α dan $v \in V$,
- c. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, untuk setiap $v, w \in V$.

Jika diperlukan, norma-norma pada ruang yang berbeda dapat dibedakan dengan menulis simbol ruang tepat dibawah garis norma seperti $\|\cdot\|_X$. Suatu fungsi yang memenuhi dua aksioma terakhir dinamakan semi-norma (Muscat, 2014). Ruang V dikatakan lengkap jika sebarang barisan Cauchy $\{v_n\} \in V$ yaitu $\|v_n - v_m\| \rightarrow 0$ ketika $n, m \rightarrow \infty$, maka terdapat $v \in V$ sedemikian sehingga $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ ketika $n \rightarrow \infty$. Suatu ruang bernorma yang lengkap dinamakan ruang Banach (Stein dan Shakarchi, 2011).

Contoh 2.31 [Ruang Banach] (Hoffman, 1975):

Misalkan p suatu bilangan, $1 \leq p < \infty$. Misalkan ℓ^p merupakan ruang dari semua barisan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dari bilangan riil atau bilangan kompleks yang mana

$$\sum_n |x_n|^p < \infty,$$

dan dilengkapi dengan norma

$$\|X\|_{\ell^p} = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ℓ^p merupakan ruang Banach, dengan menunjukkan ℓ^p merupakan ruang bernorma yang lengkap.

Ruang ℓ^p adalah ruang bernorma, jika normanya memenuhi aksioma-aksioma norma.

- a. Untuk setiap $X \in \ell^p$ jelas bahwa $\|X\|_{\ell^p} > 0$, dan $\|X\|_{\ell^p} = 0$ jika hanya jika $X = 0 = (0, 0, \dots)$.
- b. Untuk setiap skalar $\beta \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}\|\beta X\|_{\ell^p} &= \left(\sum_n |\beta x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(|\beta|^p \sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\beta| \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\beta| \|X\|_{\ell^p}.\end{aligned}$$

- c. Untuk setiap $X, Y \in \ell^p$,

$$\begin{aligned}\|X + Y\|_{\ell^p} &= \left(\sum_n |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (|x_1 + y_1|^p + |x_2 + y_2|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (|x_1|^p + |y_1|^p + |x_2|^p + |y_2|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ((|x_1|^p + |x_2|^p + \dots) + (|y_1|^p + |y_2|^p + \dots))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|X\|_{\ell^p} + \|Y\|_{\ell^p}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, ℓ^p merupakan ruang bernorma. Selanjutnya akan ditunjukkan kelengkapan ℓ^p .

Misalkan x^k merupakan barisan Cauchy di ℓ^p , yakni untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, l \geq K$ berlaku

$$\|x^k - x^l\|_p = \left[\sum_n |x_n^k - x_n^l|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Hal ini mengakibatkan untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, barisan x_n^k merupakan barisan Cauchy.

Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka terdapat $x_n^\infty \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n^\infty$.

(i.) Dikarenakan x^k merupakan barisan Cauchy dan ia terbatas oleh beberapa konstan $C > 0$ di ℓ^p . Dimisalkan $N \in \mathbb{N}$, maka

$$\left[\sum_{n=1}^N |x_n^k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k\|_p \leq C.$$

Misalkan $n \rightarrow \infty$ maka diperoleh $[\sum_{n=1}^N |x_n^\infty|^p]^{\frac{1}{p}} \leq C$. Misalkan $N \rightarrow \infty$ maka diperoleh $[\sum_{n=1}^\infty |x_n^\infty|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \|x^\infty\|_p \leq C$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $x^\infty \in \ell^p$.

(ii.) Misalkan $\varepsilon > 0$. Untuk $N \in \mathbb{N}$ dan k, l cukup besar

$$\left[\sum_{n=1}^N |x_n^k - x_n^l|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k - x^l\|_p \leq \varepsilon.$$

Jika $k \rightarrow \infty$ dan $N \rightarrow \infty$, maka dapat disimpulkan $(\|x^\infty - x^l\|_p \leq \varepsilon)$.

Dengan demikian terbukti bahwa x^n konvergen menuju x^∞ di ℓ^p .

2.8 Ruang Hilbert

2.8.1 Ruang Hasil Kali Dalam

Dalam analisis fungsional, terdapat suatu ruang linier (vektor) yang dinamakan ruang hasil kali dalam, dimana ruang tersebut dilengkapi dengan hasil kali dalam.

Definisi 2.32 (Muscat, 2014: 171): Suatu hasil kali dalam pada ruang vektor X , yaitu pemetaan

$$\langle, \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{F}$$

sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X, \lambda \in \mathbb{F}$, dengan $\mathbb{F}$ merupakan lapangan $\mathbb{C}$ atau $\mathbb{R}$ berlaku,

1. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Contoh 2.33 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 309):

1. Untuk sebarang dua barisan $x = \{x_k\}$ dan $y = \{y_k\} \in \ell^2$, dimana hasil kali dalam dari ℓ^2 didefinisikan dengan

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

2. Untuk suatu himpunan terukur bilangan riil E dan sebarang dua fungsi $f, g \in L^2(E)$, kemudian hasil kali dalam dari L^2 didefinisikan dengan

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \cdot g,$$

dimana integral tersebut terukur Lebesgue.

2.8.2 Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Untuk sebarang dua vektor u, v pada ruang hasil kali dalam H , berlaku

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Untuk memverifikasi ketaksamaan tersebut, dapat dilihat bahwa

$$0 \leq \|u + av\|^2 = \|u\|^2 + 2a\langle u, v \rangle + a^2\|v\|^2 \text{ untuk setiap } a \in \mathbb{R}.$$

Polinomial kuadrat dalam a yang didefinisikan pada sisi kanan gagal untuk memiliki nilai akar yang berbeda, sehingga mengakibatkan nilai diskrimannya tak positif. Dengan demikian ketaksamaan tersebut terpenuhi. Lebih lanjut, ketaksamaan ini dikenal dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 309).

