

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIKA MEROKOK  
DENGAN KAMPANYE ANTI ROKOK, PERMEN KARET  
NIKOTIN, DAN PENGOBATAN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
PUTRI LESTARI  
NIM. 16610011**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIKA MEROKOK  
DENGAN KAMPANYE ANTI ROKOK, PERMEN KARET  
NIKOTIN, DAN PENGOBATAN**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Putri Lestari  
NIM. 16610011**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIKA MEROKOK  
DENGAN KAMPANYE ANTI ROKOK, PERMEN KARET  
NIKOTIN, DAN PENGOBATAN**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Putri Lestari**  
**NIM. 16610011**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 13 Mei 2020

Pembimbing I,



Heni Widayani, M.Si

NIP. 19901006 20180201 2 229

Pembimbing II,



Juhari, M.Si

NIP. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL DINAMIKA MEROKOK  
DENGAN KAMPANYE ANTI ROKOK, PERMEN KARET  
NIKOTIN, DAN PENGOBATAN**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Putri Lestari  
NIM. 16610011**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 13 Mei 2020

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si



Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



Sekretaris Penguji : Heni Widayanai, M.Si



Anggota Penguji : Juhari, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Putri Lestari

NIM : 16610011

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kontrol Optimal Pada Model Dinamika Merokok Dengan Kampanye Anti Rokok, Permen Karet Nikotin, dan Pengobatan.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Mei 2020

Yang membuat pernyataan,



Putri Lestari

NIM. 16610011

## MOTO

*“Man Jadda Wa Jada”*

“Siapa bersungguh-sungguh dia akan berhasil” (Negeri 5 Menara)



## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Supardi, Ibu Mutmainah serta adik tersayang Mochammad Hidayatullah yang telah memberikan dukungan, kasih sayang, do'a dan biaya pendidikan bagi penulis. Segenap keluarga penulis yang senantiasa memberikan do'a, semangat dan motivasi kepada penulis, serta sahabat-sahabat penulis yang senantiasa mendukung penulis.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penullis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak Supardi dan Ibu Mutmainah yang senantiasa memberikan doa, semangat, motivasi, kasih sayang, materi yang begitu besar serta pengorbanan yang tak ternilai harganya kepada penulis hingga saat ini.
8. Adik tersayang Mochammad Hidayatullah yang selalu memberikan doa, semangat dan dukungannya.

9. Khanifatun Maisyaroh sebagai teman terbaik selama menjadi mahasiswa yang telah memberikan motivasi, tempat keluh kesah penulis serta sebagai sumber inspirasi yang mengingatkan untuk belajar dan berikhtiar.
10. Weka Dwi Kartika, dan Aminatuz zahro sebagai teman berharga yang telah memberikan segala kebaikannya demi mensukseskan penulis, serta “Bukan Keluarga Cemara” yang telah memberikan berbagai pengalaman kebersamaan semasa pandemi Covid-19.
11. Seluruh teman-teman seperjuangan matematika angkatan 2016 atas kekeluargaan, dan dukungannya.
12. Seluruh pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih ada kekurangan-kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun terus penulis harapkan supaya skripsi ini dapat lebih baik lagi. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas dan juga hikmah bagi penulis dan pembaca.

*Wassalam 'alaikum Wr. Wb.*

Malang, Mei 2020

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PENYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR SIMBOL .....</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	<b>xvii</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>xviii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xix</b>
<b>ملخص.....</b>	<b>xx</b>
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	6
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	8
1.7 Sistematika Penelitian .....	10
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Penelitian Terdahulu .....	12
2.2 Persamaan Diferensial.....	15
2.2.1 Persamaan Diferensial Linier .....	16
2.2.2 Persamaan Diferensial Non Linier .....	17
2.2.3 Sistem Persamaan Diferensial.....	17
2.3 Titik Kesetimbangan .....	18

2.4	Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	18
2.5	Linierisasi .....	20
2.6	Solusi dari Sistem Persamaan Diferensial Linier .....	22
2.7	Kestabilan dan Akar Karakteristik .....	28
2.8	Kriteria Kestabilan Routh .....	30
2.9	Kriteria Kestabilan Hurwitz .....	31
2.10	Bilangan Reproduksi Dasar .....	34
2.11	Teori Kontrol Optimal .....	36
2.12	Persamaan <i>State</i> dan Variabel Kontrol .....	37
2.13	Fungsi Tujuan .....	39
2.14	Formulasi Masalah Kontrol Optimal .....	40
2.15	Prinsip Maksimum Pontryagin .....	41
2.16	Metode Runge-Kutta Orde 4 .....	44
2.17	Jenis-jenis Rokok .....	44
2.18	Permen Karet Nikotin .....	46
2.19	Obat-obatan Non-nikotin .....	47
2.20	Pola Hidup Sehat Menurut Perspektif Islam .....	47

### BAB III PEMBAHASAN

3.1	Interpretasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol .....	54
3.2	Analisis Kestabilan dari Titik Kesetimbangan pada Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol .....	57
3.2.1	Titik Kesetimbangan Model .....	58
3.2.2	Bilangan Reproduksi .....	63
3.2.3	Linierisasi Model .....	69
3.2.4	Analisis Kestabilan Lokal pada Titik Kesetimbangan .....	72
3.2.4.1	Kestabilan Lokal di Titik Kesetimbangan Bebas Merokok .....	73
3.2.4.2	Kestabilan Lokal di Titik kesetimbangan Terbatas (Boundary) .....	77
3.2.4.3	Kestabilan Lokal di Titik kesetimbangan Endemik .....	80
3.3	Model Dinamika Merokok dengan Kontrol .....	86
3.4	Penyelesaian Kontrol Optimal Model Dinamika Merokok .....	93
3.5	Simulasi Numerik .....	103
3.5.1	Hasil Simulasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol ...	103
3.5.2	Algoritma <i>Sweep</i> Maju Mundur .....	109
3.5.3	Simulasi Numerik Model dengan Kontrol .....	110
3.6	Upaya Preventif dan Kuratif dalam Prespektif Islam .....	119

### BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan .....	127
4.2	Saran .....	128

**DAFTAR PUSTAKA .....129**

**LAMPIRAN**

**RIWAYAT HIDUP**



**DAFTAR TABEL**

Tabel 2.1	Stabilitas Sistem Linier .....	29
Tabel 2.2	Tabel Routh.....	30
Tabel 3.1	Nilai Parameter Perhitungan Routh-Hurwitz.....	85
Tabel 3.2	Deskripsi Variabel.....	88
Tabel 3.3	Nilai Parameter (Alkhudari dkk, 2014b, p. 1216).....	89
Tabel 3.4	Nilai Awal Simulasi Numerik.....	109
Tabel 3.5	Parameter Model Dinamika Merokok dengan Kontrol.....	111

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Kompartemen Model Tanpa Kontrol .....	54
Gambar 3.2	Diagram Kompartemen Model dengan Kontrol .....	87
Gambar 3.3	Grafik Model Tanpa Kontrol dengan $R_0 < 1$ .....	104
Gambar 3.4	Grafik Model Tanpa Kontrol dengan $R_0 > 1$ .....	105
Gambar 3.5	Grafik Model Tanpa Kontrol dengan $R_1 > 1$ .....	107
Gambar 3.6	Grafik Dinamika Populasi Perokok Potensial .....	113
Gambar 3.7	Grafik Dinamika Populasi Perokok Ringan .....	114
Gambar 3.8	Grafik Dinamika Populasi Perokok Berat .....	116
Gambar 3.9	Dinamika Populasi Non Perokok Sementara .....	117
Gambar 3.10	Dinamika Populasi Non Perokok Permanen .....	118

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$P(t)$	: Populasi perokok potensial terhadap waktu $t$ .
$L(t)$	: Populasi perokok ringan terhadap waktu $t$ .
$S(t)$	: Populasi perokok berat terhadap waktu $t$ .
$Q_t(t)$	: Populasi non perokok sementara terhadap waktu $t$ .
$Q_p(t)$	: Populasi non perokok permanen terhadap waktu $t$ .
$\alpha$	: Laju kontak antara individu perokok berat dengan non perokok sementara yang kembali merokok.
$\beta_1$	: Laju kontak perokok potensial dengan perokok ringan.
$\beta_2$	: Laju kontak perokok ringan dengan perokok berat.
$\gamma$	: Laju perokok berat yang telah berhenti merokok.
$\mu$	: Laju kematian alami dari populasi manusia.
$\sigma$	: Sebagian dari non perokok permanen (pada tingkat $\gamma$ ).
$b$	: Suatu peluang atau kemungkinan.
$c$	: Suatu peluang atau kemungkinan.
$A_1$	: Bobot dan penyeimbang yang berkorelasi dengan populasi perokok berat.
$A_2$	: Bobot dan penyeimbang yang berkorelasi dengan populasi non perokok permanen.
$A_3$	: Bobot dan penyeimbang yang berkorelasi dengan populasi perokok potensial.
$A_4$	: Bobot dan penyeimbang yang berkorelasi dengan populasi perokok ringan.
$A_5$	: Bobot dan penyeimbang yang berkorelasi dengan populasi non perokok sementara.
$r_1$	: Bobot yang berkorelasi dengan biaya kampanye anti rokok.
$r_2$	: Bobot yang berkorelasi dengan biaya permen karet nikotin.
$r_3$	: Bobot yang berkorelasi dengan biaya pengobatan.
$u_1(t)$	: Tingkat efisiensi dari kampanye anti rokok terhadap waktu

- $u_2(t)$  :  $t$ .  
: Tingkat efisiensi dari permen karet nikotin terhadap waktu  $t$ .
- $u_3(t)$  : Tingkat efisiensi dari pengobatan terhadap waktu  $t$ .



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Pembuktian Lema 2.1 .....	134
Lampiran 2	Proses Linierisasi.....	136
Lampiran 3	Perhitungan Determinan Matriks Jacobian Titik Keseimbangan Bebas Merokok .....	141
Lampiran 4	Perhitungan Determinan Matriks Jacobian Titik Keseimbangan Terbatas .....	142
Lampiran 5	Perhitungan Determinan Matriks Jacobian Titik Keseimbangan Endemik .....	144
Lampiran 6	Proses Perhitungan Manual Persamaan State .....	147
Lampiran 7	Proses Perhitungan Manual Persamaan Co-State.....	153
Lampiran 8	Script Maple untuk Menghitung Nilai Routh Hurwitz pada Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik .....	159
Lampiran 9	M-File untuk Menggambarkan Simulasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol .....	161
Lampiran 10	M-File untuk Menggambarkan Simulasi Model Dinamika Merokok dengan Kontrol.....	165

## ABSTRAK

Lestari, Putri. 2020. **Kontrol Optimal pada Model Dinamika Merokok dengan Kampanye Anti Rokok, Permen Karet Nikotin, dan Pengobatan.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Heni Widayani, M.Si (II) Juhari, M.Si.

**Kata Kunci:** kontrol optimal, model dinamika merokok, prinsip maksimum Pontryagin, kampanye anti rokok, permen karet nikotin, pengobatan

Model dinamika merokok merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu. Model dinamika merokok terdiri dari lima subpopulasi, yaitu perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara, dan non perokok permanen. Model matematika tersebut dapat menggambarkan laju penyebaran perokok. Penelitian ini membahas model dinamika merokok dengan memberikan kontrol yaitu kampanye anti rokok ( $u_1$ ), permen karet nikotin ( $u_2$ ), dan pengobatan ( $u_3$ ). Kampanye anti rokok diberikan pada perokok potensial, permen karet nikotin diberikan pada perokok ringan dan non perokok sementara dan juga pengobatan diberikan pada perokok berat. Penyelesaian kontrol optimal pada model dinamika merokok dilakukan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip ini diterapkan untuk memperoleh kondisi yang optimal dan juga mendapatkan persamaan *state* dan *co-state*, yang kemudian disimulasikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol  $u_1, u_2$  dan  $u_3$  efektif untuk meminimalkan jumlah populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, dan non perokok sementara serta memaksimalkan jumlah populasi non perokok permanen.

## ABSTRACT

Lestari, Putri. 2020. **Optimal Control on The Dynamics Model of Smoking with Anti Smoking Campaign, Nicotine Gum, and Medication.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Heni Widayani, M.Si (II) Juhari, M.Si.

**Keywords:** optimal control, the dynamics model of smoking, Pontryagin maximum principle, anti smoking campaign, nicotine gum, medication.

The dynamics model of smoking is a system of nonlinear differential equations of first order. The dynamics model of smoking consists of five subpopulations, namely potential smokers, light smokers, heavy smokers, smokers who temporarily quit smoking, and smokers who permanently quit smoking. The mathematical model can illustrate the rate of spread of smokers. This study discusses the dynamics model of smoking by giving controls, namely anti smoking campaign ( $u_1$ ), nicotine gum ( $u_2$ ), and medication ( $u_3$ ). An anti-smoking campaign is given to potential smokers, nicotine gum is given to light smokers and smokers who temporary quit smoking and also medication is given to heavy smokers. Solution of the optimal control on the dynamics model of smoking is derived using Pontryagin maximum principle. This principle is applied to obtain optimal conditions and also get the state and co-state equations, which are then simulated using the Runge-Kutta method of order 4. The numerical simulation result indicate that implementation of controller  $u_1, u_2$  and  $u_3$  effectively to minimize the number of potential smoker population, light smokers, heavy smokers, and smokers who temporarily quit smoking, and to maximize the number of smokers population who permanently quit smoking.

## ملخص

لستارى، بوترى. ٢٠٢٠. التَّحْكَمُ الأمثلية فى النموذج الرياضى الديناميكية التدخين مع حملة مكافحة التدخين والعلكة النيكوتينية و الأدوية. البحث العلى. شعبة الرياضيات و كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية ملانج. تحت الإشراف: (١) هني ودابني الماجستير (٢) جوهاري الماجستير.

أكلمات الرئسية: التَّحْكَمُ الأمثلية، نموذج ديناميكية التدخين، المبدأ اقصى لبونتركين (*Pontryagin*)، حملة مكافحة التدخين، العلكة النيكوتينية، الأدوية

نموذج ديناميكية التدخين هو نظام من المعادلة التفاضلية غير الخطية من الرتبة الأولى. يتكون نموذج ديناميكية التدخين خمس أنواع فرغيات، هم المدخنون المحتملون، والمدخنون الخفيفيون، والمدخنون الثقيلة، والمدخنون الذين يقلعون عن التدخين مؤقتة، والمدخنون الذين يتركون التدخين بشكل دائم. ويمكن لهذا النموذج الرياضى أن يوضح معدل انتشار المدخنين. تناقش هذا البحث العلى نموذجاً ديناميكية للتدخين بإعطاء الضوابط، وهي حملة مكافحة التدخين ( $u_1$ )، والعلكة النيكوتينية ( $u_2$ )، والأدوية ( $u_3$ ). ويتم إعطاء حملة مكافحة التدخين للمدخنين المحتملين، ويتم إعطاء العلكة النيكوتينية للمدخنين الخفيفين والمدخنين الذين يقلعون عن التدخين مؤقتة، وكذلك يتم إعطاء الدواء للمدخنين الثاقيلية. يتم اشتقاق على حل التحكم الأمثل فى هذا البحث العلى باستخدام مبدأ اقصى لبونتركين (*Pontryagin*). يتم تطبيق هذا المبدأ للحصول على الظروف المثلى وأيضاً الحصول على معادلة state و co-state، وهو ا بعد ذلك محاكاة باستخدام طريقة رونج كوتا على رتبة الرابعة. تشير نتيجة المحاكاة العددية إلى أن تنفيذ تحكم  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  بشكل فعال لتقليل عدد المدخنين المحتملين والمدخنين الخفيفين والمدخنين الثاقيلين والمدخنين الذين يقلعون عن التدخين مؤقتة، ولزيادة عدد المدخنين الذين يتركون التدخين بشكل دائم.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dewasa ini, popularitas merokok semakin sulit dikendalikan. Aktivitas tersebut tidak hanya dilakukan oleh orang dewasa akan tetapi juga kalangan remaja. Merokok adalah aktivitas membakar tembakau, kemudian menghisap asapnya dan mengeluarkannya kembali melalui mulut. Perilaku merokok ini dilakukan sebagai suatu cara untuk menikmati tembakau. Namun, sebagian perokok mengakui tidak menikmatinya dan mengalami kecanduan atas nikotin. Kecanduan nikotin dapat menyebabkan seorang perokok sulit untuk berhenti dan mengabaikan dampak buruk merokok.

Badan Kesehatan Dunia (*World Health Organization*) menyatakan bahwa kematian akibat tembakau mencapai angka 5,4 juta per tahun dari seluruh dunia. Jumlah tersebut diperkirakan pada 2030 meningkat menjadi 80 juta orang (*World Health Organization*, 2008, p. 7). Konsumsi rokok secara berkala juga dapat memberikan pengaruh buruk bagi kesehatan. Hal ini dikarenakan adanya kandungan bahan berbahaya di dalam rokok, sehingga menimbulkan berbagai penyakit antara lain penyempitan pembuluh darah, tekanan darah tinggi, jantung, paru-paru, dan bronkitis kronis (Fuadah, 2011, pp. 7-18). Sedangkan, menurut Davidson & Neale (1990) dalam (Govan & Puspita, 2016, p. 36) menyatakan bahwa konsumsi rokok pada ibu hamil memiliki resiko seperti kelahiran prematur, berat badan bayi rendah, mortalitas prenatal, cacat lahir maupun gangguan perkembangan bayi. Bahkan, Koning dkk (2010) menyatakan bahwa merokok

tembakau menjadi penyebab utama kematian dan kemunculan berbagai penyakit yang dapat merusak kesehatan.

Kesehatan memang menjadi masalah yang sangat krusial dalam kehidupan saat ini. Kesehatan tidak dapat dibandingkan dengan hal-hal yang bersifat duniawi. Namun, sebagian manusia seringkali lalai dalam menjaga kesehatan sehingga datang suatu penyakit. Penyebab utamanya adalah pola hidup tidak sehat. Sharkey (2003) *Human Population Laboratory* di California *Departemen of Health* menerbitkan daftar kebiasaan berkenaan dengan kesehatan serta umur panjang, yaitu olahraga secara teratur, tidur secukupnya, makan teratur dan tidak melewatkan sarapan, kontrol berat badan, bebas dari rokok dan obat-obatan, dan tidak mengonsumsi alkohol (Suharjana, 2012, p. 191). Bahkan, Al-Qur'an juga telah menjelaskan pentingnya menjaga kesehatan dengan cara memakan makanan halal, membersihkan diri dan merawat lingkungan.

Salah satu firman Allah SWT dalam al-Qur'an mengenai perintah memakan makanan halal yaitu:

*"Hai sekalian manusia, makanlah yang halal lagi baik dari apa yang terdapat di bumi, dan janganlah kamu mengikuti langkah-langkah syaitan; Karena sesungguhnya syaitan itu adalah musuh yang nyata bagimu"* (QS. Al-Baqarah/2: 168).

Berdasarkan hikmah dalam QS. Al-Baqarah/2: 168 Allah menerangkan bahwa seluruh umat manusia baik seorang mukmin atau kafir diperintahkan untuk mengonsumsi makanan yang halal. Akan tetapi, tidak keseluruhan makanan yang ada di bumi ini halal. Ada sebagian makanan yang haram dan apabila dikonsumsi dapat menimbulkan suatu penyakit, seperti daging babi, bangkai, dan darah. Hal ini berlaku juga dengan aktivitas, karena terdapat beberapa aktivitas yang membawa pengaruh baik bagi kesehatan misalnya berpola hidup sehat.

Sedangkan, aktivitas yang berpengaruh buruk dapat dihindari. Dengan demikian sebagai seorang mukmin yang taat kepada Allah maka harus senantiasa menjaga kesehatannya sebagai salah satu rasa syukur kepada Allah SWT.

Salah satu cara berpola hidup sehat sebagai upaya menjaga kesehatan menurut *Human Population Laboratory* adalah bebas dari rokok, sehingga perlu adanya penanggulangan untuk mempersempit meluasnya kebiasaan merokok. Upaya-upaya pencegahan dan penanganan meningkatnya jumlah perokok seperti perokok ringan hingga perokok berat dapat dilakukan melalui kampanye anti rokok. Kampanye anti rokok mulai dari sejak dini bertujuan agar kalangan muda mengetahui bahaya yang dapat diakibatkan oleh rokok. Pengaruh kampanye anti rokok ini dapat dilakukan melalui berbagai cara, misalnya di lingkungan keluarga, sekolah atau iklan mengenai bahaya rokok.

Upaya menangani peningkatan jumlah perokok lainnya yaitu pemakaian permen karet nikotin dan metode pengobatan. Nikotin merupakan zat yang dapat meningkatkan ketergantungan perokok pada tembakau. Berdasarkan penelitian pengurangan nikotin dalam kadar yang rendah dapat menghilangkan kecanduan perokok hingga berhenti merokok (Benowitz & Henningfield, 2013, pp. i14-i16). Permen karet nikotin merupakan salah satu produk yang dikembangkan untuk terapi yang berfungsi sebagai pengganti nikotin, agar perokok dapat menjauhkan diri dari merokok secara bertahap (Chaturvedi & Chaturvedi, 2017, p. 1964). Upaya selanjutnya yaitu metode pengobatan. Metode ini merupakan metode pemakaian obat yang dapat menyembuhkan seseorang dari ketergantungan dan kecanduan terhadap rokok (Fawzani & Triratnawati, 2005, pp. 23-24). Biasanya

pengobatan dilakukan ketika perokok sudah banyak melakukan berbagai cara untuk berhenti merokok namun masih tidak berhasil.

Upaya secara matematika untuk membantu mengurangi jumlah perokok adalah dengan mengkonstruksi suatu model matematika. Beberapa penelitian mengurangi peningkatan jumlah perokok melalui pemodelan matematika adalah sebagai berikut. Pertama, penelitian (Alkhudari dkk, 2014b) yang membahas mengenai analisis kestabilan pada model dinamika merokok dengan lima subpopulasi yaitu perokok potensial, perokok ringan dan perokok berat serta non perokok sementara dan non perokok permanen. Kedua, penelitian (Zeb dkk, 2015) yang membahas mengenai model dinamika merokok empat subpopulasi dengan dinamika akar kuadrat yang diberikan tiga variabel kontrol yakni kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan. Prinsip ini bertujuan untuk meminimalkan populasi perokok ringan dan berat serta memaksimalkan non perokok permanen. Ketiga, penelitian (Zaman, 2011b) ini membahas model dinamika merokok yang dikontrol dengan kampanye anti rokok dan pengobatan saja.

Berdasarkan uraian mengenai dampak buruk hingga upaya yang perlu dilakukan, penulis akan menganalisis dan mengontrol jumlah perokok secara optimal. Pengendalian tersebut dilakukan dengan tiga kontrol yaitu kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan menggunakan model dinamika merokok dengan lima subpopulasi. Penyelesaian pengontrolan optimal akan digunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip ini merupakan salah satu penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai yaitu meminimalkan populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, dan

non perokok sementara serta memaksimalkan populasi non perokok permanen. Selain itu, simulasi numerik diberikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk dapat mempermudah pemahaman pembaca.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang, maka permasalahan dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan?
2. Bagaimana penyelesaian numerik dari model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan?
3. Bagaimana simulasi numerik model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang ingin dicapai berdasarkan rumusan masalah adalah

1. Untuk mengetahui model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan.
2. Untuk mengetahui penyelesaian numerik dari model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan.
3. Untuk mengetahui simulasi numerik model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh model dinamika merokok dengan kontrol.
2. Menginformasikan simulasi numerik peningkatan populasi non perokok permanen dari model dinamika merokok tanpa kontrol dan peningkatan populasi non perokok permanen setelah diberikan kontrol kemudian dapat diketahui perbandingan diantara keduanya. Perbandingan ini dapat membantu dalam bidang kesehatan.
3. Sebagai bahan literatur untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

#### 1.5 Batasan Masalah

Untuk membatasi pembahasan pada penelitian ini agar sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan baru, maka penulis memberikan batasan yaitu

1. Asumsi yang dipergunakan dalam pembentukan model pengendalian populasi merokok diantaranya,
  - a. Populasi dibagi menjadi lima subpopulasi yaitu perokok potensial ( $P(t)$ ) merupakan individu yang belum merokok namun berpeluang memiliki kebiasaan merokok melalui kontak langsung dengan perokok. Perokok ringan ( $L(t)$ ) merupakan perokok yang memiliki tingkat frekuensi merokok kadang-kadang, frekuensi kadang-kadang ini ketika individu merokok selama 3 hari dalam seminggu dan jika dinyatakan dalam jumlah rokok berbentuk batang maka perokok ringan dapat merokok  $< 10$  batang per hari. Perokok berat ( $S(t)$ ) merupakan perokok yang memiliki tingkat

frekuensi merokok secara terus-menerus, frekuensi terus-menerus yaitu individu dapat merokok selama 4 hari dalam seminggu atau bisa juga setiap hari. Jika dinyatakan dalam jumlah rokok berbentuk batang maka perokok berat dapat merokok  $\geq 10$  batang per hari. Non perokok sementara ( $Q_t(t)$ ) merupakan individu yang telah berhenti merokok tetapi masih memiliki keinginan untuk merokok, biasanya perokok ini dapat berhasil berhenti merokok sekurang-kurangnya selama 3 bulan, dan non perokok permanen ( $Q_p(t)$ ) merupakan individu yang telah berhenti merokok sepenuhnya.

- b. Total populasi diasumsikan konstan (tertutup), artinya  $N(t) = P(t) + L(t) + S(t) + Q_t(t) + Q_p(t)$ . Jumlah populasi dalam waktu  $t$  sama dengan jumlah perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara dan non perokok permanen.
- c. Terdapat kelahiran dan kematian alami dalam populasi.
- d. Kebiasaan merokok ditularkan melalui kontak secara langsung dengan perokok.
- e. Terdapat individu perokok ringan dan perokok berat yang berhenti merokok secara sementara dan permanen.
- f. Terdapat individu perokok ringan yang meningkatkan intensitas merokoknya sehingga menjadi perokok berat.
- g. Terdapat individu perokok berat yang mengurangi intensitas merokoknya menjadi perokok ringan.
- h. Kampanye anti rokok dilakukan pada perokok potensial.
- i. Permen karet nikotin diberikan untuk perokok ringan, dan non perokok sementara.

- j. Pengobatan kecanduan nikotin akan diberikan pada perokok berat.
2. Parameter dalam penelitian ini diambil dari jurnal (Alkhudari dkk, 2014b).
3. Penelitian ini menggunakan metode kontrol optimal dengan prinsip maksimum Pontryagin.
4. Simulasi menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde 4 diselesaikan dengan *software* Matlab.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian melalui pendekatan kepustakaan yang diperoleh dari beberapa studi literatur yang berkaitan dan diperlukan dalam penelitian ini. Pendekatan kepustakaan ini juga merujuk pada literatur pendamping seperti jurnal, artikel, buku, dan lainnya. Secara umum, langkah-langkah analisis kestabilan dan menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah sebagai berikut:

#### Subbab 3.1 Interpretasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol

Subbab ini menjelaskan secara rinci mengenai model dinamika merokok yang digunakan. Model dinamika merokok ini dirujuk dari jurnal (Alkhudari dkk, 2014b).

#### Subbab 3.2 Analisis Kestabilan dari Titik Keseimbangan pada Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol

Subbab ini berisi analisis dinamik dari model dinamika merokok yaitu (Indrawati, 2012; Sukokarlinda, 2012):

1. Menentukan titik keseimbangan pada model dinamika merokok tanpa kontrol.

2. Melakukan linearisasi model dinamika merokok tanpa kontrol dengan menggunakan matriks Jacobian.
3. Menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan model dinamika merokok tanpa kontrol menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.
4. Menyelesaikan model dinamika merokok tanpa kontrol secara numerik dengan metode ODE45.

### Subbab 3.3 Model Dinamika Merokok dengan Kontrol Kampanye Anti Rokok, Permen Karet Nikotin dan Pengobatan

Subbab ini membahas mengenai pembentukan model dinamika merokok dengan tiga kontrol yang diberikan. Pengontrolan dilakukan dengan menambahkan variabel kontrol berupa kampanye anti rokok ( $u_1(t)$ ), permen karet nikotin ( $u_2(t)$ ), dan pengobatan ( $u_3(t)$ ) sebagai pengontrol. Kemudian, pembentukan fungsi tujuan berdasarkan prinsip maksimum Pontryagin yang sesuai sehingga tujuan pengontrolan dapat optimal.

### Subbab 3.4 Penyelesaian Numerik Kontrol Optimal Model Dinamika Merokok

Subbab ini membahas mengenai penyelesaian optimal model berhenti merokok, yaitu (Sukokarlinda, 2012):

1. Membentuk persamaan diferensial menjadi fungsi Hamiltonian.
2. Meminimumkan fungsi Hamiltonian sehingga didapatkan fungsi kontrol optimal.
3. Menentukan bentuk dari fungsi Hamiltonian yang optimal.
4. Menyelesaikan persamaan *state* dan persamaan *co-state*.

5. Melakukan substitusi solusi pada langkah 4 ke dalam fungsi kontrol optimal langkah 2.
6. Mensubstitusikan kontrol masukan optimal ke dalam sistem sehingga didapatkan bentuk sistem umpan balik keadaan yang optimal.

### Subbab 3.5 Simulasi Numerik

Subbab ini akan membahas mengenai simulasi numerik dari model dinamika tanpa kontrol dan dengan kontrol . Berdasarkan pada subbab sebelumnya persamaan *state* dan *co-state* diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

## 1.7 Sistematika Penelitian

Penelitian ini akan menggunakan sistematika penulisan yang terdiri atas empat bab utama. Hal ini dilakukan untuk mempermudah memahami dan penulisan lebih terarah. Masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab dengan rumusannya adalah:

### BAB I Pendahuluan

Bab ini akan berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

### BAB II Kajian Pustaka

Bab kajian pustaka akan berisi mengenai konsep, teori, dan literatur-literatur yang berkaitan dengan pokok pembahasan dan berkaitan erat dengan penelitian penulis. Berikut kajian pustaka adalah penelitian terdahulu, persamaan diferensial linier maupun nonlinier, sistem

persamaan diferensial linier dan nonlinier, titik kesetimbangan, linierisasi, nilai eigen dan vektor eigen, kestabilan dari sistem linier, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, bilangan reproduksi dasar, teori kontrol optimal, fungsi tujuan, formulasi teori kontrol optimal, fungsi Hamiltonian, prinsip maksimum Pontryagin, metode Runge-Kutta orde 4, jenis-jenis rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan non nikotin. Selain itu, pada skripsi ini akan dibahas juga mengenai pola hidup sehat menurut perspektif Islam.

### BAB III Pembahasan

Bab pembahasan akan fokus membahas analisis dinamik dari model dinamika merokok dan kontrol optimal model dinamika merokok, penyelesaian numerik dari modelnya hingga simulasi menggunakan *software* Matlab. Selanjutnya dianalisis dan diinterpretasi hasil yang telah diperoleh. Selain itu, pembahasan ini juga membahas mengenai upaya preventif dan kuratif dalam perspektif Islam.

### BAB IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan yang diambil dari analisis dan saran-saran yang membantu pembaca atau peneliti untuk mengembangkan penelitian ini.

## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA**

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Penulisan penelitian ini mempertimbangkan beberapa jurnal dan artikel sebagai bahan rujukan. Penelitian-penelitian tersebut memberikan inspirasi untuk melakukan penelitian lebih lanjut mengenai analisis dinamik dan masalah kontrol optimal. Model matematika dinamika merokok dengan beberapa pembagian subpopulasi. Bahkan, terdapat penambahan variabel kontrol kampanye pendidikan, permen karet nikotin, dan pengobatan. Modifikasi berbagai sumber yang diperoleh tersebut dapat menjadi penelitian baru. Berikut ini ulasan dari artikel yang akan dirujuk.

Sharomi dan Gumel (2008) mengembangkan model dinamika merokok yang semula terdiri dari tiga subpopulasi pada Brauer & Castillo-Chavez (2000) menjadi empat subpopulasi yaitu perokok potensial, perokok, non perokok sementara dan non perokok permanen. Model dasar tersebut diperluas dengan membagi menjadi dua kelas perokok yakni perokok ringan dan perokok berat. Selain itu, peneliti juga mengembangkan kelas yang memperhitungkan dampak penyakit akibat kebiasaan merokok. Perokok berat akan dihasilkan ketika perokok ringan meningkatkan frekuensi merokoknya. Jumlahnya akan berkurang jika perokok berat menjadi perokok ringan.

Artikel Zaman (2011b) merupakan penelitian yang membahas mengenai masalah kontrol optimal pada model dinamika merokok. Model yang digunakan merujuk pada Zaman (2011a) yang terdiri dari perokok potensial ( $P$ ), perokok

ringan ( $L$ ), perokok berat ( $S$ ), dan non perokok permanen ( $Q$ ). Model *PLSQ* yang digunakan mengasumsikan bahwa seorang perokok dapat memengaruhi perokok ringan. Peneliti mempertimbangkan dua variabel kontrol yaitu kampanye anti rokok dan pengobatan. Tujuan pengontrolan model dinamika merokok ini adalah untuk meminimumkan jumlah populasi perokok ringan dan perokok berat serta memaksimalkan jumlah populasi non perokok permanen dalam suatu komunitas. Metode untuk menentukan strategi optimal adalah prinsip maksimum Pontryagin.

Penelitian tersebut menjelaskan bahwa perokok potensial mulai merokok dengan berbagai alasan, misalnya pengaruh teman sebaya dan anggota keluarga yang juga merokok. Sebagian individu memulainya ketika masih di sekolah menengah pertama. Oleh karena itu, kampanye anti rokok melalui media pembelajaran sangat berperan penting untuk mencegah individu perokok ringan menjadi perokok berat dan individu yang telah berhenti tidak akan merokok kembali. Sedangkan, pengobatan diberikan pada perokok berat untuk melawan pengaruh nikotin dalam otak sehingga dapat mengurangi frekuensi merokok. Individu berhenti merokok juga akan diberikan kontrol pengobatan. Hasil yang diperoleh mencakup model *PLSQ* yang diberikan kontrol dan simulasi numeriknya. Berdasarkan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 menunjukkan bahwa populasi perokok potensial dan non perokok permanen meningkat. Sedangkan, populasi perokok ringan serta perokok berat mengalami penurunan.

Penelitian Alkhudari dkk (2014a) menyajikan dan menganalisis perumuman model dinamika merokok yang diperkenalkan Sharomi dan Gumel (2008). Peneliti juga mempelajari populasi dengan pengaruh tekanan teman

sebayanya pada non perokok sementara. Kemudian, pada Alkhudari dkk (2014b) mengembangkan modelnya menjadi lima subpopulasi yaitu perokok potensial ( $P$ ), perokok ringan ( $L$ ), perokok berat ( $S$ ), non perokok sementara ( $Q_t$ ) dan non perokok permanen ( $Q_p$ ). Peneliti akan mencari dampak dua kelas tersebut pada *existence* dan stabilitas titik kesetimbangan.

Penelitian lainnya juga menganalisis penyebaran merokok dalam suatu populasi, misalnya penelitian Alkhudari dkk (2015). Populasi dibagi menjadi lima kelas yaitu perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara dan non perokok permanen. Peneliti mempelajari pengaruh dari kelas perokok berat terhadap perokok potensial pada model merokok dan pengaruhnya terhadap kestabilan modelnya. Model ini dirujuk dari Alkhudari dkk (2014b).

Pada tahun sebelumnya Zeb dkk (2013) telah mengembangkan model baru dari model dinamika merokok yang kemudian dikembangkan kembali dalam penelitian (Zeb dkk, 2016). Penelitian tersebut membahas teori optimal kontrol dari model yang diberikan. Model dibagi menjadi empat subpopulasi yaitu  $P$  (perokok potensial),  $L$  (perokok ringan),  $S$  (perokok berat),  $Q$  (non perokok permanen). Terdapat tiga variabel kontrol yaitu kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan. Pemberian kontrol bertujuan untuk meminimalkan jumlah perokok ringan dan berat serta memaksimalkan populasi non perokok permanen. Prinsip maksimum Pontryagin adalah metode yang digunakan.

Variabel kontrol kampanye anti rokok akan diberikan pada perokok potensial dan non perokok permanen. Setelah itu, pemberian permen karet nikotin hanya pada perokok ringan. Kontrol pengobatan diberikan pada tiga populasi

sekaligus yaitu perokok potensial, perokok berat dan non perokok permanen. Model dinamika merokok yang telah diberikan kontrol pada penelitian (Zeb dkk, 2016) dilakukan dengan simulasi numerik. Metode yang digunakan yaitu GSS1 (Gauss-Seidel dan beda hingga).

Pada skripsi ini digunakan model dalam (Alkhudari dkk, 2014b) yang membagi model dinamika merokok menjadi lima subpopulasi. Pada model akan dilakukan pengontrolan dengan tiga variabel kontrol yang telah diterapkan dalam model (Zeb dkk, 2016) yaitu kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan. Hal ini dilakukan didasarkan pada beberapa penelitian yang telah menerapkan kampanye anti rokok dan pengobatan untuk mengendalikan jumlah perokok, namun dalam tiga dan empat kelas subpopulasi. Metode yang digunakan merupakan prinsip maksimum Pontryagin yang bertujuan untuk meminimalkan populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara serta memaksimalkan populasi non perokok permanen.

## 2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial dapat didefinisikan suatu persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui disebut juga variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Apabila persamaan diferensial hanya berisi turunan biasa dari satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui terhadap satu variabel bebas, dikatakan sebagai persamaan diferensial biasa (Zill dkk, 2013). Orde persamaan diferensial adalah orde tertinggi turunan yang muncul dalam persamaan. Secara umum, persamaan diferensial biasa orde  $n$  adalah persamaan yang berbentuk,

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) menyatakan hubungan antara variabel bebas  $x$  dan nilai-nilai fungsi  $y$  serta turunannya (Boyce & Diprima, 2001, p. 18).