Proposisi 2.34 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 309): Untuk suatu vektor h pada ruang hasil kali dalam H , didefinisikan

$$\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}.$$

Maka, $\|\cdot\|$ merupakan norma dari H yang dinamakan norma yang berdasarkan hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bukti. Sifat yang perlu ditunjukkan sesuai sifat norma hanya bahwa $\|\cdot\|$ memenuhi ketaksamaan segitiga. Berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, untuk sebarang dua vektor $u, v \in H$, maka

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Proposisi 2.35 [Identitas Paralelogram] (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 310):

Untuk sebarang dua vektor u, v pada ruang hasil kali dalam H , maka berlaku identitas paralelogram yaitu,

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Bukti. Untuk memverifikasi identitas tersebut, cukup dengan menjumlahkan dua persamaan berikut:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2,$$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Definisi 2.36 (Muscat, 2014: 174): Ruang Hilbert merupakan ruang hasil kali dalam yang lengkap sebagai ruang metrik.

Contoh 2.37 (Muscat, 2014: 174):

Setiap ruang hasil kali dalam dapat menjadi ruang lengkap yang dinamakan ruang Hilbert. Misalkan diambil $\langle x, y \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle$, yang merepresentasikan barisan Cauchy $x = (x_n), y = (y_n)$. Perhatikan bahwa $\langle x_n, y_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy pada $\mathbb{C}$, sehingga

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| &\leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_n \rangle| + |\langle x_m, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \\ &\leq \|x_n - x_m\| \|y_n\| + \|x_m\| \|y_n - y_m\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ketika $n, m \rightarrow \infty$, dengan $\|x_m\|, \|y_n\|$ terbatas.

2.9 Ruang Morrey

Ruang Morrey yang akan dipelajari pada penelitian ini merupakan ruang Morrey dengan domain $\mathbb{R}^n$. Ruang Morrey merupakan salah satu perumuman dari ruang Lebesgue.

Definisi 2.38 (Morrey, 1938): Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan dari semua fungsi terukur sedemikian sehingga

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n, R > 0} |B(a, R)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a, R)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dengan $B(a, R)$ merupakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di a dan berjari-jari R .

Jika $p = q$, maka $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ sehingga $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{L}^p$. Berdasarkan hal tersebut, maka ruang Morrey dapat dipandang sebagai perluasan dari ruang Lebesgue. Seperti halnya ruang Lebesgue, ruang Morrey juga merupakan ruang Banach. Bukti kelengkapan ruang Morrey dapat dilihat pada (Rukmana, 2016). Berikut contoh perhitungan norma fungsi di ruang Morrey.

Contoh 2.39 (Mu'tazili, 2019):

Fungsi konstanta tak nol $f(x) = c$ bukan anggota ruang Morrey. Hal ini karena

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n, R > 0} |B(a, R)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a, R)} |c|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n, R > 0} |B(a, R)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |c| |B(a, R)|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}^n, R > 0} |c| |B(a, R)|^{\frac{1}{q}} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

2.10 Ruang Morrey Kecil

Ruang Morrey kecil merupakan salah satu perluasan definisi ruang Morrey dengan membatasi jari-jari pada interval $(0,1)$. Ruang ini diperkenalkan pertama kali oleh Sawano (2018).

Definisi 2.40 (Sawano, 2018): Misalkan $1 \leq p < q < \infty$. Ruang Morrey kecil $m_q^p(\mathbb{R}^n) = m_q^p$ merupakan himpunan semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in m_q^p(\mathbb{R}^n)$ berlaku

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ruang Morrey kecil lebih luas dari ruang Morrey, sehingga dapat dikatakan ruang Morrey kecil memuat ruang Morrey. Hal ini dikarenakan jika $f \in \mathcal{M}_q^p$, maka

$$\begin{aligned} \|f\|_{m_q^p} &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{M}_q^p}, \end{aligned}$$

sehingga $f \in m_q^p$. Kemudian untuk setiap $f \in m_q^p$ memenuhi norma tersebut, maka ruang Morrey kecil merupakan ruang Banach (Sawano, 2018).

Contoh 2.41 (Mu'tazili, 2019):

Jika $\alpha \in \mathbb{R}^d, r > 0$, dan $g(x) = \chi_{B(\alpha,r)}(x)$, maka $g \in m_q^p$ dan $\|g\|_{m_q^p} =$

$\left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} \min\{1, r^{\frac{d}{q}}\}$, dimana C_d menotasikan luas dari lapisan satuan di $\mathbb{R}^d$. Perhatikan

bahwa

$$\|g\|_{m_q^p} = \sup_{a \in \mathbb{R}^d, R \in (0,1)} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} \chi_{B(\alpha,r)}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{a \in \mathbb{R}^d, R \in (0,1)} |B(a, R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^d, R \in (0,1)} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{a \in \mathbb{R}^d, R \in (0,1)} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} \min\{1, r^{\frac{d}{q}}\}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|g\|_{m_q^p} &\geq |B(\alpha, \min\{1, r\})|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(\alpha, \min\{1, r\})} \chi_{B(\alpha, r)}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |B(\alpha, \min\{1, r\})|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(\alpha, \min\{1, r\}) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{p}} \\
&= |B(\alpha, \min\{1, r\})|^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} \min\{1, r^{\frac{d}{q}}\},
\end{aligned}$$

sehingga $\|g\|_{m_q^p} = \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} \min\{1, r^{\frac{d}{q}}\}.$

2.11 Perumuman Konstanta Von Neumann-Jordan dan Konstanta Modifikasi Von Neumann Jordan

Dimisalkan $X = (X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach. Berikut merupakan definisi perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan ruang Banach.

Definisi 2.42 (Cui, dkk, 2015: 2): Untuk setiap $x, y \in X \setminus \{0\}$, didefinisikan konstanta perumuan von Neumann-Jordan yaitu sebagai berikut,

$$C_{NJ}^{(k)}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|_X^k + \|x-y\|_X^k}{2^{k-1}(\|x\|_X^k + \|y\|_X^k)} \right\},$$

dimana $1 \leq k < \infty$.

Selanjutnya Cui, dkk (2015: 2), menambahkan rumus parameterisasi untuk konstanta $C_{NJ}^{(k)}$ sebagai berikut,

$$C_{NJ}^{(k)}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+ty\|_X^k + \|x-ty\|_X^k}{2^{k-1}(1+t^k)} : \|x\|_X = \|y\|_X = 1, 0 \leq t \leq 1 \right\},$$

dimana $1 \leq k < \infty$.

Teorema 2.43 (Cui, dkk, 2015): Untuk sebarang ruang Banach X dan $1 \leq k < \infty$, maka perumuman konstanta von Neumann-Jordan $C_{NJ}^{(k)}$ memenuhi ketaksamaan $C_{NJ}^{(k)}(X) \leq 2$.

Bukti. Pembuktian dari teorema ini menggunakan rumus parameterisasi untuk konstanta $C_{NJ}^{(k)}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \|x+ty\|^k + \|x-ty\|^k &\leq (\|x\| + t\|y\|)^k + (\|x\| + t\|y\|)^k \\ &= 2(\|x\| + t\|y\|)^k \\ &= 2(1+t)^k, \end{aligned}$$

maka diperoleh,

$$\frac{\|x+ty\|^k + \|x-ty\|^k}{2^{k-1}(1+t^k)} \leq \frac{2(1+t)^k}{2^{k-1}(1+t^k)}.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} (1+t)^k &= \left(2 \cdot \frac{1+t}{2}\right)^k \\ &= 2^k \left(\frac{1+t}{2}\right)^k \end{aligned}$$

$$\leq 2^k \cdot \frac{1+t^k}{2}$$

$$\leq 2^{k-1}(1+t^k).$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$\frac{\|x+ty\|^k + \|x-ty\|^k}{2^{k-1}(1+t^k)} \leq \frac{2(1+t)^k}{2^{k-1}(1+t^k)}$$

$$\leq \frac{2 \cdot 2^{k-1}(1+t^k)}{2^{k-1}(1+t^k)} \leq 2.$$

Definisi 2.44 (Yang, 2017): Untuk setiap $x, y \in X$, dengan $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$, didefinisikan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan yaitu sebagai berikut,

$$\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) := \sup \left\{ \frac{\|x+y\|_X^k + \|x-y\|_X^k}{2^k} \right\}$$

dimana $1 \leq k < \infty$.

Teorema 2.44 (Yang, 2017): Misalkan $k > 1$ dan $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$, untuk setiap ruang Banach X , berlaku

$$\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) \leq C_{NJ}^{(k)} \leq 2^{2-k} \left[1 + \left(2^{\frac{1}{l}} \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)^l \right]^{k-1}.$$

Bukti. Misalkan $x, y \in X$ dengan $0 < \|y\| \leq \|x\| = 1$. Berdasarkan ketaksamaan berikut,

$$\left\| x \pm \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|y\|} \pm \frac{y}{\|y\|} + x - \frac{x}{\|y\|} \right\| \geq \left| \frac{\|x \pm y\| + \|y\| - 1}{\|y\|} \right|,$$

dan

$$\begin{aligned}
& (\|x + y\|^k + \|x - y\|^k)^{\frac{1}{k}} \\
& \leq [|\|x + y\| + \|y\| - 1|^k + |\|x - y\| + \|y\| - 1|^k]^{\frac{1}{k}} \\
& \quad + (2(1 - \|y\|)^k)^{\frac{1}{k}} \\
& (\|x + y\|^k + \|x - y\|^k)^{\frac{1}{k}} - (2(1 - \|y\|)^k)^{\frac{1}{k}} \\
& \leq [|\|x + y\| + \|y\| - 1|^k + |\|x - y\| + \|y\| - 1|^k]^{\frac{1}{k}},
\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) & \geq \frac{|\|x + y\| + \|y\| - 1|^k + |\|x - y\| + \|y\| - 1|^k}{2^k \|y\|^k} \\
\left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} & \geq \frac{[|\|x + y\| + \|y\| - 1|^k + |\|x - y\| + \|y\| - 1|^k]^{\frac{1}{k}}}{2\|y\|} \\
2\|y\| \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} & \geq [|\|x + y\| + \|y\| - 1|^k + |\|x - y\| + \|y\| - 1|^k]^{\frac{1}{k}} \\
& \geq (\|x + y\|^k + \|x - y\|^k)^{\frac{1}{k}} - (2(1 - \|y\|)^k)^{\frac{1}{k}} \\
2\|y\| \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} + (2(1 - \|y\|)^k)^{\frac{1}{k}} & \geq (\|x + y\|^k + \|x - y\|^k)^{\frac{1}{k}} \\
2\|y\| \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} + 2^{\frac{1}{k}}(1 - \|y\|) & \geq \left(\frac{2^{k-1}(1 + \|y\|^k)}{2^{k-1}(1 + \|y\|^k)}\|x + y\|^k + \|x - y\|^k\right)^{\frac{1}{k}} \\
2\|y\| \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} + 2^{\frac{1}{k}}(1 - \|y\|) & \geq 2^{1-\frac{1}{k}}(1 + \|y\|^k)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{\|x + y\|^k + \|x - y\|^k}{2^{k-1}(1 + \|y\|^k)}\right)^{\frac{1}{k}} \\
\frac{2\|y\| \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} + 2^{\frac{1}{k}}(1 - \|y\|)}{2^{1-\frac{1}{k}}(1 + \|y\|^k)^{\frac{1}{k}}} & \geq \left(\frac{\|x + y\|^k + \|x - y\|^k}{2^{k-1}(1 + \|y\|^k)}\right)^{\frac{1}{k}} \\
\frac{\left(2\|y\| \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} + 2^{\frac{1}{k}}(1 - \|y\|)\right) 2^{\frac{1}{k}-1}}{(1 + \|y\|^k)^{\frac{1}{k}}} & \geq \left(C_{NJ}^{(k)}\right)^{\frac{1}{k}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\left(2\|y\|\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} + 2^{\frac{2}{k}-1}(1-\|y\|)}{(1+\|y\|^k)^{\frac{1}{k}}} \geq \left(C_{NJ}^{(k)}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi f sebagai berikut,