### 2.2.1 Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial biasa orde ke- $n$  (2.1) dikatakan linier jika  $F$  adalah linier dalam  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Ini berarti bahwa persamaan diferensial biasa orde ke- $n$  adalah linier ketika (2.1) adalah

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \text{ atau} \quad (2.2)$$

$$a_n(x) \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_{n-1}(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Dua kasus khusus penting (2.2) adalah persamaan diferensial linier orde pertama ( $n = 1$ ) dan orde kedua ( $n = 2$ ):

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2.3)$$

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Terdapat dua sifat karakteristik dari persamaan diferensial linier adalah sebagai berikut:

- Variabel terikat  $y$  dan semua turunannya  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  merupakan derajat pertama.
- Koefisien  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dari  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  akan bergantung pada variabel bebas  $x$ .

(Zill dkk, 2013).

### 2.2.2 Persamaan Diferensial Non Linier

Persamaan diferensial biasa non linier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linier (Ross, 1984). Persamaan non linier biasanya terdiri dari  $n$  persamaan diferensial non linier dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui. Fungsi non linier dari variabel terikat atau turunannya, misalnya  $\sin y$  atau  $e^y$ . Contohnya

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \quad (2.4)$$

### 2.2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Klasifikasi persamaan diferensial juga didasarkan pada jumlah fungsi tak diketahui. Apabila terdapat satu fungsi yang nantinya ditentukan maka cukup dengan satu persamaan. Namun, jika terdapat dua atau lebih banyak fungsi yang tidak diketahui, maka diperlukan suatu sistem persamaan (Boyce & Dprima, 2001, p. 18). Dengan kata lain, sistem persamaan diferensial adalah sekumpulan persamaan diferensial (persamaannya lebih dari satu) yang bersama-sama menggambarkan beberapa fenomena atau kejadian. Contohnya persamaan predator prey yang mempunyai bentuk,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy \end{aligned} \quad (2.5)$$

(Barnes & Fulford, 2015, p. 320)

### 2.3 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dalam ruang *state* di mana sistem dinamis akan tetap ada jika dimulai dari titik tersebut. Suatu titik kesetimbangan  $x_e$  memenuhi syarat bahwa  $f(x_e) = 0$ . Istilah lainnya yang sering digunakan adalah titik stationer, titik singular, dan titik kritis (Chen, 2004, p. 1032). Berikut ini contoh menentukan titik kesetimbangan:

Pertimbangkan sistem persamaan predator prey yang digambarkan oleh persamaan (2.5). Keadaan setimbang merupakan keadaan ketika  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$ , dimana titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan. Oleh karena itu, sistem (2.5) dapat ditulis dengan,

$$\begin{aligned} 0 &= ax - bxy \\ 0 &= -cy + \gamma xy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Titik kesetimbangan pertama dari sistem (2.5) adalah  $(0, 0)$  dan titik kesetimbangan kedua dari persamaan (2.5) adalah  $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{b}\right)$ .

### 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Untuk matriks persegi  $n \times n$  yang disebut  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , misalkan diberikan serangkaian persamaan aljabar linear simultan yaitu,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

dapat ditulis matriks dari  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , di mana

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \text{dan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Persamaan  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  menetapkan hubungan antara vektor kolom  $\mathbf{x}$  dan  $\mathbf{b}$ . Dengan demikian,  $\mathbf{A}$  merupakan transformasi linear dalam suatu ruang vektor dari semua  $n$ -vektor. Transformasi tersebut adalah satu-satu jika dan hanya jika matriks  $\mathbf{A}$  merupakan matrik non singular ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ). Selain itu, jika akan membentuk  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{x}$  untuk  $\lambda$  sebagai skalar, maka matriks  $\mathbf{A}$  mentransformasikan  $\mathbf{x}$  menjadi vektor paralel, sehingga dapat dibentuk melalui persamaan berikut ini:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \text{atau} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

Persamaan tersebut mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika matriks  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  merupakan matriks singular, dengan  $\lambda$  adalah akar dari persamaan karakteristik:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinan dari matriks  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  akan berbentuk polinomial dalam  $\lambda$  berderajat  $n$  atau aturan umumnya yaitu  $(-1)^n \lambda^n$ , dengan  $\mathbf{I}$  merupakan matriks identitas.

**Definisi 2.1:** Polinomial karakteristik dari matriks persegi  $\mathbf{A}$  dilambangkan dengan  $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$  disederhanakan menjadi  $\chi(\lambda)$  adalah determinan dari matriks  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ ,

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

Jelas  $\chi(\lambda)$  mempunyai istilah utama yaitu  $\lambda^n$ . Sebarang solusi dari persamaan karakteristik  $\chi(\lambda) = 0$  dikatakan sebagai nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$ .

Himpunan semua nilai eigen disebut dengan spektrum dari matriks  $A$ , dilambangkan dengan  $\sigma(A)$ .

**Definisi 2.2:**  $n$ -vektor  $x$  tak nol sedemikian sehingga,

$$Ax = \lambda x$$

disebut vektor eigen dari matriks persegi  $A$  yang sesuai dengan nilai eigen  $\lambda$ .

(Dobrushkin, 2014, p. 386).

## 2.5 Linierisasi

Linierisasi digunakan sebagai pendekatan linier pada suatu sistem persamaan non linier. Pendekatan ini akan menghasilkan sistem persamaan linier yang sesuai sehingga dapat membantu menemukan solusi dari sistem persamaan non linier tersebut. Suatu sistem (2.5) dapat dimisalkan dengan,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy = g(x, y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kita misalkan  $(x_0, y_0)$  merupakan titik kesetimbangan dari sistem (2.7). Sistem (2.7) merupakan sistem non linier, karena itu diperlukan pendekatan sistem linier jika  $(x, y)$  disekitar  $(x_0, y_0)$  dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor di sekitar titik  $(x_0, y_0)$  sehingga dapat menghilangkan suku tak liniernya. Misalkan titik kesetimbangan yang digunakan adalah titik kesetimbangan pertama, maka  $(x_0, y_0)$  adalah titik  $(0,0)$ . Berikut linierisasi yang dilakukan pada sistem (2.7),

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.8)$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Linierisasi tersebut merupakan pendekatan  $f(x, y)$  dan  $g(x, y)$  dengan deret Taylor yang terbatas. Nilai  $f(x_0, y_0)$  dan  $g(x_0, y_0)$  akan selalu nol pada titik setimbang, sehingga (2.8) dapat disederhanakan dengan,

$$f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2.9)$$

$$g(x, y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Apabila dilakukan substitusi  $x - x_0 = u$  dan substitusi  $y - y_0 = v$ , maka  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ . Sistem (2.9) menjadi suatu sistem persamaan yang linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sistem (2.10) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks yaitu,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dimana } A = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

atau

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dimana } A = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ \gamma y & -c + \gamma y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Substitusikan nilai  $x = x_0 = 0$  dan  $y = y_0 = 0$  pada matriks  $A$  sehingga diperoleh,

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Matriks (2.13) disebut matriks Jacobian. Ukuran matriks ini bergantung pada banyaknya persamaan yang membentuk sistem persamaan diferensial. Akar-

akar pada matriks Jacobian ini dapat menentukan sifat kestabilan dari sistem persamaan diferensial linear.

(Hardiningsih, 2010, p. 3)

## 2.6 Solusi dari Sistem Persamaan Diferensial Linier

Perhatikan suatu sistem persamaan diferensial yang bergantung terhadap waktu yaitu

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x, \quad x(0) = x_0 \quad (2.14)$$

Sistem persamaan (2.14) mempunyai  $n$  buah solusi bebas linier, dinotasikan dengan  $x_1, \dots, x_n$ . Maka matriks yang kolom-kolomnya vektor solusi  $x_1, \dots, x_n$  adalah

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

disebut sebagai matriks solusi fundamental. Matriks fundamental ini selalu mempunyai invers karena kolom-kolomnya bebas linier. Selanjutnya, solusi umum dari sistem persamaan diferensial  $x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$  dapat dituliskan sebagai

$$x = \Phi(t)c$$

dimana vektor konstanta sebarang  $c = (c_1, \dots, c_n)$ . Vektor konstanta sebarang  $c$  dapat dihitung, sehingga solusi dapat memenuhi syarat awal yaitu  $x(0) = x_0$  atau ditulis dengan  $\Phi(t_0)c = x_0$ , hasil yang diperoleh adalah  $c = \Phi^{-1}(t_0)x_0$ . Solusi sistem persamaan diferensial dengan syarat awal adalah sebagai berikut,

$$x = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 \quad (2.15)$$

(Pudjaprasetya, 2009, p. 43)

Selanjutnya pada pembahasan ini akan dikonstruksi suatu matriks solusi fundamental khusus bagi sistem  $\dot{x} = \mathbf{A}(t)x$ , langsung dari matriks  $\mathbf{A}$ . Matriks solusi fundamental tersebut dinotasikan dengan  $\exp(\mathbf{A}t)$ . Berikut ini ekspansi dari deret McLaurin,

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} \text{ konvergen untuk } t \in \mathbb{R}$$

Perhatikan deret yang suku-sukunya merupakan suatu matriks:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots$$

setiap elemen matriks tersebut konvergen untuk  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definisi 2.3** Untuk setiap matriks  $\mathbf{A}$  berlaku

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}$$

(Pudjaprasetya, 2009, p. 48)

**Teorema 2.1**  $\exp(\mathbf{A}t)$  adalah matriks fundamental bagi sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x$$

Solusi dari persamaan diferensial yang diberikan nilai awal  $x(0) = x_0$  adalah

$$x = \exp(\mathbf{A}t) x_0$$

Jika rumus  $x = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$  dan  $x = \exp(\mathbf{A}t)x_0$  dibandingkan maka diperoleh suatu hubungan yaitu

$$\exp(\mathbf{A}t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$$

(Pudjaprasetya, 2009, p. 48)

Misalkan matriks  $\mathbf{A}$  berukuran  $n \times n$  dengan vektor-vektor eigen (yang bebas linier)  $v_1, v_2, \dots, v_k$  yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Vektor eigen tersebut dapat ditulis menjadi:

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix}$$

Kemudian, perkalian  $\mathbf{AS}$  diperoleh:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_k v_k \end{pmatrix}$$

Jika didefinisikan bahwa  $\Lambda$  sebagai matriks diagonal dengan entri diagonal sama dengan nilai eigen dari  $\mathbf{A}$ , sehingga diperoleh:

$$S\Lambda = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_k v_k \end{pmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{AS}$  dan matriks  $S\Lambda$  nilainya sama, maka diperoleh

$$\mathbf{AS} = S\Lambda$$

Semua vektor eigen dari  $\mathbf{A}$  adalah bebas linier dan matriks  $S$  mempunyai rank penuh (*full rank*), maka  $S$  merupakan matriks non singular. Oleh karena itu, matriks  $S$  mempunyai kebalikan. Sebagai akibatnya adalah

$$\mathbf{A} = S\Lambda S^{-1} \quad (2.16)$$

Bentuk tersebut disebut mendiagonalisasi matriks  $\mathbf{A}$ . Sehingga,

$$\mathbf{A}t = (S\Lambda S^{-1})t = S(t\Lambda)S^{-1} \quad (2.17)$$

dimana  $t$  adalah skalar. Selanjutnya, subsitusikan  $\mathbf{A}t$  ke dalam definisi dari  $\exp(\mathbf{A}t)$  dan lakukan ekspansi sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \exp(S(t\Lambda)S^{-1})$$

$$= \mathbf{I} + (S(t\Lambda)S^{-1}) + \frac{(S(t\Lambda)S^{-1})^2}{2!} + \frac{(S(t\Lambda)S^{-1})^3}{3!} + \dots$$

Dari persamaan tersebut maka ditulis kembali menjadi,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \frac{1}{n!} (S(t\Lambda)S^{-1})^k$$

Karena  $S^{-1}$  annihilator dari  $S$ , maka persamaan tersebut dapat ditulis menjadi bentuk:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \frac{1}{n!} (S(t\Lambda)S^{-1})^k$$

Persamaan tersebut dihitung sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \mathbf{I} + (S(t\Lambda)S^{-1}) + \frac{(S(t\Lambda)S^{-1})^2}{2!} + \frac{(S(t\Lambda)S^{-1})^3}{3!} + \dots \\ &= SIS^{-1} + (S(t\Lambda)S^{-1}) + \frac{(S(t\Lambda)S^{-1})^2}{2!} + \frac{(S(t\Lambda)S^{-1})^3}{3!} + \dots \\ &= S \left( I + (t\Lambda) + \frac{(t\Lambda)^2}{2!} + \frac{(t\Lambda)^3}{3!} + \dots \right) S^{-1} \\ &= S \exp(t\Lambda) S^{-1} \end{aligned}$$

dengan demikian didapatkan bentuk yakni,

$$\exp(\mathbf{A}t) = S \exp(t\Lambda) S^{-1} \quad (2.18)$$

dimana  $\Lambda$  adalah matriks diagonal dari nilai eigen matriks  $\mathbf{A}$ , dan kolom  $S$  merupakan vektor eigen dari matriks  $\mathbf{A}$ .

**Contoh.** Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial berikut:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x$$

Matriks  $\mathbf{A}$  dari sistem persamaan diferensial tersebut adalah  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ,

kemudian persamaan karakteristik dari matriks  $\mathbf{A}$  adalah sebagai berikut:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 \\
 &= \lambda^2 - 3\lambda - 10 \\
 &= (\lambda - 5)(\lambda + 2)
 \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks **A** adalah 5 dan  $-2$ . Selanjutnya menentukan vektor eigen yang bersesuaian, yaitu

Untuk  $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 5 - 4 & -2 \\ -3 & 5 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh,

$$v_1 - 2v_2 = 0$$

$$v_1 = 2v_2$$

Misalkan  $v_2 = s$ , maka

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

Untuk  $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} -2 - 4 & -2 \\ -3 & -2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh,

$$-3v_1 - 1v_2 = 0$$

$$-3v_1 = v_2$$

Misalkan  $v_1 = s$ , maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s \\ -3s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} s \end{aligned}$$

Vektor-vektor eigen dari matriks  $\mathbf{A}$  yang bersesuaian adalah  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ .

Selanjutnya misalkan  $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  dan  $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$  serta  $\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ . Cek

terlebih dahulu yaitu

$$S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Proses selanjutnya adalah menentukan nilai dari  $\exp(\mathbf{A}t)$ :

$$\exp(\mathbf{A}t) = S \exp(\Lambda t) S^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \exp\left(t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot e^{5t}}{7} & \frac{e^{5t}}{7} \\ \frac{e^{-2t}}{7} & -\frac{2 \cdot e^{-2t}}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7}(6e^{5t} + e^{-2t}) & \frac{1}{7}(2e^{5t} - 2e^{-2t}) \\ \frac{1}{7}(3e^{5t} - 3e^{-2t}) & \frac{1}{7}(e^{5t} + 6e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Solusi masalah nilai awal dengan  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  yang telah diperoleh

adalah sebagai berikut:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \exp(\mathbf{A}t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8e^{5t} - e^{-2t} \\ 4e^{5t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Misalkan akan ditentukan nilai untuk  $x(2)$ , didapatkan

$$x_1 = \frac{8e^{5 \cdot 2} - e^{-2 \cdot 2}}{7} = 25.173,14$$

$$x_2 = \frac{4e^{5 \cdot 2} + 3e^{-2 \cdot 2}}{7} = 12.586,5$$

dari perhitungan tersebut dapat dinyatakan bahwa nilai  $e^{5t} \rightarrow \infty$  dan  $e^{-2t} \rightarrow 0$ .

Hal ini berakibat  $e^{5t} - e^{-2t} \rightarrow \infty$  sedemikian sehingga  $|x(t)| \rightarrow \infty$ . Oleh karena

itu, dibentuk prinsip umum yaitu:

- Jika semua nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$  mempunyai bagian real negatif maka  $|x(t)| \rightarrow 0$  dengan  $t \rightarrow \infty$ .
- Jika beberapa nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$  mempunyai bagian real positif maka  $|x(t)| \rightarrow \infty$  dengan  $t \rightarrow \infty$ .
- Jika semua nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$  mempunyai bagian real negatif atau nol, dan beberapa nilai eigennya mempunyai bagian real nol, maka  $x(t)$  tidak menuju ke 0 maupun menjauhi 0.

(Scheinerman, 1996, pp. 62-73)

## 2.7 Kestabilan dan Akar Karakteristik

Suatu sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan (2.5) dengan  $a, b, c, \gamma$  merupakan konstanta. Penyelesaian dari sistem (2.5) merupakan kombinasi linier dari  $\lambda^n$  dimana  $\lambda$  adalah akar-akar karakteristiknya. Berikut ini penyelesaian sistem (2.5) dengan matriks Jacobian pada (2.13),

$$\det(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(-c - \lambda) - 0 = 0$$

$$a(-c) - a\lambda + c\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + (c - a)\lambda - ac = 0 \quad (2.19)$$

$$\lambda = \frac{-(c - a) \pm \sqrt{(c - a)^2 + 4ac}}{2}$$

$$= \frac{(a - c) \pm \sqrt{(c - a)^2 + 4ac}}{2}$$

Persamaan (2.19) berisi akar-akar karakteristik. Bagian real dari akar-akar karakteristik persamaan (2.19) menentukan sifat kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.5) (Hardiningsih, 2010, p. 3). Berikut ini beberapa sifat stabilitas sistem linier yaitu sebagai berikut (Boyce & Diprima, 2001, p. 468):

**Tabel 2.1** Stabilitas Sistem Linier

Nilai Eigen	Tipe Titik Kritis	Stabilitas
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Node	Tidak stabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Node	Stabil asimtotik
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik saddle	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Node sejati atau tidak sejati	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Node sejati atau tidak sejati	Stabil asimtotik
$\lambda_1, \lambda_2 = k \pm ih$	Titik spiral	
$k > 0$		Tidak stabil
$k < 0$		Stabil asimtotik
$\lambda_1 = ih, \lambda_2 = -ih$	Titik tengah	Stabil

Pada beberapa permasalahan kestabilan pada titik kesetimbangan sulit untuk diamati dikarenakan bentuk dari nilai eigen yang kompleks sehingga sulit

menentukan bagian realnya. Oleh karena itu, untuk mengidentifikasi kestabilan titik kesetimbangan maka penggunaan metode yang dapat menentukan bagian real dari nilai eigen. Salah satu metode ini adalah metode Routh-Hurwitz.

## 2.8 Kriteria Kestabilan Routh

Kriteria Routh merupakan suatu metode menentukan kestabilan sistem kontinu. Diberikan persamaan karakteristik orde ke- $n$  dari suatu sistem,

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.20)$$

Kriteria ini diterapkan menggunakan tabel routh berikut ini:

Tabel 2.2 Tabel Routh

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	0
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	0
$\vdots$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	0
$\vdots$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$	0	0	0	$\dots$	$a_0$

dengan  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  merupakan koefisien dari persamaan karakteristik dan

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \quad \text{dll,}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1} \quad \text{dll,}$$

Tabel tersebut dapat dilanjutkan secara horizontal dan vertikal hingga hanya nol yang diperoleh. Sebarang baris dapat dikalikan dengan konstanta positif, sebelum baris berikutnya dihitung tanpa mengubah sifat tabel.

**Kriteria kestabilan Routh:** Jika semua anggota kolom pertama tabel 2.2 bernilai positif, maka akar-akar persamaan karakteristik mempunyai bagian real negatif. Sebaliknya, jika terdapat anggota kolom pertama tabel 2.2 bernilai negatif, maka terdapat akar persamaan karakteristik mempunyai bagian real positif.

(DiStefano III dkk, 2014, pp. 115).

## 2.9 Kriteria Kestabilan Hurwitz

Kriteria Hurwitz merupakan metode untuk menentukan akar-akar persamaan karakteristik dari sistem persamaan kontinu mempunyai bagian real negatif. Kriteria ini diterapkan menggunakan determinan yang dibentuk dari koefisien dari persamaan karakteristik (2.20). Asumsikan  $a_n > 0$ . Determinan  $\Delta_i$ , dimana  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , dibentuk sebagai determinan minor utama dari determinan.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \begin{bmatrix} a_0 & \text{Jika } n \text{ genap} \\ a_1 & \text{Jika } n \text{ ganjil} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{bmatrix} a_1 & \text{Jika } n \text{ genap} \\ a_0 & \text{Jika } n \text{ ganjil} \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Determinan yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + a_n a_{n-1}a_{n-5} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-4}a_{n-1}^2$$

**Kriteria Kestabilan Hurwitz:** Semua akar persamaan karakteristik mempunyai real negatif jika dan jika  $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

(DiStefano III dkk, 2014, pp. 116).

Berikut ini beberapa kasus khusus yang dapat dibentuk dari kriteria kestabilan Hurwitz:

1. Sistem orde pertama ( $n = 1$ ): persamaan karakteristik mempunyai bentuk,

$$a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Untuk  $a_1 > 0$ , kondisi stabil asimtotik adalah

$$a_0 > 0$$

$$A_1 = (a_0)$$

$$\Delta_1 = a_0$$

2. Sistem orde kedua ( $n = 2$ ): persamaan karakteristik mempunyai bentuk,

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Matriks dan kondisi Hurwitznya adalah

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_0 > 0$$

Untuk ( $a_2 > 0$ ), maka kondisi stabil asimtotik untuk sistem orde kedua menjadi,

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_0 > 0$$

3. Sistem orde ketiga ( $n = 3$ ):

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Matriks dan kondisi Hurwitznya adalah

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3$$

$$\Delta_1 = a_2 > 0, \quad \Delta_2 = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 > 0$$

Kondisi stabil asimtotik pada sistem orde kedua dengan  $a_3 > 0$  adalah

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0, \quad a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 > 0$$

4. Sistem orde keempat ( $n = 4$ ): persamaan karakteristiknya adalah

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Matriks dan kondisi Hurwitznya adalah

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_3(a_2 a_1 a_0 - a_3 a_0^2) - a_1^2 a_0 a_4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1$$

$$\Delta_1 = a_3$$

$$\Delta_1 = a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0,$$

$$\Delta_4 = a_3(a_2 a_1 a_0 - a_3 a_0^2) - a_1^2 a_0 a_4 > 0$$

Kondisi stabil asimtotik pada sistem orde keempat, ketika  $a_3 > 0$  menjadi,

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0$$

$$a_3 a_2 a_1 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0.$$

## 2.10 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) merupakan jumlah infeksi sekunder yang dihasilkan dari satu infeksi primer ke dalam populasi yang rentan, ini berarti bahwa rata-rata banyaknya individu yang rentan terinfeksi oleh individu yang sebelumnya telah terinfeksi, kemudian masuk ke dalam populasi yang masih rentan tersebut. Sedangkan, bilangan reproduksi dasar dalam definisi matematika adalah jumlah infeksi baru yang dihasilkan oleh individu yang terinfeksi pada suatu populasi di titik kesetimbangan bebas penyakit. Konsep dari bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) ini utamanya untuk mengukur risiko penyakit dan mencegah kemunculan epidemi. Apabila  $R_0 > 1$  maka ini menunjukkan bahwa adanya wabah penyakit dan  $R_0 < 1$  menandakan wabah penyakit telah menghilang (Perasso, 2018, pp. 124-126).

Misalkan terdapat populasi heterogen dengan individu yang dibedakan berdasarkan usia, perilaku, tingkatan penyakit, tetapi dapat dikelompokkan ke dalam kompartemen homogen. Misalkan  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ , dengan setiap  $x_i \geq 0$  merupakan banyaknya individu di setiap kompartemen. Kemudian, kompartemen-kompartemen homogen tersebut disusun sehingga diperoleh  $m$  kompartemen yang terinfeksi, yaitu  $\{x_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ . Didefinisikan  $X$  merupakan himpunan semua keadaan bebas penyakit, yaitu:

$$X_s = \{x \geq 0 | x_i = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Kemudian untuk model penularan penyakit yang tidak terinfeksi maupun tidak adanya infeksi dinyatakan dengan:

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Dengan  $\mathcal{F}_i(x)$  merupakan laju peningkatan infeksi sekunder pada golongan  $i$  dan  $\mathcal{V}_i(x)$  merupakan laju perpindahan individu pada golongan  $i$ , yang diformulakan menjadi

$$\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$$

di mana  $\mathcal{V}_i^-(x)$  adalah laju transfer individu keluar dari golongan  $i$  dan  $\mathcal{V}_i^+(x)$  adalah laju transfer individu masuk ke golongan  $i$ . Karena fungsi  $f(x_i)$  menyatakan transfer langsung individu, maka fungsi  $f(x_i)$  bernilai tak negatif. Fungsi ini memenuhi asumsi (A1)-(A5) yang akan dijelaskan berikut ini:

(A1) Jika  $x \geq 0$ , maka  $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^+, \mathcal{V}_i^- \geq 0$  untuk  $i = 1, \dots, n$ .

(A2) Jika  $x_i = 0$  maka  $\mathcal{V}_i^- = 0$ . Khususnya, apabila  $x \in X$ , maka  $\mathcal{V}_i^- = 0$  untuk  $i = 1, \dots, m$ .

(A3)  $\mathcal{F}_i = 0$  jika  $i > m$ .

(A4) Jika  $x \in X$ , maka  $\mathcal{F}_i(x) = 0$  dan  $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$  untuk  $i = 1, \dots, m$ .

(A5) Jika  $\mathcal{F}(x)$  adalah himpunan nol, maka semua nilai eigen dari  $J(x_0)$  atau dinotasikan dengan  $DF(x_0)$  yang mempunyai bagian real negatif, dengan  $x_0$  adalah titik kesetimbangan bebas penyakit.

**Lema 2.1** Jika  $x_0$  merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit dari persamaan (2.13) dan  $f_i(x)$  telah memenuhi (A1)-(A5), maka matriks Jacobi  $DF(x_0)$  dan  $DV(x_0)$  dapat dinyatakan dengan,

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, DV(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

dengan  $F$  dan  $V$  merupakan matriks  $m \times m$  didefinisikan sebagai

$$F = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ dan } V = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ untuk } 1 \leq i, j \leq m.$$

Matriks ini harus memenuhi

1.  $F$  matriks tak negatif,
2.  $V$  matriks tak singular,
3. Semua nilai eigen dari  $J_4$  mempunyai nilai real positif.

(Driessche & Watmough, 2002, p. 31).

Bukti Lampiran 1.

Misalkan  $F$  dan  $V$  merupakan matriks yang memenuhi Lema 2.1, maka  $FV^{-1}$  adalah matriks *next generation* untuk model pada (2.13). Notasi  $V^{-1}$  merupakan rata-rata panjang waktu yang dibutuhkan suatu individu dalam kompartemen  $j$  dan  $V$  menyatakan laju individu yang terinfeksi pada golongan  $j$  sehingga menyebabkan infeksi sekunder pada kompartemen  $i$ . Sedangkan,  $FV^{-1}$  merupakan nilai harapan infeksi sekunder pada kompartemen  $i$  yang dihasilkan individu terinfeksi yang mula-mula dimasukkan ke dalam kompartemen  $k$ . (Diekmann dkk, 1990).

Berdasarkan Driessche & Watmough (2002), bilangan reproduksi dasar dinyatakan yaitu:

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

Kondisi yang dapat ditimbulkan adalah sebagai berikut:

1. Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan menghilang.
2. Jika  $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap.
3. Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi suatu wabah.

## 2.11 Teori Kontrol Optimal

Pada umumnya, desain sistem kontrol klasik merupakan proses coba-coba dengan berbagai metode analisis yang digunakan secara berulang untuk

menentukan desain sistem yang “dapat diterima” atau “*admissible*”. Kriteria hasil yang berbeda harus dipenuhi oleh sistem yang rumit, multi-input dan multi-output yang diperlukan sehingga dapat memenuhi tuntutan teknologi modern. Misalnya desain sistem kontrol pesawat ruang angkasa yang meminimalkan pengeluaran bahan bakar tidak akan sesuai jika menggunakan metode klasik. Untuk itu dibentuk pendekatan baru yaitu teori kontrol optimal (Kirk, 1970, pp. 3-4). Teori kontrol optimal ini berkembang secara pesat pada tahun 50-an. Terdapat dua metode penyelesaian masalah kontrol optimal yang ditemukan, yaitu *dynamic programming* diperkenalkan oleh Richard Bellman pada tahun 1957 dan *maximum principle* oleh Pontryagin tahun 1962 (Syahril & Ganardi, 2018, p. 1).

Tujuan dari teori kontrol optimal adalah untuk menentukan kontrol sehingga dapat menyebabkan suatu proses memenuhi kendala fisik, dan pada saat yang sama meminimalkan atau memaksimalkan beberapa kriteria kinerja (Kirk, 1970, p. 3). Oleh karena itu, sistem yang merupakan penyelesaian dari desain optimal harus memenuhi kriteria kinerja stabil, dan memenuhi salah satu kendala (Anderson & Moore, 1989, p. 1). Secara sederhana, masalah kontrol optimal adalah memilih dan menentukan variabel kontrol  $u(t)$  diantara variabel kontrol *admissible*, yang merupakan kontrol yang membawa sistem dari *state* pada waktu  $t_0$  yaitu  $x(t_0)$  kepada *state* akhir (terminal) pada waktu terminal  $t_f$  atau  $x(t_f)$  sehingga akan memberikan hasil berupa nilai maksimum atau nilai minimum fungsi tujuan (Syahril & Ganardi, 2018, pp. 1-2).

## 2.12 Persamaan *State* dan Variabel Kontrol

Berikut ini persamaan diferensial biasa (dalam variabel *state*).

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad (2.22)$$

adalah variabel *state* pada waktu  $t$ , dan

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \quad (2.23)$$

Pada variabel kontrol atau input kontrol saat waktu  $t$ , maka sistem dapat dijelaskan oleh  $k$  persamaan diferensial orde pertama.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

.

.

.

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

didefinisikan dengan

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

sebagai vektor *state* dari sistem, dan

$$u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

persamaan *state* dapat ditulis dengan

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x(t), u(t), t), \quad (2.24)$$

Variabel  $u(t)$  adalah variabel kontrol (input kontrol) yang memenuhi kendala kontrol (batasan kontrol) selama interval waktu  $[t_0, t_f]$  disebut juga sebagai kontrol *admissible*. Variabel ini memengaruhi *state*,  $u(t) \in U, \forall t \in [0, t_f]$ ;  $U = \{u(t): 0 \leq u \leq 1\}$  (Kirk, 1970, pp. 4-6).

### 2.13 Fungsi Tujuan

Variabel kontrol  $u(t)$  harus dipilih dengan tujuan untuk memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan. Fungsi ini umumnya dilambangkan oleh  $J$  dan berbentuk

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (2.25)$$

Variabel  $f_0$  adalah fungsi bernilai real dan  $t_f$  adalah waktu akhir atau terminal yang bebas atau tetap,  $x_f := x(t_f)$  adalah *state* akhir yang bebas atau tetap dan memiliki beberapa target yang ditetapkan. Catat kembali bahwa  $u$  adalah fungsi dari waktu, sehingga dapat dikatakan bahwa  $J$  adalah fungsional (Syahril & Ganardi, 2018, pp. 3-4).

Secara umum, terdapat tiga alternatif untuk menyajikan formulasi fungsi tujuan yaitu sebagai berikut:

1. Formulasi Bolza merupakan formulasi fungsi tujuan bentuk Bolza dan paling umum digunakan.

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad (2.26)$$

dengan  $f_0$  dan  $S$  merupakan fungsi kontinu dan dapat diturunkan. Fungsi  $S(x(t_f), t_f)$  disebut juga fungsi “scrap value” atau nilai sisa pada waktu terminal  $t_f$ .

2. Formulasi Lagrange merupakan bentuk khusus dari formulasi Bolza, dengan

$$S(x(t_f), t) = 0, \text{ yaitu}$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt \quad (2.27)$$

3. Formulasi Mayer ini juga bentuk khusus dari formulasi Bolza dengan

$$f(x(t), u(t), t) = 0, \text{ yaitu}$$

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) \quad (2.28)$$

#### 2.14 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Berikut ini masalah kontrol optimal yang digunakan untuk memaksimalkan dan meminimumkan fungsi tujuan,

$$\begin{aligned} \max_u J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt \text{ atau} \\ \min_u J(u) &= \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt \end{aligned} \quad (2.29)$$

dengan kendala

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f$$

dapat juga menganggap  $x(t_f)$  bebas atau nilai dari  $x(t_f)$  bisa tetap (Lenhart & Workman, 2007, pp. 7-12).

Berdasarkan tujuan,  $f$  dan  $g$  merupakan fungsi terdiferensiasi secara kontinu dalam tiga argumen. Asumsikan bahwa kontrol dari himpunan  $U$  adalah fungsi terukur Lebesgue. Dengan demikian, sebagai kontrol akan selalu kontinu terus menerus, untuk mengubah antara memaksimumkan dan meminimumkan secara sederhana dapat dilakukan dengan menegatifkan fungsi tujuan:

$$\min \{J\} = - \max\{-J\}$$

$$\max\{J\} = \min\{-J\}$$

(Sofia & Rodrigues, 2012, pp. 4-5).

### 2.15 Prinsip Maksimum Pontryagin

Syarat pertama yang diperlukan untuk menemukan kontrol optimal dikembangkan oleh Pontryagin dan juga rekannya. Hasil penelitian ini dianggap sebagai salah satu hasil terpenting Matematika pada abad ke-20. Pontryagin memperkenalkan gagasan mengenai fungsi *adjoint*. Fungsi *adjoint* memiliki tujuan yang mirip dengan pengali Lagrange dalam kalkulus multivarian, yang menambahkan kendala pada fungsi beberapa variabel menjadi memaksimumkan atau meminimumkan.

**Definisi 2.4** (Hamiltonian). Misalkan masalah optimal sebelumnya dalam (2.29).

fungsi

$$H(\lambda(t), u(t), x(t), t) = f(u(t), x(t), t) + \lambda(t)g(u(t), x(t), t) \quad (2.30)$$

disebut fungsi Hamiltonian dan  $\lambda$  adalah variabel *adjoint*.

Sekarang akan dijelaskan mengenai prinsip maksimum Pontryagin.

**Teorema 2.2** (Prinsip Maksimum Pontryagin). Jika  $u^*(t)$  dan  $x^*(t)$  adalah optimal untuk masalah (2.29) maka terdapat  $\lambda(t)$  variabel *adjoint* terdiferensiasi terus-menerus sedemikian sehingga

$$H(\lambda(t), u(t), x^*(t), t) \leq H(\lambda^*(t), u^*(t), x^*(t), t) \quad (2.31)$$

untuk semua kontrol  $u$  setiap waktu  $t$ , dimana  $H$  adalah Hamiltonian yang telah didefinisikan sebelumnya dan

$$\lambda'(t) = - \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))}{\partial x}$$

$$\lambda(t_f) = 0$$

**Catatan:** kondisi transversal yaitu,  $\lambda(t_f) = 0$  hanya akan digunakan ketika masalah kontrol optimal tidak mempunyai nilai terminal dalam variabel *state*.

(Sofia & Rodrigues, 2012, pp. 6-8).

Berikut ini prosedur penerapan prinsip maksimum Pontryagin. Pertimbangkan waktu bebas-waktu akhir dan *state* bebas-*state* akhir dengan fungsi biaya formulasi Bolza, di mana tujuannya adalah memaksimalkan fungsi tujuan.

$$J(u) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt$$

dengan

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t), u(t), t)$$

dan syarat batas yaitu

$$x(t = t_0) = x_0; \quad t = t_f \text{ adalah bebas dan } x(t_f) \text{ bebas.}$$

Untuk menentukan kontrol optimal akan dilakukan beberapa langkah sebagai berikut:

1. Bentuk fungsi Hamiltonian terdiri dari perkalian antara fungsi berbentuk persamaan diferensial yaitu  $g(x(t), u(t), t)$  dan faktor pengali yang disebut sebagai pengali Langrange  $\lambda(t)$ . Hasil perkalian ini ditambahkan dengan fungsi masalah pada fungsi tujuan. Oleh karena itu, fungsi Hamiltonian mempunyai bentuk:

$$H(\lambda(t), u(t), x(t), t) = f(u(t), x(t), t) + \lambda(t)g(u(t), x(t), t)$$

2. Memaksimumkan fungsi Hamiltonian pada semua input kontrol  $u(t)$ , sehingga

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0 \text{ dan diperoleh } u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Gunakan hasil dari tahapan 2 ke tahapan 1, kemudian tentukan  $H^*$  yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan himpunan dari  $2n$  persamaan diferensial:

- a. Persamaan *state* adalah persamaan yang menjadi kendala dalam model

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)$$

dengan nilai awal  $x(t_0) = t_0$ .

- b. Persamaan *co-state* merupakan persamaan adjoint

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

dengan nilai akhir  $\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]_* - \lambda^*(t)\right)'_{t_f} \delta x_f = 0$

5. Substitusikan solusi dari  $x^*(t), \lambda^*(t)$  dari tahapan ke-4 ke dalam kontrol optimal  $u^*(t)$  pada tahapan 2 sehingga akan diperoleh kontrol yang optimal.

(Naidu, 2002, pp. 68-69).

### 2.16 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta orde 4 digunakan untuk penyelesaian suatu persoalan persamaan yang mempunyai syarat awal dengan ukuran langkah  $h$ . Metode ini memiliki ketelitian lebih tinggi dibandingkan dengan metode deret Taylor, karena pada metode Runge-Kutta orde empat akan mengevaluasi fungsi  $g(x, y)$  pada titik terpilih dalam setiap selang langkah (Munir, 2006, p. 399). Misalkan diberikan persamaan diferensial orde pertama dengan nilai awal yang telah diketahui,

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

$$y(0) = Y_1$$

Pada metode Runge-Kutta orde empat dibentuk menjadi,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.32)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{nilai dari } y' \text{ pada } x_i$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \text{ estimasi } y' \text{ pada } x_i + \frac{h}{2}$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \text{ estimasi kedua dari } y' \text{ pada } x_i + \frac{h}{2}$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3), \text{ estimasi } y' \text{ pada } x_{i+1}$$

(Bober, 2014, p. 241).