$$f(t) = \frac{\left(2\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} t + 2^{\frac{2}{k}-1}(1-t)}{(1+t^k)^{\frac{1}{k}}},$$

maka akan diperoleh bahwa,

$$\begin{aligned} \left(C_{NJ}^{(k)}\right)^{\frac{1}{k}} &\leq \max_{t \in [0,1]} \frac{\left(2\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)\right)^{\frac{1}{k}} t + 2^{\frac{2}{k}-1}(1-t)}{(1+t^k)^{\frac{1}{k}}} \\ &\leq 2^{\frac{2}{k}-1} \left[1 + \left(2^{\frac{1}{l}} \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)^l \right]^{1-\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga, diperoleh bahwa } C_{NJ}^{(k)} \leq 2^{2-k} \left[1 + \left(2^{\frac{1}{l}} \left(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(X) \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)^l \right]^{k-1}.$$

Selanjutnya, misalkan $x, y \in X$ dengan $0 < \|y\| \leq \|x\| = 1$, dapat diketahui bahwa

$$2^k \geq 2^{k-1}(\|x\|^k + \|y\|^k)$$

sehingga $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Dengan demikian, dapat dilihat bahwa $C_{NJ}^{(k)}(X) \geq \bar{C}_{NJ}^{(k)}(X)$.

2.12 Pendeskripsian Bumi dalam Al-Qur'an

Pada pembahasan sebelumnya, telah dibahas mengenai pendeskripsian bumi dengan menggunakan salah satu karakteristik bumi, yakni pergantian siang dan malam. Pada sub bab ini, akan dibahas cara Allah mendeskripsikan bentuk bumi dengan karakteristik atau sifat yang lain. Pendeskripsian bentuk bumi diterangkan pula pada surat al-Baqarah ayat 22, yang berbunyi:

الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ الْأَرْضَ فِرَاشًا وَالسَّمَاءَ بِنَاءً وَأَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَأَخْرَجَ بِهِ مِنَ الثَّمَرَاتِ رِزْقًا لَكُمْ

فَلَا تَجْعَلُوا لِلَّهِ أَنْدَادًا وَأَنْتُمْ تَعْلَمُونَ

“Dialah yang menjadikan bumi sebagai hamparan bagimu dan langit sebagai atap dan Dia menurunkan air (hujan) dari langit, lalu dia menghasilkan dengan hujan itu segala buah-buahan sebagai rezeki untukmu; karena itu janganlah kamu mengadakan sekutu-sekutu bagi Allah, padahal kamu mengetahui”

Berbeda dengan ayat pada pembahasan sebelumnya, pada ayat ini Allah mendeskripsikan bumi dengan kata ‘فِرَاشٌ’ yang bermakna tikar atau dipan, dalam artian bumi dihamparkan agar manusia nyaman tinggal di atasnya. Berkaitan dengan ilmu geologi, bumi yang ditinggali oleh manusia sebenarnya sesuatu yang berbentuk bola api yang amat besar dengan dilapisi oleh kerak bumi setebal belasan kilometer. Sehingga, dapat dipahami bahwa Allah menciptakan kerak bumi seolah-olah terbentang di atas lelehan magma bumi serta melindungi manusia dari panasnya.

Pada surat yang lain, yaitu surat al-Ghasyiyah ayat 20, yang berbunyi:

وَالْيَ الْأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ

“Dan (apakah manusia tidak mau memikirkan) bagaimana bumi itu dihamparkan?”

Pada ayat ini, Allah menjelaskan bumi yang dihamparkan dengan menggunakan kata ‘سُطِحَتْ’ yang menunjukkan bumi itu ‘سَطْحِيَّةٌ’ yaitu bulat. Namun dalam *Tafsir*

Jalalain dijelaskan, makna ‘سُطِحَتْ’ pada dasarnya menunjukkan bahwa bumi itu datar dan dijelaskan oleh ulama, bukan bulat sebagaimana yang dikatakan oleh ahli

astronom. Terdapat perbedaan pendapat di kalangan ulama dalam menafsirkan pendeskripsian bumi yang jelaskan Allah, beberapa mengatakan bentuk bumi bulat beberapa lagi mengatakan bentuk bumi datar. Terlepas dari perbedaan tersebut, yang penulis tekankan yakni cara Allah mendeskripsikan bumi berdasarkan karakteristik serta sifat dari bumi sendiri. Hal ini selaras dengan penelitian yang penulis kaji untuk mencari karakteristik dari ruang Morrey kecil dan ruang Morrey kecil lemah melalui nilai konstanta geometrinya.



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Perumuman Konstanta Von Neumann-Jordan dan Konstanta Modifikasi von Neumann-Jordan di Ruang Morrey Kecil

Perumuman konstanta von Neumann-Jordan yang akan penulis bahas pada penelitian ini merupakan perumuman konstanta von Neumann-Jordan yang didefinisikan oleh Cui, dkk (2015). Pada penelitiannya tersebut, Cui, dkk mendefinisikan perumuman dari konstanta von Neumann-Jordan pada ruang Banach. Kemudian pada penelitian ini juga dibahas mengenai perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan yang didefinisikan oleh Yang, dkk (2017). Pada penelitian ini, penulis akan menggunakan kedua definisi konstanta tersebut dan menghitungnya di ruang Morrey kecil dengan membatasi nilai perumumannya yaitu $1 \leq k \leq 4$. Hasil dari perhitungan kedua konstanta tersebut akan dijelaskan pada pembuktian teorema berikut.

Teorema 3.1: *Diberikan ruang Morrey $m_q^p(\mathbb{R}^n)$ serta perumuman konstanta von Neumann-Jordan $C_{NJ}^{(k)}(m_q^p)$ dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan $\bar{C}_{NJ}^{(k)}(m_q^p)$ di ruang Morrey kecil. Jika $1 \leq p < q < \infty$ dan $1 \leq k \leq 4$, maka*

$$C_{NJ}^{(k)}(m_q^p) = \bar{C}_{NJ}^{(k)}(m_q^p) = 2.$$

Bukti: Untuk membuktikan teorema ini, penulis hanya cukup menunjukkan konstanta perumuman tersebut berlaku untuk nilai $k = 4$. Sehingga, ketika nilai konstanta perumuman untuk $k = 4$ diperoleh sama dengan 2 (dua), maka nilai konstanta untuk $1 \leq k < 4$ juga akan diperoleh sama dengan 2 (dua). Penulis pun

menggunakan ide pembuktian pada penelitian Mu'tazili (2019) dalam menghitung konstanta von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil.

Ide pembuktian dari pencarian nilai konstanta perumuman tersebut yakni dengan mengkonstruksikan beberapa definisi fungsi di ruang Morrey kecil $m_q^p = m_q^p(\mathbb{R}^n)$. Pertama kita pilih $\varepsilon > 0$, kemudian kita definisikan fungsi

$$f(x) = |x|^{-\frac{n}{q}},$$

$$g(x) = f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|),$$

$$h(x) = f(x) - g(x), \text{ dan}$$

$$l(x) = -f(x) + 2g(x),$$

dimana $|x|$ menyatakan norma Euclid. Pada pemilihan fungsi-fungsi tersebut, dapat diketahui bahwa fungsi g, h , dan l merupakan fungsi yang bergantung pada nilai ε . Perlu diperhatikan bahwa semua fungsi merupakan fungsi radial, fungsi f dan g merupakan fungsi radial menurun, $h \leq f$, dan $|l| = f$.

Selanjutnya untuk menentukan nilai konstanta, kita memerlukan nilai norma dari fungsi-fungsi tersebut di ruang Morrey kecil. Berikut perhitungan norma masing-masing fungsi.

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

berdasarkan pendefinisian fungsi f sebelumnya, maka $a = 0 \in \mathbb{R}^n$. Dengan begitu, dapat ditulis norma f sebagai berikut,

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{r \in (0,1)} |B(0,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

karena untuk setiap $B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, maka untuk sebarang $C > 0$, dapat dituliskan

$|B(0,r)| = Cr^n$, sehingga dapat dituliskan,

$$\begin{aligned} \|f\|_{m_q^p} &= \sup_{r \in (0,1)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\int_{B(0,r)} |x|^{-\frac{np}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ definisi } f(x) = |x|^{-\frac{n}{q}} \\ &= \sup_{r \in (0,1)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\int_0^r r^{-\frac{np}{q}} (r^{n-1} dr) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ karena } 0 \leq |x| \leq r \\ &= \sup_{r \in (0,1)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\frac{1}{n-\frac{np}{q}} r^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pengintegralan biasa} \\ &= \sup_{r \in (0,1)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\frac{1}{n(1-\frac{p}{q})} r^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r \in (0,1)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \left(n(1-\frac{p}{q}) \right)^{-\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r \in (0,1)} Cr^0 \left(n(1-\frac{p}{q}) \right)^{-\frac{1}{p}} \\ &= C \left(n(1-\frac{p}{q}) \right)^{-\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

dari perhitungan nilai norma f tersebut, diperoleh $\|f\|_{m_q^p} < \infty$, artinya $f \in m_q^p$.

Selanjutnya, berikut perhitungan norma fungsi yang lain yaitu,

$$\begin{aligned}
\|g\|_{m_q^p} &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ definisi fungsi } g(x) \\
&= \sup_{r \in (0,1)} |B(0,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,r)} |f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

karena untuk setiap $B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, maka $|B(0,r)| = Cr^n$. Selanjutnya, berdasarkan definisi fungsi karakteristik dan $0 \leq |x| \leq r$ dengan $r \in (0,1)$, maka $\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|) = 1$. Sehingga dapat dituliskan,

$$\begin{aligned}
\|g\|_{m_q^p} &= \sup_{r \in (0,\varepsilon)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\int_{B(0,r)} |x|^{-\frac{np}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r \in (0,\varepsilon)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\int_0^r r^{-\frac{np}{q}} (r^{n-1} dr) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ karena } 0 \leq |x| \leq r \\
&= \sup_{r \in (0,\varepsilon)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\frac{1}{n-\frac{np}{q}} r^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pengintegralan biasa} \\
&= \sup_{r \in (0,\varepsilon)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\frac{1}{n(1-\frac{p}{q})} r^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r \in (0,\varepsilon)} Cr^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+\frac{n-n}{p}-\frac{n}{q}} \left(n(1-\frac{p}{q}) \right)^{-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$= \sup_{r \in (0, \varepsilon)} C r^0 \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{m_q^p},$$