### 2.17 Jenis-jenis Rokok

Berikut ini adalah jenis-jenis rokok yang terdapat di berbagai belahan dunia (Geiss & Kotzias, 2007, pp. 497-498):

1. Bidis

Bidis (dibaca “Bee-dees”) memiliki ukuran kecil, tipis dan digulung dengan tangan. Rokok ini diimpor ke Amerika Serikat utamanya dari India dan negara-negara Asia Tenggara lainnya. Bidis ini terdiri dari tembakau yang dibungkus dalam tendu atau daun temburni (tanaman asli Asia) diikat dengan tali warna-warni pada salah satu atau kedua ujungnya. Bidis bisa beraroma cokelat, ceri dan manga atau tanpa rasa. Terdapat kandungan nikotin, tar dan karbon monoksida yang lebih tinggi daripada rokok konvensional di Amerika Serikat.

## 2. Kretek

Kretek disebut juga dengan rokok kretek. Diimpor dari Indonesia, kretek mengandung campuran yang terdiri dari tembakau, cengkeh dan zat aditif lainnya. Rokok ini juga mengandung nikotin, karbon monoksida dan tar dibandingkan rokok konvensional yang ada di Amerika Serikat.

## 3. Pipa

Pipa merokok biasanya terdiri dari ruang kecil (mangkuk) untuk pembakaran tembakau yang akan dihisap dan batas tipis seperti betis kemudian berakhir di corong. Asap pipa, seperti asap cerutu, biasanya tidak dihirup. Hanya dibawa ke mulut dan kemudian dilepaskan.

## 4. Cerutu

Cerutu adalah bungkus tembakau kering dan fermentasi yang digulung erat, salah satu ujungnya dinyalakan sehingga asapnya dapat masuk ke mulut perokok melalui ujung lainnya. Tembakau cerutu ditanam di negara-negara seperti Brasil, Kamerun, Kuba, Republik Dominika, Honduras, Indonesia, Meksiko, Nikaragua dan Amerika Serikat.

## 5. Tembakau kunyah

Tembakau kunyah merupakan produk tembakau tanpa asap. Mengunyah adalah salah satu cara tertua mengonsumsi daun tembakau. Penduduk asli Amerika di Amerika Utara dan Selatan akan mengunyah daun tanaman, sering juga dicampur dengan jeruk nipis.

## 6. Snuff (Dip)

Dip dipakai dengan rumpun kecil dari dip dijepit dari timah dan ditempatkan di antara bibir bawah dan gusi. Dip terletak pada lapisan dalam mulut dimana air liur membawa nikotin ke arteri labial inferior atau superior, biasanya selama 20-30 menit atau satu jam. Hal ini dapat menyebabkan iritasi pada esofagus dan mual. Biasanya digunakan pekerja kantoran atau karyawan terus menerus menggunakan kedua tangan selama bekerja.

### 2.18 Permen Karet Nikotin

Bahaya dari merokok tembakau utamanya berasal dari penghirupan asap rokok pada saat produk dibakar, bukan berasal dari nikotin. Oleh karena itu, perlu adanya bentuk alternatif nikotin supaya kadar nikotin dalam tembakau menurun (Benowitz & Henningfield, 2013, p. 114). Terapi penggantian nikotin adalah pengobatan yang digunakan untuk membantu seseorang berhenti merokok. Pada terapi ini, nikotin yang ada di dalam rokok diganti dengan memasok nikotin dalam bentuk permen karet nikotin. Perawatan ini membantu mengurangi gejala kecanduan ketika seorang perokok memutuskan untuk berhenti merokok, dan menghilangkan keinginan untuk merokok secara perlahan (Silagy dkk, 2007, pp. 1-3). Penyakit merokok utamanya tidak disebabkan oleh nikotin, sebagian besar

karsinogen dan racun terkandung pada asap rokok yang dihirup saat merokok. Namun, nikotin merupakan suatu zat yang menimbulkan kecanduan pada pemakainya. Oleh karenanya, terapi penggantian nikotin bermanfaat untuk menghilangkan ketergantungan terhadap tembakau secara bertahap (Fant dkk, 1999, pp. 387-391).

### **2.19 Obat-obatan Non-nikotin**

Obat-obatan dan zat-zat non-nikotin untuk mengobati ketergantungan terhadap tembakau pada prinsipnya berguna untuk mengobati ketergantungan terhadap rokok. Berikut ini beberapa obat-obatan non-nikotin yang dapat digunakan yaitu Bupropion hydrochloride, Clonidine, Nortriptyline (World Health Organization, 2003, pp. 34-35).

### **2.20 Pola Hidup Sehat Menurut Perspektif Islam**

#### **1. Pengertian Kesehatan**

Sehat mempunyai pengertian bahwa berfungsinya setiap anggota tubuh manusia yang bersesuaian dengan tujuan Allah menciptakannya. Menurut M. Quraish Shihab terdapat dua istilah literatur keagamaan bertujuan untuk menyatakan pentingnya kesehatan berdasarkan pandangan Islam: 1) Kesehatan, diambil dari kata sehat; 2) afiat. Pada Bahasa Indonesia sering dijumpai penggunaan keduanya menjadi kata majemuk “sehat afiat”. Pada Kamus Besar Bahasa Indonesia kata “afiat” disinonimkan dengan kata “sehat”. Afiat dimaknai sehat dan kuat, sedangkan sehat diartikan sebagai keadaan baik keseluruhan badan dan juga bagian-bagiannya. Indikator sehat menurut Al-Qur’an tafsir Al-Mishbah

dibagi menjadi tiga yaitu sehat ruhani meliputi memiliki iman, selalu bersyukur dan berdoa, ikhlas dan sabar, tawakkal, husnudzhan. Sehat jasmani meliputi sehat badan, sehat makanan, sehat lingkungan dan sehat aktivitas fisik. Sehat sosial meliputi *amar ma'ruf nahi munkar*, pemaaf, empati, toleransi, dan menghargai orang (Aminah, 2013, p. 12).

Pada masa sekarang ini masih sulit mendefinisikan istilah kesehatan. Setiap individu maupun suatu organisasi mempunyai pandangannya masing-masing mengenai definisi kesehatan. Bahkan, makna kesehatan bergantung pada sistem kepercayaan yang dianut dan juga kondisi lingkungannya. Menurut organisasi kesehatan dunia (WHO atau *World Health Organization*), kesehatan merupakan kesejahteraan jasmani, rohani, dan sosial secara keseluruhannya dan bukan semata-mata memberantas suatu penyakit. Akan tetapi, definisi kesehatan tidak dapat digambarkan oleh sekelompok kata secara umum. Hal ini dikarenakan kesehatan merupakan sesuatu yang bersifat subyektif dan kualitasnya hanya dapat diketahui secara intuitif (Mustamir, 2007, pp. 61-62).

## 2. Pola Hidup Sehat

Kesehatan yang baik sangat penting bagi setiap individu terutama di zaman modern ini, karena dengan tubuh, pikiran dan jiwa yang sehat maka seseorang dapat melakukan aktivitas-aktivitas yang berguna dan bermanfaat bagi dirinya sendiri maupun orang lain seperti bekerja, beribadah, bersosialisasi dan lain sebagainya. Bahkan, Rasulullah Shallallahu 'Alaihi wa Sallam pun bersabda bahwa

*“Orang beriman yang kuat lebih baik dan lebih dicintai Allah daripada orang beriman yang lemah” (HR. Imam Muslim dalam Kitab Shahihnya dari riwayat Abu Hurairah).*

Hikmah yang terkandung dalam hadits ini adalah Rasul Shallallahu ‘Alaihi wa Sallam menyatakan secara tersirat bahwa sehat merupakan kekayaan berharga bagi setiap umatnya. Kesehatan diri menjadi kewajiban hidup yang selayaknya dijaga bagi setiap muslim, agar menjadi seseorang yang tangguh dalam menghadapi kehidupan yang telah dirahmatkan oleh Allah SWT. Hendaknya setiap manusia yang beriman kepada Allah, berusaha dengan keras untuk hidup sehat dan memperbaiki kesehatannya. Hal ini dikarenakan apabila tubuh dan akal seorang muslim sehat maka individu menjadi semakin taat dalam beribadah kepada Allah (Thawil, 2007, pp. 11-12). Terdapat beberapa faktor utama yang memengaruhi kesehatan yaitu faktor pribadi dan faktor lingkungan.

Faktor pribadi meliputi faktor genetik (keturunan) dan perilaku (kebiasaan) sehari-hari. Pertama, faktor genetik pada dasarnya diperoleh dari orang tua atau keluarga pendahulu, penyakit yang seringkali diturunkan adalah penyakit jantung, diabetes mellitus, hipertensi (tekanan darah tinggi), thalassemia, dan lain-lain. Faktor genetik ini dapat membuat seseorang sakit saat lahir maupun di kemudian hari. Kedua, faktor perilaku pola hidup sehat dan pencegahan penyakit. Pola hidup sehat dapat diartikan sebagai pengendalian kesehatan seseorang secara efektif dengan cara mengatur pola makan, berolahraga, tidak mengonsumsi narkoba dan sejenisnya, mengelola stress. Sedangkan, pencegahan penyakit seperti kebersihan pribadi, imunisasi, menghindari perilaku berisiko seperti merokok, minum-minuman keras, dan melakukan hubungan seks tidak aman (World Health Organization, 2013, p. 14).

Faktor lingkungan merupakan kondisi sekitar rumah tempat tinggal seseorang baik di dalam dan di luar. Kondisi ini meliputi kebersihan ventilasi, air

drainase, pembuangan sampah, ketersediaan air minum yang aman, dan sanitasi lingkungan. Sanitasi lingkungan meliputi udara yang dihirup, kondisi tanah, kondisi jalan, lalu lintas, ketertiban dan kebersihan di masyarakat. Terdapat tiga hal yang dapat dilakukan untuk menjaga kesehatan yaitu: 1) Cek kesehatan secara rutin dan segera berobat ketika sakit. 2) Sebagai warga negara, melakukan advokasi bersama pemerintah dan lembaga lokal untuk menyediakan layanan kesehatan yang dibutuhkan, seperti posyandu. 3) Gunakan layanan kesehatan ini secara bertanggung jawab (World Health Organization, 2013, p. 14).

Pola hidup sehat juga telah dijelaskan oleh Allah dalam Al-Qur'an secara rinci dan jelas. Pertama, Al-Qur'an memerhatikan tentang kebersihan. Menurut Ahmad Syauqy Al-Fanjari, Islam telah mengajarkan bahwa sanitasi lingkungan merupakan unsur paling mendasar dalam menjaga kesehatan (*at-Thibul wiqo'i*). Sanitasi lingkungan yang bersih dapat menciptakan lingkungan sehat yang tentu terbebas dari penyakit. "Bersih" yang dimaksudkan seperti kebersihan jasmani, pakaian dan kebiasaan seseorang, kebersihan jalan, rumah, saluran air, serta kebersihan makanan dan minuman.

Berikut ayat-ayat yang berkaitan dengan "bersih" yang dimaksud (Aminah, 2013, p. 105),

*"dan pakaianmu bersihkanlah" (QS. Al-Muddastir/74: 4).*

Ayat tersebut memerintahkan kita untuk selalu berpakaian yang rapi, bersih dan wangi. Hal ini dimaksudkan agar ketika beribadah maka pakaian kita merupakan pakaian yang suci. Selain itu, pakaian yang selalu dibersihkan adalah salah satu tindakan preventif dari terserangnya suatu penyakit karena pakaian kotor biasanya

menjadi sarang kuman, dan pakaian yang bersih tidak akan mengganggu orang lain di sekitar kita.

*“Hai orang-orang yang beriman, apabila kamu hendak mengerjakan shalat, Maka basuhlah mukamu dan tanganmu sampai dengan siku, dan sapulah kepalamu dan (basuh) kakimu sampai dengan kedua mata kaki, dan jika kamu junub maka mandilah, dan jika kamu sakit<sup>1</sup> atau dalam perjalanan atau kembali dari tempat buang air (kakus) atau menyentuh<sup>2</sup> perempuan, lalu kamu tidak memperoleh air, maka bertayammumlah dengan tanah yang baik (bersih); sapulah mukamu dan tanganmu dengan tanah itu. Allah tidak hendak menyulitkan kamu, tetapi Dia hendak membersihkan kamu dan menyempurnakan nikmat-Nya bagimu, supaya kamu bersyukur” (QS. Al-Maidah/5: 6).<sup>3</sup>*

Sedangkan, hikmah yang dapat diambil dari QS. Al-Maidah/5: 6 berdasarkan tafsir Quraish Shihab bahwa dalam Islam bersuci (thaharah) mempunyai dua pengertian. Pertama, mengarahkan hati kepada Allah ketika hendak menghadap Allah dengan penuh persiapan yaitu jiwa yang bersih dan ikhlas. Kedua, bersuci secara lahiriah dengan cara berwudhu, berwudhu memiliki arti membersihkan sebagian anggota badan dari kotoran. Selain berwudhu, terdapat pula cara bersuci lainnya yaitu dengan mandi setelah berhubungan suami istri, haid, dan nifas. Keduanya memiliki berbagai manfaat seperti membersihkan tubuh dan menjaganya dari kotoran, dan debu yang banyak kumannya serta melancarkan peredaran darah.

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan” (QS. Al-Baqarah/2: 164).*

Allah telah menegaskan untuk selalu menjaga kebersihan mulai dari diri sendiri.

Bahkan, Allah memberikan makanan dan minuman yang sehat dan bermanfaat

<sup>1</sup> Maksudnya: sakit yang tidak boleh kena air.

<sup>2</sup> Artinya: menyentuh. menurut jumhur ialah: menyentuh sedang sebagian mufassirin ialah: menyetubuhi.

bagi manusia. Lautan, sungai-sungai juga dapat dimanfaatkan oleh manusia misalnya sebagai sumber air minum dan sumber makanan. Hal ini menunjukkan bahwa manusia harus senantiasa menjaga kesehatannya sebagai salah satu rasa syukur kepada Allah SWT.

Kedua, Allah memerhatikan tentang makanan. Makanan dan minuman yang dikonsumsi oleh seorang mukmin haruslah halal dan baik seperti yang tertera dalam (QS. Al-Baqarah/2: 168). Makan dan minum memang telah menjadi kebutuhan pokok bagi setiap orang, karena dengan makan dan minum akan diperoleh suatu energi untuk dapat melakukan aktivitas yang bermanfaat bagi diri sendiri maupun orang lain. Akan tetapi, makan dan minum tidak boleh berlebihan dan harus sesuai dengan gizi yang dibutuhkan atau dengan kata lain pola makanan yang seimbang sehingga tubuh tidak mudah terserang penyakit dan mudah letih.

Pola makanan seimbang dan perintah mengonsumsi makanan yang halal telah ada dalam Al-Qur'an sebagai sumber wawasan bagi setiap mukmin dalam menjalani kehidupan. Pola makan yang seimbang antara lain daging, ikan, susu, dan buah-buahan. Dengan demikian, Al-Qur'an secara tidak langsung menjelaskan pentingnya menjaga kesehatan tubuh melalui makanan yang sehat dan bergizi seperti protein hewani, protein nabati (biji-bijian), susu, sayuran, dan buah-buahan. Berikut ini firman-firman Allah secara umum mengenai menu makan: daging hewan dalam (Qs. Hud: 69) dan (Qs. Al-Waqiah: 21), daging ikan dalam (Qs. An-Nahl: 14), susu yang diperoleh dari hewan dalam (QS. 'Al-Mu'minun: 21) dan (Qs. An-Nahl: 66), kurma dan anggur dalam (QS. An-Nahl: 67), sayuran dan zaitun dalam (QS. 'Abasa: 28-32), dan buah pisang dalam (QS. Al-Waqiah: 28-29). Selain itu, Allah SWT juga melarang makan dan minum

secara berlebihan yang dijelaskan pada (Qs. Al-A'raf/7: 31) yaitu (Aminah, 2013, pp. 110-122):

*“Hai anak Adam, pakailah pakaianmu yang indah di Setiap (memasuki) masjid<sup>4</sup>, makan dan minumlah, dan janganlah berlebih-lebihan<sup>5</sup>. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan” (QS. Al-A'raf/7: 31).*

Menurut tafsir Quraish Shihab Islam mewajibkan setiap pemeluknya untuk senantiasa menjaga sikap tidak berlebih-lebihan baik itu penampilan atau makanan dan minuman yang dikonsumsi. Hal ini dikarenakan pada ilmu pengetahuan modern menyatakan bahwa tubuh tidak akan menyerap semua makanan yang masuk. Tubuh hanya mengambil sesuai kebutuhan, lalu sisanya akan dibuang. Selain itu, sikap yang berlebih-lebihan dalam makan dan minum dapat merusak lambung dan alat-alat pencernaan. Oleh karena itu, pada ayat ini kita dianjurkan untuk makan yang baik-baik dan sesuai porsi supaya badan sehat dan tidak mudah terserang penyakit.

Keseluruhan aturan dalam syariat Islam akan menuju pada terciptanya hidup sehat, lingkungan bersih, budaya makan dan minum yang sehat, dan aturan lainnya yang secara umum mengatur pada pola hidup sehat umat manusia. Al-Qur'an telah menjadi petunjuk bagi manusia untuk selalu menjaga kesehatan dan kebersihan diri maupun lingkungan sekitar. Bahkan, Rasulullah Shallallahu 'Alaihi wa Sallam bersabda bahwa *“Dua nikmat agung yang diabaikan banyak orang: Sehat dan Waktu Luang” (HR. Imam Bukhari dalam Kitab Shahihnya dari riwayat Ibnu Abbas. Hadits ini juga diriwayatkan Imam Tirmidzi dan Ibnu Majah).*

<sup>4</sup> Maksudnya: tiap-tiap akan mengerjakan sembahyang atau thawaf keliling ka'bah atau ibadat-ibadat yang lain.

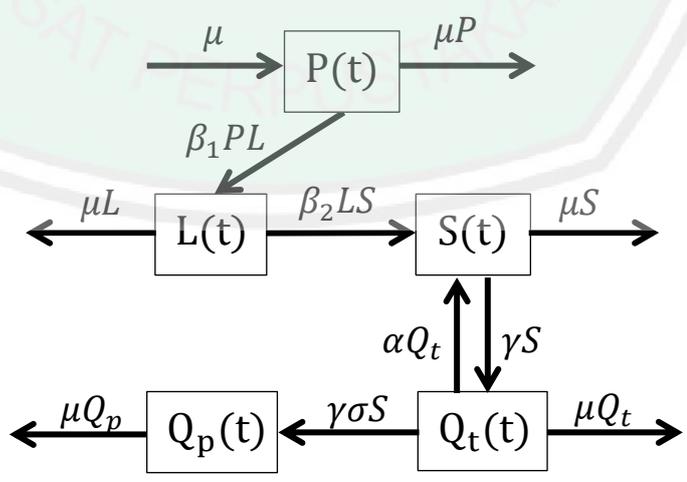
<sup>5</sup> Maksudnya: janganlah melampaui batas yang dibutuhkan oleh tubuh dan jangan pula melampaui batas-batas makanan yang dihalalkan.

**BAB III**  
**PEMBAHASAN**

Bab ini berisi pembahasan mengenai analisis kestabilan pada model dinamika merokok tanpa kontrol. Kemudian, pembentukan model dengan diberikan tiga kontrol yaitu kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan. Pembahasan berlanjut pada penyelesaian kontrol optimal pada model dinamika merokok dengan kontrol. Penyelesaian kontrol optimal ini menggunakan metode prinsip maksimum Pontryagin. Simulasi secara numerik dilakukan dengan *software* Matlab. Simulasi ini akan menampilkan grafik model tanpa kontrol dan model dengan kontrol. Berikut pembahasan secara terperinci:

**3.1 Interpretasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol**

Interpretasi model dinamika merokok dari (Alkhudari dkk, 2014b) adalah sebagai berikut:



**Gambar 3.1** Diagram Kompartemen Model Tanpa Kontrol

Model dinamika merokok telah melalui berbagai perkembangan untuk menyesuaikan keadaan. Salah satu perkembangannya adalah penambahan subpopulasi pada kategori perokok berdasarkan frekuensi merokok. Variasi perokok ini antara lain perokok ringan dan perokok berat serta pertimbangan lainnya. Diagram kompartemen pada Gambar 3.1 menjelaskan interaksi yang dilakukan oleh lima populasi yaitu perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara dan non perokok permanen. Variabel  $P(t)$  adalah banyaknya perokok potensial pada waktu ( $t$ ). Secara matematis, laju perubahan populasi perokok potensial dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t).$$

Populasi perokok potensial akan meningkat dengan adanya perekrutan individu ke dalam kelas perokok potensial (pada tingkat  $\mu$ ). Asumsikan bahwa perokok potensial memiliki kebiasaan merokok ketika melakukan kontak yang efektif dengan perokok ringan pada tingkat  $\beta_1$ . Dengan kata lain, penyebaran kebiasaan merokok seperti penyebaran infeksi penyakit. Hal ini mengakibatkan berkurangnya populasi perokok potensial. Selanjutnya, perokok potensial akan mengalami kematian alami pada tingkat  $\mu$  sehingga populasi perokok potensial berkurang.

Notasi populasi perokok ringan dapat dinyatakan dengan  $L(t)$ . Populasi perokok ringan mengalami peningkatan saat perokok potensial terpengaruh oleh kontak yang efektif dengan perokok ringan. Perokok potensial ini mulai merokok meskipun frekuensinya tergolong ringan. Sedangkan, kontak yang efektif antara perokok ringan dan perokok berat akan mengurangi banyaknya populasi perokok ringan pada tingkat  $\beta_2$ . Hal ini dikarenakan kontak tersebut akan memengaruhi

perokok ringan untuk menjadi perokok berat. Populasi tersebut juga akan berkurang karena mengalami kematian alami pada tingkat  $\mu$ . Laju perubahan populasi perokok ringan terhadap waktu  $t$  dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - \mu L(t).$$

Populasi perokok berat dinyatakan dengan variabel  $S(t)$ . Populasi ini akan meningkat dengan adanya kontak efektif antara perokok ringan dan perokok berat pada tingkat  $\beta_2$ . Kemudian, banyaknya populasi mengalami peningkatan saat non perokok sementara merokok kembali, sehingga individu yang semula non perokok sementara menjadi perokok berat pada tingkat  $\alpha$ . Populasi berkurang ketika perokok berat mengalami kematian alami pada tingkat  $\mu$ . Sedangkan, perokok yang berhenti merokok pada tingkat  $\gamma$  juga akan mengurangi populasi perokok berat. Dengan demikian, laju perubahan perokok berat terhadap waktu  $t$  adalah:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t).$$

Populasi non perokok sementara dinotasikan dengan variabel  $Q_t(t)$ . Populasi ini dihasilkan dari  $1 - \sigma$ , sebagian kecil dari perokok yang telah berhenti dalam jangka waktu sementara atau non perokok sementara pada tingkat  $\gamma$ . Notasi  $\sigma$  merupakan sebagian kecil dari non perokok permanen pada tingkat  $\gamma$ . Banyaknya populasi akan berkurang saat individu mengalami kematian alami pada tingkat  $\mu$ . Kemudian, populasi perokok yang kembali menjadi perokok berat pada tingkat  $\alpha$  juga berakibat pada berkurangnya populasi non perokok sementara dinyatakan dengan:

$$\frac{dQ_t(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha)Q_t(t).$$

Terakhir, populasi non perokok permanen terhadap waktu  $t$  akan disimbolkan dengan  $Q_p(t)$ . Populasi ini akan meningkat karena adanya perokok yang berhenti merokok pada tingkat  $\gamma$  dan sebagian dari non perokok permanen pada tingkat  $\gamma$ . Sedangkan, populasi mengalami penurunan ketika non perokok permanen ini mengalami kematian alami pada tingkat  $\mu$ . Laju perubahan populasi non perokok permanen adalah sebagai berikut:

$$\frac{dQ_p(t)}{dt} = \sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t).$$

Jadi, model dinamika merokok (Alkhudari dkk, 2014b) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) \\ \frac{dL(t)}{dt} &= \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - \mu L(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) \\ \frac{dQ_t(t)}{dt} &= \gamma(1 - \sigma S(t)) - (\mu + \alpha)Q_t(t) \\ \frac{dQ_p(t)}{dt} &= \sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

### 3.2 Analisis Kestabilan dari Titik Kesetimbangan pada Model Dinamika

#### Merokok Tanpa Kontrol

Untuk menganalisis kestabilan sistem dari model dinamika yang telah disebutkan sebelumnya, maka langkah pertama adalah menentukan titik kesetimbangannya. Setelah itu, model yang berbentuk nonlinier dapat dijadikan suatu model yang linier dengan menggunakan matriks Jacobian. Langkah

selanjutnya adalah substitusi titik kesetimbangan pada persamaan model dinamika merokok yang telah dilinierkan sehingga diperoleh persamaan karakteristik untuk mendapatkan nilai karakteristik. Nilai karakteristik digunakan untuk penentuan kestabilan dari sistem. Berikut ini penjelasan proses yang lebih terperinci,

### 3.2.1 Titik Kesetimbangan Model

Model dinamika merokok pada sistem persamaan (3.1) akan mempunyai titik kesetimbangan jika memenuhi  $\frac{dP(t)}{dt} = 0, \frac{dL(t)}{dt} = 0, \frac{dS(t)}{dt} = 0, \frac{dQ_t(t)}{dt} = 0$ . Sedangkan, karena  $Q_p(t)$  yang menotasikan non perokok permanen yang tidak memengaruhi dan nampak pada tiga persamaan lainnya, maka tidak perlu menentukan titik kesetimbangannya. Cukup menentukan titik kesetimbangan dari empat populasi. Populasi tersebut yaitu perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, dan non perokok sementara. Oleh karena itu, sistem (3.1) mempunyai subsistem persamaan yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &= \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) \\ \frac{dL(t)}{dt} &= \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - \mu L(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) \\ \frac{dQ_t(t)}{dt} &= \gamma(1 - \sigma S(t)) - (\mu + \alpha)Q_t(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Subsistem persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$0 = \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t).\tag{3.3}$$

$$0 = \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - \mu L(t).\tag{3.4}$$

$$0 = \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t). \quad (3.5)$$

$$0 = \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha)Q_t(t). \quad (3.6)$$

Pada model dinamika merokok terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas, titik kesetimbangan terbatas (*boundary*) dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan suatu keadaan ketika tidak ada individu yang merokok. Oleh karena itu, pada titik kesetimbangan bebas merokok dapat diasumsikan bahwa tidak terdapat individu perokok berat pada saat  $t$ , sehingga  $S(t) = 0$ . Titik kesetimbangan ini dapat dinotasikan  $E_0$  yang kemudian dinyatakan dalam  $E_0 = (P_0, L_0, S_0, Q_{t_0})$  atau  $E_0 = (P_0, L_0, 0, Q_{t_0})$ . Tahapannya adalah sebagai berikut:

Pertama, mensubstitusikan  $S(t) = 0$  ke dalam persamaan (3.4).

$$\beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - \mu L(t) = 0$$

$$\beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)0 - \mu L(t) = 0$$

$$\beta_1 P(t)L(t) - \mu L(t) = 0$$

$$(\beta_1 P(t) - \mu)L(t) = 0$$

$$L(t) = 0 \quad \text{atau} \quad \beta_1 P(t) - \mu = 0$$

$$P(t) = \frac{\mu}{\beta_1}$$

Setelah itu, tahap kedua adalah substitusi  $L(t) = 0$  terlebih dahulu ke persamaan (3.3).

$$\mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) = 0$$

$$\mu - \beta_1 P(t)0 - \mu P(t) = 0$$

$$\mu - \mu P(t) = 0$$

$$P(t) = \frac{\mu}{\mu}$$

$$P(t) = 1$$

Substitusi  $S(t) = 0$ ,  $L(t) = 0$  dan  $P(t) = 1$  ke dalam persamaan (3.5),

$$\beta_2 L(t) S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma) S(t) = 0$$

$$\beta_2(0)0 + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)0 = 0$$

$$\alpha Q_t(t) = 0$$

$$Q_t(t) = 0$$

maka diperoleh titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0 = (1,0,0,0)$ . Titik kesetimbangan ini memiliki maksud yaitu pada titik kesetimbangan bebas merokok, banyaknya populasi perokok ringan dan perokok berat tidak ada. Hal ini dapat dinyatakan bahwa populasinya bernilai nol. Oleh karena itu, populasi non perokok sementara juga bernilai nol. Namun, terdapat populasi perokok potensial yang memiliki nilai yaitu satu. Dengan kata lain, bahwa individu dalam populasi masih belum ada yang merokok sama sekali.

Tahapan berikutnya yaitu mensubstitusikan  $P(t) = \frac{\mu}{\beta_1}$  ke dalam persamaan (3.3) untuk menentukan titik kesetimbangan terbatas (*boundary*).

$$\mu - \beta_1 P(t) L(t) - \mu P(t) = 0$$

$$\mu - \beta_1 \frac{\mu}{\beta_1} L(t) - \mu \frac{\mu}{\beta_1} = 0$$

$$\mu - \mu L(t) - \frac{\mu^2}{\beta_1} = 0$$

$$\mu - \mu L(t) = \frac{\mu^2}{\beta_1}$$

$$-\mu L(t) = \frac{\mu^2}{\beta_1} - \mu$$

$$L(t) = \frac{\mu}{\mu} - \frac{\mu^2}{\beta_1 \mu}$$

$$L(t) = 1 - \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$L(t) = \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}$$

maka titik kesetimbangan terbatas (*boundary*) yaitu  $E_1 = (\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0)$ . Titik kesetimbangan ini mempunyai maksud bahwa telah ada individu yang menjadi seorang perokok. Individu ini termasuk ke dalam perokok ringan. Hal ini dikarenakan banyaknya perokok potensial dinyatakan dengan  $\frac{\mu}{\beta_1}$ . Sedangkan, banyaknya populasi perokok ringan adalah  $\frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}$  atau  $1 - \frac{\mu}{\beta_1}$  yang berarti total populasi dikurangi dengan populasi potensial. Lebih singkatnya, banyaknya populasi perokok ringan merupakan sisa dari banyaknya total populasi setelah dikurangi banyaknya populasi perokok potensial.

Untuk titik kesetimbangan endemik diasumsikan terdapat individu yang merokok baik perokok ringan maupun perokok berat, sehingga  $L(t) \neq 0$  dan  $S(t) \neq 0$ . Titik kesetimbangan ini dinyatakan dengan notasi  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$ , diasumsikan bahwa nilai  $P(t) \neq 0, Q_t(t) \neq 0$ . Dari persamaan (3.6) maka:

$$Q_t^*(t) = \frac{\gamma(1 - \sigma)S^*(t)}{(\mu + \alpha)}$$

Selanjutnya substitusi  $Q_t^*(t)$  ke persamaan (3.5) sehingga diperoleh:

$$\beta_2 L(t) S(t) + \frac{\alpha \gamma (1 - \sigma) S^*(t)}{(\mu + \alpha)} - \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma) S^*(t)}{\mu + \alpha} = 0$$

maka,

$$L^*(t) = \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma) - \alpha \gamma (1 - \sigma)}{\beta_2 (\mu + \alpha)}$$

$$L^*(t) = \frac{\mu(\mu + \alpha) + \gamma(\mu + \alpha) - \alpha\gamma + \alpha\gamma\sigma}{\beta_2(\mu + \alpha)}$$

$$L^*(t) = \frac{\gamma\mu + \alpha\gamma - \alpha\gamma + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma}{\beta_2(\mu + \alpha)}$$

$$L^*(t) = \frac{\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma}{\beta_2(\mu + \alpha)}$$

Substitusi  $L^*(t)$  ke persamaan (3.3) sehingga didapatkan:

$$P^*(t) = \frac{\mu\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]}$$

Terakhir substitusi  $P^*(t)$  ke persamaan (3.4) sehingga diperoleh  $S^*(t)$ :

$$S^*(t) = \frac{\mu\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2^2(\mu + \alpha) + \beta_1\beta_2[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$S^*(t) = \frac{\mu}{\beta_2} \left( \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} - 1 \right)$$

maka diperoleh titik kesetimbangan endemik  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$ .

Titik kesetimbangan endemik ini merupakan suatu keadaan terjadi penyebaran individu yang merokok. Oleh karena itu, terdapat populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara.

Pada titik kesetimbangan dari model dinamika merokok diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0 = (1,0,0,0)$ , titik kesetimbangan terbatas (*boundary*)  $E_1 = (\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0,0)$  dan titik kesetimbangan endemik  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$  dengan

$$P^*(t) = \frac{\mu\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]}$$

$$L^*(t) = \frac{\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma}{\beta_2(\mu + \alpha)},$$

$$S^*(t) = \frac{\mu}{\beta_2} \left( \frac{\beta_1 \beta_2 (\mu + \alpha)}{\mu \beta_2 (\mu + \alpha) + \beta_1 [\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma]} - 1 \right),$$

$$Q_t^*(t) = \frac{\gamma (1 - \sigma) S^*(t)}{(\mu + \alpha)},$$

### 3.2.2 Bilangan Reproduksi

Titik kesetimbangan yang diperoleh dari sistem (3.2) adalah titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0 = (1, 0, 0, 0)$ , titik kesetimbangan terbatas (*boundary*) yaitu  $E_1 = \left( \frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0 \right)$  dan titik kesetimbangan endemik dinotasikan dengan  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$  untuk,

$$P^*(t) = \frac{\mu \beta_2 (\mu + \alpha)}{\mu \beta_2 (\mu + \alpha) + \beta_1 [\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma]},$$

$$L^*(t) = \frac{\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma}{\beta_2 (\mu + \alpha)},$$

$$S^*(t) = \frac{\mu}{\beta_2} \left( \frac{\beta_1 \beta_2 (\mu + \alpha)}{\mu \beta_2 (\mu + \alpha) + \beta_1 [\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma]} - 1 \right),$$

$$Q_t^*(t) = \frac{\gamma (1 - \sigma) S^*(t)}{(\mu + \alpha)},$$

Bilangan reproduksi dasar pada permasalahan merokok merupakan rata-rata banyaknya individu terinfeksi baru (kasus sekunder) akibat dari tertular oleh individu terinfeksi lama (kasus primer) yang berlangsung dalam populasi rentan. Berdasarkan (Driessche & Watmough, 2002) bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan matriks *next generation*. Misalkan bahwa  $X = (L, S, Q_t, P)$ , maka sistem (3.2) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dX}{dt} = \mathfrak{F}(x) - \mathfrak{B}(x)$$

dengan  $\mathfrak{F}(x)$  merupakan matriks transmisi. Matriks ini berisi laju infeksi individu baru akibat interaksi antara populasi perokok potensial dengan perokok ringan dan interaksi populasi perokok ringan dengan populasi perokok berat. Sedangkan,  $\mathfrak{B}(x)$  adalah matriks transisi. Matriks ini berisi laju transfer masuk keluar dari populasi terinfeksi sedemikian sehingga

$$\mathfrak{F}(x) = \begin{bmatrix} \beta_1 PL \\ \beta_2 LS \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{B}(x) = \begin{bmatrix} \beta_2 LS + \mu L \\ (\mu + \gamma)S - \alpha Q_t \\ (\mu + \alpha)Q_t - \gamma(1 - \sigma)S \\ -\mu + \mu P + \beta_1 PL \end{bmatrix}$$

Terdapat tiga populasi yang terinfeksi oleh perokok ringan dan perokok berat. Selanjutnya, matriks Jacobian dari  $\mathfrak{F}(x)$  akan dihitung dan dievaluasi di titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0 = (1,0,0,0)$  sehingga dengan menggunakan Lema 2.1 didapatkan

$$D\mathfrak{F}(E_0) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan  $F$  merupakan matriks tak negatif dengan ukuran  $3 \times 3$ . Ukuran matriks ini ditentukan karena pada model dinamika merokok terdapat tiga populasi yang terinfeksi. Matriks  $F$  tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathfrak{F}_L}{\partial x_L}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{F}_L}{\partial x_S}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{F}_L}{\partial x_{Q_t}}(E_0) \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_S}{\partial x_L}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{F}_S}{\partial x_S}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{F}_S}{\partial x_{Q_t}}(E_0) \\ \frac{\partial \mathfrak{F}_{Q_t}}{\partial x_L}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{F}_{Q_t}}{\partial x_P}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{F}_{Q_t}}{\partial x_{Q_t}}(E_0) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks transisi yaitu  $\mathfrak{B}(x)$  akan dihitung matriks Jacobian yang dievaluasi di titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0 = (1, 0, 0, 0)$  dengan tiga populasi yang terinfeksi yaitu  $L, S,$  dan  $Q_t$ , maka berdasarkan Lema 2.1 didapatkan,

$$D\mathfrak{B}(E_0) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ J_1 & J_2 \end{bmatrix}$$

dengan  $V$  merupakan matriks tak singular dengan ukuran  $3 \times 3$ . Ukuran matriks ini ditentukan karena pada model dinamika merokok terdapat tiga populasi yang terinfeksi. Berikut matriks  $V$  dapat ditulis yaitu sebagai berikut:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathfrak{B}_L}{\partial x_L}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{B}_L}{\partial x_S}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{B}_L}{\partial x_{Q_t}}(E_0) \\ \frac{\partial \mathfrak{B}_S}{\partial x_L}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{B}_S}{\partial x_S}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{B}_S}{\partial x_{Q_t}}(E_0) \\ \frac{\partial \mathfrak{B}_{Q_t}}{\partial x_L}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{B}_{Q_t}}{\partial x_S}(E_0) & \frac{\partial \mathfrak{B}_{Q_t}}{\partial x_{Q_t}}(E_0) \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \gamma & -\alpha \\ 0 & -\gamma(1 - \sigma) & \mu + \alpha \end{bmatrix}$$

Matriks *next generation* diperoleh dengan menggunakan perkalian matriks  $F$  dan  $V^{-1}$  sehingga perlu untuk mencari nilai invers matriks  $V$ . Matriks invers  $V$  adalah

$$V^{-1}$$

$$= \frac{1}{\mu(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \mu\alpha\gamma(1 - \sigma)} \begin{bmatrix} (\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \mu(\mu + \alpha) & \mu\alpha \\ 0 & \mu\gamma(1 - \sigma) & \mu(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\mu + \alpha)}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} & \frac{\alpha}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} \\ 0 & \frac{\gamma(1 - \sigma)}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} & \frac{\mu + \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} \end{bmatrix}$$

Matriks *next generation* dapat didefinisikan sebagai berikut:

$FV^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\mu + \alpha)}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} & \frac{\alpha}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} \\ 0 & \frac{\gamma(1 - \sigma)}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} & \frac{\mu + \gamma}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) - \alpha\gamma(1 - \sigma)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks *next generation* diperoleh dengan cara menyelesaikan  $\det(FV^{-1} - \lambda I) = 0$ . Hasil yang diperoleh dari penyelesaian tersebut adalah

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1}{\mu}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Karena nilai  $R_0 = \rho(FV^{-1})$  maka,

$$R_0 = \frac{\beta_1}{\mu}$$

Notasi  $R_0$  digunakan sebagai bilangan reproduksi dasar pada model dinamika merokok. Nilai tersebut menunjukkan bahwa laju pertambahan infeksi baru dalam populasi perokok potensial dipengaruhi oleh laju interaksi antara perokok potensial dengan perokok ringan yang dibagi oleh laju kematian alami.