$$\begin{aligned} \|h\|_{m_q^p} &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0, 1)}} |B(a, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a, r)} |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0, 1)}} |B(a, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(a, r)} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0, 1)}} |B(a, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\int_{B(0, r)} |f(x) - f(x) \chi_{(0, \varepsilon)}(|x|)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ definisi } h(x) \\ &= \sup_{r \in (0, 1)} C r^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\int_{B(0, r)} |f(x) (1 - \chi_{(0, \varepsilon)}(|x|))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r \in (0, 1)} C r^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\int_{B(0, r)} |f(x)|^p (1 - \chi_{(0, \varepsilon)}(|x|)) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r \in (0, 1)} C r^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\int_{B(0, r)} |x|^{-\frac{np}{q}} (1 - \chi_{(0, \varepsilon)}(|x|)) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r \in (0, 1)} C r^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\int_{B(0, r)} |x|^{-\frac{np}{q}} (1 - \chi_{(0, \varepsilon)}(|x|)) dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\int_{B(\varepsilon, r)} |x|^{-\frac{np}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ definisi fungsi karakteristik} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\int_{\varepsilon}^r r^{-\frac{np}{q}} (r^{n-1} dr) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(\frac{1}{n-\frac{np}{q}} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pengintegralan biasa} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}} r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}} r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}) \frac{p}{p}} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ invers perkalian} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}} \left(r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}) \cdot p} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}} \left(r^{\frac{np}{q}-n} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r \in (\varepsilon, 1)} C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}} \left(1 - r^{\frac{np}{q}-n} \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \left(n \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}} \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{m_q^p} \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|l\|_{m_q^p} &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |l(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |2g(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ definisi } l(x) \\
&= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |2f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)(2\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|) - 1)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p (2\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|) - 1) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ definisi norma } f(x) \\
&= \|f\|_{m_q^p}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan norma dari fungsi-fungsi tersebut, dapat diketahui bahwa semua fungsi yang didefinisikan berada di ruang Morrey kecil. Selanjutnya, hasil perhitungan norma fungsi-fungsi tersebut akan digunakan untuk perhitungan perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil. Berikut merupakan langkah-langkah perhitungan perumuman konstanta von Neumann-Jordan.

$$\begin{aligned}
\sup \left\{ \frac{\|f + l\|_{m_q^p}^4 + \|f - l\|_{m_q^p}^4}{2^{4-1} (\|f\|_{m_q^p}^4 + \|l\|_{m_q^p}^4)} \right\} &\geq \frac{\|f + l\|_{m_q^p}^4 + \|f - l\|_{m_q^p}^4}{2^3 (\|f\|_{m_q^p}^4 + \|l\|_{m_q^p}^4)} \\
&= \frac{\|f + (-f + 2g)\|_{m_q^p}^4 + \|f - (-f + 2g)\|_{m_q^p}^4}{2^3 (\|f\|_{m_q^p}^4 + \|f\|_{m_q^p}^4)} \\
&= \frac{\|2g\|_{m_q^p}^4 + \|2f - 2g\|_{m_q^p}^4}{2^3 (2\|f\|_{m_q^p}^4)} \\
&= \frac{\|2g\|_{m_q^p}^4 + \|2(f - g)\|_{m_q^p}^4}{2^4 (\|f\|_{m_q^p}^4)} \\
&= \frac{\|2g\|_{m_q^p}^4 + \|2h\|_{m_q^p}^4}{2^4 \|f\|_{m_q^p}^4} \\
&= \frac{16\|g\|_{m_q^p}^4 + 16\|h\|_{m_q^p}^4}{2^4 \|f\|_{m_q^p}^4} \\
&= \frac{2^4 \|f\|_{m_q^p}^4 \left(1 + \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{4}{p}} \right)}{2^4 \|f\|_{m_q^p}^4} \\
&= 1 + \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{4}{p}}.
\end{aligned}$$

Nilai tersebut berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jika dipilih nilai ε sekecil mungkin yang mendekati 0, maka akan diperoleh bahwa $C_{NJ}^{(4)}(m_q^p) \geq 2$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, diperoleh perhitungan perumuman konstanta von Neumann-Jordan di ruang Morrey yaitu $C_{NJ}^{(4)}(m_q^p) \geq 2$. Namun, berdasarkan sifat perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan yang menyatakan

$C_{NJ}^{(4)}(m_q^p) \leq 2$, maka dapat disimpulkan bahwa benar $C_{NJ}^{(4)}(m_q^p) = 2$, seperti yang diinginkan.

Selanjutnya, berikut perhitungan dari perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan,

$$\begin{aligned}
 \sup \left\{ \frac{\|f + l\|_{m_q^p}^4 + \|f - l\|_{m_q^p}^4}{2^4} \right\} &\geq \frac{\|f + l\|_{m_q^p}^4 + \|f - l\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\
 &= \frac{\|f + (-f + 2g)\|_{m_q^p}^4 + \|f - (-f + 2g)\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\
 &= \frac{\|2g\|_{m_q^p}^4 + \|2f - 2g\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\
 &= \frac{\|2g\|_{m_q^p}^4 + \|2(f - g)\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\
 &= \frac{\|2g\|_{m_q^p}^4 + \|2h\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\
 &= \frac{2^4 \|g\|_{m_q^p}^4 + 2^4 \|h\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\
 &= \frac{2^4 \left(\|f\|_{m_q^p}^4 + \|f\|_{m_q^p}^4 \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{4}{p}} \right)}{2^4} \\
 &= \|f\|_{m_q^p}^4 \left(1 + \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{4}{p}} \right).
 \end{aligned}$$

Dengan membagi kedua sisi dengan $\|f\|_{m_q^p}^4$, maka diperoleh,

$$\bar{C}_{NJ}^{(4)}(m_q^p) \geq \sup \left\{ \frac{\|f + l\|_{m_q^p}^4 + \|f - l\|_{m_q^p}^4}{2^4} \right\} = 1 + \left(1 - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{4}{p}},$$

hasil ini juga terpenuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan menggunakan alasan pembuktian yang sama, maka dapat disimpulkan benar bahwa $\bar{C}_{NJ}^{(4)}(m_q^p) = 2$ seperti yang diinginkan. Dengan demikian, teorema terbukti.

Berikut diberikan contoh untuk memperkuat bukti dari teorema yang telah dibuktikan tersebut.

Contoh 3.2: Dipilih sebarang fungsi f dan g yaitu $f := \chi_{B(0,1)}(x)$ dan $g := |x|^{-\frac{2}{q}}$. Selanjutnya dihitung norma masing-masing fungsi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{m_q^p} &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} \chi_{B(0,1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a,r) \cap B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r) \cap B(0,1)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a,r) \cap B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ r \in (0,1)}} |B(a,r) \cap B(0,1)|^{\frac{1}{q}} \\
 &= |B(0, \min\{1,1\})|^{\frac{1}{q}} \\
 &= B(0,1) \leq C
 \end{aligned}$$

Untuk norma g , perhitungannya seperti perhitungan norma f pada pembuktian Teorema 3.1, maka diperoleh norma fungsi g yaitu

$$\|g\|_{m_q^p} = C \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Selanjutnya, berdasarkan sifat dari normaa ruang Morrey kecil, maka

$$\|f + g\|_{m_q^p} \leq \|f\|_{m_q^p} + \|g\|_{m_q^p} \text{ dan } \|f - g\|_{m_q^p} \leq \|f\|_{m_q^p} + \|g\|_{m_q^p},$$

Kemudian diperoleh penjumlahan kedua normaa tersebut yaitu,

$$\|f + g\|_{m_q^p} + \|f - g\|_{m_q^p} \leq 2\|f\|_{m_q^p} + 2\|g\|_{m_q^p} = \|2f\|_{m_q^p} + \|2g\|_{m_q^p}.$$

Dengan demikian dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{m_q^p}^4 + \|f - g\|_{m_q^p}^4 &\leq \|2f\|_{m_q^p}^4 + \|2g\|_{m_q^p}^4 \\ &= 2^4 \|f\|_{m_q^p}^4 + 2^4 \|g\|_{m_q^p}^4 \\ &= 2^4 \left(C^4 + C^4 \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{4}{p}} \right) \\ &= 2^4 C^4 \left(1 + \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{4}{p}} \right) \end{aligned}$$

Sehingga untuk perumuman konstanta von Neumann-Jordan diperoleh yaitu

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{\|f + g\|_{m_q^p}^4 + \|f - g\|_{m_q^p}^4}{2^{4-1} (\|f\|_{m_q^p}^4 + \|g\|_{m_q^p}^4)} \right\} &\geq \frac{\|f + g\|_{m_q^p}^4 + \|f - g\|_{m_q^p}^4}{2^3 (\|f\|_{m_q^p}^4 + \|g\|_{m_q^p}^4)} \\ &= \frac{2^4 C^4 \left(1 + \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{4}{p}} \right)}{2^3 C^4 \left(1 + \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{4}{p}} \right)} = 2. \end{aligned}$$

Karena sifat perumuman konstanta von Neumann-Jordan tidak lebih dari 2 (dua), sehingga diperoleh nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan sama dengan 2 (dua). Selanjutnya untuk perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan yaitu diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{\|f + g\|_{m_q^p}^4 + \|f - g\|_{m_q^p}^4}{2^4} \right\} &\geq \frac{\|f + g\|_{m_q^p}^4 + \|f - g\|_{m_q^p}^4}{2^4} \\ &= \frac{2^4 C^4 \left(1 + \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{4}{p}} \right)}{2^4} \\ &= C^4 \left(1 + \left(2 \left(1 - \frac{p}{q} \right) \right)^{-\frac{4}{p}} \right), \end{aligned}$$

jika dipilih $p = 1$ dan $q = 2$ atau yang lebih besar dari nilai tersebut, maka dapat

diperoleh $\sup \left\{ \frac{\|f + g\|_{m_q^p}^4 + \|f - g\|_{m_q^p}^4}{2^4} \right\} \geq 2$, sedangkan sifat perumuman konstanta

modifikasi von Neumann-Jordan tidak lebih dari 2 (dua), sehingga diperoleh nilai perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan sama dengan 2 (dua).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dipaparkan, maka penulis dapat menyimpulkan dari penelitian ini yaitu nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan $C_{NJ}^{(k)}(m_q^p)$ di ruang Morrey kecil yaitu 2 (dua) dan nilai perumuman konstanta modifikasi von Neumann-Jordan $(\bar{C}_{NJ}^{(k)}(m_q^p))$ di ruang Morrey kecil yaitu 2 (dua), dengan masing-masing nilai perumuman $1 \leq k \leq 4$.