Selanjutnya, karena pada titik kesetimbangan endemik terdapat nilai titiknya yang negatif maka perlu ditentukan syarat yang memenuhi agar titik tersebut bernilai positif. Terdapat satu titik kesetimbangan endemik yaitu  $S^*(t)$  yang belum dapat dipastikan bernilai positif atau negatif. Agar  $S^*(t) > 0$  pada  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$ , maka

$$S^*(t) = \frac{\mu\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\beta_2(\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma])} - \frac{\mu}{\beta_2} > 0$$

$$\frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{(\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma])} > \frac{\mu}{\beta_2} \frac{\beta_2}{\mu}$$

$$\frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{(\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma])} > 1$$

$$R_1 = \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]}$$

Jadi,  $R_1$  merupakan syarat untuk titik kesetimbangan endemik, sehingga jika  $R_1 > 1$  maka nilai  $S^*(t)$  adalah positif. Dengan demikian, terdapat titik kesetimbangan positif tunggal pada titik kesetimbangan  $E^*$ . Sebaliknya jika nilai  $R_1 < 1$  maka menunjukkan bahwa terdapat titik kesetimbangan yang bernilai negatif pada  $E^*$ . Sedangkan, untuk  $R_1 = 1$  akan diperoleh,

$$R_1 = \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} = 1$$

$$S^*(t) = \frac{\mu\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\beta_2(\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma])} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$= \frac{\mu}{\beta_2} \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$= \frac{\mu}{\beta_2} - \frac{\mu}{\beta_2}$$

$$= 0$$

Diperoleh  $S^*(t) = 0$ , untuk  $R_1 = 1$  pada titik kesetimbangan  $P^*(t)$  diperoleh,

$$P^*(t) = \frac{\mu\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]}$$

dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} P^*(t) &= \frac{\mu}{\beta_1} \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} \\ &= \frac{\mu}{\beta_1} \quad (1) \\ &= \frac{\mu}{\beta_1} \end{aligned}$$

Setelah diperoleh nilai  $P^*(t)$ , kemudian dicari nilai dari  $L^*(t)$  ketika  $R_1 = 1$  yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} \\ 1 &= \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]} \\ \beta_1\beta_2(\mu + \alpha) &= \mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma] \\ 1 &= \frac{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]}{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)} \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} L^*(t) &= \frac{\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma}{\beta_2(\mu + \alpha)} + \frac{\mu}{\beta_1} - \frac{\mu}{\beta_1} \\ &= \frac{\beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma] + \mu\beta_2(\mu + \alpha)}{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)} - \frac{\mu}{\beta_1} \\ &= \frac{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1[\gamma\mu + \mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\sigma]}{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)} - \frac{\mu}{\beta_1} \\ &= 1 - \frac{\mu}{\beta_1} = \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai  $Q^*(t)$  dengan substitusi nilai  $S^*(t) = 0$  yang telah diperoleh sebelumnya,

$$\begin{aligned} Q_t^*(t) &= \frac{\gamma(1-\sigma)S^*(t)}{(\mu + \alpha)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dari perhitungan tersebut telah diperoleh nilai titik kesetimbangan yakni  $P^*(t) = \frac{\mu}{\beta_1}$ ,  $L^*(t) = \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}$ ,  $S^*(t) = 0$ , dan  $Q_t^*(t) = 0$ . Titik kesetimbangan ini merupakan titik kesetimbangan terbatas (*boundary*), maka dapat disimpulkan jika  $R_1 = 1$  akan diperoleh titik kesetimbangan terbatas  $E_1 = \left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0\right)$ . Hal ini juga berlaku jika  $R_0 > 1$ . Jadi, berdasarkan uraian tersebut diperoleh teorema sebagai berikut:

**Teorema 3.1** Sistem (3.1) selalu mempunyai titik kesetimbangan bebas merokok yaitu  $E_0 = (1, 0, 0, 0)$ . Adapun eksistensi titik kesetimbangan endemik, erdapat tiga kasus yakni sebagai berikut:

- (i) Jika  $R_1 < 1$ , maka sistem tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik positif.
- (ii) Jika  $R_1 > 1$ , maka sistem mempunyai titik kesetimbangan endemik positif.
- (iii) Jika  $R_1 = 1$  dan  $R_0 > 1$ , maka sistem mempunyai titik kesetimbangan terbatas yakni  $E_1 = \left(\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0\right)$ .

### 3.2.3 Linierisasi Model

Linearisasi merupakan suatu metode untuk mentransformasikan persamaan diferensial tak linier menjadi linier dengan menggunakan ekspansi deret Taylor sehingga dapat menghilangkan suku tak linier disekitar titik kesetimbangan. Dari

sistem persamaan (3.2) didefinisikan fungsi pada masing-masing persamaan tersebut sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(t)}{dt} &= \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) && \equiv F(P, L, S, Q_t) \\
 \frac{dL(t)}{dt} &= \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - \mu L(t) && \equiv G(P, L, S, Q_t) \\
 \frac{dS(t)}{dt} &= \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) && \equiv H(P, L, S, Q_t) \\
 \frac{dQ_t(t)}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha)Q_t(t) && \equiv I(P, L, S, Q_t)
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Berikut ini hasil linierisasi dengan deret Taylor dari sistem persamaan (3.7) dengan menghilangkan suku tak linier dari masing-masing persamaan, proses linierisasi dapat dilihat pada Lampiran 2.

1. Hasil linierisasi disekitar  $(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$  untuk titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0$ .

Sistem linier dari persamaan (3.2) dengan titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0 = (1, 0, 0, 0)$  adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(t)}{dt} &= -\mu P - \beta_1 L + \mu \\
 \frac{dL(t)}{dt} &= (\beta_1 - \mu)L \\
 \frac{dS(t)}{dt} &= -(\mu + \gamma)S + \alpha Q_t \\
 \frac{dQ_t(t)}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)S - (\mu + \alpha)Q_t
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

2. Hasil linierisasi disekitar  $(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$  untuk titik kesetimbangan terbatas

$$E_1 = \left( \frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0 \right).$$

Sistem linier dari sistem persamaan (3.2) dengan titik kesetimbangan

terbatas  $E_1 = (\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0)$  adalah

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &= -\beta_1 P - \mu L + \left[ \frac{\mu\beta_1 + (\beta_1 - \mu)\mu}{\beta_1} \right] \\ \frac{dL(t)}{dt} &= (\beta_1 - \mu)P - \frac{\beta_2(\beta_1 - \mu)}{\beta_1} S - \left[ (\beta_1 - \mu) \frac{\mu}{\beta_1} - \frac{\mu^2}{\beta_1} \right] \\ \frac{dS(t)}{dt} &= \left( -\frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} - (\mu + \gamma) \right) S + \alpha Q_t \\ \frac{dQ_t(t)}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)S - (\mu + \alpha)Q_t\end{aligned}\tag{3.9}$$

3. Hasil linierisasi disekitar  $(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$  untuk titik kesetimbangan endemik

$E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$  dengan

Sistem linier dari sistem persamaan (3.2) dengan titik kesetimbangan

endemik  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$  diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= (-\mu - \beta_1 L^*)x(t) - \beta_1 P^* y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \beta_1 L^* x(t) + (\beta_1 P^* - \beta_2 S^* - \mu)y(t) - \beta_2 L^* w(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \beta_2 S^* y(t) + (\beta_2 L^* - (\mu + \gamma))w(t) + \alpha z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \gamma(1 - \sigma)w(t) - (\mu + \alpha)z(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Untuk menyederhanakan hasil pada sistem persamaan (3.13) sehingga

bentuk tak linier menjadi linier maka dapat digunakan

$$\beta_1 P^* L - \beta_2 S^* L^* - \mu L^* = 0$$

$$(\beta_1 P^* - \beta_2 S^* - \mu)L^* = 0$$

Jika  $L^* = 0$  maka  $\beta_1 P^* - \beta_2 S^* - \mu = 0$

dan

$$\beta_2 L^* S^* + \alpha Q_t^* - (\mu + \gamma) S^* = 0$$

$$[\beta_2 L^* - (\mu + \gamma)] S^* = -\alpha Q_t^*$$

$$\beta_2 L^* - (\mu + \gamma) = -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*}$$

Sistem persamaan menjadi,

$$\frac{dx(t)}{dt} = (-\mu - \beta_1 L^*) x(t) - \beta_1 P^* y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta_1 L^* x(t) - \beta_2 L^* w(t)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \beta_2 S^* y(t) - \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} w(t) + \alpha z(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma) w(t) - (\mu + \alpha) z(t)$$

dengan,

$$P^*(t) = \frac{\mu \beta_2 (\mu + \alpha)}{\mu \beta_2 (\mu + \alpha) + \beta [\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma]}$$

$$L^*(t) = \frac{\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma}{\beta_2 (\mu + \alpha)},$$

$$S^*(t) = \frac{\mu}{\beta_2} \left( \frac{\beta_1 \beta_2 (\mu + \alpha)}{\mu \beta_2 (\mu + \alpha) + \beta [\gamma \mu + \mu (\mu + \alpha) + \alpha \gamma \sigma]} - 1 \right),$$

$$Q_t^*(t) = \frac{\gamma(1 - \sigma) S^*(t)}{(\mu + \alpha)},$$

### 3.2.4 Analisis Kestabilan Lokal pada Titik Keseimbangan

Untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan akan digunakan matriks Jacobian yang berfungsi menghitung nilai eigen. Matriks Jacobian diperoleh dari persamaan yang telah berbentuk linier yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{dP(t)}{dt} \\ \frac{dL(t)}{dt} \\ \frac{dS(t)}{dt} \\ \frac{dQ_t(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu - \beta_1 L & -\beta_1 P & 0 & 0 \\ \beta_1 L & \beta_1 P - \beta_2 S - \mu & -\beta_2 L & 0 \\ 0 & \beta_2 S & \beta_2 L - (\mu + \gamma) & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ L(t) \\ S(t) \\ Q_t(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dari matriks Jacobian tersebut akan dianalisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan terbatas (*boundary*) dan titik kesetimbangan endemik.

### 3.2.4.1 Kestabilan Lokal di Titik Kesetimbangan Bebas Merokok

Pada titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0(1,0,0,0)$ . Substitusikan nilai titik kesetimbangan tersebut ke dalam matriks (3.11), diperoleh:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \gamma) & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ L(t) \\ S(t) \\ Q_t(t) \end{bmatrix}$$

dari matriks Jacobian tersebut maka dapat dicari nilai eigen yaitu sebagai berikut:

$$\det(J_0 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \gamma) & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \beta_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \gamma) - \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Untuk menentukan nilai determinannya digunakan metode Sarrus yaitu sebagai berikut:

$$\det[J_0 - \lambda I] = |A^*|$$

dengan,

$$|A^*| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

diperoleh dari hasil perhitungan, nilai determinan masing-masing adalah sebagai berikut:

$$|A_1| = (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)(-(\mu + \gamma) - \lambda)(-(\mu + \alpha) - \lambda)$$

$$|A_2| = (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)(\gamma(1 - \sigma))\alpha$$

$$|A_3| = 0$$

Perhitungan determinan tersebut dapat dilihat pada Lampiran 3. Kemudian hasil yang telah diperoleh dapat disubstitusikan menjadi,

$$\begin{aligned} |A^*| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &= (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)(-(\mu + \gamma) - \lambda)(-(\mu + \alpha) - \lambda) \\ &\quad - (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)(\gamma(1 - \sigma))\alpha + 0 \\ &= (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)[(\mu + \gamma)(\mu + \alpha) + \lambda(\mu + \gamma) + \lambda(\mu + \alpha) + \lambda^2 \\ &\quad - \alpha\gamma + \alpha\gamma\sigma] \\ &= (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)[\mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu + \alpha\gamma - \alpha\gamma + \alpha\gamma\sigma + \mu\lambda + \alpha\lambda \\ &\quad + \mu\lambda + \gamma\lambda + \lambda^2] \\ &= (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)[\lambda^2 + (2\mu + \alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma\sigma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu)] \end{aligned}$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah,

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -\mu + \beta_1$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.12}$$

dengan  $\lambda_3$  dan  $\lambda_4$  memenuhi persamaan karakteristik (3.12) dimana:

$$a_1 = 2\mu + \alpha + \gamma$$

$$a_0 = \alpha\gamma\sigma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, syarat agar titik kesetimbangan bebas merokok stabil asimtotik, adalah

$$a_1, a_0 > 0 \text{ dan } a_1 a_0 > 0$$

Pertama, akan ditunjukkan bahwa  $a_1 > 0$ . Karena laju kematian alami ( $\mu$ ), laju interaksi antara perokok berat dengan non perokok sementara ( $\alpha$ ), dan laju perokok berat yang telah berhenti merokok ( $\gamma$ ) mempunyai nilai positif. Dengan demikian jelas bahwa:

$$a_1 = 2\mu + \alpha + \gamma > 0 \quad (3.13)$$

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa  $a_0 > 0$  dengan laju interaksi antara perokok berat dengan non perokok sementara ( $\alpha$ ), laju perokok berat yang telah berhenti merokok ( $\gamma$ ), dan sebagian non perokok permanen ( $\sigma$ ) serta  $\mu$  sebagai parameter dari laju kematian alami bernilai positif. Hal ini jelas dapat dinyatakan bahwa:

$$a_0 = \alpha\gamma\sigma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu > 0 \quad (3.14)$$

Sedangkan, berikut ini akan dibuktikan bahwa  $a_1 a_0 > 0$  yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_1 a_0 &= (2\mu + \alpha + \gamma)(\alpha\gamma\sigma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu) \\ &= 2\mu\alpha\gamma\sigma + 2\mu^2(\mu + \alpha) + 2\gamma\mu^2 + \alpha^2\gamma\sigma + \alpha\mu(\mu + \alpha) + \alpha\gamma\mu + \alpha\gamma^2\sigma \\ &\quad + \gamma\mu(\mu + \alpha) + \gamma^2\mu \end{aligned}$$

Nilai parameter yang digunakan keseluruhan adalah positif sehingga jelas  $a_1 a_0 > 0$ . Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz dapat disimpulkan nilai eigen  $\lambda_3, \lambda_4$  mempunyai bagian real negatif. Nilai eigen  $\lambda_1$  dapat dipastikan bernilai negatif, karena nilai  $\mu$  positif. Sedangkan, agar  $\lambda_2 < 0$  maka

$$\lambda_2 = -\mu + \beta_1 < 0$$

$$\beta_1 < \mu$$

$$\frac{\beta_1}{\mu} < 1$$

Berdasarkan uraian tersebut karena  $\frac{\beta_1}{\mu} < 1$  maka nilai eigen  $\lambda_2$  adalah negatif. Jika  $R_0 = \frac{\beta_1}{\mu}$  maka semua nilai eigen akan bernilai negatif ketika  $R_0 < 1$ . Dapat disimpulkan bahwa  $E_0$  adalah stabil asimtotik lokal. Sedangkan, untuk  $\lambda_2 = 0$  diperoleh

$$\lambda_2 = -\mu + \beta_1 = 0$$

$$\beta_1 = \mu$$

$$\frac{\beta_1}{\mu} = 1$$

sehingga didapatkan  $R_0 = 1$ . Oleh karena itu, jika  $R_0 = 1$ ,  $E_0$  stabil lokal.

Sedangkan, jelas bahwa untuk  $R_0 > 1$  maka  $\lambda_2 > 0$  atau

$$\lambda_2 = -\mu + \beta_1 > 0$$

$$\beta_1 > \mu$$

$$\frac{\beta_1}{\mu} > 1$$

Hal ini mengakibatkan nilai eigen tidak seluruhnya negatif sehingga  $E_0$  tidak stabil. Jadi, berdasarkan uraian tersebut diperoleh teorema yaitu sebagai berikut:

**Teorema 3.2 (Kestabilan Lokal  $E_0$ )** Jika  $R_0 < 1$ , titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0$  stabil asimtotik lokal. Jika  $R_0 = 1$ , maka  $E_0$  stabil lokal. Jika  $R_0 > 1$ ,  $E_0$  tidak stabil.

### 3.2.4.2 Kestabilan Lokal di Titik kesetimbangan Terbatas (Boundary)

Pada titik kesetimbangan bebas merokok  $E_1 = (\frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0)$ . Substitusi ke dalam matriks (3.14), sehingga diperoleh:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -\mu & 0 & 0 \\ \beta_1 - \mu & 0 & \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \gamma) - \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(t) \\ L(t) \\ S(t) \\ Q_t(t) \end{bmatrix}$$

dari matriks Jacobian tersebut dapat dicari nilai eigen yaitu sebagai berikut:

$$\det(J_1 - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\beta_1 & -\mu & 0 & 0 \\ \beta_1 - \mu & 0 & \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \gamma) - \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\beta_1 - \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ \beta_1 - \mu & -\lambda & \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \left( -(\mu + \gamma) - \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} \right) - \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma(1 - \sigma) & -(\mu + \alpha) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Misalkan terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan yaitu sebagai berikut:

$$b_{11} = -\beta_1 - \lambda \quad b_{23} = \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} \quad b_{44} = -(\mu + \alpha) - \lambda$$

$$b_{12} = -\mu \quad b_{33} = \left( -(\mu + \gamma) - \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} \right) - \lambda$$

$$b_{21} = \beta_1 - \mu \quad b_{34} = \alpha$$

$$b_{22} = -\lambda \quad b_{43} = \gamma(1 - \sigma)$$

Bentuk kembali menjadi suatu matriks dan selesaikan dengan metode kofaktor dan sarrus. Perhitungan determinan ini dapat dilihat pada Lampiran 4.

$$\det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + [\beta_1 - \mu]) \left( \alpha\gamma\sigma + (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma\mu + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) \right. \\ \left. + \left[ \mu + \alpha + \gamma + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} + (\mu - \beta_2) \right] \lambda + \lambda^2 \right) = 0$$

Nilai eigen yang didapatkan yaitu

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = \mu - \beta_1$$

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_0\lambda = 0 \quad (3.15)$$

dengan,

$$b_1 = \mu + \alpha + \gamma + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} + (\mu - \beta_2)$$

$$b_0 = \alpha\gamma\sigma + (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma\mu + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha)$$

Syarat agar titik kesetimbangan terbatas stabil asimtotik lokal adalah semua nilai eigennya bernilai negatif. Untuk  $\lambda_1$ , jelas bahwa nilai eigen tersebut bernilai negatif, karena nilai parameternya adalah positif. Sedangkan, agar nilai eigen  $\lambda_2 < 0$  maka

$$\lambda_2 = \mu - \beta_1 < 0$$

$$\mu < \beta_1$$

$$1 < \frac{\beta_1}{\mu}$$

$$\frac{\beta_1}{\mu} > 1$$

Nilai  $\frac{\beta_1}{\mu}$  merupakan bilangan reproduksi atau dinotasikan dengan  $R_0$ , sehingga dapat ditulis  $R_0 = \frac{\beta_1}{\mu}$ . Jika  $R_0 > 1$  maka diperoleh nilai eigen yaitu  $\lambda_2 < 0$  atau bernilai negatif. Selanjutnya, untuk nilai eigen  $\lambda_3$  dan  $\lambda_4$  pada persamaan karakteristik (3.18) berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, syarat agar titik kesetimbangan bebas merokok stabil asimtotik, adalah

$$b_1, b_0 > 0 \text{ dan } b_1 b_0 > 0$$

Pertama, akan ditunjukkan bahwa  $b_1 > 0$ . Semua nilai parameter pada model dinamika merokok ini mempunyai nilai yang positif maka jelas akan menunjukkan bahwa nilai  $b_1 > 0$ . Namun, pada  $b_1$  terdapat bagian yang belum tentu positif yaitu  $\mu - \beta_2$ , sehingga akan dicari syarat agar  $\mu - \beta_2 > 0$ , maka

$$\mu - \beta_2 > 0$$

$$\mu > \beta_2$$

Berdasarkan perhitungan tersebut maka nilai  $\mu - \beta_2 > 0$  akan positif jika  $\mu > \beta_2$ . Hal ini mengakibatkan  $b_1 > 0$ . Kemudian, untuk  $b_0$  akan ditunjukkan juga bahwa  $b_0 > 0$ . Berdasarkan sebab yang sama yaitu setiap parameter pada model dinamika merokok mempunyai nilai positif dan terdapat syarat  $\mu > \beta_2$  yang memenuhi, sehingga dapat dinyatakan bahwa  $b_0 > 0$  dengan  $\mu > \beta_2$ . Selanjutnya, pembuktian nilai  $b_1 b_0 > 0$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
b_1 b_0 &= \left[ \mu + \alpha + \gamma + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} + (\mu - \beta_2) \right] \left[ \alpha \gamma \sigma + (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma \mu \right. \\
&\quad \left. + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) \right] \\
&= \mu \alpha \gamma \sigma + \mu (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma \mu^2 + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) + \alpha^2 \gamma \sigma \\
&\quad + \alpha (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \alpha \gamma \mu + \alpha \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) + \alpha \gamma^2 \sigma \\
&\quad + \gamma (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma^2 \mu + \gamma \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) + \mu \alpha \gamma \sigma \frac{\beta_2}{\beta_1} \\
&\quad + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma \mu^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} + \left( \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^2 (\mu + \alpha) \\
&\quad + (\mu - \beta_2) \alpha \gamma \sigma + (\mu - \beta_2)^2 (\mu + \alpha) + \gamma \mu (\mu - \beta_2) + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu \\
&\quad - \beta_2)(\mu + \alpha)
\end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz maka nilai eigen  $\lambda_3, \lambda_4$  mempunyai bagian real negatif. Hal ini dikarenakan nilai parameternya adalah positif dan syarat  $\mu > \beta_2$  sehingga hasil pengurangan  $\mu$  dengan  $\beta_2$  tetap positif. Jadi, berdasarkan uraian tersebut diperoleh teorema yaitu sebagai berikut:

**Teorema 3.3 (Kestabilan Lokal  $E_1$ )** Titik kesetimbangan terbatas  $E_1$  stabil asimtotik lokal jika  $\mu > \beta_2$ .

### 3.2.4.3 Kestabilan Lokal di Titik kesetimbangan Endemik

Pada titik kesetimbangan bebas merokok  $E^*(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$ . Substitusi ke dalam matriks (3.14), diperoleh:

$$J^* = \begin{bmatrix} -\mu - \beta_1 L^* & -\beta_1 P^* & 0 & 0 \\ \beta_1 L^* & 0 & -\beta_2 L^* & 0 \\ 0 & \beta_2 S^* & -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*} & \alpha \\ 0 & 0 & \frac{(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

dari matriks Jacobian tersebut maka dapat dicari nilai eigen:

$$\det(J^* - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\mu - \beta_1 L^* & -\beta_1 P^* & 0 & 0 \\ \beta_1 L^* & 0 & -\beta_2 L^* & 0 \\ 0 & \beta_2 S^* & -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*} & \alpha \\ 0 & 0 & \frac{(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} & -(\mu + \alpha) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} (-\mu - \beta_1 L^*) - \lambda & -\beta_1 P^* & 0 & 0 \\ \beta_1 L^* & -\lambda & -\beta_2 L^* & 0 \\ 0 & \beta_2 S^* & -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*} - \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \frac{(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} & -(\mu + \alpha) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Misalkan terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan yaitu sebagai berikut:

$$c_{11} = (-\mu - \beta_1 L^*) - \lambda \quad c_{23} = -\beta_2 L^* \quad c_{43} = \frac{(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*}$$

$$c_{12} = -\beta_1 P^* \quad c_{32} = \beta_2 S^* \quad c_{44} = [-(\mu + \alpha)] - \lambda$$

$$c_{21} = \beta_1 L^* \quad c_{33} = \left( -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*} \right) - \lambda$$

$$c_{22} = -\lambda \quad c_{34} = \alpha$$

Bentuk kembali menjadi suatu matriks dan selesaikan dengan metode kofaktor dan sarrus. Perhitungan determinan ini dapat dilihat pada Lampiran 5.

$$\det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} - c_{11}c_{22}c_{34}c_{43} - c_{11}c_{23}c_{32}c_{44} - c_{21}c_{12}c_{33}c_{44} + c_{21}c_{12}c_{34}c_{43} = 0$$

dengan,

$$\begin{aligned} c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} &= \lambda^4 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) + \mu + \beta_1 L^* \right) \lambda^3 \\ &+ \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} (\mu + \alpha) + \mu \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \beta_1 L^* \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \mu (\mu + \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 L^* (\mu + \alpha) \right) \lambda^2 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} (\mu + \alpha) (\mu + \beta_1 L^*) \right) \lambda \\ -(c_{11}c_{22}c_{34}c_{43}) &= -(\mu + \beta_1 L^*) \left[ \frac{\alpha (\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} \lambda \right] + \frac{\alpha (\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} \lambda^2 \\ -c_{11}c_{23}c_{32}c_{44} &= \beta_2^2 L^* S^* \lambda^2 + (2\mu \beta_2^2 L^* S^* + \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha \beta_2^2 L^* S^*) \lambda \\ &+ \alpha \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \mu \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \mu^2 \beta_2^2 L^* S^* + \alpha \mu \beta_2^2 L^* S^* \\ -c_{21}c_{12}c_{33}c_{44} &= \frac{\alpha \mu Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* + \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* + \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* \lambda + \mu \beta_1^2 P^* L^* \lambda \\ &+ \alpha \beta_1^2 P^* L^* \lambda + \beta_1^2 P^* L^* \lambda^2 \\ c_{21}c_{12}c_{34}c_{43} &= -\beta_1^2 P^* L^* \frac{\alpha \mu Q_t^*}{S^*} - \beta_1^2 P^* L^* \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*} \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan pada,

$$\det(J^* - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} - c_{11}c_{22}c_{34}c_{43} - c_{11}c_{23}c_{32}c_{44} - c_{21}c_{12}c_{33}c_{44} + c_{21}c_{12}c_{34}c_{43}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lambda^4 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) + \mu + \beta_1 L^* \right) \lambda^3 \\
&\quad + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} (\mu + \alpha) + \mu \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \beta_1 L^* \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \mu(\mu + \alpha) + \beta_1 L^* (\mu + \alpha) \right) \lambda^2 \\
&\quad + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} (\mu + \alpha) (\mu + \beta_1 L^*) \right) \lambda - (\mu + \beta_1 L^*) \left[ \frac{\alpha(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} \lambda \right] \\
&\quad + \frac{\alpha(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} \lambda^2 + \beta_2^2 L^* S^* \lambda^2 \\
&\quad + (2\mu\beta_2^2 L^* S^* + \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha\beta_2^2 L^* S^*) \lambda + \alpha\beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* \\
&\quad + \mu\beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \mu^2 \beta_2^2 L^* S^* + \alpha\mu\beta_2^2 L^* S^* + \frac{\alpha\mu Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* \\
&\quad + \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* + \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* \lambda + \mu\beta_1^2 P^* L^* \lambda + \alpha\beta_1^2 P^* L^* \lambda + \beta_1^2 P^* L^* \lambda^2 \\
&\quad - \beta_1^2 P^* L^* \frac{\alpha\mu Q_t^*}{S^*} - \beta_1^2 P^* L^* \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*} \\
&\Leftrightarrow \lambda^4 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) + \mu + \beta_1 L^* \right) \lambda^3 \\
&\quad + \left( \frac{\alpha(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} - \frac{\alpha(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} + \mu \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \beta_1 L^* \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \mu(\mu + \alpha) \right. \\
&\quad \left. + (\mu + \alpha) \beta_1 L^* + \beta_2^2 L^* S^* + \beta_1^2 P^* L^* \right) \lambda^2 \\
&\quad + \left( \left( (\mu + \beta_1 L^*) \frac{\alpha(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} \right) - \left( (\mu + \beta_1 L^*) \frac{\alpha(\mu + \alpha) Q_t^*}{S^*} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* + \mu\beta_1^2 P^* L^* + \alpha\beta_1^2 P^* L^* + 2\mu\beta_2^2 L^* S^* + \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* \right. \\
&\quad \left. + \alpha\beta_2^2 L^* S^* \right) \lambda \\
&\quad + \left( \mu\beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \mu^2 \beta_2^2 L^* S^* + \alpha\mu\beta_2^2 L^* S^* + \alpha\beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha\mu Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* - \frac{\alpha\mu Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* + \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* - \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*} \beta_1^2 P^* L^* \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \lambda^4 + \left(2\mu + \beta_1 L^* + \alpha + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*}\right) \lambda^3 \\
&\quad + \left(\mu^2 + \mu\beta_1 L^* + \alpha\mu + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*} \mu + P^* \beta_1^2 L^* + \alpha\beta_1 L^* + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*} \beta_1 L^* \right. \\
&\quad \left. + \beta_2^2 L^* S^*\right) \lambda^2 \\
&\quad + \left(P^* \mu \beta_1^2 L^* + 2\mu \beta_2^2 L^* S^* + \alpha P^* \beta_1^2 L^* + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*} P^* \beta_1^2 L^* \right. \\
&\quad \left. + \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha \beta_2^2 P^* S^*\right) \lambda + \mu^2 \beta_2^2 L^* S^* + \mu \alpha \beta_2^2 L^* S^* \\
&\quad + \mu \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^*
\end{aligned}$$

Kemudian disederhanakan menjadi

$$\lambda^4 + c_3 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0 \quad (3.16)$$

dengan,

$$c_4 = 1$$

$$c_3 = 2\mu + \beta_1 L^* + \alpha + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*}$$

$$c_2 = \mu^2 + \mu\beta_1 L^* + \alpha\mu + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*} \mu + P^* \beta_1^2 L^* + \alpha\beta_1 L^* + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*} \beta_1 L^* + \beta_2^2 L^* S^*$$

$$\begin{aligned}
c_1 = &P^* \mu \beta_1^2 L^* + 2\mu \beta_2^2 L^* S^* + \alpha P^* \beta_1^2 L^* + \alpha \frac{Q_t^*}{S^*} P^* \beta_1^2 L^* + \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* \\
&+ \alpha \beta_2^2 P^* S^*
\end{aligned}$$

$$c_0 = \mu^2 \beta_2^2 L^* S^* + \mu \alpha \beta_2^2 L^* S^* + \mu \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha \beta_1 \beta_2^2 (L^*)^2 S^*$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik (3.16) akan mempunyai bagian real negatif jika,

$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_4 > 0$$

$$c_3 c_2 c_1 - c_4 c_1^2 - c_0 c_3^2 > 0$$

Semua nilai parameter bernilai positif sehingga dapat dinyatakan bahwa  $c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$ . Sedangkan, untuk membuktikan  $c_3c_2c_1 - c_4c_1^2 - c_0c_3^2 > 0$  akan digunakan *software* Maple 18 dengan menggunakan nilai parameter. Perhitungan secara analitik dengan *software* Maple 18 tidak dapat diperoleh dikarenakan hasil yang terlalu kompleks dan tidak menunjukkan nilai positif atau negatif. Oleh karena itu, perhitungan dilakukan dengan memasukkan parameter-parameter, sehingga hasilnya berupa numerik. Berikut ini nilai parameter yang digunakan merujuk pada (Alkhudari dkk, 2014b, p. 1216) yaitu sebagai berikut:

**Tabel 3.1** Nilai Parameter Perhitungan Routh-Hurwitz

Parameter	Nilai
$\beta_2$	0.3
$\gamma$	0.2
$\alpha$	0.25
$\sigma$	0.4
$\beta_1$	0.23
$u$	0.04

Pada perhitungan ini digunakan *software* Maple 18 dapat dilihat pada Lampiran 5, berikut ini hasil perhitungannya yaitu:

$$c_3c_2c_1 - c_4c_1^2 - c_0c_3^2 = 0.0001411681869$$

Hasil ini menunjukkan nilainya positif, sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan karakteristik (3.19) mempunyai bagian real negatif. Oleh karena itu,  $E^*$  stabil asimtotik lokal dengan syarat bahwa  $P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t) > 0$ . Berdasarkan **Teorema 3.1** dapat diketahui bahwa jika  $R_1 > 1$  maka sistem

mempunyai titik kesetimbangan endemik yang positif. Jadi, berdasarkan uraian dan **Teorema 3.1** diperoleh teorema berikut ini:

**Teorema 3.4 (Kestabilan Lokal  $E^*$ )** Titik kesetimbangan endemik  $E^*$  stabil asimtotik lokal jika  $R_1 > 1$ .

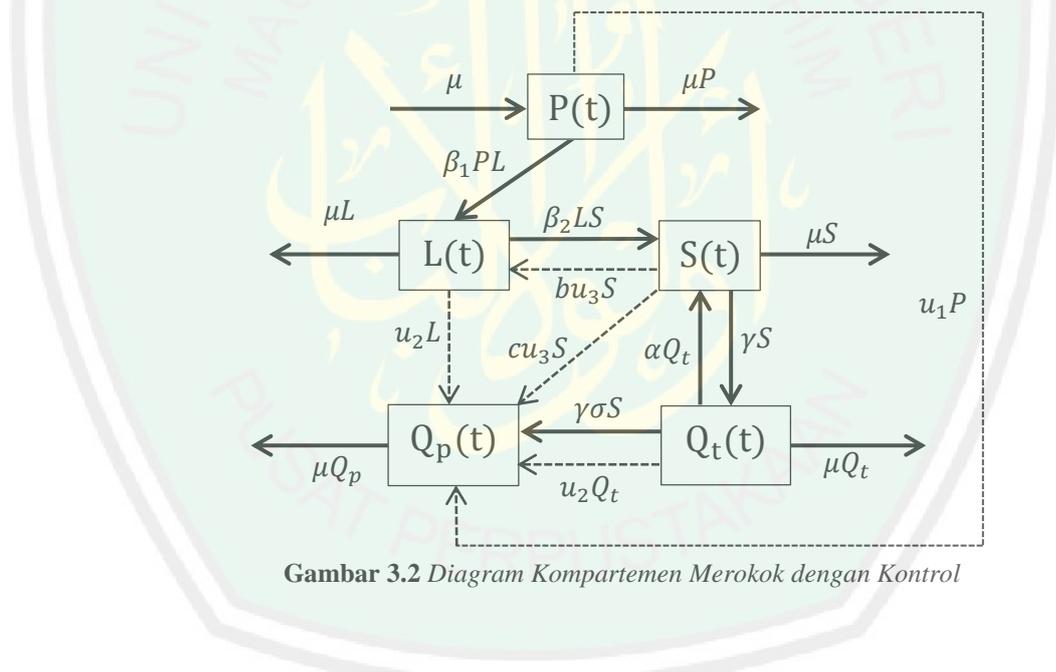
### 3.3 Model Dinamika Merokok dengan Kontrol

Tujuan yang ingin dicapai dalam masalah kontrol optimal ini adalah meminimalkan jumlah populasi perokok ringan, perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara. Pada penelitian ini juga bertujuan untuk memaksimalkan jumlah populasi non perokok permanen. Tujuan lainnya adalah meminimalkan biaya dari ketiga kontrol yang diberikan. Pada tahap ini akan diperoleh bentuk kontrol yang optimal dengan metode prinsip maksimum Pontryagin. Pada model dinamika merokok dengan kontrol akan disubstitusikan variabel kontrol yang dinotasikan dengan  $(u_i(t))$ . Kontrol tersebut berupa kampanye anti rokok  $(u_1(t))$ , permen karet nikotin  $(u_2(t))$ , dan pengobatan  $(u_3(t))$ .

Pertama, variabel kontrol kampanye anti rokok  $(u_1(t))$  akan memberikan pengarahan bagi perokok potensial agar tidak berkeinginan untuk merokok, meskipun memiliki kontak secara langsung dengan seorang perokok. Kedua, permen karet nikotin  $(u_2(t))$  dapat diberikan untuk perokok dengan frekuensi merokok kadang-kadang yaitu perokok ringan. Hal ini dikarenakan permen karet nikotin ini dapat mencegah perokok semakin kecanduan akan merokok dan mengobati kecanduan tersebut secara bertahap. Selanjutnya, permen karet nikotin  $(u_2(t))$  juga diberikan pada non perokok sementara sehingga non perokok

sementara tersebut dapat berhenti secara permanen. Ketiga, pengobatan ( $u_3(t)$ ) dapat digunakan untuk perokok berat karena biasanya perokok berat lebih sulit untuk menyembuhkan kecanduannya sehingga membutuhkan pengobatan yang lebih efektif. Pemberiannya diasumsikan bahwa individu perokok berat tersebut dapat mengurangi frekuensi merokoknya sehingga menjadi perokok ringan dan berhenti secara permanen sehingga menjadi non perokok permanen.

Sehubungan dengan beberapa asumsi yang telah disebutkan. Model kontrol optimal untuk peningkatan jumlah perokok yang memiliki maksud sebagai strategi pencegahan dan pengobatan digambarkan dalam diagram kompartemen model dinamika merokok dengan kontrol berikut ini:



Gambar 3.2 Diagram Kompartemen Merokok dengan Kontrol

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 3.2, maka model dinamika merokok dengan kontrol dapat ditunjukkan dalam suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) - u_1(t)P(t). \quad (3.17)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - (\mu + u_2(t))L(t) + bu_3(t)S(t).$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) - (b + c)u_3(t)S(t).$$

$$\frac{dQ_t(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha + u_2(t))Q_t(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_p(t)}{dt} = & \sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t) + u_1(t)P(t) + u_2(t)L(t) + u_2(t)Q_t(t) \\ & + cu_3(t)S(t) \end{aligned}$$

Notasi dan definisi variabel serta parameter-parameter yang digunakan pada model dinamika merokok dengan kontrol dalam penelitian ini yaitu:

**Tabel 3.2** Deskripsi Variabel

Notasi Variabel	Deskripsi Variabel
$\frac{dP(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi perokok potensial terhadap waktu $t$ .
$\frac{dL(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi perokok ringan terhadap waktu $t$ .
$\frac{dS(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi perokok berat terhadap waktu $t$ .
$\frac{dQ_t(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi non perokok sementara terhadap waktu $t$ .
$\frac{dQ_p(t)}{dt}$	Laju perubahan populasi non perokok permanen terhadap waktu $t$ .
$P(t)$	Populasi perokok potensial terhadap waktu $t$ .

Lanjutan Tabel 3.2 Deskripsi Variabel

$L(t)$	Populasi perokok ringan terhadap waktu $t$ .
$S(t)$	Populasi perokok berat terhadap waktu $t$ .
$Q_t(t)$	Populasi non perokok sementara terhadap waktu $t$ .
$Q_p(t)$	Populasi non perokok permanen terhadap waktu $t$ .
$u_1(t)$	Tingkat efisiensi dari kampanye anti rokok terhadap waktu $t$ .
$u_2(t)$	Tingkat efisiensi dari permen karet nikotin terhadap waktu $t$ .
$u_3(t)$	Tingkat efisiensi dari pengobatan terhadap waktu $t$ .

Tabel 3.3 Nilai Parameter (Alkhudari dkk, 2014b, p. 1216)

Parameter	Deskripsi
$\beta_1$	Laju interaksi perokok potensial dengan perokok ringan.
$\beta_2$	Laju interaksi perokok ringan dengan perokok berat.
$\mu$	Tingkat kematian alami dari populasi manusia.
$\alpha$	Laju interaksi antara perokok berat dengan non perokok sementara yang kembali merokok.
$\gamma$	Laju perokok berat yang telah berhenti merokok.
$\sigma$	Sebagian sisa dari perokok yang berhenti permanen (pada tingkat $\gamma$ ).

Lanjutan Tabel 3.2 Nilai Parameter (Alkhudari dkk, 2014b, p. 1216)

$b$	Suatu peluang atau kemungkinan.
$c$	Suatu peluang atau kemungkinan
$A_1$	Bobot atau penyeimbang dari populasi perokok berat.
$A_2$	Bobot atau penyeimbang dari populasi non perokok permanen.
$A_3$	Bobot atau penyeimbang dari populasi perokok potensial.
$A_4$	Bobot atau penyeimbang dari populasi perokok ringan.
$A_5$	Bobot atau penyeimbang dari populasi non perokok sementara.
$r_1$	Bobot biaya untuk kontrol kampanye pendidikan.
$r_2$	Bobot biaya untuk kontrol <i>nicotine gum</i> .
$r_3$	Bobot biaya untuk kontrol pengobatan.

Kontrol  $u_1(t)$  menunjukkan tingkat efisiensi dari kampanye anti rokok yang diberikan pada perokok potensial sehingga jumlah perokok potensial dapat dikurangi. Kontrol  $u_2(t)$  menunjukkan tingkat efisiensi dari permen karet nikotin yang diberikan pada perokok ringan dan non perokok sementara, dan kontrol  $u_3(t)$  menunjukkan tingkat efisiensi pengobatan yang diberikan pada perokok berat. Jika  $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 1$  maka pemberian ketiga kontrol tersebut sangat efektif (100% efektif). Sebaliknya jika  $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$  maka pemberian kontrol sama sekali tidak efektif dalam mengurangi jumlah populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara.

Jadi, pada penelitian ini akan ditentukan bentuk dari  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , dan  $u_3(t)$  yang optimal yaitu  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$ , dan  $u_3^*(t)$ , sehingga upaya pemberian kontrol yang dilakukan dapat semaksimal mungkin dengan biaya yang minimum.

Berdasarkan tujuan pada masalah kontrol optimal dimodelkan suatu fungsi tujuan yang menyatakan banyaknya perokok potensial ( $P(t)$ ), banyaknya perokok ringan ( $L(t)$ ), banyaknya perokok berat ( $S(t)$ ), banyaknya non perokok sementara ( $Q_t(t)$ ) dan banyaknya non perokok permanen ( $Q_p(t)$ ) serta biaya untuk usaha kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan. Tujuan dari usaha medis maupun non-medis adalah untuk memaksimalkan non perokok permanen dan meminimalkan kendalanya. Tujuan tersebut didapatkan dengan mengontrol banyaknya perokok potensial dengan mengefektifkan kampanye anti rokok, mengontrol banyaknya perokok ringan dengan mengefektifkan permen karet nikotin, mengontrol banyaknya perokok berat dengan mengefektifkan pengobatan, mengontrol banyaknya non perokok sementara dengan mengefektifkan permen karet nikotin. Banyaknya populasi yang dikontrol tersebut akan meningkatkan populasi non perokok permanen.

Hubungan antara biaya yang akan dikeluarkan untuk variabel kontrol ( $u_i(t)$ ) dengan banyaknya perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara dan non perokok permanen memiliki hubungan yang tidak linier sehingga fungsi biaya dibentuk ke dalam model nonlinier dan fungsi kuadrat ( $u(t)$ )<sup>2</sup>.

Berdasarkan uraian sebelumnya dapat diformulasikan fungsi biaya adalah  $r_1u_1^2(t)$ ,  $r_2u_2^2(t)$  dan  $r_3u_3^2(t)$  dengan  $r_1, r_2, r_3$  merupakan bobot biaya untuk variabel-variabel kontrol. Fungsi tujuan yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$J = \int_0^{t_f} [A_1 S(t) - A_2 Q_p(t) + \frac{1}{2} [r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t) + r_3 u_3^2(t)]] dt + A_3 P(t_f) + A_4 L(t_f) + A_5 Q_t(t_f).$$

Fungsi tersebut merupakan fungsi tujuan bentuk Bolza. Fungsi Bolza merupakan kombinasi linier dari bentuk Mayer dan Lagrange. Pertama, fungsi Mayer pada fungsi tujuan tersebut yaitu  $A_3 P(t_f) + A_4 L(t_f) + A_5 Q_t(t_f)$ . Fungsi Mayer ini dapat dipahami sebagai masalah mengoptimalkan waktu akhir, sehingga penurunan dari populasinya hanya dilihat pada waktu akhir. Fungsi yang membentuk lainnya adalah fungsi Lagrange yaitu  $\int_{t_0}^{t_f} [A_1 S(t) - A_2 Q_p(t) + \frac{1}{2} [r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t) + r_3 u_3^2(t)]] dt$ . Fungsi Lagrange ini bertujuan untuk memaksimalkan jumlah non perokok permanen dan meminimalkan jumlah perokok berat dengan biaya kontrol seminimal mungkin pada interval waktu  $[t_0, t_f]$ . Selanjutnya, nilai  $\frac{1}{2}$  pada fungsi Lagrange menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan kepentingan dari biaya-biaya yang bersangkutan adalah sama.

Terdapat koefisien  $A_i$  merupakan koefisien bobot dan penyeimbang dari populasi perokok. Selanjutnya,  $r_1$  adalah bobot yang berkorelasi dengan biaya kampanye anti-rokok yang diberikan pada perokok potensial. Sedangkan,  $r_2$  dan  $r_3$  secara berturut merupakan bobot yang berkorelasi dengan biaya permen karet nikotin yang diberikan pada perokok ringan, dan non perokok sementara serta bobot yang berkorelasi dengan biaya pengobatan yang diberikan pada perokok berat.

Asumsi untuk nilai awal dari keseluruhan populasi bernilai positif  $P(t_0), L(t_0), S(t_0), Q_t(t_0), Q_p(t_0) \geq 0$ . Kondisi batas yang diberikan yakni adalah  $t_0 < t < t_f$ . Berikutnya, kondisi batas untuk variabel kontrol yakni  $u_1(t) \in [0,0.9]$ ,  $u_2(t) \in [0,1]$ , dan  $u_3(t) \in [0,1]$ . Batas-batas ini menandakan waktu awal dari pemberian kontrol ( $t_0$ ) hingga waktu akhir setelah pemberian kontrol ( $t_f$ ). Sedangkan,  $b$  dan  $c$  yang menunjukkan probabilitas dibatasi dengan  $b, c \in [0,1]$  dan  $b + c \leq 1$ . Selanjutnya akan ditentukan kontrol optimal  $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$  sedemikian sehingga berlaku

$$J[u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)] = \min\{J(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) | u_1, u_2, u_3 \in U\},$$

dimana  $U = \{(u_1, u_2) | 0 \leq u_1(t) \leq 0.9, 0 \leq u_2(t) \leq 1, 0 \leq u_3(t) \leq 1\}$ . Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi pada prinsip maksimum Pontryagin.

### 3.4 Penyelesaian Kontrol Optimal Model Dinamika Merokok

Pada subbab sebelumnya diperoleh model dinamika merokok dengan kontrol kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan beserta fungsi tujuannya. Kemudian, model dinamika merokok akan diselesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin yaitu

dibentuk fungsi Hamiltonian dengan variabel *co-state* adalah  $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$  dan

variabel *state* yaitu  $x = \begin{bmatrix} P \\ L \\ S \\ Q_t \\ Q_p \end{bmatrix}$  yang bersesuaian dengan sistem persamaan maka

$$\begin{aligned}
H(x, u, t, \lambda) &= f(x, t, u) + \sum_{m=1}^n \lambda_m(t) g_m(x, t, u) \\
&= f(x, t, u) + \lambda_1(t) g_1(x, t, u) + \lambda_2(t) g_2(x, t, u) + \lambda_3(t) g_3(x, t, u) \\
&\quad + \lambda_4(t) g_4(x, t, u) + \lambda_5(t) g_5(x, t, u)
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
f(x, t, u) &= A_1 S(t) - A Q_p(t) + \frac{1}{2} [r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t) + r_3 u_3^2(t)] + A_3 P(t_f) \\
&\quad + A_4 L(t_f) + A_5 Q_t(t_f).
\end{aligned}$$

$$g_1(x, t, u) = \mu - \beta_1 P(t) L(t) - \mu P(t) - u_1(t) P(t).$$

$$g_2(x, t, u) = \beta_1 P(t) L(t) - \beta_2 L(t) S(t) - (\mu + u_2(t)) L(t) + b u_3(t) S(t)$$

$$g_3(x, t, u) = \beta_2 L(t) S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma) S(t) - (b + c) u_3(t) S(t)$$

$$g_4(x, t, u) = \gamma(1 - \sigma) S(t) - (\mu + \alpha + u_2(t)) Q_t(t)$$

$$\begin{aligned}
g_5(x, t, u) &= \sigma \gamma S(t) - \mu Q_p(t) + u_1(t) P(t) + u_2(t) L(t) + u_2(t) Q_t(t) \\
&\quad + c u_3(t) S(t)
\end{aligned}$$

Fungsi Hamiltonian yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H(x, u, t, \lambda) &= A_1 S(t) - A_2 Q_p(t) + \frac{1}{2} [r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t) + r_3 u_3^2(t)] + A_3 P(t_f) \\
&\quad + A_4 L(t_f) + A_5 Q_t(t_f) \\
&\quad + \lambda_1 (\mu - \beta_1 P(t) L(t) - \mu P(t) - u_1(t) P(t)) \\
&\quad + \lambda_2 (\beta_1 P(t) L(t) - \beta_2 L(t) S(t) - (\mu + u_2(t)) L(t) \\
&\quad + b u_3(t) S(t)) \\
&\quad + \lambda_3 (\beta_2 L(t) S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma) S(t) - (b + c) u_3(t) S(t)) \\
&\quad + \lambda_4 (\gamma(1 - \sigma) S(t) - (\mu + \alpha + u_2(t)) Q_t(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_5(\sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t) + u_1(t)P(t) + u_2(t)L(t) + u_2(t)Q_t(t) \\
& + cu_3(t)S(t))
\end{aligned}$$

Untuk memperoleh kondisi yang optimal tersebut, maka harus memenuhi kondisi stasioner dari fungsi Hamiltonian tersebut atau  $H(x, u, t, \lambda)$  dengan cara menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* dari sistem. Kondisi stasioner adalah kondisi dimana kontrol optimal yaitu  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  dan  $u_3(t)$  harus dapat meminimumkan bentuk Hamiltonian pada setiap waktu  $t$ . Hal ini mengakibatkan bahwa kondisi-kondisi yang harus dipenuhi yaitu turunan pertama bentuk Hamiltonian terhadap  $u_1(t)$ , turunan pertama bentuk Hamiltonian terhadap  $u_2(t)$ , dan turunan pertama bentuk Hamiltonian terhadap  $u_3(t)$  harus sama dengan nol.

Berikut ini kondisi stasioner yang dapat memenuhi kondisi optimal:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$r_1 u_1(t) - \lambda_1 P(t) + \lambda_5 P(t) = 0$$

$$r_1 u_1(t) + (\lambda_5 - \lambda_1) P(t) = 0$$

$$u_1^*(t) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_5) P(t)}{r_1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$r_2 u_2(t) - \lambda_2 L(t) - \lambda_4 Q_t(t) + \lambda_5 L(t) + \lambda_5 Q_t(t) = 0$$

$$r_2 u_2(t) + (\lambda_5 - \lambda_2) L(t) + (\lambda_5 - \lambda_4) Q_t(t) = 0$$

$$u_2^*(t) = \frac{-(\lambda_5 - \lambda_2) L(t) - (\lambda_5 - \lambda_4) Q_t(t)}{r_2}$$

$$u_2^*(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_5) L(t) + (\lambda_4 - \lambda_5) Q_t(t)}{r_2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$$

$$r_3 u_3(t) + \lambda_2(bS(t)) - \lambda_3(b+c)S(t) + \lambda_5 cS(t) = 0$$

$$r_3 u_3(t) + \lambda_2 bS(t) - \lambda_3 bS(t) - \lambda_3 cS(t) + \lambda_5 cS(t) = 0$$

$$r_3 u_3(t) + (\lambda_2 - \lambda_3)bS(t) + (\lambda_5 - \lambda_3)cS(t) = 0$$

$$u_3^*(t) = \frac{[(\lambda_3 - \lambda_2)b + (\lambda_3 - \lambda_5)c]S(t)}{r_3}$$

Batas nilai variabel kontrol ( $u_i(t)$ ) adalah  $u_1(t) \in [0,0.9]$ ,  $u_2(t) \in [0,1]$ , dan  $u_3(t) \in [0,1]$ , sehingga akan didapatkan beberapa kemungkinan hasil adalah sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} v, & \text{Jika } 0 < v < 0.9 \\ 0, & \text{Jika } v \leq 0 \\ 0.9, & \text{Jika } v \geq 0.9 \end{cases}$$

dengan,

$$v = \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)P(t)}{r_1}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} w, & \text{Jika } 0 < w < 1 \\ 0, & \text{Jika } w \leq 0 \\ 1, & \text{Jika } w \geq 1 \end{cases}$$

dengan,

$$w = \frac{(\lambda_2 - \lambda_5)L(t) + (\lambda_4 - \lambda_5)Q_t(t)}{r_2}$$

$$u_3^*(t) = \begin{cases} z, & \text{Jika } 0 < z < 1 \\ 0, & \text{Jika } z \leq 0 \\ 1, & \text{Jika } z \geq 1 \end{cases}$$

dengan,

$$z = \frac{[(\lambda_3 - \lambda_2)b + (\lambda_3 - \lambda_5)c]S(t)}{r_3}$$

Nilai batas atas terkecil (supremum) dari  $u$  sebagai  $u$  optimal dari masing-masing kontrol tersebut dapat ditulis ke dalam bentuk

$$u_1^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)P(t)}{r_1} \right\}, u_{1\text{maks}} \right\}$$

$$u_2^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_5)L(t) + (\lambda_4 - \lambda_5)Q_t(t)}{r_2} \right\}, u_{2\text{maks}} \right\}$$

$$u_3^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{[(\lambda_3 - \lambda_2)b + (\lambda_3 - \lambda_5)c]S(t)}{r_3} \right\}, u_{3\text{maks}} \right\}$$

Selanjutnya dilakukan uji turunan kedua untuk menunjukkan bahwa  $H$  mempunyai nilai minimum di  $u_i(t)$ .

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = r_1 > 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = r_2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_3^2} = r_3 > 0$$

Hasil turunan kedua  $H$  terhadap masing-masing kontrol mempunyai nilai yang positif, sehingga uji turunan kedua terpenuhi. Dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa  $H$  mempunyai nilai minimum di  $u_1, u_2$ , dan  $u_3$ . Proses selanjutnya adalah menentukan bentuk dari fungsi Hamiltonian yang optimal dengan cara mensubstitusikan  $u_i^*$  yang diperoleh pada langkah 2 ke dalam bentuk Hamiltonian.

$$\begin{aligned}
H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) &= A_1 S(t) - A_2 Q_p(t) + \frac{1}{2} r_1 \left( \frac{(\lambda_1^* - \lambda_5^*) P^*(t)}{r_1} \right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} r_2 \left( \frac{(\lambda_2^* - \lambda_5^*) L(t) + (\lambda_4^* - \lambda_5^*) Q_t^*(t)}{r_2} \right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} r_3 \left( \frac{[(\lambda_3^* - \lambda_2^*) b + (\lambda_3^* - \lambda_5^*) c] S^*(t)}{r_3} \right)^2 + A_3 P^*(t_f) \\
&+ A_4 L^*(t_f) + A_5 Q_t^*(t_f) + \lambda_1^* \mu - \lambda_1^* \beta_1 P^*(t) L^*(t) - \lambda_1^* \mu P^*(t) \\
&- \left( \frac{(\lambda_1^* - \lambda_5^*) P^*(t)}{r_1} \right) P^*(t) + \lambda_2^* \beta_1 P^*(t) L^*(t) - \lambda_2^* \beta_2 L^*(t) S^*(t) \\
&- \lambda_2^* (\mu + u_2(t)) L^*(t) \\
&+ \lambda_2^* b \left( \frac{[(\lambda_3^* - \lambda_2^*) b + (\lambda_3^* - \lambda_5^*) c] S^*(t)}{r_3} \right) S^*(t) + \lambda_3^* \beta_2 L^*(t) S^*(t) \\
&+ \lambda_4^* (\gamma(1 - \sigma) S^*(t)) \\
&- \lambda_4^* \left( \mu + \alpha + \frac{(\lambda_2^* - \lambda_5^*) L(t) + (\lambda_4^* - \lambda_5^*) Q_t^*(t)}{r_2} \right) Q_t^*(t) \\
&+ \lambda_5^* \sigma \gamma S(t) - \lambda_5^* \mu Q_p(t) + \lambda_5^* \left( \frac{(\lambda_1^* - \lambda_5^*) P^*(t)}{r_1} \right) P^*(t) \\
&+ \lambda_5^* \left( \frac{(\lambda_2^* - \lambda_5^*) L(t) + (\lambda_4^* - \lambda_5^*) Q_t^*(t)}{r_2} \right) L^*(t) \\
&+ \lambda_5^* \left( \frac{(\lambda_2^* - \lambda_5^*) L(t) + (\lambda_4^* - \lambda_5^*) Q_t^*(t)}{r_2} \right) Q_t^*(t) \\
&+ \lambda_5^* c \left( \frac{[(\lambda_3^* - \lambda_2^*) b + (\lambda_3^* - \lambda_5^*) c] S^*(t)}{r_3} \right) S^*(t)
\end{aligned}$$

Pada masing-masing kontrol optimal  $u^*$  mengandung variabel *state* yaitu  $P(t), L(t), S(t), Q_t(t)$ . Selanjutnya akan diselesaikan persamaan *state* untuk memperoleh variabel-variabel tersebut. Persamaan *state* ini merupakan persamaan yang menjadi kendala dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal.

$$x^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

Berdasarkan sistem persamaan (3.20) maka didapatkan persamaan *state* sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \mu - \beta_1 P(t) L(t) - \mu P(t) - u_1(t) P(t) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}\frac{dL(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - (\mu + u_2(t))L(t) \\ &\quad + bu_3(t)S(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) \\ &\quad - (b + c)u_3(t)S(t)\end{aligned}$$

$$\frac{dQ_t(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha + u_2(t))Q_t(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{dQ_p(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = \sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t) + u_1(t)P(t) + u_2(t)L(t) \\ &\quad + u_2(t)Q_t(t) + cu_3(t)S(t)\end{aligned}$$

dimana kondisi awal  $P(0) = P_0$ ,  $L(0) = L_0$ ,  $S(0) = S_0$ ,  $Q_t(0) = L_0$ , dan terakhir  $Q_p(0) = Q_{p_0}$ .

Untuk variabel *co-state* atau adjoint  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$  pada bentuk kontrol  $u^*$ , maka persamaan *co-state* akan diselesaikan untuk memperoleh variabel tersebut. Persamaan *co-state* merupakan nilai negatif dari fungsi Hamiltonian yang diturunkan terhadap variabel-variabel state atau,

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Persamaan *co-state* yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial P} = -A_3 + \lambda_1(\beta_1 L(t) + \mu + u_1(t)) - \lambda_2 \beta_1 L(t) - \lambda_5 u_1(t) \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L} = -A_4 + \lambda_1(\beta_1 P(t)) \\ &\quad - \lambda_2(\beta_1 P(t) - \beta_2 S(t) - (\mu + u_2)) - \lambda_3 \beta_2 S(t) \\ &\quad - \lambda_5 u_2(t)\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S} = -A_1 + \lambda_2(\beta_2 L(t) - bu_3(t)) \\ &\quad - \lambda_3(\beta_2 L(t) - (\mu + \gamma) - (b + c)u_3(t)) \\ &\quad - \lambda_4(\gamma(1 - \sigma)) - \lambda_5(\sigma\gamma + cu_3(t))\end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_t} = -A_5 - \lambda_3\alpha + \lambda_4((\mu + \alpha + u_2(t)) - \lambda_5 u_2(t))$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_p} = A_2 + \lambda_5\mu$$

dengan kondisi transversalnya adalah  $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0$  dan  $\lambda_5(t_f) = 0$ .

Selanjutnya, setelah diperoleh nilai dari variabel *state* dan *co-state* maka nilai tersebut dapat disubstitusikan pada pengontrol  $u_1^*$ ,  $u_2^*$ , dan  $u_3^*$ . Solusi untuk sistem optimal akan didapatkan dengan mensubstitusikan nilai dari kontrol optimal  $u_i^*$  ke dalam sistem persamaan *state* (3.18) dan sistem persamaan *co-state* (3.19), sehingga bentuk solusi optimal adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1^*} = \frac{dP^*(t)}{dt} = \mu - \beta_1 P^*(t)L^*(t) - \mu P^*(t) - u_1^*(t)P^*(t).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \lambda_2^*} &= \frac{dL^*(t)}{dt} = \beta_1 P^*(t)L^*(t) - \beta_2 L^*(t)S^*(t) - (\mu + u_2^*(t))L^*(t) \\ &\quad + bu_3^*(t)S^*(t).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3^*} = \frac{dS^*(t)}{dt} = \beta_2 L^*(t)S^*(t) + \alpha Q_t^*(t) - (\mu + \gamma)S^*(t) - (b + c)u_3^*(t)S^*(t).$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4^*} = \frac{dQ_t^*(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)S^*(t) - (\mu + \alpha + u_2^*(t))Q_t^*(t).$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_5^*} = \frac{dQ_p^*(t)}{dt} = \sigma\gamma S^*(t) - \mu Q_p^*(t) + u_1^*(t)P^*(t) + u_2^*(t)L^*(t) + u_2^*(t)Q_t^*(t) + cu_3^*(t)S^*(t).$$

$$\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial P^*} = -A_3 + \lambda_1(\beta_1 L^*(t) + \mu + u_1^*(t)) - \lambda_2\beta_1 L^*(t) - \lambda_5 u_1^*(t)$$

$$\frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial L^*} = -A_4 + \lambda_1(\beta_1 P^*(t)) - \lambda_2(\beta_1 P^*(t) - \beta_2 S^*(t) - (\mu + u_2^*)) - \lambda_3\beta_2 S^*(t) - \lambda_5 u_2^*(t)$$

$$\frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S^*} = -A_1 + \lambda_2(\beta_2 L^*(t) - bu_3^*(t)) - \lambda_3(\beta_2 L^*(t) - (\mu + \gamma) - (b + c)u_3^*(t)) - \lambda_4(\gamma(1 - \sigma)) - \lambda_5(\sigma\gamma + cu_3^*(t))$$

$$\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_t^*} = -A_5 - \lambda_3\alpha + \lambda_4((\mu + \alpha + u_2^*(t)) - \lambda_5 u_2^*(t))$$

$$\frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_p^*} = A_2 + \lambda_5\mu$$

dengan kondisi batas yakni  $P(0) = P_0, L(0) = L_0, S(0) = S_0, Q_t(0) = Q_{t_0}$ , dan  $Q_t(t_f) = Q_{t_0}$ . Kemudian,  $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0, \lambda_5(t_f) = 0$ .

Berdasarkan uraian tersebut, untuk memperoleh  $P, L, S, Q_t$  dan  $Q_p$  dari bentuk  $u^*$  yang optimal maka perlu menyelesaikan persamaan *state* dan *co-state* yang memiliki bentuk nonlinier yang berjumlah sebanyak sepuluh persamaan. Sistem persamaan nonlinier tersebut tentu sulit apabila diselesaikan secara analitik, sehingga perlu diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik ini dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang akan dipaparkan pada pembahasan subbab selanjutnya.

**Teorema Kontrol Optimal.** Jika diberikan kontrol optimal yaitu  $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$  dan penyelesaian persamaan *state* yang optimal yaitu  $P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t), Q_p^*(t)$  dan meminimumkan fungsi tujuan  $J[u(t)]$ , serta terdapat variabel-variabel *costate* yakni  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$\frac{d\lambda_1^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial P^*} = -A_3 + \lambda_1(\beta_1 L^*(t) + \mu + u_1^*(t)) - \lambda_2 \beta_1 L^*(t) - \lambda_5 u_1^*(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial L^*} = & -A_4 + \lambda_1(\beta_1 P^*(t)) - \lambda_2(\beta_1 P^*(t) - \beta_2 S^*(t) - (\mu + u_2^*)) \\ & - \lambda_3 \beta_2 S^*(t) - \lambda_5 u_2^*(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_3^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S^*} = & -A_1 + \lambda_2(\beta_2 L^*(t) - bu_3^*(t)) \\ & - \lambda_3(\beta_2 L^*(t) - (\mu + \gamma) - (b + c)u_3^*(t)) - \lambda_4(\gamma(1 - \sigma)) \\ & - \lambda_5(\sigma\gamma + cu_3^*(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_4^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_t^*} = -A_5 - \lambda_3 \alpha + \lambda_4((\mu + \alpha + u_2^*(t)) - \lambda_5 u_2^*(t))$$

$$\frac{d\lambda_5^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_p^*} = A_2 + \lambda_5 \mu$$

dengan kondisi transversal adalah  $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = 0$  dan  $\lambda_5(t_f) = 0$ . Kontrol optimal seperti  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$  dinyatakan sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)P(t)}{r_1} \right\}, u_{1\text{maks}} \right\}$$

$$u_2^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_5)L(t) + (\lambda_4 - \lambda_5)Q_t(t)}{r_2} \right\}, u_{2\text{maks}} \right\}$$

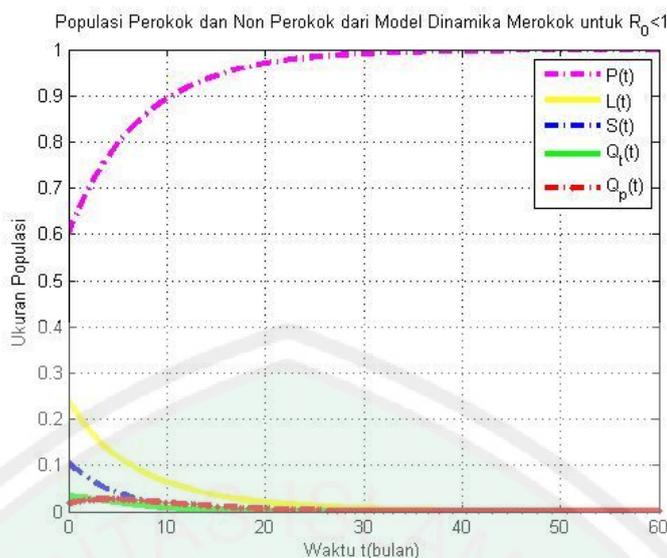
$$u_3^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{[(\lambda_3 - \lambda_2)b + (\lambda_3 - \lambda_5)c]S(t)}{r_3} \right\}, u_{3\text{maks}} \right\}$$

### 3.5 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan pada model dinamika merokok tanpa diberikan kontrol dan setelah diberikan kontrol, dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Berikut ini secara jelas akan dipaparkan hasil simulasi model dinamika merokok,

#### 3.5.1 Hasil Simulasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol

Pada bagian ini diberikan ilustrasi beberapa solusi numerik dari sistem (3.1) untuk nilai parameter yang berbeda-beda, sehingga terdapat gambaran yang jelas mengenai model dinamika merokok tanpa kontrol. Berikut ini beberapa parameter yang digunakan dalam penelitian ini:  $\beta_2 = 0.3$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\alpha = 0.25$ , dan  $\sigma = 0.4$ . Sedangkan, untuk nilai parameter  $\beta_1$  dan  $\mu$  mempunyai nilai berbeda-beda. Untuk  $R_0 < 1$  maka diberikan  $\beta_1 = 0.04$  dan  $\mu = 0.15$ . Untuk  $R_0 > 1$  dengan  $\mu \geq \beta_2$ , maka digunakan nilai  $\beta_1 = 0.23$ ,  $\mu = 0.15$  dan  $\beta_2 = 0.1$ . Untuk  $R_1 > 1$ , digunakan  $\beta_1 = 0.23$ , dan  $\mu = 0.04$ . Kemudian, nilai awal akan dipilih dengan ketentuan  $P + L + S + Q_t + Q_p \leq 1$ . Berikut ini nilai awal yang digunakan untuk simulasi model dinamika tanpa kontrol yakni  $P(0) = 0.60301$ ,  $L(0) = 0.24000$ ,  $S(0) = 0.10628$ ,  $Q_t(0) = 0.03260$  dan  $Q_p(0) = 0.01811$ . Grafik dari hasil simulasi dengan menggunakan aplikasi Matlab metode ODE45 adalah sebagai berikut:



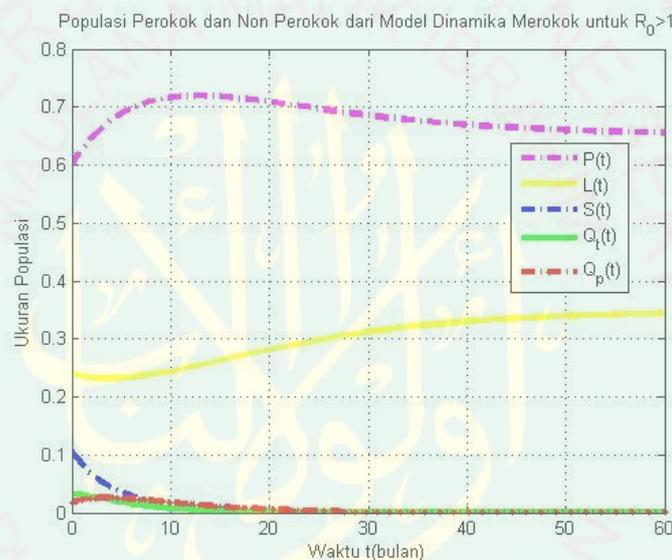
**Gambar 3.3** Grafik Model Tanpa Kontrol dengan  $R_0 < 1$

Gambar 3.3 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika merokok tanpa kontrol dengan nilai  $R_0 < 1$  untuk lima populasi perokok yang. Bilangan reproduksi atau  $R_0$  yang diperoleh dari substitusi nilai parameter yaitu  $\beta_1 = 0.04$  dan  $\mu = 0.15$  adalah sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta_1}{\mu} = \frac{0.04}{0.15} = 0.26667 < 1.$$

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa populasi perokok potensial akan meningkat dan mendekati total populasi. Grafik ini menggambarkan adanya perbedaan yang cukup signifikan pada banyaknya populasi perokok potensial dengan populasi yang lainnya. Peningkatan populasi tersebut dikarenakan adanya penurunan banyaknya populasi perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara maupun non perokok permanen. Grafik tersebut menunjukkan bahwa jumlah perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara menurun hingga nol. Sedangkan, pada non perokok permanen mengalami peningkatan, meskipun menurun kembali hingga nol.

Berdasarkan Grafik 3.3 dapat disimpulkan bahwa kurva solusi cenderung menuju ke titik kesetimbangan  $E_0$  ketika  $R_0 < 1$ . Karenanya, sistem persamaan (3.1) stabil asimtotik lokal di  $E_0$  untuk parameter yang telah diberikan sebelumnya. Selain itu, kondisi  $R_0 < 1$  ini mengindikasikan bahwa tidak adanya penyebaran perilaku merokok sehingga jumlah dari perokok potensial merupakan jumlah total populasi. Namun, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara dan permanen memiliki nilai nol. Populasinya bernilai seperti titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0$ .



**Gambar 3.4** Grafik Model Tanpa Kontrol dengan  $R_0 > 1$

Gambar 3.4 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika merokok tanpa kontrol untuk nilai  $R_0 > 1$ . Bilangan reproduksi dasar atau  $R_0$  yang diperoleh dari substitusi nilai parameter dengan  $\mu \geq \beta_2$  adalah

$$R_0 = \frac{\beta_1}{\mu} = 1.53333 > 1.$$

Grafik tersebut menunjukkan bahwa populasi perokok potensial pada awalnya mengalami peningkatan ketika populasi perokok ringan menurun. Hal ini juga terjadi pada populasi perokok berat yang mengalami penurunan secara

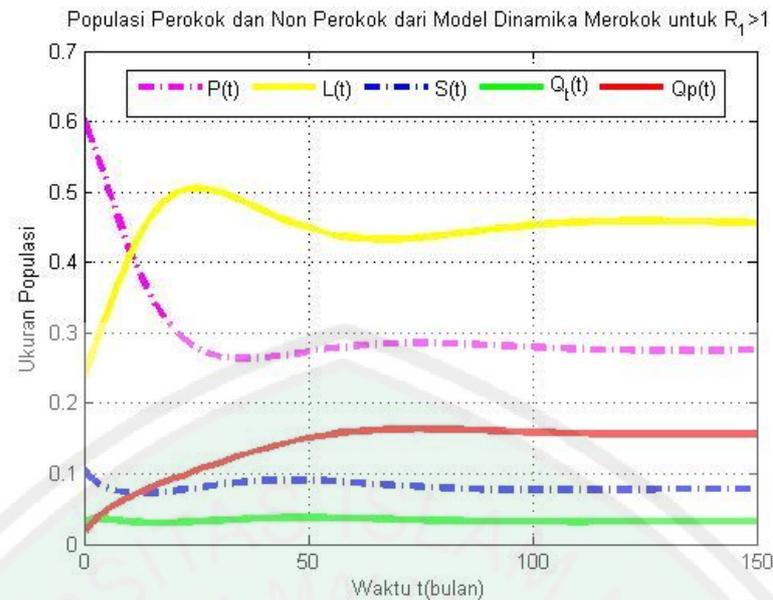
signifikan. Sedangkan, non perokok permanen populasinya meningkat dibandingkan sebelumnya berbeda dengan non perokok sementara yang menurun dari jumlah populasi sebelumnya. Setelah itu terjadi perubahan kembali dimana populasi perokok potensial mengalami penurunan dan mulai meningkatnya populasi perokok ringan. Namun, hal ini tidak memengaruhi populasi perokok berat, non perokok sementara dan non perokok permanen yang nilainya menuju nol. Penurunan populasi perokok potensial mencapai nilai  $P_1$ . Berikut ini perhitungan nilai  $P_1$ :

$$P_1 = \frac{\mu}{\beta_1} = 0.65$$

Kemudian populasi perokok ringan meningkat mencapai nilai  $L_1$ . Berikut ini nilai dari  $L_1$ :

$$L_1 = \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} = 0.348$$

Berdasarkan Grafik 3.4 dapat disimpulkan bahwa kurva solusi cenderung menuju ke titik kesetimbangan  $E_1$  ketika  $R_0 > 1$ . Karenanya, sistem persamaan (3.1) stabil asimtotik lokal di  $E_1$  untuk parameter yang telah diberikan sebelumnya dengan syarat  $\mu \geq \beta_2$ . Kondisi  $R_0 > 1$  ini mengindikasikan adanya penyebaran perilaku merokok yaitu perokok ringan dan adanya populasi perokok potensial. Namun, tidak menunjukkan adanya populasi perokok berat, non perokok sementara dan non perokok permanen.