4.2 Saran

Sebagai saran untuk penelitian selanjutnya, peneliti bisa mencari nilai perumuman konstanta von Neumann-Jordan dan konstanta modifikasi von Neumann-Jordan di ruang Morrey kecil dengan nilai perumuman seluruhnya, sehingga dapat diketahui sifat geometri dari ruang Morrey kecil tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Alonso, J., Martin, P., Papini, P.L. "Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach Spaces". *Stud. Math.* 188, 135–150 (2008).
- Chidume, Charles. 2008. *Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinier Iterations*. Italy: Springer.
- Clarkson, J.A. 1937. "The Von Neumann-Jordan Constant for The Lebesgue Spaces". *Ann. Math.* 38, 114–115.
- Cui, Y., Huang, W., Hudzik, H., Kaczmarek, R. 2015. "Generalized Von Neumann-Jordan Constant and Its Relationship to The Fixed Point Property". *Fixed Point Theory Appl.* 40, 1–11.
- Gunawan, H., dan Mu'tazili, A. "von Neumann-Jordan Constant, James Constant, and Dunkl-Williams Constant for Small Morrey Spaces". arXiv: 1904.01712v2 [math.FA] 15 Juni 2019.
- Gunawan, H., Kikianty, E., Sawano, Y., dan Schwanke, C. "Three Geometric Constants for Morrey Spaces". arXiv: 1810.00963v3 [math.FA] 19 Agustus 2019.
- Hoffman, Kenneth. 1975. *Analysis in Euclidean Space*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Kadets, Vladimir. 2018. *A Course in Functional Analysis and Measure Theory*. Switzerland: Springer.
- Kato, M dan Takahashi, Y. 1997 "On The von Neumann-Jordan Constant for Banach Spaces". *Proc. Am. Math. Soc.* 125, 1055-1062.
- Kato, M. dan Maligranda, L. 2001. "On James and Jordan-von Neumann Constants of Lorentz Sequence Spaces". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 258, 457-465.
- Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons.
- Morrey, C. B. 1938. "On The Solution of Quasi-Linear Wlliptic Partial Differential Equation". *Transaction of The American Mathematical Society*. 43 (1), 126-166.
- Mu'tazili, Aqfil. 2019. *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang Morrey Kecil*. Tesis dipublikasikan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

- Muscat, Joseph. 2014. *Functional Analysis: An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. New York: Springer.
- Royden, H. L. dan Fitzpatrick. 2010. *Real Analysis, Fourth Edition*. London: Pearson Education, Inc.
- Rukmana, I. 2016. *Operator Pengali pada Ruang Morrey dan Ruang Morrey Lemah*. Tesis dipublikasikan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Sawano. 2018. "A Thought on Generalized Morrey Spaces". *arXiv:1812.08394v1*.
- Stein, Elias M. dan Shakarchi, Rami. 2011. *Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
- Woyczyński, Wojbor A. 2019. *Geometry and Martingales in Banach Spaces*. London: CRC Press.
- Yamamoto, Yutaka. 2012. *From Vector Spaces to Function Spaces: Introduction to Functional Analysis with Applications*. Philadelphia: Siam.
- Yang, C., Wang, F. 2016. "The von Neumann-Jordan Constant for a Class of Day-James Spaces". *Mediterr. J. Math.* 13, 1127-1133.
- Yang, C., Wang, F. 2017. "An Extension of A Simply Inequality Between Von Neumann- Jordan and James Constants In Banach Spaces". *Acta Mathematica Sinica Engl. Ser.* 9, 1287–1296.

RIWAYAT HIDUP



Aminahtuz Zahro, lahir di kota Negara pada tanggal 30 September 1998, biasa dipanggil dengan sebutan Ina, tinggal di Jalan Ketut Cakra Desa Patas Provinsi Bali. Ia merupakan anak pertama dari Bapak Hasan Zailani Alkaff dan Ibu Halimah Bafaqih.

Riwayat pendidikannya dimulai dari SDN 02 Teluk Betung Utara Lampung hanya sampai kelas dua, kemudian ia bermigrasi ke Bali pada tahun 2005 dan melanjutkan pendidikan dasarnya di SDN 02 Loloan Barat hingga lulus pada tahun 2009. Kemudian setelah lulus sekolah dasar, ia pun melanjutkan pendidikannya di MTsN Jembrana Bali hingga lulus pada tahun 2013. Selanjutnya ia melanjutkan pendidikan tingkat atasnya di MAN Negara pada penjurusan MIPA dan lulus pada tahun 2016. Tak berhenti di jenjang pendidikan SMA saja, setelah lulus dia langsung melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan terdaftar sebagai mahasiswa bidikmisi dengan mengambil program studi matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia ikut aktif terhadap *event-event* perlombaan penelitian ataupun kepenulisan. Dia pernah meraih peringkat lima besar lomba penelitian se-fakultas saintek UIN Maliki Malang pada tahun 2019. Dia juga pernah mengikuti penelitian yang kemudian diikuti sertakan pada seminar matematika (SIMANIS) pada tahun 2019.

Selama menempuh pendidikan tingkat dasar hingga perguruan tinggi, dia berhasil meraih beberapa prestasi yang membanggakan. Salah satunya yaitu, penulis selalu berada dalam peringkat tiga besar selama sekolah, baik sekolah dasar, menengah pertama, maupun menengah atas. Selanjutnya penulis mendapatkan Juara III lomba pidato bahasa arab tingkat kabupaten pada tahun 2012, kemudian penulis juga meraih Juara III lomba OSN bidang kebumian tingkat kabupaten 2015, penulis juga pernah meraih Juara Harapan I LKTI agama KSM tingkat Nasional Palembang 2015.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aminahtuz Zahro
NIM : 16610088
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Konstanta Von Neumann-Jordan dan Modifikasinya di Ruang Morrey Kecil
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	6 Februari 2020	Konsultasi Bab I dan Kajian Agama	1.
2	7 Februari 2020	Revisi Bab I dan Kajian Agama	2.
3	7 Februari 2020	Konsultasi Bab II	3.
4	8 Februari 2020	Revisi Bab II	4.
5	9 Februari 2020	ACC Bab I dan Kajian Agama	5.
6	10 Februari 2020	ACC Bab II	6.
7	25 Maret 2020	Konsultasi Bab III	7.
8	6 April 2020	Revisi Bab III	8.
9	24 April 2020	ACC Bab III	9.
10	30 April 2020	Konsultasi Bab IV	10.
11	1 Mei 2020	Revisi dan ACC Bab IV	11.
12	29 Juni 2020	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 29 Juni 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 1965414 200312 1 001