**Gambar 3.5** Grafik Model Tanpa Kontrol dengan  $R_1 > 1$

Gambar 3.5 merupakan grafik yang menggambarkan model dinamika merokok tanpa kontrol untuk nilai  $R_1 > 1$ . Nilai  $R_1$  diperoleh dari substitusi nilai parameter yaitu sebagai berikut:

$$R_1 = \frac{\beta_1 \beta_2 (\mu + \alpha)}{\mu \beta_2 (\mu + \alpha) + \beta_1 (\alpha \gamma \sigma + \mu (\mu + \alpha) + \gamma \mu)} = 1.7 > 1$$

Gambar 3.5 tersebut menunjukkan bahwa ketika populasi perokok ringan mengalami peningkatan yang signifikan, populasi perokok potensial menurun drastis. Sedangkan, populasi perokok berat mengalami perubahan yang ditandai dengan menurunnya jumlah populasi. Populasi non perokok sementara tidak terlalu mengalami perubahan yang signifikan karena hanya mengalami sedikit penurunan dibandingkan jumlah populasi sebelumnya. Namun, populasi non perokok permanen mengalami peningkatan yang sangat signifikan. Peningkatan non perokok permanen ini juga dipengaruhi oleh penurunan perokok ringan. Kemudian, keseluruhan populasi menuju kesetimbangannya masing-masing, namun tidak ada populasi yang bernilai nol. Dapat disimpulkan bahwa populasi

perokok ringan dan non perokok permanen saja yang mengalami peningkatan dan yang lainnya mengalami penurunan.

Berdasarkan Gambar 3.5 menunjukkan bahwa populasi perokok potensial mencapai nilai  $P^*$ . Berikut ini perhitungan nilai  $P^*$ :

$$P^* = \frac{\mu\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1(\sigma\alpha\gamma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu)} = 0.276.$$

Sedangkan, populasi perokok ringan menurun mencapai nilai  $L^*$ . Berikut ini nilai dari  $L^*$ :

$$L^* = \frac{\alpha\sigma\gamma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu}{\beta_2(\mu + \alpha)} = 0.455.$$

Populasi perokok berat menurun mencapai nilai  $S^*$ . Berikut perhitungan nilai  $S^*$ :

$$S^* = \frac{\mu}{\beta_2} \left[ \frac{\beta_1\beta_2(\mu + \alpha)}{\mu\beta_2(\mu + \alpha) + \beta_1(\alpha\gamma\sigma + \mu(\mu + \alpha) + \gamma\mu)} - 1 \right] = 0.0787$$

Populasi non perokok sementara menurun, kemudian mencapai nilai  $Q_t^*$ . Berikut perhitungan nilainya:

$$Q_t^* = \frac{\gamma(1 - \sigma)S^*}{\mu + \alpha} = 0.0326$$

Terakhir populasi non perokok permanen yang semula meningkat, kemudian menurun hingga nilai  $Q_p^*$ . Berikut ini perhitungan dari nilai  $Q_p^*$ :

$$Q_p^* = \frac{\sigma\gamma S^*}{\mu} = 0.1574$$

Berdasarkan Gambar 3.5 dapat disimpulkan kurva solusi cenderung menuju ke titik kesetimbangan  $E^*$  ketika  $R_1 > 1$ . Karenanya, sistem (3.1) stabil asimtotik lokal di  $E^*$  untuk parameter yang telah diberikan sebelumnya. Kondisi  $R_1 > 1$  ini menandakan terjadinya penyebaran perilaku merokok. Hal ini ditandai dengan tidak adanya jumlah populasi yang bernilai nol.

### 3.5.2 Algoritma *Sweep* Maju Mundur

Simulasi permasalahan kontrol optimal akan diselesaikan dengan menggunakan algoritma *sweep* maju mundur pada MATLAB dengan mendefinisikannya pada M-File menggunakan parameter yang telah diberikan. Pada simulasi ini, model dinamika merokok dengan tiga kontrol memiliki variabel-variabel yaitu  $P, L, S, Q_t, Q_p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, u_1, u_2$ , dan  $u_3$  yang dinyatakan dalam notasi atau simbol berikut ini ,

$$P(i), L(i), S(i), Q_t(i), Q_p(i), \lambda_1(i), \lambda_2(i), \lambda_3(i), \lambda_4(i), \lambda_5(i), u_1(i), u_2(i), u_3(i))$$

dengan  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Langkah - langkah algoritma *sweep* maju mundur adalah sebagai berikut (Zulaikha dkk, 2017, pp. 47-48),

#### Langkah 1

Menentukan nilai awal:  $P(0), L(0), S(0), Q_t(0), Q_p(0), \lambda_1(n) = \lambda_2(n) = 0$  dan  $\lambda_3(n) = \lambda_4(n) = \lambda_5(n) = 0$  serta galat toleransi. Pada langkah pertama ini akan diberikan nilai awal dari parameter model dinamika merokok  $P(0), L(0), S(0), Q_t(0), Q_p(0)$ . Selain itu, pada langkah ini ditentukan juga ukuran langkah yaitu  $h = 0.1$ .

**Tabel 3.4** Nilai Awal Simulasi Numerik

$P(0)$	$L(0)$	$S(0)$	$Q_t(0)$	$Q_p(0)$
0.60301	0.24000	0.10628	0.03260	0.01811

#### Langkah 2

Membuat tebakan awal  $u_1, u_2$  dan  $u_3$ .

#### Langkah 3

Menghitung nilai  $P(i + 1), L(i + 1), S(i + 1), Q_t(i + 1), Q_p(i + 1)$  dengan nilai awal pada Langkah 1, perhitungan ini menggunakan metode *Runge Kutta* orde 4 langkah maju atau *forward sweep* Runge Kutta orde 4. Perhitungan manual untuk persamaan *state* dapat dilihat pada Lampiran 6.

**Langkah 4**

Menghitung nilai  $\lambda_1(p-1), \lambda_2(p-1), \lambda_3(p-1), \lambda_4(p-1), \lambda_5(p-1)$  dengan kondisi transversal, perhitungan ini menggunakan metode *Runge Kutta* orde empat langkah mundur atau *backward sweep* Runge Kutta orde empat. Perhitungan manual untuk persamaan *co-state* dapat dilihat pada Lampiran 7.

**Langkah 5**

Menghitung nilai kontrol

$$u_1(n) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_1(n) - \lambda_5(n))P(n)}{r_1} \right\}, u_{1\text{maks}} \right\}$$

$$u_2(n)$$

$$= \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_2(n) - \lambda_5(n))L(n) + (\lambda_4(n) - \lambda_5(n))Q_t(n)}{r_2} \right\}, u_{2\text{maks}} \right\}$$

dan

$$u_3(n) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{[(\lambda_3(n) - \lambda_2(n))b + (\lambda_3(n) - \lambda_5(n))c]S(n)}{r_3} \right\}, u_{3\text{maks}} \right\}$$

**Langkah 6**

Menghitung nilai galat dari variabel  $P, L, S, Q_t, Q_p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, u_1, u_2$ , dan  $u_3$  berdasarkan nilai iterasi pada saat ini dan sebelumnya. Apabila nilai galat lebih besar dari toleransi maka akan kembali ke Langkah 3.

**Langkah 7**

Print  $P^* = P, L^* = L, S^* = S, Q_t^* = Q_t, Q_p^* = Q_p, u_1^* = u_1, u_2^* = u_2$  dan  $u_3^* = u_3$ .

**3.5.3 Simulasi Numerik Model dengan Kontrol**

Berdasarkan penjelasan subbab sebelumnya penyelesaian kontrol optimal sulit jika diselesaikan secara analitik. Perlu adanya penyelesaian kontrol optimal yang didekati secara numerik. Simulasi numerik ini akan diselesaikan dengan aplikasi Matlab menggunakan metode numerik Runge Kutta orde empat. Nilai awal dan parameter berdasarkan pada simulasi sebelumnya.

Proses simulasi dilakukan untuk melihat jumlah populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, non perokok sementara dan non perokok

permanen, sebelum diberikan kontrol yaitu kampanye anti rokok, permen karet nikotin dan pengobatan serta grafik yang menunjukkan setelah diberikan tiga kontrol tersebut. Pengontrol kampanye anti rokok berfungsi untuk mengontrol jumlah populasi perokok potensial sehingga tidak akan berminat untuk mulai merokok. Pengontrol permen karet nikotin ini akan diberikan pada perokok ringan dan non perokok sementara sehingga dapat mengurangi sedikit demi sedikit konsumsinya dan tidak akan kembali untuk merokok. Akibatnya, jumlah non perokok permanen akan meningkat. Sedangkan, pengontrol pengobatan akan diberikan pada perokok berat untuk mengurangi jumlah populasinya. Hal ini juga berpengaruh pada meningkatnya jumlah non perokok permanen dan perokok berat dapat menjadi perokok ringan sehingga meningkatkan jumlah populasi perokok ringan. Nilai parameter yang digunakan yaitu sebagai berikut:

**Tabel 3.5** *Parameter Model Dinamika Merokok dengan Kontrol*

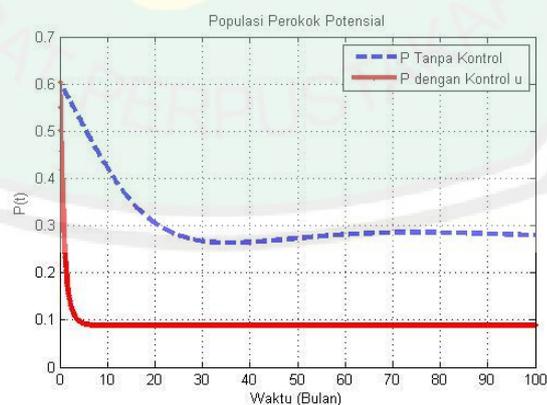
Parameter	Deskripsi	Nilai	Satuan
$\beta_1$	Tingkat interaksi perokok potensial dengan perokok ringan.	0.23	
$\beta_2$	Tingkat interaksi perokok ringan dengan perokok berat.	0.3	
$\mu$	Tingkat kematian alami dari populasi manusia.	0.04	Per bulan
$\sigma$	Sebagian sisa dari perokok yang berhenti permanen (pada tingkat $\gamma$ ).	0.4	Per bulan

Lanjutan Tabel 3.5 Parameter Model Dinamika Merokok dengan Kontrol

$\alpha$	Laju kontak antara individu perokok berat dengan non perokok sementara yang kembali merokok.	0.25	Per Bulan
$\gamma$	Laju perokok berat yang telah berhenti merokok.	0.2	Per Bulan
$b$	Suatu peluang atau kemungkinan.	0.25	
$c$	Suatu peluang atau kemungkinan	0.5	
$A_1$	Bobot atau penyeimbang dari populasi perokok berat.	0.3	
$A_2$	Bobot atau penyeimbang dari populasi non perokok permanen.	0.3	
$A_3$	Bobot atau penyeimbang dari populasi perokok potensial.	0.1	
$A_4$	Bobot atau penyeimbang dari populasi perokok ringan.	0.2	
$A_5$	Bobot atau penyeimbang dari populasi non perokok sementara.	0.1	
$r_1$	Bobot biaya untuk kampanye anti rokok.	0.2	
$r_2$	Bobot biaya untuk kontrol <i>nicotine gum</i> .	0.3	
$r_3$	Bobot biaya untuk kontrol pengobatan.	0.5	

Nilai  $A_1, A_4$  dan  $A_2$  lebih besar dibandingkan dengan nilai  $A_3$  dan  $A_5$  lainnya. Hal ini dikarenakan tujuan yang ingin dicapai adalah meminimumkan jumlah populasi perokok baik perokok ringan maupun perokok berat serta memaksimalkan jumlah populasi non perokok permanen, sehingga lebih dititikberatkan pada pemaksimalan nilai bobotnya. Dengan demikian, populasi perokok berat dapat diminimumkan dengan maksimal. Sedangkan, pada nilai bobot biaya digunakan nilai  $r_1 < r_2 < r_3$ . Nilai  $r_3$  mempunyai nilai paling besar, karena biasanya pengobatan memang membutuhkan biaya yang besar dibandingkan dengan melakukan kampanye anti rokok atau penggunaan permen karet nikotin.

Untuk simulasi dengan kondisi tanpa kontrol ini berarti bahwa tidak ada pemberian tiga kontrol pada masing-masing populasi sehingga ditandai dengan  $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$ . Kondisi dengan variabel kontrol yaitu  $u_1(t) \neq u_2(t) \neq u_3(t) \neq 0$  berarti bahwa ada pemberian tiga kontrol. Berikut ini merupakan simulasi mengenai populasi perokok potensial tanpa kontrol dan dengan kontrol.



**Gambar 3.6** Grafik Dinamika Populasi Perokok Potensial

Gambar 3.6 adalah hasil simulasi numerik yang menunjukkan perokok potensial dengan kontrol dan tanpa kontrol. Berdasarkan hasil simulasi, perokok potensial tanpa kontrol dengan kondisi awal populasi  $P(0) = 0.60301$  menurun pada bulan ke-20 dan penurunan secara signifikan terjadi pada bulan ke-30. Kemudian populasi perokok potensial meningkat kembali pada bulan ke-60, pada akhirnya terus menuju ke titik setimbang endemik pada saat kurang lebih pada bulan ke-100. Keadaan yang berubah-ubah ini disebabkan oleh adanya kontak antara perokok potensial dengan perokok ringan sehingga perokok potensial dapat menjadi perokok ringan. Namun, setelah pemberian tiga kontrol populasi perokok potensial mulai menurun dengan populasi sebesar 0.2523.

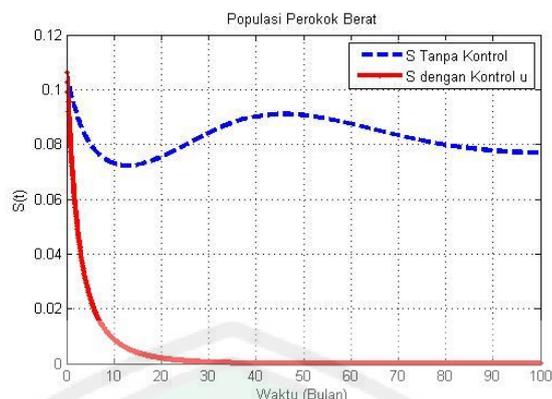
Populasi perokok potensial setelah pemberian kontrol mengalami penurunan drastis pada bulan ke-7 dan kemudian terus mengalami peningkatan dan penurunan yang tidak terlalu signifikan nilainya, hingga bulan ke-100. Hal ini membuktikan bahwa kontrol yang diberikan sangat efektif untuk meminimalkan populasi perokok potensial yang meskipun belum merokok tetapi berpotensi untuk mulai merokok. Simulasi berikutnya merupakan simulasi untuk menunjukkan perbandingan antara populasi perokok ringan tanpa kontrol dan setelah diberikan kontrol.



**Gambar 3.7** Grafik Dinamika Populasi Perokok Ringan

Gambar 3.7 menggambarkan terjadinya peningkatan secara signifikan pada populasi perokok ringan hingga bulan ke-25 kemudian mulai mengalami penurunan hingga di titik terendah pada bulan ke-64. Populasi perokok ringan ini meningkat kembali pada bulan ke-80 meskipun tidak terlalu tinggi dibandingkan peningkatan sebelumnya. Kemudian populasi bergerak konstan menuju titik kesetimbangan dan bergerak seterusnya sehingga perokok ringan akan selalu ada hingga waktu tak terbatas. Oleh karena itu, perokok ringan bersifat endemik dan tidak akan menghilang dari populasi. Peningkatan populasi perokok ringan dipengaruhi akibat adanya penambahan populasi dari perokok potensial yang mulai menjadi perokok ringan. Sedangkan, penurunan terjadi karena adanya kontak antara perokok ringan dan perokok berat, sehingga mengakibatkan perokok ringan dapat menjadi perokok berat.

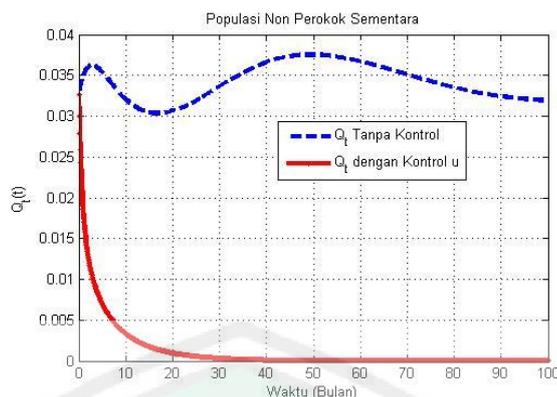
Hal ini berbeda ketika diberikan kontrol yaitu populasi perokok ringan mengalami penurunan secara terus menerus. Jika pada grafik tanpa kontrol bulan ke-25 jumlah populasi sebesar 0.5051 maka setelah diberikan kontrol populasi bulan ke-25 sebesar 0.001414; terjadi selisih yang sangat besar diantara keduanya. Hal ini dikarenakan pemberian kontrol memberikan pengaruh yang signifikan sehingga memengaruhi penurunan populasi perokok ringan. Penambahan populasi perokok berat yang diberikan kontrol pengobatan juga tidak terlalu berpengaruh signifikan, sehingga tidak terjadi penambahan populasi perokok ringan. Selanjutnya, perbandingan dari dinamika populasi perokok berat tanpa kontrol dan dengan kontrol.



**Gambar 3.8** Grafik Dinamika Populasi Perokok Berat

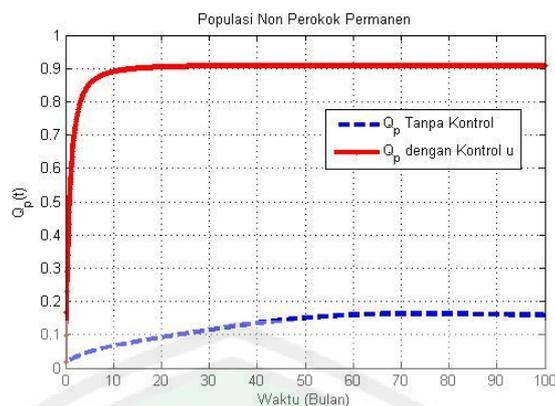
Gambar 3.8 merupakan simulasi numerik yang menunjukkan perubahan populasi perokok berat tanpa kontrol dan dengan kontrol. Populasi perokok berat tanpa kontrol pada awalnya mengalami penurunan secara drastis pada bulan ke-12, kemudian mengalami peningkatan maksimal pada bulan ke-45. Penurunan kembali terjadi pada bulan ke-100. Perubahan yang tidak stabil ini menandakan adanya beberapa sebab yang memengaruhi. Penurunan terjadi karena adanya kontak antara perokok ringan dan perokok berat. Penambahan individu dari yang semula non perokok sementara, kemudian kembali menjadi perokok berat.

Garis yang berwarna merah menunjukkan penurunan signifikan dari populasi perokok berat, penurunan ini pada bulan ke-1 hingga bulan ke-48 lebih 27 hari. Populasi terus berkurang hingga menunjukkan bahwa nilai populasi perokok berat hampir mencapai nol. Penurunan ini terjadi akibat pemberian kontrol dan perokok berat yang memang berhenti merokok meskipun tanpa diberikan kontrol. Kontrol ini dapat dikatakan efektif untuk menekan populasi perokok berat. Hal ini dikarenakan banyaknya populasi perokok berat pada grafik dengan kontrol lebih rendah dibandingkan dengan banyaknya perokok berat pada grafik tanpa kontrol.



**Gambar 3.9** *Dinamika Populasi Non Perokok Sementara*

Gambar 3.9 menunjukkan simulasi dari populasi non perokok sementara tanpa kontrol dan dengan kontrol. Populasi non perokok sementara meningkat pada bulan ke-3 kemudian menurun di bulan ke-16. Setelah itu, penurunan terjadi hingga bulan ke-16 dan meningkat secara signifikan hingga bulan ke-48. Penurunan kembali terjadi hingga bulan ke-100. Peningkatan populasi ini terjadi diakibatkan adanya populasi perokok berat yang berhenti merokok sementara waktu sehingga menjadi non perokok sementara. Sedangkan, penurunan diakibatkan karena non perokok sementara yang kembali menjadi perokok berat. Pemberian kontrol berpengaruh sangat penting karena populasi non perokok sementara mengalami penurunan drastis hingga bulan ke-42 lebih 3 hari mencapai nilai 0.0001001 atau banyaknya populasi sangat sedikit. Sedangkan, grafik tanpa kontrol pada bulan ke-42 lebih 24 hari menunjukkan populasi sebesar 0.03698. Populasi ini mengalami penurunan karena individu non perokok sementara tersebut telah menjadi non perokok permanen.



**Gambar 3.10** *Dinamika Populasi Non Perokok Permanen*

Gambar 3.10 merupakan hasil simulasi untuk perbandingan populasi non perokok permanen tanpa kontrol dan dengan kontrol. Pada grafik tanpa kontrol menunjukkan bahwa non perokok permanen mengalami peningkatan hingga bulan ke-66 dan seterusnya mencapai bulan ke-100. Hal ini dikarenakan adanya perokok berat yang berhenti merokok. Sedangkan setelah pemberian tiga kontrol, laju peningkatan populasi non perokok permanen menjadi sangat cepat. Bahkan, nilai populasinya hampir mencapai 1 yaitu pada bulan ke-50 memiliki nilai sebesar 0.9096 yang kemudian berubah-ubah dan mengalami peningkatan sebesar 0.00001. Sedangkan pada grafik tanpa kontrol menunjukkan pada bulan ke-50 populasi non perokok permanen sebesar 0.1504. Perbandingan ini menunjukkan bahwa pemberian tiga kontrol memengaruhi banyaknya populasi non perokok permanen. Populasi non perokok permanen ini merupakan hasil dari penambahan populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara.

Berdasarkan uraian hasil yang telah diperoleh sebelumnya, secara garis besar dapat dinyatakan bahwa bentuk pengontrol kampanye anti rokok, pengontrol permen karet nikotin, dan pengontrol pengobatan mampu mengurangi

populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat dan non perokok sementara dalam kurun waktu kurang lebih 100 bulan atau kurang lebih sekitar 8 tahun serta meningkatkan populasi non perokok permanen dalam waktu tersebut. Keefektifan tiga pengontrol ini selain dapat meminimumkan jumlah populasi perokok potensial, perokok ringan, perokok berat, dan non perokok sementara dan dapat memaksimumkan jumlah populasi non perokok permanen, serta meminimumkan biaya dalam pemberian kontrol tersebut pada waktu kurang lebih 0 hingga 100 bulan.

### 3.6 Upaya Preventif dan Kuratif dalam Prespektif Islam

Pada perkembangan dunia medis sekarang ini, terdapat dua langkah yang dapat dilakukan untuk menjaga kesehatan diri maupun kesehatan masyarakat, yaitu sebagai berikut: Langkah pertama adalah langkah preventif (pencegahan). Langkah ini merupakan sebuah usaha dalam membentengi diri dari terserang penyakit. Langkah pencegahan tersebut meliputi beberapa aspek yaitu kesehatan umum, kesehatan lingkungan, pencegahan penyakit menular, penyuluhan kesehatan, menumbuhkan kebiasaan hidup sehat (Thawil, 2007, p. 13). Allah SWT telah memberikan wawasan mengenai tindakan preventif secara jelas dalam Al-Qur'an Surah Al-Baqarah ayat 195.

*“Dan belanjakanlah (harta bendamu) di jalan Allah, dan janganlah kamu menjatuhkan dirimu sendiri ke dalam kebinasaan, dan berbuat baiklah, karena Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berbuat baik” (QS. Al-Baqarah/2: 195).*

Hikmah yang terkandung dalam (QS. Al-Baqarah/2: 195) adalah bahwa Allah memerintah umatnya untuk menghindari kebiasaan-kebiasaan yang dapat merusak tubuh dan jiwa. Kebiasaan yang dapat merusak tubuh ini bisa meliputi pola makan tidak sehat, berzina, homoseksual, mengonsumsi makanan yang diharamkan oleh

Allah, kebiasaan buruk yang secara perlahan dapat merusak organ-organ penting dalam tubuh seperti meminum minuman keras, merokok, begadang, dll. Sedangkan, beberapa penyakit hati yang dapat merusak jiwa antara lain berburuk sangka, iri, dengki, tidak bersyukur atas nikmat Allah, takabur, dan hasad. Berikut ini ayat Al-Qur'an yang menerangkan kebiasaan yang dapat merusak tubuh (jasmani):

*“Sesungguhnya Allah hanya mengharamkan bagimu bangkai, darah, daging babi, dan binatang yang (ketika disembelih) disebut (nama) selain Allah<sup>6</sup>, tetapi Barangsiapa dalam keadaan terpaksa (memakannya) sedang Dia tidak menginginkannya dan tidak (pula) melampaui batas, maka tidak ada dosa baginya. Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang” (QS. Al-Baqarah/2: 173).*

Pada ayat tersebut Allah secara jelas mengharamkan makanan kotor yang bisa merusak tubuh dan karena adanya suatu penyakit yang dapat ditimbulkan, seperti bangkai, darah dan daging babi. Bangkai diharamkan sebab jika dikonsumsi oleh manusia akan berdampak buruk bagi kesehatan tubuh manusia. Hal ini dikarenakan darah binatang tersebut telah mengendap satu jam setelah kematiannya, kondisi ini disebut sedimen sumsum. Sedimen sumsum adalah kebiruan pada sumsum yang cenderung berwarna kemerah-merahan atau kecoklatan. Kemudian timbullah rigor sumsum setelah 3-4 jam dan terjadi proses pembusukan yang menyebabkan perkembangbiakan bakteri-bakteri aerob dan anaerob.

Darah juga diharamkan oleh Allah SWT. Darah yang menjadi medium paling efektif berkembangnya segala jenis kuman dan juga perkembangbiakannya. Selain itu, darah juga menjadi tempat penyebaran segala jenis bakteri dan kuman.

---

<sup>6</sup> Harm juga menurut ayat ini daging yang berasal dari sembelihan yang menyebut nama Allah tetapi disebut pula nama selain Allah.

Hal inilah yang mengakibatkan darah diharamkan untuk dikonsumsi. Daging babi juga diharamkan karena adanya penyakit-penyakit mematikan yang dapat menyerang setelah mengonsumsinya seperti penyakit taenomia solium, penyakit trachenea, bakteri-bakteri pembusuk, tifus, balantidium coli (Aminah, 2013, pp. 109-110).

Kebiasaan yang dapat merusak tubuh lainnya yaitu meminum minuman keras (khamer). Khamer merupakan perasan buah anggur yang memabukkan. Istilah khamr digunakan karena sifatnya yang dapat menutupi (*“tukhamiru”*) akal. Namun, dalam terminologi syara' khamer (minuman keras) digunakan untuk menyebut semua jenis benda yang memabukkan dan berasal tidak hanya dari anggur tetapi bisa juga kurma, gandum, jelai, dll. Dalil yang menyatakan haramnya mengonsumsi khamer adalah sabda Nabi Saw (Ahmad, 2008, p. 126), *“Semua yang memabukkan adalah khamer; dan semua khamer itu haram”* (HR. Muslim).

Berikut ini firman Allah SWT mengenai hukum mengonsumsi khamr atau minuman keras dalam Al-Qur'an Surah Al-Maidah ayat 90:

*“Hai orang-orang yang beriman, Sesungguhnya (meminum) khamar, berjudi, (berkorban untuk) berhala, mengundi nasib dengan panah<sup>7</sup>, adalah Termasuk perbuatan syaitan. Maka jauhilah perbuatan-perbuatan itu agar kamu mendapat keberuntungan”* (QS. Al-Maidah/5: 90).

Allah telah berfirman dalam (QS. Al-Ma'idah/5: 90) mengenai perintah menjauhi meminum khamer (Ahmad, 2008, p. 126). Hal ini dikarenakan khamer dapat

---

<sup>7</sup> Al Azlaam artinya: anak panah yang belum pakai bulu. orang Arab Jahiliyah menggunakan anak panah yang belum pakai bulu untuk menentukan Apakah mereka akan melakukan suatu perbuatan atau tidak. Caranya ialah: mereka ambil tiga buah anak panah yang belum pakai bulu. setelah ditulis masing-masing Yaitu dengan: lakukanlah, jangan lakukan, sedang yang ketiga tidak ditulis apa-apa, diletakkan dalam sebuah tempat dan disimpan dalam Ka'bah. bila mereka hendak melakukan sesuatu Maka mereka meminta supaya juru kunci ka'bah mengambil sebuah anak

menyebabkan seseorang tidak fokus ketika beribadah. Selain itu, timbulnya beberapa penyakit berbahaya seperti kanker mulut, kanker tenggorokan, kanker lambung, sirosis hati (*liver cirrhosis*). Gangguan fungsi jantung yang mematikan misalnya gangguan myocardium alkoholik, hipertensi, gangguan sistem jantung, dan gangguan pembuluh darah koroner. Sedangkan, pada sistem syaraf dapat menyebabkan kematian sejumlah sel. Selanjutnya akan dijelaskan pandangan Islam terhadap rokok.

Pemaparan perspektif Islam mengenai rokok menurut Syaikh Muhammad al-Mukhtar as-Sulami (mufti Republik Tunisia). Berdasarkan literatur-literatur fikih sebelum abad kesepuluh tidak ditemukan pandangan ahli fikih klasik mengenai hukum merokok, sehingga dilakukan pengkajian hukumnya (berijtihad). Pada kasus penetapan hukum rokok ini, kalangan ahli fikih dibagi menjadi 4 yaitu sebagai berikut (Ahmad, 2008, pp. 211-212):

1. Kalangan yang mengharamkan. Jumlah kalangan ini terbanyak dan telah menyusun risalah-risalah mengenai masalah ini.
2. Kalangan yang menghalalkan. Jumlahnya termasuk sedikit atau tergolong minoritas.
3. Kalangan yang memandang merokok sebagai hal yang makruh.
4. Kalangan yang bersikap moderat dengan cara mencari asal-usul benda yang dihasilkan dan perilaku yang dipraktekkan para perokok. Jika rokok diproduksi di negara Islam yang tidak dicampuri oleh bahan haram, tidak dihisap ditempat yang dilarang dan diharamkan, tidak mengakibatkan hilangnya sikap adil, dan tidak mengakibatkan suatu penyakit pada tubuh

penikmatnya maka hukumnya halal. Sedangkan, jika sebaliknya terjadi maka hukumnya haram.

Penilaian halal dan haram memang tidak bisa ditetapkan oleh manusia, akan tetapi merupakan hak prerogatif Allah maka sudah seharusnya jika melihat hukum tersebut berdasarkan pada teks wahyu, analogi (*qiyas*) terhadap nash, atau pada aplikasi kaidah syariat. Berdasarkan prinsip-prinsip dasar tersebut maka akan diuraikan hukum merokok sebagai berikut (Ahmad, 2008, pp. 212-213):

Tanya: *Bagaimana hukum merokok jika dinikmati sendiri atau bersama para perokok?*

Jawab: Menurut pendapat saya, jika rokok tidak berdampak buruk pada penikmatnya seperti perokok yang bukan penderita asma, paru-paru, atau hamil maka hukumnya sangat makruh (makruh stadium dua). Akan tetapi, jika terbukti berdampak buruk pada penikmatnya maka hukumnya adalah haram.

Tanya: *Bagaimana hukum merokok ketika bersama dengan orang yang tidak merokok (perokok pasif)?*

Jawab: Karena asap yang dihasilkan ketika merokok dapat masuk ke dalam pernapasan orang-orang di sekitarnya dan kemungkinan berdampak buruk bagi mereka, maka merokok dalam kondisi ini hukumnya haram.

Tanya: *Bagaimana hukum menanam tembakau, kemudian memproduksinya menjadi rokok, selanjutnya mendistribusikan, menjual dan menjadi biro pengiklannya?*

Jawab: Hukumnya makruh sekali, bahkan ada pendapat yang mengharamkannya,

Tanya: *Bagaimana hukum mengiklankan dan membujuk orang untuk merokok?*

Jawab: Hukumnya haram sebab berisi kebohongan, penipuan, dan menutup-nutupi aspek negatif rokok.

Langkah kedua adalah langkah kuratif (pengobatan). Langkah ini merupakan sebuah usaha melalui suatu pengobatan atau pertolongan medis kepada individu yang terkena penyakit. Langkah pengobatan meliputi aspek yaitu pertolongan pertama saat terjadi kecelakaan, konsumsi obat-obatan, dan langkah penyembuhan lainnya (Thawil, 2007, p. 13). Bahkan, berobat sangat dianjurkan oleh Rasulullah SAW. Beliau SAW. juga memotivasi umat Islam untuk melakukan pengobatan. Beliau SAW. pernah melakukan *kayy* (pengobatan beji-panas) pada Sa'd ibn Mu'adz (Muhammad, 2007, p. 74).

Beliau juga menyarankan Sa'd Ibn Abi Waqqash untuk menemui dokter terkemuka Arab, yaitu al-Harits ibn Kaldah. Seseorang bertanya pada Rasulullah SAW., *"Tidak bolehkah kita berobat?"* Beliau SAW. menjawab, *"Berobatlah kalian, wahai hamba-hamba Allah. Sesungguhnya Allah tidak meletakkan penyakit kecuali meletakkan pula obatnya, kecuali satu penyakit."* Orang itu bertanya, *"Penyakit apakah itu, wahai Rasulullah?"* Beliau saw. menjawab *"Ketuaan"* (Muhammad, 2007, p. 74). Mengobati penyakit juga dianjurkan dalam Al-Qur'an, yakni:

*"Kemudian makanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu). dari perut lebah itu ke luar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, di dalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan"* (QS. An-Nahl/16: 69).

Pada Al-Qur'an, Allah SWT telah memudahkan segala urusan manusia baik dari segi makan, minum, perbuatan baik maupun buruk bahkan juga obat-obatan. Apabila seorang dari umatnya sakit, Allah telah memberikan petunjuk dengan

perintah untuk segera berobat seperti dalam (QS. An-Nahl/16: 69). Tidak hanya itu, Allah juga memberikan keringanan dan kelonggaran pada umatnya yang sakit ketika menjalankan ibadah kepada-Nya. Hal ini dijelaskan dalam (QS. Al-Baqarah/: 185) mengenai pemberian keringanan bagi orang yang sakit dan bepergian.

Menurut Mustamir Peda, Al-Qur'an merupakan sumber konsep kesehatan dan sebagai "dokter" yang memberikan saran-saran berkaitan dengan hidup sehat, bahkan Al-Qur'an juga disebut sebagai obat itu sendiri. Terdapat beberapa ayat yang menegaskan bahwa Al-Qur'an mempunyai fungsi sebagai obat, yaitu (Aminah, 2013, p. 124):

*"Dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan Aku," (QS. Asy-Syu'ara/26: 80).*

Berdasarkan (QS. Asy-Syu'ara/26: 80), sudah jelas bahwa Allah mempunyai kekuasaan dalam memberikan kesembuhan bagi setiap umat-Nya yang sakit. Hikmahnya adalah bahwa sebagai umat Islam yang beriman maka ketika ditimpa suatu penyakit, harus tetap memiliki dorongan dan motivasi untuk mencapai kesembuhan dengan berdoa kepada Allah SWT dan berikhtiar melalui obat yang diresepkan oleh dokter. Tidak boleh berputus asa dan menyerah dalam menghadapi setiap ujian sakit yang diberikan oleh Allah SWT. Begitu juga ketika kondisi tubuh (jasmani) dan rohani dalam keadaan sehat maka sebagai umat harus memanfaatkan nikmat tersebut dengan beribadah dan bersyukur kepada Allah SWT.

Selain sebagai obat secara jasmani, Al-Qur'an juga disebut sebagai obat penyembuh penyakit hati, penyakit hati yang dimaksud adalah perbuatan keji, dengki, hawa nafsu, kebodohan bahkan kesesatan dan penyakit hati lainnya. Al-

Qur'an mempunyai isi dan makna yang dapat menjadi cahaya dan petunjuk bagi orang yang ingin menuju jalan kebahagiaan dan ketenangan. Allah juga memperingatkan bagi manusia yang di dalam hatinya masih tersimpan kesyirikan dan kesesatan bahwa mereka tidak akan bisa melihat dan termasuk ke dalam golongan orang yang sengsara dan merugi (Ash-Shabury, 1406, p. 539). Allah menjelaskan Al-Qur'an Surah Al-Isra,

*“Dan Kami turunkan dari Al Quran suatu yang menjadi penawar dan rahmat bagi orang-orang yang beriman dan Al Quran itu tidaklah menambah kepada orang-orang yang zalim selain kerugian” (QS. Al-Isra/17: 82).*

Allah telah menerangkan bahwa Al-Qur'an dapat menghilangkan keraguan, membuka hati yang tertutup sehingga dapat menjadi obat hati yang mujarab, seperti ramuan obat-obatan bagi kesehatan badan. Makna obat dalam ayat-ayat Al-Qur'an ini tidak hanya mengobati penyakit hati melainkan juga obat untuk penyakit yang sifatnya jasmani. Hal ini disebabkan karena apabila seorang yang sakit membaca atau dibacakan ayat Al-Qur'an maka Allah akan memberikan barakahnya dengan menyembuhkan penyakit yang dideritanya. Terdapat sebagian pendapat dari para salaf yang menyatakan, *“Barangsiapa yang tidak menjadikan Al-Qur'an sebagai obat, maka Allah tidak akan menyembuhkannya”*. Perpaduan antara obat-obatan generik dengan obat-obatan yang diperoleh dari bacaan Al-Qur'an akan memberikan manfaat baik dan penuh kerahmatan Allah (Ash-Shabury, 1406, pp. 539-540).

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Model dinamika merokok dibentuk dengan menambahkan tiga kontrol. Kontrol tersebut terdiri dari kampanye anti rokok ( $u_1$ ), permen karet nikotin ( $u_2$ ), dan pengobatan ( $u_3$ ). Berikut model dinamika merokok dengan kontrol yaitu:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) - u_1(t)P(t).$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - (\mu + u_2(t))L(t) + bu_3(t)S(t).$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) - (b + c)u_3(t)S(t).$$

$$\frac{dQ_t(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha + u_2(t))Q_t(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_p(t)}{dt} = & \sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t) + u_1(t)P(t) + u_2(t)L(t) + u_2(t)Q_t(t) \\ & + cu_3(t)S(t) \end{aligned}$$

2. Penyelesaian kontrol optimal model dinamika merokok diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin sehingga diperoleh bentuk kontrol  $u_1$ ,  $u_2$ , dan  $u_3$  yang optimal yaitu sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left\{ \text{maks} \left\{ 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_5)P(t)}{r_1} \right\}, u_{1\text{maks}} \right\}$$

$$u_2^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_5)L(t) + (\lambda_4 - \lambda_5)Q_t(t)}{r_2} \right\}, u_{2\text{maks}} \right\}$$

$$u_3^*(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{[(\lambda_3 - \lambda_2)b + (\lambda_3 - \lambda_5)c]S(t)}{r_3} \right\}, u_{3\text{maks}} \right\}$$

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik menunjukkan keefektifan pengendalian dengan kontrol yaitu kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan pada kurun waktu kurang lebih 0 sampai dengan 100 bulan. Hal ini dikarenakan kontrol yang diberikan dapat mengurangi jumlah populasi perokok potensial, populasi perokok ringan dan populasi perokok berat serta populasi non perokok sementara sehingga penyebaran kebiasaan merokok dapat ditekan. Selain itu, hasil yang diperoleh juga dapat memaksimalkan populasi non perokok permanen dan meminimumkan biaya dalam pemberian ketiga kontrol yakni kampanye anti rokok, permen karet nikotin, dan pengobatan.

#### 4.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai analisis kestabilan lokal model dinamika merokok, namun tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global dari model dinamika merokok. Kemudian, diasumsi untuk laju kelahiran pada populasi sama dengan laju kematian pada populasi. Oleh karena itu, penulis menyarankan pada pembaca yang ingin meneliti lebih lanjut tentang masalah ini agar pada penelitian selanjutnya menyertakan analisis kestabilan global dari model dinamika merokok dan dapat mengasumsikan laju kelahiran yang tidak sama dengan laju kematian.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, Y. A.-H. (2008). *Al-Qur'an Kitab Kedokteran: Rahasia Kemukjizatan Sains*. Yogyakarta: Sajadah Press.
- Alkhudari, Z., Al-Sheikh, S., & Al-Tuwairqi, S. (2014a). Stability Analysis of a Giving Up Smoking Model. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 3, 168-177.
- Alkhudari, Z., Al-Sheikh, S., & Al-Tuwairqi, S. (2014b). The Effect of Occasional Smokers on the Dynamics of a Smoking Model. *International Mathematical Forum*, 9, 1207-1222.
- Alkhudari, Z., Al-Sheikh, S., & Al-Tuwairqi, S. (2015). The Effect of Heavy Smokers on The Dynamics of a Smoking Model. *International Journal of Differential Equation and Applications*, 14, 343-356.
- Aminah, N. (2013). *Pendidikan Kesehatan dalam Al-Qur'an*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Anderson, B., & Moore, J. (1989). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. USA: Prentice-Hall, Inc.
- Ash-Shabury, M. A. (1406). *Cahaya Al-Qur'an: Tafsir Tematik Surat Huud-Al-Isra' Jilid 3*. (T. Al-Kautsar, Ed., & M. Abidin, Trans.) Beirut: Dar al-Qalam.
- Babb, S., Malarcher, A., Schauer, G., Asman, K., & Jamal, A. (2017). Quitting Smoking Among Adults-United States, 2000-2015. *Centers for Disease Control and Prevention-MMWR (Morbidity and Mortality Weekly Report)*, 65, 1457-1464.
- Barnes, B., & Fulford, G. (2015). *Mathematical Modelling With Case Studies: Using Maple and Matlab* (Third Edition ed.). New York: CRC Press.
- Benowitz, N., & Henningfield, J. (2013). Reducing The Nicotine Content to Make Cigarettes less addictive. *Tobacco Control*, 22, i14-i17.
- Bober, W. (2014). *Introduction to Numerical and Analytical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. Boca Raton: CRC Press.
- Boyce, W. E., & Diprima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (7th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2000). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology: Text in Applied Mathematics*. USA: Springer.
- Chaturvedi, O., & Chaturvedi, P. (2017). Nicotine Gum in Smoking Cessation. *International Journal of Contemporary Medical Research*, 9, 1964-1966.
- Chawapattarasopon, P., Wisutsiri, P., & Naowarat, S. (2015). Stability Analysis on Dynamics of Giving Up Smoking Model With Education Campaign. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 9, 533-540.
- Chen, W.-K. (2004). *The Electrical Engineering Handbook*. USA: Elsevier Academic Press.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J., & Metz, J. (1990). On The Definition and Computation of The Basic Reproduction Ratio  $R_0$  in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations. *J Math*, 28(4), 365-382.
- DiStefano III, J. J., Stubberud, A. R., & Williams, I. J. (2014). *Feedback and Control Systems* (Third ed.). United States: McGraw-Hill Education.
- Dobrushkin, V. (2014). *Applied Differential Equations: The Primary Course*. Boca Raton: CRC Press.
- Driessche, P. v., & Watmough, K. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180, 29-48.
- Fadali, M. S. (2009). *Digital Control Engineering: Analysis and Design*. United States: Academic Press.
- Fant, R., Henningfield, J., Nelson, R., & Pickworth, W. (1999). Pharmacokinetics and Pharmacodynamics of Moist Snuff in Human. *Tobacco Control*, 387-392.
- Fawzani, N., & Triratnawati, A. (2005). Terapi Berhenti Merokok (Studi Kasus 3 Perokok Berat). *Makara, Kesehatan*, 9, 15-22.
- Fuadah, M. (2011). *Gambaran Faktor-faktor yang Mempengaruhi Perilaku Merokok pada Mahasiswa Laki-laki Fakultas Teknik Universitas Negeri Jakarta Angkatan 2009 (Skripsi S1)*. Depok: Universitas Indonesia.
- Geiss, O., & Kotzias, D. (2007). *Tobacco, Cigarettes and Cigarette Smoke: An Overview*. Italy: European Commission Directorate-General Joint Research Centre Institute for Health and Consumer Protection.

- Govan, R., & Puspita, J. (2016). Membangun Model Penyebaran Perilaku Merokok Berdasarkan Faktor Biologis dan Faktor Lingkungan Sosial. *Jurnal Ilmiah Matematika Terapan*, 13, 35-47.
- Hardiningsih, A. Y. (2010). *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik Pada Waktu Diskrit*. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.
- Has, A. (2013). Ijtihad Sebagai Alat Pemecahan Masalah Umat Islam. *Episteme*, 8, 89-112.
- Hsieh, P.-F., & Sibuya, Y. (1999). *Basic Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag: New York.
- Ihsan, M. (2017). Merokok dalam Perspektif Muhammadiyah dan Nahdhatul Ulama. *Jurnal Hukum Islam dan Perundang-undangan*, 4, 1-19.
- Indrawati, I. (2012). *Analisis Dinamik Untuk Kestabilan Dari Model SIR Dengan Perlambatan Waktu*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Matematika. Malang: Etheses.uin-malang.ac.id.
- Kirk, D. (1970). *Optimal Control Theory An Introduction*. New Jersey: Prentice-Hall. Inc.
- Koning, P., Webbink, D., & Martin, N. (2010). *The Effect of Education on Smoking Behavior: New Evidence from Smoking Durations of a Sample of Twins*. Germany: IZA Discussion Paper.
- Lenhart, S., & Workman, J. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Majelis Ulama Indonesia. (2011). *Himpunan Fatwa MUI Sejak 1975*. Jakarta: Erlangga.
- Mathews, J., & Fink, K. (2004). *Numerical Methods Using Matlab* (8th ed.). New Jersey: Prentice-Hall Inc.
- Muhammad, A. B. (2007). *Fikih Kesehatan: Cara Nabi Mencegah Penyakit*. Jakarta: PT Serambi Alam Semesta.
- Munir, R. (2006). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Mustamir. (2007). *Sembuh dan Sehat dengan Mukjizat Al-Qur'an*. Yogyakarta: Penerbit Lingkaran.
- Naidu, D. (2002). *Optimal Control Systems*. New York: CRC Press.

- Perasso, A. (2018). An Introduction To The Basic Reproduction Number In Mathematical Epidemiology. *Esaim: Proceedings and Surveys*, 62, 123-138.
- Pudjaprasetya, R. S. (2009). *Diktat Kuliah: MA2271 Metode Matematika*. Bandung: Prodi Matematika ITB.
- Ross, S. (1984). *Differential Equations Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Scheinerman, E. R. (1996). *Invitation To Dynamical Systems*. Upper Saddle Rive, N.J: Prentice-Hall, Inc.
- Sharomi, O., & Gumel, A. (2008). Curtailing Smoking Dynamics: A Mathematical Modeling Approach. *Applied Mathematics and Computation*, 195, 475-499.
- Silagy, C., Lancaster, T., Stead, L., Mant, D., & G.Fowler. (2007). *Nicotine Replacement Therapy For Smoking Cessation (Review)*. USA: John Wiley & Sons, Ltd.
- Sofia, H., & Rodrigues, F. (2012). *Optimal Control and Numerical Optimization Applied to Epidemiologi Models*. Portuguese: Universidade de Aveiro.
- Suharjana. (2012). Kebiasaan Berperilaku Hidup Sehat Dan Nilai-Nilai Pendidikan Karakter. *Jurnal Pendidikan Karakter*, II(2), 189-201.
- Sukokarlinda, W. (2012). *Analisis Dan Kontrol Optimal Pada Model Penyebaran Virus HIV Dalam Tubuh Manusia*. Surabaya: Departemen Matematika.
- Syahril, E., & Ganardi, A. (2018). *Kuliah Pengantar Kontrol Optimum dan Metode Numeriknya dalam SCILAB*. Bogor: Bogor Agricultural University.
- Thawil, N. (2007). *Rahasia Sehat Ala Rasulullah SAW: Belajar Hidup Sehat dari Hadits-Hadits Nabi*. -: Mirqat.
- World Health Organization. (2003). *Policy Recommendations for Smoking Cessation and Treatment of Tobacco Dependence*. Geneva: WHO.
- World Health Organization. (2008). *WHO Report on The Global Tobacco Epidemic, The Manpower Package*. Geneva: WHO.
- World Health Organization. (2013). *Self Care for Health: A Handbook for Community Health Workers & Volunteers*. India: WHO.

- Yadhav, A., Srivastava, P., & Kumar, A. (2015). Mathematical Model for Smoking: Effect of Determination and Education. *International Journal of Biomathematics*, (1550001-1)-(1550001-14).
- Zaman, G. (2011a). Qualitative Behavior of Giving Up Smoking Models. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 34, 403-415.
- Zaman, G. (2011b). Optimal Campaign in The Smoking Dynamics. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2011, 1-9.
- Zeb, A., Bibi, F., & Zaman, G. (2015). Optimal Control Strategies in Square Root Dynamics of Smoking Model. *International Journal of Scientific World*, 3, 91-97.
- Zeb, A., Zaman, G., & Momani, S. (2013). Square-root dynamics of a Giving Up Smoking Model. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 5326-5334.
- Zill, D., Wright, W., & Cullen, M. (2013). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* (8 ed.). New York: Cengage Learning.
- Zulaikha, Trisilowati, & Fadhillah, I. (2017). Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. *Prosiding SI MaNIs*, I(1), 41-51.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1 Pembuktian Lema 2.1

Pembuktian Lema 1 dan Teorema 1 membutuhkan beberapa konsep berikut. Matriks  $B = [b_{ij}]$  dikatakan mempunyai tanda Z, jika  $b_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$ . Kemudian, apabila  $B = s(I) - P$  dengan  $I$  merupakan matriks identitas, setiap anggota  $P$  tak negatif, dan  $s > \rho(P)$ , maka  $B$  matriks-M tak singular. Definisi lain matriks-M tak singular. Matriks  $B$  dikatakan matriks-M tak singular, jika matriks  $B$  mempunyai tanda Z dan  $s(B) > 0$ . Berikut ini sifat yang mempunyai keterkaitan dengan matriks-M tak singular diberikan pada Berman *et al.* (1970) yang dinyatakan dalam suatu lema.

#### Lema 2

Misalkan  $H$  matriks-M tak singular,  $B$  dan  $BH^{-1}$  mempunyai tanda Z. Matriks  $B$  merupakan matriks-M tak singular jika dan hanya jika  $BH^{-1}$  matriks tak singular.

#### Bukti Lema 2.1

Misalkan  $x_0 \in X_s$  merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Berdasarkan asumsi (A3), yaitu  $\mathcal{F}_i = 0$ , jika  $i > m$  dan asumsi (A4), yaitu  $\mathcal{F}_i(x) = 0$ , untuk  $i = 1, \dots, m$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) = 0, i > m \text{ atau } j > m$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama, berdasarkan asumsi (A2), yaitu  $\mathcal{V}_i^- = 0$ , untuk  $i = 1, \dots, m$  dan juga asumsi (A4), yaitu  $\mathcal{V}_i^+ = 0$ , untuk  $i = 1, \dots, m$ , maka diperoleh

$$\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) = 0, i \leq m \text{ atau } j > m$$

Dengan demikian matriks Jacobian  $D\mathcal{F}(x_0)$  dan  $D\mathcal{V}(x_0)$  dapat dipartisi oleh blok-blok nol. Kemudian, berdasarkan asumsi (A1) dan (A4) diperoleh matriks  $F$  tak negatif.

Akan ditunjukkan bahwa  $V$  matriks tak singular berdasarkan Lema 3. Misalkan  $\{e_j\}$  merupakan basis-basis standar, maka

$$\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathcal{V}_i(x_0 + he_j) - \mathcal{V}_i(x_0)}{h} \right)$$

Untuk setiap  $j = 1, \dots, m$ . Berdasarkan asumsi (A2) dan (A4) diperoleh matriks  $\mathcal{V}_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$ . Karena komponen ke  $i$  dari  $x_0 + he_j = 0, (j \neq i)$  adalah nol dan berdasarkan asumsi (A1) dan (A2),  $\mathcal{V}_i(x_0 + he_j) \leq 0$ , maka diperoleh  $\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \leq 0$  untuk  $i \leq m$  dan  $j \neq i$ , dan  $V$  mempunyai tanda  $Z$ .



## Lampiran 2 Proses Linierisasi

Proses linierisasi dengan deret Taylor dari sistem persamaan (3.7) dengan menghilangkan suku tak linier adalah:

1. Proses linierisasi disekitar  $(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$  untuk titik kesetimbangan bebas merokok  $E_0$ .

$$F(P, L, S, Q_t) \approx 0 + (-\mu - \beta_1 L)(P - P^*) + (-\beta_1 P)(L - L^*) + 0 + 0$$

$$G(P, L, S, Q_t) \approx 0 + (\beta_1 L)(P - P^*) + (\beta_1 P - \beta_2 S - \mu)(L - L^*) \\ + (-\beta_2 L)(S - S^*) + 0$$

$$H(P, L, S, Q_t) \approx 0 + 0 + (\beta_2 S)(L - L^*) + (\beta_2 L - (\mu + \gamma))(S - S^*) \\ + \alpha(Q_t - Q_t^*)$$

$$I(P, L, S, Q_t) \approx 0 + 0 + 0 + \gamma(1 - \sigma)(S - S^*) + (-\mu + \alpha)(Q_t - Q_t^*)$$

Maka substitusi titik kesetimbangan bebas merokok pada sistem persamaan tersebut diperoleh :

$$F(P, L, S, Q_t) = 0 + (-\mu)(P - 1) + (-\beta_1)(L - 0) + 0 + 0 \\ = -\mu P + \mu - \beta_1 L \\ = -\mu P - \beta_1 L + \mu$$

$$G(P, L, S, Q_t) = 0 + 0 + (\beta_1 - \mu)(L - 0) + 0 + 0 \\ = (\beta_1 - \mu)L$$

$$H(P, L, S, Q_t) = 0 + 0 + 0 - (\mu + \gamma)(S - 0) + \alpha(Q_t - 0) \\ = -(\mu + \gamma)S + \alpha Q_t$$

$$I(P, L, S, Q_t) = 0 + 0 + 0 + \gamma(1 - \sigma)(S - 0) - (\mu + \alpha)(Q_t - 0) \\ = \gamma(1 - \sigma)S - (\mu + \alpha)Q_t$$

2. Proses linierisasi disekitar  $(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$  untuk titik kesetimbangan terbatas

$$E_1 = \left( \frac{\mu}{\beta_1}, \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1}, 0, 0 \right).$$

$$F(P, L, S, Q_t) \approx 0 + (-\mu - \beta_1 L)(P - P^*) + (-\beta_1 P)(L - L^*) + 0 + 0$$

$$G(P, L, S, Q_t) \approx 0 + (\beta_1 L)(P - P^*) + (\beta_1 P - \beta_2 S - \mu)(L - L^*) \\ + (-\beta_2 L)(S - S^*) + 0$$

$$H(P, L, S, Q_t) \approx 0 + 0 + (\beta_2 S)(L - L^*) + (\beta_2 L - (\mu + \gamma))(S - S^*) \\ + \alpha(Q_t - Q_t^*)$$

$$I(P, L, S, Q_t) \approx 0 + 0 + 0 + \gamma(1 - \sigma)(S - S^*) + (-\mu + \alpha)(Q_t - Q_t^*)$$

Maka substitusi titik kesetimbangan terbatas pada sistem persamaan tersebut diperoleh:

$$F(P, L, S, Q_t) = 0 + (-\beta_1) \left( P - \frac{\mu}{\beta_1} \right) + (-\mu) \left( L - \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} \right) + 0 + 0 \\ = -\beta_1 P + \mu - \mu L + \frac{(\beta_1 - \mu)\mu}{\beta_1} \\ = -\beta_1 P - \mu L + \frac{\mu\beta_1 + (\beta_1 - \mu)\mu}{\beta_1}$$

$$G(P, L, S, Q_t) = 0 + (\beta_1 - \mu) \left( P - \frac{\mu}{\beta_1} \right) + 0 + (-\beta_2) \frac{\beta_1 - \mu}{\beta_1} (S - 0) + 0 \\ = (\beta_1 - \mu)P - \frac{\beta_2(\beta_1 - \mu)}{\beta_1} S - (\beta_1 - \mu) \frac{\mu}{\beta_1} + 0$$

$$H(P, L, S, Q_t) = 0 + 0 + 0 + \left( \frac{\beta_2(\beta_1 - \mu)}{\beta_1} - (\mu + \gamma) \right) (S - 0) + \alpha(Q_t - 0) \\ = \left( -\frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} - (\mu + \gamma) \right) S + \alpha Q_t$$

$$I(P, L, S, Q_t) = 0 + 0 + 0 + \gamma(1 - \sigma)(S - 0) - (\mu + \alpha)(Q_t - 0) \\ = \gamma(1 - \sigma)S - (\mu + \alpha)Q_t$$

3. Proses linierisasi disekitar  $(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)$  untuk titik kesetimbangan endemik  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$ .

Berdasarkan metode yang sama, maka untuk melakukan linierisasi digunakan deret Taylor terbatas. Didefinisikan

$$\begin{aligned} x(t) &= P - P^* & w(t) &= S - S^* \\ y(t) &= L - L^* & z(t) &= Q_t - Q_t^* \end{aligned}$$

di mana  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $w(t)$ , dan  $z(t)$  merupakan deviasi nilai titik kesetimbangan.

Dengan menggunakan

$$F(P, L, S, Q_t) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d(P - P^*)}{dt}$$

$$G(P, L, S, Q_t) = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{d(L - L^*)}{dt}$$

$$H(P, L, S, Q_t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d(S - S^*)}{dt}$$

$$I(P, L, S, Q_t) = \frac{dQ_t(t)}{dt} = \frac{d(Q_t - Q_t^*)}{dt}$$

Maka sistem persamaan dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \frac{d(P - P^*)}{dt} &\approx F(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) + F_P(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(P - P^*) \\ &\quad + F_L(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(L - L^*) \\ &\quad + F_S(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(S - S^*) \\ &\quad + F_{Q_t}(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(Q_t - Q_t^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(L - L^*)}{dt} &\approx G(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) + G_P(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(P - P^*) \\ &\quad + G_L(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(L - L^*) \\ &\quad + G_S(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(S - S^*) \end{aligned}$$

$$+ G_{Q_t}(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(Q_t - Q_t^*)$$

$$\frac{d(S - S^*)}{dt} \approx H(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) + H_P(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(P - P^*)$$

$$+ H_L(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(L - L^*)$$

$$+ H_S(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(S - S^*)$$

$$+ H_{Q_t}(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(Q_t - Q_t^*)$$

$$\frac{d(Q_t - Q_t^*)}{dt} \approx I(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) + I_P(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(P - P^*)$$

$$+ I_L(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(L - L^*)$$

$$+ I_S(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(S - S^*)$$

$$+ I_{Q_t}(P^*, L^*, S^*, Q_t^*)(Q_t - Q_t^*)$$

Karena  $x(t) = P - P^*$ ,  $y(t) = L - L^*$ ,  $w(t) = S - S^*$  dan juga untuk  $z(t) = Q_t - Q_t^*$  pada keadaan yang setimbang yaitu

$$F(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) = G(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) = H(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) = I(P^*, L^*, S^*, Q_t^*) = 0$$

Maka didapatkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx (-\mu - \beta_1 L)x(t) + (-\beta_1 P)y(t) + 0 + 0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx (\beta_1 L)x(t) + (\beta_1 P - \beta_2 S - \mu)y(t) + (-\beta_2 L)w(t) + 0$$

$$\frac{dw(t)}{dt} \approx 0 + (\beta_2 S)y(t) + (\beta_2 L - (\mu + \gamma))w(t) + \alpha z(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} \approx 0 + 0 + (\gamma(1 - \sigma))w(t) - (\mu + \alpha)z(t)$$

Hasil linierisasi pada sistem persamaan tak linier untuk titik kesetimbangan endemik  $E^* = (P^*(t), L^*(t), S^*(t), Q_t^*(t))$  diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (-\mu - \beta_1 L^*)x(t) - \beta_1 P^* y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta_1 L^* x(t) + (\beta_1 P^* - \beta_2 S^* - \mu)y(t) - \beta_2 L^* w(t)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \beta_2 S^* y(t) + (\beta_2 L^* - (\mu + \gamma))w(t) + \alpha z(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)w(t) - (\mu + \alpha)z(t)$$

Untuk menyederhanakan hasil pada sistem persamaan tersebut sehingga bentuk tak linier menjadi linier maka dapat digunakan

$$\beta_1 P^* L - \beta_2 S^* L^* - \mu L^* = 0$$

$$(\beta_1 P^* - \beta_2 S^* - \mu)L^* = 0$$

Jika  $L^* = 0$  maka  $\beta_1 P^* - \beta_2 S^* - \mu = 0$

dan

$$\beta_2 L^* S^* + \alpha Q_t^* - (\mu + \gamma)S^* = 0$$

$$[\beta_2 L^* - (\mu + \gamma)]S^* = -\alpha Q_t^*$$

$$\beta_2 L^* - (\mu + \gamma) = -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*}$$

Sistem persamaan menjadi,

$$\frac{dx(t)}{dt} = (-\mu - \beta_1 L^*)x(t) - \beta_1 P^* y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta_1 L^* x(t) - \beta_2 L^* w(t)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \beta_2 S^* y(t) - \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} w(t) + \alpha z(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)w(t) - (\mu + \alpha)z(t)$$

**Lampiran 3 Perhitungan Determinan Matriks Jacobian Titik Kesetimbangan Bebas Merokok**

$$\det[J_0 - \lambda I] = |A^*|$$

sehingga,

$$|A^*| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

Misalkan,

$$a_{11} = -\mu - \lambda$$

$$a_{34} = \gamma(1 - \sigma)$$

$$a_{12} = -\beta_1$$

$$a_{43} = \alpha$$

$$a_{22} = -\mu + \beta_1 - \lambda$$

$$a_{44} = -(\mu + \alpha) - \lambda$$

$$a_{33} = -(\mu + \gamma) - \lambda$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$= (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)(-\mu + \gamma) - \lambda)(-\mu + \alpha) - \lambda)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = -(a_{11}a_{22}a_{34}a_{43})$$

$$= (-\mu - \lambda)(-\mu + \beta_1 - \lambda)(\gamma(1 - \sigma))\alpha$$

$$|A_3| = 0$$

**Lampiran 4 Perhitungan Determinan Matriks Jacobian Titik Kesetimbangan Terbatas**

$$\det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - b_{21} \begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$- 0 \begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - b_{21} \begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$b_{11} \left( \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \right) - b_{21} \left( \begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow b_{11}(b_{22}b_{33}b_{44} - b_{22}b_{34}b_{43}) - b_{21}(b_{12}b_{33}b_{44} - b_{12}b_{34}b_{43})$$

$$\Leftrightarrow b_{11}b_{22}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) - b_{12}b_{21}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43})$$

$$\Leftrightarrow (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43})$$

$$\Leftrightarrow ([-\beta_1 - \lambda][-\lambda] - [-\mu][\beta_1 - \mu]) \left( \left[ \left( -(\mu + \gamma) - \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} \right) - \lambda \right] [-(\mu + \alpha) - \lambda] - \alpha[\gamma(1 - \sigma)] \right)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_1\mu - \mu^2) \left( \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1}(\mu + \alpha) + (\mu + \gamma)(\mu + \alpha) + (\mu + \alpha)\lambda + \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1}\lambda + (\mu + \gamma)\lambda + \lambda^2 - \alpha\gamma + \alpha\gamma\sigma \right)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + [\beta_1 - \mu]) \left( \frac{\mu\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} + \frac{\alpha\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} + \mu^2 + \mu\gamma + \mu\alpha + \alpha\gamma \right. \\ \left. - \alpha\gamma + \alpha\gamma\sigma + \left[ (\mu + \alpha) + (\mu + \gamma) + \frac{\beta_2(\mu - \beta_1)}{\beta_1} \right] \lambda + \lambda^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + [\beta_1 - \mu]) \left( \alpha\gamma\sigma + \frac{\mu^2\beta_2}{\beta_1} - \mu\beta_2 + \frac{\alpha\mu\beta_2}{\beta_1} - \alpha\beta_2 + \mu^2 + \mu\gamma \right. \\ \left. + \left[ \mu + \mu + \alpha + \gamma + \frac{\mu\beta_2}{\beta_1} - \beta_2 \right] \lambda + \lambda^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + [\beta_1 - \mu]) \left( \alpha\gamma\sigma + [\mu^2 + \mu\alpha - \mu\beta_2 - \alpha\beta_2] + \mu\gamma + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) \right. \\ \left. + \left[ \mu + \alpha + \gamma + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} + (\mu - \beta_2) \right] \lambda + \lambda^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + [\beta_1 - \mu]) \left( \alpha\gamma\sigma + (\mu - \beta_2)(\mu + \alpha) + \gamma\mu + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} (\mu + \alpha) \right. \\ \left. + \left[ \mu + \alpha + \gamma + \mu \frac{\beta_2}{\beta_1} + (\mu - \beta_2) \right] \lambda + \lambda^2 \right)$$

**Lampiran 5 Perhitungan Determinan Matriks Jacobian Titik Kesetimbangan Endemik**

$$\det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_{11} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} - c_{21} \begin{vmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

$$- 0 \begin{vmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_{11} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} - c_{21} \begin{vmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$c_{11} \left( \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \right) - c_{21} \left( \begin{vmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{12} & 0 & 0 \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow c_{11}(c_{22}c_{33}c_{44} - c_{22}c_{34}c_{43} - c_{23}c_{32}c_{44}) - c_{21}(c_{12}c_{33}c_{44} - c_{12}c_{34}c_{43})$$

$$\Leftrightarrow c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} - c_{11}c_{22}c_{34}c_{43} - c_{11}c_{23}c_{32}c_{44} - c_{21}c_{12}c_{33}c_{44} + c_{21}c_{12}c_{34}c_{43}$$

Karena perhitungan yang cukup kompleks maka akan dibagi ke dalam beberapa perhitungan yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} &= [(-\mu - \beta_1 L^*) - \lambda][-\lambda] \left[ \left( -\frac{\alpha Q_t^*}{S^*} \right) - \lambda \right] [ [-(\mu + \alpha)] - \lambda ] \\
&= [-(\mu + \beta_1 L^*) - \lambda][-\lambda] \left[ \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}(\mu + \alpha) + \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} \lambda + (\mu + \alpha)\lambda + \lambda^2 \right] \\
&= [(\mu + \beta_1 L^*)\lambda + \lambda^2] \left[ \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}(\mu + \alpha) + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) \right) \lambda + \lambda^2 \right] \\
&= \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}(\mu + \alpha)(\mu + \beta_1 L^*)\lambda + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) \right) (\mu + \beta_1 L^*)\lambda^2 \\
&\quad + (\mu + \beta_1 L^*)\lambda^3 + \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}(\mu + \alpha)\lambda^2 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) \right) \lambda^3 + \lambda^4 \\
&= \lambda^4 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + (\mu + \alpha) + \mu + \beta_1 L^* \right) \lambda^3 \\
&\quad + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}(\mu + \alpha) + \mu \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \beta_1 L^* \frac{\alpha Q_t^*}{S^*} + \mu(\mu + \alpha) \right. \\
&\quad \left. + \beta_1 L^*(\mu + \alpha) \right) \lambda^2 + \left( \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}(\mu + \alpha)(\mu + \beta_1 L^*) \right) \lambda \\
-(c_{11}c_{22}c_{34}c_{43}) &= - \left( [(-\mu - \beta_1 L^*) - \lambda][-\lambda][\alpha] \left[ \frac{(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*} \right] \right) \\
&= - \left( [(-\mu - \beta_1 L^*) - \lambda] \left[ -\frac{\alpha(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*} \lambda \right] \right) \\
&= - \left( (-\mu - \beta_1 L^*) \left[ -\frac{\alpha(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*} \lambda \right] + \left[ -\frac{\alpha(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*} \lambda \right] \lambda \right) \\
&= -(\mu + \beta_1 L^*) \left[ \frac{\alpha(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*} \lambda \right] + \frac{\alpha(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*} \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-c_{11}c_{23}c_{32}c_{44} &= -\left(\left[(-\mu - \beta_1 L^*) - \lambda\right]\left[-\beta_2 L^*\right]\left[\beta_2 S^*\right]\left[(-\mu + \alpha) - \lambda\right]\right) \\
&= -\left(\left[-(-\mu - \beta_1 L^*)(\mu + \alpha) + (-\mu - \beta_1 L^*)(-\lambda) + (\mu + \alpha)\lambda\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \lambda^2\right]\left[-\beta_2^2 L^* S^*\right]\right) \\
&= \left[(-\mu - \beta_1 L^*)(\mu + \alpha) + (-\mu - \beta_1 L^*)(\lambda) - (\mu + \alpha)\lambda\right. \\
&\quad \left.- \lambda^2\right]\left[-\beta_2^2 L^* S^*\right] \\
&= \left[-\mu^2 - \alpha\mu - \beta_1\mu L^* - \beta_1\alpha L^* - \mu\lambda - \beta_1 L^*\lambda - \mu\lambda - \alpha\lambda\right. \\
&\quad \left.- \lambda^2\right]\left[-\beta_2^2 L^* S^*\right] \\
&= \mu^2\beta_2^2 L^* S^* + \alpha\mu\beta_2^2 L^* S^* + \mu\beta_1\beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha\beta_1\beta_2^2 (L^*)^2 S^* \\
&\quad + 2\mu\beta_2^2 L^* S^* \lambda + \beta_1\beta_2^2 (L^*)^2 S^* \lambda + \alpha\beta_2^2 L^* S^* \lambda + \beta_2^2 L^* S^* \lambda^2 \\
&= \beta_2^2 L^* S^* \lambda^2 + (2\mu\beta_2^2 L^* S^* + \beta_1\beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \alpha\beta_2^2 L^* S^*)\lambda \\
&\quad + \alpha\beta_1\beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \mu\beta_1\beta_2^2 (L^*)^2 S^* + \mu^2\beta_2^2 L^* S^* + \alpha\mu\beta_2^2 L^* S^* \\
-c_{21}c_{12}c_{33}c_{44} &= -\left(\left(\beta_1 L^*\right)\left(-\beta_1 P^*\right)\left(\left(-\frac{\alpha Q_t^*}{S^*}\right) - \lambda\right)\left[(-\mu + \alpha) - \lambda\right]\right) \\
&= -\left(\left(\left(\left(-\frac{\alpha Q_t^*}{S^*}\right)\left[-(\mu + \alpha)\right] + \left(-\frac{\alpha Q_t^*}{S^*}\right)(-\lambda) + (\mu + \alpha)\lambda\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+ \lambda^2\right)\left(-\beta_1^2 P^* L^*\right)\right) \\
&= \frac{\alpha\mu Q_t^*}{S^*}\beta_1^2 P^* L^* + \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*}\beta_1^2 P^* L^* + \frac{\alpha Q_t^*}{S^*}\beta_1^2 P^* L^* \lambda + \mu\beta_1^2 P^* L^* \lambda \\
&\quad + \alpha\beta_1^2 P^* L^* \lambda + \beta_1^2 P^* L^* \lambda^2 \\
c_{21}c_{12}c_{34}c_{43} &= \left(\beta_1 L^*\right)\left(-\beta_1 P^*\right)\left(\alpha\right)\left(\frac{(\mu + \alpha)Q_t^*}{S^*}\right) \\
&= -\beta_1^2 P^* L^* \frac{\alpha\mu Q_t^*}{S^*} - \beta_1^2 P^* L^* \frac{\alpha^2 Q_t^*}{S^*}
\end{aligned}$$

### Lampiran 6 Proses Perhitungan Manual Persamaan State

$$\frac{dP^*(t)}{dt} = \mu - \beta_1 P(t)L(t) - \mu P(t) - u_1(t)P(t).$$

$$\frac{dL^*(t)}{dt} = \beta_1 P(t)L(t) - \beta_2 L(t)S(t) - (\mu + u_2(t))L(t) + bu_3(t)S(t).$$

$$\frac{dS^*(t)}{dt} = \beta_2 L(t)S(t) + \alpha Q_t(t) - (\mu + \gamma)S(t) - (b + c)u_3(t)S(t).$$

$$\frac{dQ_t^*(t)}{dt} = \gamma(1 - \sigma)S(t) - (\mu + \alpha + u_2(t))Q_t(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_p^*(t)}{dt} &= \sigma\gamma S(t) - \mu Q_p(t) + u_1(t)P(t) + u_2(t)L(t) + u_2(t)Q_t(t) \\ &\quad + cu_3(t)S(t) \end{aligned}$$

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *forward sweep* Runge Kutta orde empat sebagai berikut.

$$P_{n+1} = P_n + \frac{h}{6}(p_{1,P} + 2p_{2,P} + 2p_{3,P} + p_{4,P})$$

$$L_{n+1} = L_n + \frac{h}{6}(p_{1,L} + 2p_{2,L} + 2p_{3,L} + p_{4,L})$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{6}(p_{1,S} + 2p_{2,S} + 2p_{3,S} + p_{4,S})$$

$$Q_{p_{n+1}} = Q_{p_n} + \frac{h}{6}(p_{1,Q_p} + 2p_{2,Q_p} + 2p_{3,Q_p} + p_{4,Q_p})$$

$$Q_{t_{n+1}} = Q_{t_n} + \frac{h}{6}(p_{1,Q_t} + 2p_{2,Q_t} + 2p_{3,Q_t} + p_{4,Q_t})$$

dengan

$$p_{1,P} = f(t_n, P_n, L_n, S_n, Q_{p_n}, Q_{t_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,P} = \mu - \beta_1 P_n(t)L_n(t) - \mu P_n(t) - \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n})P_n^2(t)}{r_1}$$

$$p_{1,L} = g(t_n, P_n, L_n, S_n, Q_{p_n}, Q_{t_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,L} = \beta_1 P_n(t) L_n(t) - \beta_2 L_n(t) S_n(t) - \left( \mu + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) L_n(t) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) Q_{t_n}(t)}{r_2} \right) L_n(t) \\ + b \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] S_n(t)}{r_3} \right) S_n(t)$$

$$p_{1,S} = j(t_n, P_n, L_n, S_n, Q_{p_n}, Q_{t_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,S} = \beta_2 L_n(t) S_n(t) + \alpha Q_{t_n}(t) - (\mu + \gamma) S_n(t) \\ - (b + c) \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] S_n(t)}{r_3} \right) S_n(t)$$

$$p_{1,Q_t} = k(t_n, P_n, L_n, S_n, Q_{p_n}, Q_{t_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,Q_t} = \gamma(1 - \sigma) S_n(t) - \left( \mu + \alpha + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) L_n(t) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) Q_{t_n}(t)}{r_2} \right) Q_{t_n}(t)$$

$$p_{1,Q_p} = l(t_n, P_n, L_n, S_n, Q_{p_n}, Q_{t_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,Q_p} = \sigma \gamma S_n(t) - \mu Q_{p_n}(t) + \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) P^2(t)}{r_1} \\ + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) L_n(t) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) Q_{t_n}(t)}{r_2} \right) L_n(t) \\ + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) L_n(t) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) Q_{t_n}(t)}{r_2} \right) Q_{t_n}(t) \\ + c \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] S_n(t)}{r_3} \right) S_n(t)$$

$$p_{2,P} = f \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, L_n + \frac{p_{1,L}}{2}, S_n + \frac{p_{1,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2}, Q_{p_n} \right. \\ \left. + \frac{p_{1,Q_p}}{2}, \frac{1}{2}(u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{2,P} = \mu - \beta_1 \left( P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) - \mu \left( P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right) - \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) \left( P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right)^2}{r_1}$$

$$p_{2,L} = g \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, L_n + \frac{p_{1,L}}{2}, S_n + \frac{p_{1,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2}, Q_{p_n} \right. \\ \left. + \frac{p_{1,Q_p}}{2}, \frac{1}{2}(u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$\begin{aligned}
p_{2,L} = & \beta_1 \left( P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) - \beta_2 \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right) \\
& - \left( \mu + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( L_n(t) \right. \\
& \left. + \frac{p_{1,L}}{2} \right) + b \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right)}{r_3} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,S} = & g \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, L_n + \frac{p_{1,L}}{2}, S_n + \frac{p_{1,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2}, Q_{p_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{1,Q_p}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,S} = & \beta_2 \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right) + \alpha \left( Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2} \right) - (\mu + \gamma) \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right) \\
& - (b + c) \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right)}{r_3} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,Q_t} = & k \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, L_n + \frac{p_{1,L}}{2}, S_n + \frac{p_{1,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2}, Q_{p_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{1,Q_p}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,Q_t} = & \gamma(1 - \sigma) \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right) \\
& - \left( \mu + \alpha + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( Q_{t_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{1,Q_t}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,Q_p} = & l \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{1,P}}{2}, L_n + \frac{p_{1,L}}{2}, S_n + \frac{p_{1,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{1,Q_t}}{2}, Q_{p_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{1,Q_p}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,Qp} = & \sigma\gamma \left( S_n(t) + \frac{p_{1,S}}{2} \right) - \mu \left( Q_{p_n} + \frac{p_{1,Qp}}{2} \right) + \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) \left( P_n(t) + \frac{p_{1,P}}{2} \right)^2}{r_1} \\
& + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{1,Qt}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) \\
& + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n(t) + \frac{p_{1,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{1,Qt}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{1,Qt}}{2} \right) \\
& + c \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] \left( S_n + \frac{p_{1,S}}{2} \right)}{r_3} \right) \left( S_n + \frac{p_{1,S}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3,P} = & f \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, L_n + \frac{p_{2,L}}{2}, S_n + \frac{p_{2,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{2,Qt}}{2}, Q_{p_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{2,Qp}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)
\end{aligned}$$

$$p_{3,P} = \mu - \beta_1 \left( P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right) \left( L_n(t) + \frac{p_{2,L}}{2} \right) - \mu \left( P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right) - \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) \left( P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right)^2}{r_1}$$

$$\begin{aligned}
p_{3,L} = & g \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, L_n + \frac{p_{2,L}}{2}, S_n + \frac{p_{2,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{2,Qt}}{2}, Q_{p_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{2,Qp}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3,L} = & \beta_1 \left( P_n(t) + \frac{p_{2,P}}{2} \right) \left( L_n(t) + \frac{p_{2,L}}{2} \right) - \beta_2 \left( L_n(t) + \frac{p_{2,L}}{2} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right) \\
& - \left( \mu + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n(t) + \frac{p_{2,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Qt}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( L_n(t) \right. \\
& \left. + \frac{p_{2,L}}{2} \right) + b \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right)}{r_3} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3,S} = & g \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, L_n + \frac{p_{2,L}}{2}, S_n + \frac{p_{2,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{2,Qt}}{2}, Q_{p_n} \right. \\
& \left. + \frac{p_{2,Qp}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)
\end{aligned}$$

$$p_{3,S} = \beta_2 \left( L_n(t) + \frac{p_{2,L}}{2} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right) + \alpha \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2} \right) - (\mu + \gamma) \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right) - (b + c) \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right)}{r_3} \right) \left( S_n(t) + \frac{p_{2,S}}{2} \right)$$

$$p_{3,Q_t} = k \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, L_n + \frac{p_{2,L}}{2}, S_n + \frac{p_{2,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2}, Q_{p_n} + \frac{p_{2,Q_p}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{3,Q_t} = \gamma(1 - \sigma) \left( S_n + \frac{p_{2,S}}{2} \right) - \left( \mu + \alpha + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n + \frac{p_{2,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2} \right)$$

$$p_{3,Q_p} = l \left( t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{p_{2,P}}{2}, L_n + \frac{p_{2,L}}{2}, S_n + \frac{p_{2,S}}{2}, Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2}, Q_{p_n} + \frac{p_{2,Q_p}}{2}, \frac{1}{2} (u_{1,n} + u_{1,n+1}, u_{2,n} + u_{2,n+1}, u_{3,n} + u_{3,n+1}) \right)$$

$$p_{3,Q_p} = \sigma\gamma \left( S_n + \frac{p_{2,S}}{2} \right) - \mu \left( Q_{p_n} + \frac{p_{2,Q_p}}{2} \right) + \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) \left( P_n + \frac{p_{2,P}}{2} \right)^2}{r_1} + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n + \frac{p_{2,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( L_n + \frac{p_{2,L}}{2} \right) + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n}) \left( L_n + \frac{p_{2,L}}{2} \right) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n}) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2} \right)}{r_2} \right) \left( Q_{t_n} + \frac{p_{2,Q_t}}{2} \right) + c \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c] \left( S_n + \frac{p_{2,S}}{2} \right)}{r_3} \right) \left( S_n + \frac{p_{2,S}}{2} \right)$$

$$p_{4,P} = f \left( t_n + h, P_n + p_{3,P}, L_n + p_{3,L}, S_n + p_{3,S}, Q_{t_n} + p_{3,Q_t}, Q_{p_n} + p_{3,Q_p}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1} \right)$$

$$p_{4,P} = \mu - \beta_1 (P_n(t) + p_{3,P}) (L_n(t) + p_{3,L}) - \mu (P_n(t) + p_{3,P}) - \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n}) (P_n(t) + p_{3,P})^2}{r_1}$$

$$p_{4,L} = g \left( t_n + h, P_n + p_{3,P}, L_n + p_{3,L}, S_n + p_{3,S}, Q_{t_n} + p_{3,Q_t}, Q_{p_n} + p_{3,Q_p}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
p_{4,L} &= \beta_1(P_n(t) + p_{3,P})(L_n(t) + p_{3,L}) - \beta_2(L_n(t) + p_{3,L})(S_n(t) + p_{3,S}) \\
&\quad - \left( \mu + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n})(L_n(t) + p_{3,L}) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})(Q_{t_n} + p_{3,Q_t})}{r_2} \right) (L_n(t) \\
&\quad + p_{3,L}) + b \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c](S_n(t) + p_{3,S})}{r_3} \right) (S_n(t) + p_{3,S}) \\
p_{4,S} &= g(t_n + h, P_n + p_{3,P}, L_n + p_{3,L}, S_n + p_{3,S}, Q_{t_n} + p_{3,Q_t}, Q_{p_n} + p_{3,Q_p}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1}) \\
p_{4,S} &= \beta_2(L_n(t) + p_{3,L})(S_n(t) + p_{3,S}) + \alpha(Q_{t_n} + p_{3,Q_t}) - (\mu + \gamma)(S_n(t) + p_{3,S}) \\
&\quad - (b + c) \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c](S_n(t) + p_{3,S})}{r_3} \right) (S_n(t) + p_{3,S}) \\
p_{4,Q_t} &= k(t_n + h, P_n + p_{3,P}, L_n + p_{3,L}, S_n + p_{3,S}, Q_{t_n} + p_{3,Q_t}, Q_{p_n} + p_{3,Q_p}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1}) \\
p_{4,Q_t} &= \gamma(1 - \sigma)(S_n + p_{3,S}) \\
&\quad - \left( \mu + \alpha + \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n})(L_n + p_{3,L}) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})(Q_{t_n} + p_{3,Q_t})}{r_2} \right) (Q_{t_n} \\
&\quad + p_{3,Q_t}) \\
p_{4,Q_p} &= l(t_n + h, P_n + p_{3,P}, L_n + p_{3,L}, S_n + p_{3,S}, Q_{t_n} + p_{3,Q_t}, Q_{p_n} + p_{3,Q_p}, u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, u_{3,n+1}) \\
p_{4,Q_p} &= \sigma\gamma(S_n + p_{3,S}) - \mu(Q_{p_n} + p_{3,Q_p}) + \frac{(\lambda_{1,n} - \lambda_{5,n})(P_n(t) + p_{3,P})^2}{r_1} \\
&\quad + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n})(L_n + p_{3,L}) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})(Q_{t_n} + p_{3,Q_t})}{r_2} \right) (L_n + p_{3,L}) \\
&\quad + \left( \frac{(\lambda_{2,n} - \lambda_{5,n})(L_n + p_{3,L}) + (\lambda_{4,n} - \lambda_{5,n})(Q_{t_n} + p_{3,Q_t})}{r_2} \right) (Q_{t_n} + p_{3,Q_t}) \\
&\quad + c \left( \frac{[(\lambda_{3,n} - \lambda_{2,n})b + (\lambda_{3,n} - \lambda_{5,n})c](S_n + p_{3,S})}{r_3} \right) (S_n + p_{3,S})
\end{aligned}$$

### Lampiran 7 Proses Perhitungan Manual Persamaan Co-State

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -A_3 + \lambda_1(\beta_1 L(t) + \mu + u_1(t)) - \lambda_2 \beta_1 L(t) - \lambda_5 u_1(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} = & -A_4 + \lambda_1(\beta_1 P(t)) - \lambda_2(\beta_1 P(t) - \beta_2 S(t) - (\mu + u_2)) - \lambda_3 \beta_2 S(t) \\ & - \lambda_5 u_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_3}{dt} = & -A_1 + \lambda_2(\beta_2 L(t) - b u_3(t)) - \lambda_3(\beta_2 L(t) - (\mu + \gamma) - (b + c)u_3(t)) \\ & - \lambda_4(\gamma(1 - \sigma)) - \lambda_5(\sigma\gamma + c u_3(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -A_5 - \lambda_3 \alpha + \lambda_4((\mu + \alpha + u_2(t)) - \lambda_5 u_2(t))$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = A_2 + \lambda_5 \mu$$

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *backward sweep* Runge Kutta orde empat adalah sebagai berikut.

$$\lambda_{1,n-1} = \lambda_{1,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_1} + 2p_{2,\lambda_1} + 2p_{3,\lambda_1} + p_{4,\lambda_1})$$

$$\lambda_{2,n-1} = \lambda_{2,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_2} + 2p_{2,\lambda_2} + 2p_{3,\lambda_2} + p_{4,\lambda_2})$$

$$\lambda_{3,n-1} = \lambda_{3,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_3} + 2p_{2,\lambda_3} + 2p_{3,\lambda_3} + p_{4,\lambda_3})$$

$$\lambda_{4,n-1} = \lambda_{4,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_4} + 2p_{2,\lambda_4} + 2p_{3,\lambda_4} + p_{4,\lambda_4})$$

$$\lambda_{5,n-1} = \lambda_{5,n} - \frac{h}{6}(p_{1,\lambda_5} + 2p_{2,\lambda_5} + 2p_{3,\lambda_5} + p_{4,\lambda_5})$$

dengan

$$p_{1,\lambda_1} = f(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, L_n, S_n, Q_{t_n}, Q_{p_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$$

$$p_{1,\lambda_1} = -A_3 + \lambda_{1,n}(\beta_1 L_n(t) + \mu + u_{1,n}(t)) - \lambda_{2,n} \beta_1 L_n(t) - \lambda_{5,n} u_{1,n}(t)$$

$$p_{1,\lambda_2} = g \left( t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, L_n, S_n, Q_{t_n}, Q_{p_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n} \right)$$

$$p_{1,\lambda_2} = -A_4 + \lambda_{1,n}(\beta_1 P_n(t)) - \lambda_{2,n}(\beta_1 P_n(t) - \beta_2 S_n(t) - (\mu + u_{2,n})) - \lambda_{3,n} \beta_2 S_n(t) \\ - \lambda_{5,n} u_{2,n}(t)$$

$$p_{1,\lambda_3} = j \left( t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, L_n, S_n, Q_{t_n}, Q_{p_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n} \right)$$

$$p_{1,\lambda_3} = -A_1 + \lambda_{2,n}(\beta_2 L_n(t) - b u_{3,n}(t)) - \lambda_{3,n}(\beta_2 L_n(t) - (\mu + \gamma) - (b + c) u_{3,n}(t)) \\ - \lambda_{4,n}(\gamma(1 - \sigma)) - \lambda_{5,n}(\sigma\gamma + c u_{3,n}(t))$$

$$p_{1,\lambda_4} = k \left( t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, L_n, S_n, Q_{t_n}, Q_{p_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n} \right)$$

$$p_{1,\lambda_4} = -A_5 - \lambda_{3,n} \alpha + \lambda_{4,n}((\mu + \alpha + u_{2,n}(t)) - \lambda_{5,n} u_{2,n}(t))$$

$$p_{1,\lambda_5} = l \left( t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \lambda_{3,n}, \lambda_{4,n}, \lambda_{5,n}, P_n, L_n, S_n, Q_{t_n}, Q_{p_n}, u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n} \right)$$

$$p_{1,\lambda_5} = A_2 + \lambda_{5,n} \mu$$

$$p_{2,\lambda_1} = f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{2,\lambda_1} = -A_3 + \left( \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2} \right) \left( \beta_1 \frac{1}{2} (L_n(t) + L(t)_{n-1}) + \mu + \frac{1}{2} (u_{1,n}(t) + u(t)_{1,n-1}) \right) \\ - \left( \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2} \right) \beta_1 \frac{1}{2} (L_n(t) + L(t)_{n-1}) \\ - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \frac{1}{2} (u_{1,n}(t) + u_{1,n-1}(t))$$

$$p_{2,\lambda_2} = g \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2}(P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$\begin{aligned}
p_{2,\lambda_2} = & -A_4 + \left( \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2} \right) \left( \beta_1 \frac{1}{2} (P_n(t) + P_{n-1}(t)) \right) \\
& - \left( \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2} \right) \left( \beta_1 \frac{1}{2} (P_n(t) + P_{n-1}(t)) - \beta_2 \frac{1}{2} (S_n(t) + S_{n-1}(t)) \right. \\
& \left. - \left( \mu + \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t)) \right) \right) - \left( \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2} \right) \beta_2 \frac{1}{2} (S_n(t) + S_{n-1}(t)) \\
& - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,\lambda_3} = & j \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\
& \left. - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\
& \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,\lambda_3} = & -A_1 + \left( \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2} \right) \left( \beta_2 \frac{1}{2} (L_n(t) + L_{n-1}(t)) - b \frac{1}{2} (u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t)) \right) \\
& - \left( \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2} \right) \left( \beta_2 \frac{1}{2} (L_n(t) + L_{n-1}(t)) - (\mu + \gamma) \right. \\
& \left. - (b + c) \frac{1}{2} (u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t)) \right) - \left( \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2} \right) (\gamma(1 - \sigma)) \\
& - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \left( \sigma\gamma + c \frac{1}{2} (u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,\lambda_4} = & k \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\
& \left. - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\
& \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{2,\lambda_4} = & -A_5 - \left( \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2} \right) \alpha + \left( \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2} \right) \left( \mu + \alpha + \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t)) \right) \\
& - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t))
\end{aligned}$$

$$p_{2,\lambda_5} = l \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{1,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{1,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{1,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{2,\lambda_5} = A_2 + \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{1,\lambda_5}}{2} \right) \mu$$

$$p_{3,\lambda_1} = f \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{3,\lambda_1} = -A_3 + \left( \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2} \right) \left( \beta_1 \frac{1}{2} (L_n(t) + L(t)_{n-1}) + \mu + \frac{1}{2} (u_{1,n}(t) + u(t)_{1,n-1}) \right) \\ - \left( \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \beta_1 \frac{1}{2} (L_n(t) + L(t)_{n-1}) \\ - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \frac{1}{2} (u_{1,n}(t) + u_{1,n-1}(t))$$

$$p_{3,\lambda_2} = g \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{3,\lambda_2} = -A_4 + \left( \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2} \right) \left( \beta_1 \frac{1}{2} (P_n(t) + P_{n-1}(t)) \right) \\ - \left( \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \left( \beta_1 \frac{1}{2} (P_n(t) + P_{n-1}(t)) - \beta_2 \frac{1}{2} (S_n(t) + S_{n-1}(t)) \right) \\ - \left( \mu + \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t)) \right) - \left( \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right) \beta_2 \frac{1}{2} (S_n(t) + S_{n-1}(t)) \\ - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t))$$

$$p_{3,\lambda_3} = j \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{3,\lambda_3} = -A_1 + \left( \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2} \right) \left( \beta_2 \frac{1}{2} (L_n(t) + L_{n-1}(t)) - b \frac{1}{2} (u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t)) \right) \\ - \left( \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right) \left( \beta_2 \frac{1}{2} (L_n(t) + L_{n-1}(t)) - (\mu + \gamma) \right. \\ \left. - (b + c) \frac{1}{2} (u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t)) \right) - \left( \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2} \right) (\gamma(1 - \sigma)) \\ - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \left( \sigma\gamma + c \frac{1}{2} (u_{3,n}(t) + u_{3,n-1}(t)) \right)$$

$$p_{3,\lambda_4} = k \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{2,\lambda_4} = -A_5 - \left( \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2} \right) \alpha + \left( \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2} \right) \left( (\mu + \alpha) + \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t)) \right) \\ - \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \frac{1}{2} (u_{2,n}(t) + u_{2,n-1}(t))$$

$$p_{3,\lambda_5} = l \left( t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{p_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{p_{2,\lambda_2}}{2}, \lambda_{3,n} - \frac{p_{2,\lambda_3}}{2}, \lambda_{4,n} - \frac{p_{2,\lambda_4}}{2}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2}, \frac{1}{2} (P_n + P_{n-1}, L_n + L_{n-1}, S_n + S_{n-1}, Q_{t_n} + Q_{t_{n-1}}, Q_{p_n} + Q_{p_{n-1}}, u_{1,n} \right. \\ \left. + u_{1,n-1}, u_{2,n} + u_{2,n-1}, u_{3,n} + u_{3,n-1}) \right)$$

$$p_{3,\lambda_5} = A_2 + \left( \lambda_{5,n} - \frac{p_{2,\lambda_5}}{2} \right) \mu$$

$$p_{4,\lambda_1} = f \left( t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} \right. \\ \left. - p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, L_{n-1}, S_{n-1}, Q_{t_{n-1}}, Q_{p_{n-1}}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1} \right)$$

$$p_{4,\lambda_1} = -A_3 + (\lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1})(\beta_1 L_{n-1}(t) + \mu + u_{1,n-1}(t)) - (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2})\beta_1 L_{n-1}(t) \\ - (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5})u_{1,n-1}(t)$$

$$p_{4,\lambda_2} = g(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} \\ - p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, L_{n-1}, S_{n-1}, Q_{t_{n-1}}, Q_{p_{n-1}}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1})$$

$$p_{4,\lambda_2} = -A_4 + (\lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1})(\beta_1 P_{n-1}(t)) \\ - (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2})(\beta_1 P_{n-1}(t) - \beta_2 S_{n-1}(t) - (\mu + (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}))) \\ - (\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3})\beta_2 S_{n-1}(t) - (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5})u_{2,n-1}(t)$$

$$p_{4,\lambda_3} = j(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} \\ - p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, L_{n-1}, S_{n-1}, Q_{t_{n-1}}, Q_{p_{n-1}}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1})$$

$$p_{4,\lambda_3} = -A_1 + (\lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2})(\beta_2 L_{n-1}(t) - bu_{3,n-1}(t)) \\ - (\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3})(\beta_2 L_{n-1}(t) - (\mu + \gamma) - (b + c)u_{3,n-1}(t)) \\ - (\lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4})(\gamma(1 - \sigma)) - (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5})(\sigma\gamma + cu_{3,n-1}(t))$$

$$p_{4,\lambda_4} = k(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} \\ - p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, L_{n-1}, S_{n-1}, Q_{t_{n-1}}, Q_{p_{n-1}}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1})$$

$$p_{4,\lambda_4} = -A_5 - (\lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3})\alpha + (\lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4})(\mu + \alpha + u_{2,n-1}(t)) - (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5})u_{2,n-1}(t)$$

$$p_{4,\lambda_5} = l(t_n - h, \lambda_{1,n} - p_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - p_{3,\lambda_2}, \lambda_{3,n} - p_{3,\lambda_3}, \lambda_{4,n} - p_{3,\lambda_4}, \lambda_{5,n} \\ - p_{3,\lambda_5}, P_{n-1}, L_{n-1}, S_{n-1}, Q_{t_{n-1}}, Q_{p_{n-1}}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, u_{3,n-1})$$

$$p_{4,\lambda_5} = A_2 + (\lambda_{5,n} - p_{3,\lambda_5})\mu$$

### Lampiran 8 Script Maple untuk Menghitung Nilai Routh Hurwitz pada Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

```

> restart :
> b2 := 0.3 : y := 0.2 : a := 0.25 : s := 0.4 : b1 := 0.23 : u := 0.04 :
>
%Keterangan – b2 melambangkan beta_2, y melambangkan gamma, a melambangkan alpha,
s melambangkan sigma, b1 melambangkan beta_1, u melambangkan mu.
> c4 := 1 :
> c3 := 2 · u + b1 ·  $\left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) + a + a \cdot \left( \frac{y \cdot (1 - s)}{(u + a)} \right) :$ 
>
c2 :=  $u^2 + u \cdot b1 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) + a \cdot u + a \cdot \left( \frac{y \cdot (1 - s)}{(u + a)} \right) \cdot u$ 
+  $\left( \frac{u \cdot b2(u + a)}{u \cdot b2(u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \right) \cdot b1^2 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right)$ 
+  $a \cdot b1 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) + a \cdot \left( \frac{y \cdot (1 - s)}{(u + a)} \right) \cdot b1$ 
·  $\left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) + b2^2 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right)$ 
·  $\left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) :$ 
>
c1 :=  $\left( \frac{u \cdot b2(u + a)}{u \cdot b2(u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \right) \cdot u \cdot b1^2 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right)$ 
+  $2 \cdot u \cdot b2^2 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right)$ 
·  $\left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) + a$ 
·  $\left( \frac{u \cdot b2(u + a)}{u \cdot b2(u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \right) \cdot b1^2 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) + c$ 
·  $\left( \frac{y \cdot (1 - s)}{(u + a)} \right) \cdot \left( \frac{u \cdot b2(u + a)}{u \cdot b2(u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \right) \cdot b1^2$ 
·  $\left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) + b1 \cdot b2^2 \cdot \left( \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) \right)^2$ 
·  $\left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) + a \cdot b2^2$ 
·  $\left( \frac{u \cdot b2(u + a)}{u \cdot b2(u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \right)$ 
·  $\left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) :$ 

```

&gt;

$$\begin{aligned}
c0 := & u^2 \cdot b2^2 \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) \\
& \cdot \left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) + u \cdot a \cdot b2^2 \\
& \cdot \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) \cdot \left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \right. \right. \\
& \left. \left. - 1 \right) \right) + u \cdot b1 \cdot b2^2 \cdot \left( \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) \right)^2 \\
& \cdot \left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) + a \cdot b1 \cdot b2^2 \\
& \cdot \left( \left( \frac{y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s}{b2 \cdot (u + a)} \right) \right)^2 \\
& \cdot \left( \frac{u}{b1} \left( \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b2 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} - 1 \right) \right) :
\end{aligned}$$

&gt; Hasil := c3·c2·c1 - c4·c1·c1 - c0·c3·c3 :

&gt; Hasil

0.0001411681869

$$\begin{aligned}
R1 := & \frac{b1 \cdot b2 \cdot (u + a)}{u \cdot b1 \cdot (u + a) + b1 \cdot (y \cdot u + u \cdot (u + a) + a \cdot y \cdot s)} \\
& R1 := 1.699218750
\end{aligned}$$

### Lampiran 9 M-File untuk Menggambarkan Simulasi Model Dinamika Merokok Tanpa Kontrol

```

function dydt=ModelMerokok(t,y)
global A B1 B2 U V Q %A mewakili alpha, B1 mewakili
beta1, B2 mewakili beta2,
                                %U mewakili nilai miu, V mewakili
nilai gamma,
                                %Q mewakili nilai sigma
dy1=U-B1*y(1)*y(2)-U*y(1);
dy2=B1*y(1)*y(2)-B2*y(2)*y(3)-U*y(2);
dy3=B2*y(2)*y(3)+A*y(4)-(U+V)*y(3);
dy4=V*(1-Q)*y(3)-(U+A)*y(4);
dy5=Q*V*y(3)-U*y(5)
dydt=[dy1; dy2; dy3; dy4; dy5];
end

clc;clear all;close all;
global A B1 B2 U V Q
A=0.25;      B1=0.04;      B2=0.3;      U=0.15;      V=0.2;
Q=0.4;%Parameter untuk R0<1
time=[0 60];
y0=[0.60301  0.24000  0.10628  0.03260  0.01811];%Nilai
awal

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,1),'m-.','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,2),'y-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,3),'b-.','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,4),'g-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

```

```

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,5),'r-.','LineWidth',3)
title('Populasi Perokok dan Non Perokok dari Model
Dinamika Merokok untuk  $R_0 < 1$ ');
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
legend('P(t)', 'L(t)', 'S(t)', 'Q_t(t)', 'Q_p(t)');grid on;
hold on;

```

```

clc;clear all;close all;
global A B1 B2 U V Q
A=0.25; B1=0.23; B2=0.1; U=0.15; V=0.2;
Q=0.4;%Parameter untuk  $R_0 > 1$ 
time=[0 60];
y0=[0.60301 0.24000 0.10628 0.03260 0.01811];%Nilai
awal

```

```

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,1),'m-.','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

```

```

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,2),'y-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

```

```

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,3),'b-.','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

```

```

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,4),'g-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

```

```

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,5),'r-.','LineWidth',3)
title('Populasi Perokok dan Non Perokok dari Model
Dinamika Merokok untuk  $R_0 > 1$ ');
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
legend('P(t)', 'L(t)', 'S(t)', 'Q_t(t)', 'Q_p(t)');grid on;

```

```

hold on;

clc;clear all;close all;
global A B1 B2 U V Q
A=0.25; B1=0.23; B2=0.3; U=0.04; V=0.2;
Q=0.4;%Parameter untuk R1>1
time=[0 150];
y0=[0.60301 0.24000 0.10628 0.03260 0.01811];%Nilai
awal
NilaiAwal=[0.60301 0.24000 0.10628 0.03260 0.01811
            0.55000 0.20000 0.17272 0.06700 0.01028
            0.50000 0.15000 0.26200 0.08066 0.00734
            0.45900 0.10000 0.21900 0.21800
            0.00400];%Nilai awal yang berbeda-beda

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,1),'m-.','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,2),'y-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,3),'b-.','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,4),'g-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
hold on;

figure(1)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
plot(t,y(:,5),'r-','LineWidth',3)
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi');
title('Populasi Perokok dan Non Perokok dari Model
Dinamika Merokok untuk R_1>1');
legend('P(t)', 'L(t)', 'S(t)', 'Q_t(t)');grid on;
hold on;

figure(2)

```

```
for i=1:4;
    y0 = NilaiAwal(i,:);
    [t,y]=ode45(@(t,y) ModelMerokok (t,y),time,y0);
    plot(t,y(:,5),'LineWidth',3)
    hold all
end
xlabel('Waktu t(bulan)');ylabel('Ukuran Populasi Non
Perokok Permanen');
title('Populasi Non Perokok Permanen dari Model
Dinamika Merokok untuk  $R_1 > 1$ ');
legend('1','2','3','4');grid on;hold on;
```



### Lampiran 10 M-File untuk Menggambarkan Simulasi Model Dinamika Merokok dengan Kontrol

```
%Persamaan State
```

```
function dy=State(y,g,a,si,m,b2,b1,u1,u2,u3,b,c)
```

```
x(1)= m-b1*y(1)*y(2)-m*y(1)-u1*y(1);
x(2)= b1*y(1)*y(2)-b2*y(2)*y(3)-(m+u2)*y(2)+b*u3*y(3);
x(3)= b2*y(2)*y(3)+a*y(4)-(m+g)*y(3)-(b+c)*u3*y(3);
x(4)= g*(1-si)*y(3)-(m+a+u2)*y(4);
x(5)=si*g*y(3)-
m*y(5)+u1*y(1)+u2*y(2)+u2*y(4)+c*u3*y(3);

dy=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
```

```
%Persamaan Co-State
```

```
function
dk=Costate(y,P,L,S,g,a,si,m,b2,b1,u1,u2,u3,b,c,A1,A2,A3
,A4,A5)
```

```
k1=y(1); k2=y(2); k3=y(3); k4=y(4); k5=y(5);
%lambda1=k1,lambda2=k2,lambda3=k3,lambda4=k4,lambda5=k5
x(1)=-A3+k1*(b1*L+m+u1)-k2*b1*L-k5*u1;
x(2)=-A4+k1*b1*P-k2*(b1*P-b2*S-(m+u2))-k3*(b2*S)-k5*u2;
x(3)=-A1+k2*(b2*L-b*u3)-k3*(b2*L-(m+g)-(b+c)*u3)-
k4*(g*(1-si))-k5*(si*g+c*u3);
x(4)=-A5-k3*a+k4*(m+a+u2)-k5*u2;
x(5)=A2+k5*m;
```

```
dk=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
end
```

```
%g = gamma
%a = alpha
%si = sigma
%m = miu
%b2 = beta_2
%b1 = beta_1
```

```
%Running
clc;
clear all;
close all;
```

```

%jumlah populasi pada t=0
P0 = 0.60301;
L0 = 0.24000;
S0 = 0.10628;
Qt0 = 0.03260;
Qp0 = 0.01811;

%Parameter-parameter
g = 0.2;
a = 0.25;
si = 0.4;

b = 0.25; %nilai asumsi untuk bobot parameter w/u3
yang akan ditambahkan pada L(t)
c = 0.5; %nilai asumsi untuk bobot parameter w/u3 yang
akan ditambahkan pada Qt(t)

A1 = 0.3; %variasi bobot pada fungsi tujuan
A2 = 0.3;
A3 = 0.1;
A4 = 0.2;
A5 = 0.1;

r1 = 0.2;%bobot biaya kontrol
r2 = 0.3;
r3 = 0.5;

m = 0.04;
b2 = 0.3;
b1 = 0.23;

u1max = 0.9;
u2max = 1;
u3max = 1;

h=0.1; %h=1/N misal: h=1/10=0.1
t=0:h:110; %dari 0 sampai 100 dipartisi dengan jarak
h=0.1
Z=length(t); %banyaknya t

%membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1
kolom
u1=zeros(Z,1);
u1old=zeros(Z,1);
u2=zeros(Z,1);
u2old=zeros(Z,1);
u3=zeros(Z,1);
u3old=zeros(Z,1);

```

```

P=zeros(Z,1);
L=zeros(Z,1);
S=zeros(Z,1);
Qt=zeros(Z,1);
Qp=zeros(Z,1);

Pold=zeros(Z,1);
Lold=zeros(Z,1);
Sold=zeros(Z,1);
Qtold=zeros(Z,1);
Qpold=zeros(Z,1);

%p1 adalah lambda_1 dsb
k1=zeros(Z,1);
k2=zeros(Z,1);
k3=zeros(Z,1);
k4=zeros(Z,1);
k5=zeros(Z,1);

k1old=zeros(Z,1);
k2old=zeros(Z,1);
k3old=zeros(Z,1);
k4old=zeros(Z,1);
k5old=zeros(Z,1);
%kontrol ada 2 pada u_1 dan u_1old

tes=1;
it=0;

while tes >1e-3
    u1old=u1;
    u2old=u2;
    u3old=u3;
    Pold=P; Lold=L; Sold=S; Qtold=Qt; Qpold=Qp;
    k1o=k1; k2o=k2; k3o=k3; k4o=k4; k5o=k5;
    P(1)=P0; L(1)=L0; S(1)=S0; Qt(1)=Qt0; Qp(1)=Qp0;
    J(it+1)=0;

    for i=1:Z-1
        J(it+1)=J(it+1)+h*(A1*S(1)-
A2*Qp(1)+1/2*r1*u1old(i)^2+1/2*r2*u2old(i)^2+1/2*r3*u3o
ld(i)^2+A3*P(110)+A4*L(110)+A5*Qt(110));

        y=[P(i) L(i) S(i) Qt(i) Qp(i)];
        %RungeKutta

p1=h*State(y,g,a,si,m,b2,b1,u1old(i),u2old(i),u3old(i),
b,c);

```

```
p2=h*State(y+0.5*p1,g,a,si,m,b2,b1,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,c);
```

```
p3=h*State(y+0.5*p2,g,a,si,m,b2,b1,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,c);
```

```
p4=h*State(y+p3,g,a,si,m,b2,b1,u1old(i),u2old(i),u3old(i),b,c);
```

```
y=y+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
```

```
P(i+1)=y(1);
```

```
L(i+1)=y(2);
```

```
S(i+1)=y(3);
```

```
Qt(i+1)=y(4);
```

```
Qp(i+1)=y(5);
```

```
end
```

```
J(it+1)=J(it+1)+h*(A1*S(Z)-A2*Qp(Z)+1/2*r1*u1old(Z)^2+1/2*r2*u2old(Z)^2+1/2*r3*u3old(Z)^2+A3*P(110)+A4*L(110)+A5*Qt(110));
```

```
%Plot populasi tanpa kontrol
```

```
if it == 0
```

```
figure(1)
```

```
plot(t,P,'--','LineWidth',3);
```

```
legend('Tanpa Kontrol');
```

```
hold on;
```

```
figure(2)
```

```
plot(t,L,'--','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

```
figure(3)
```

```
plot(t,S,'--','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

```
figure(4)
```

```
plot(t,Qt,'--','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

```
figure(5)
```

```
plot(t,Qp,'--','LineWidth',3);
```

```
hold on;
```

```
end
```

```
k1(Z)=0; k2(Z)=0; k3(Z)=0; k4(Z)=0; k5(Z)=0;
```

```
for i=1:Z-1
```

```
je=Z-i;
```

```
y=[k1(je+1) k2(je+1) k3(je+1) k4(je+1) k5(je+1)];
```

```

p1=h*Costate(y,P(je+1),L(je+1),S(je+1),g,a,si,m,b2,b1,u
1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+1),b,c,A1,A2,A3,A4,A5);

p2=h*Costate(y+0.5*p1,P(je+1),L(je+1),S(je+1),g,a,si,m,
b2,b1,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+1),b,c,A1,A2,A3,
A4,A5);

p3=h*Costate(y+0.5*p2,P(je+1),L(je+1),S(je+1),g,a,si,m,
b2,b1,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+1),b,c,A1,A2,A3,
A4,A5);

p4=h*Costate(y+p3,P(je+1),L(je+1),S(je+1),g,a,si,m,b2,b
1,u1old(je+1),u2old(je+1),u3old(je+1),b,c,A1,A2,A3,A4,A
5);

y=y-(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);

k1(je)=y(1);
k2(je)=y(2);
k3(je)=y(3);
k4(je)=y(4);
k5(je)=y(5);
temp2=min([(k1(je)-k5(je))*P(je)]/r1 u1max]);
u1(je)=max([temp2 0]);
temp4=min([(k2(je)-k5(je))*L(je)+(k4(je)-
k5(je))*Qt(je)]/r2 u2max]);
u2(je)=max([temp4 0]);
temp6=min([(k3(je)-k2(je))*b+(k3(je)-
k5(je))*c]*S(je)]/r3 u3max]);
u3(je)=max([temp6 0]);
end

eP=sum(abs(P-Pold));
eL=sum(abs(L-Lold));
eS=sum(abs(S-Sold));
eQt=sum(abs(Qt-Qtold));
eQp=sum(abs(Qp-Qpold));
ek1=sum(abs(k1-k1o));
ek2=sum(abs(k2-k2o));
ek3=sum(abs(k3-k3o));
ek4=sum(abs(k4-k4o));
ek5=sum(abs(k5-k5o));
eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
eu3=sum(abs(u3-u3old));
%error = sum dari error yang lama dengan yang baru

```

```
tes=eP+eL+eS+eQt+eQp+ek1+ek2+ek3+ek4+ek5+eu1+eu2+eu3;
```

```

        it=it+1;
        u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
        u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
        u3=(0.5*u3+0.5*u3old);
    end

% Langkah 8
%Plot populasi dengan kontrol
figure(1)
plot(t,P,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Bulan)');
ylabel('P(t)');
grid on;
legend('P Tanpa Kontrol','P dengan Kontrol u');
title('Populasi Perokok Potensial');
hold on;

figure(2)
plot(t,L,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Bulan)');
ylabel('L(t)');
grid on;
legend('L Tanpa Kontrol','L dengan Kontrol u');
title('Populasi Perokok Ringan');
hold on;

figure(3)
plot(t,S,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Bulan)');
ylabel('S(t)');
grid on;
legend('S Tanpa Kontrol','S dengan Kontrol u');
title('Populasi Perokok Berat');
hold on;

figure(4)
plot(t,Qt,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Bulan)');
ylabel('Q_t(t)');
grid on;
legend('Q_t Tanpa Kontrol','Q_t dengan Kontrol u');
title('Populasi Non Perokok Sementara');
hold on;

figure(5)
plot(t,Qp,'r.-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Bulan)');
ylabel('Q_p(t)');
grid on;

```

```
legend('Q_p Tanpa Kontrol','Q_p dengan Kontrol u');  
title('Populasi Non Perokok Permanen');  
hold on;
```

```
figure(6)  
plot(t,u1,'r.-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (Bulan)');  
ylabel('u_1(t)');  
grid on;  
legend('Kontrol u1');  
title('Kontrol Kampanye Anti Rokok');  
hold on;
```

```
figure(7)  
plot(t,u2,'r.-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (Bulan)');  
ylabel('u_2(t)');  
grid on;  
legend('Kontrol u2');  
title('Kontrol Permen Karet Nikotin');  
hold on;
```

```
figure(8)  
plot(t,u3,'r.-','LineWidth',3);  
xlabel('Waktu (Bulan)');  
ylabel('u_3(t)');  
grid on;  
legend('Kontrol u3');  
title('Kontrol Pengobatan');  
hold on;
```

## RIWAYAT HIDUP



Putri Lestari dilahirkan di Kediri pada hari Rabu, tanggal 23 Maret 1999, biasa dipanggil Putri, anak sulung dari Bapak Supardi dan Ibu Mutmainah yang tinggal di Dusun Kedung Dowo, Desa Cengkok, Kec. Tarokan Kab. Kediri.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Sabilul Huda Kedung Dowo yang ditamatkan pada tahun 2010. Selama menempuh pendidikan madrasah ibtdaiyah aktif pada kegiatan pramuka dan pernah mengikuti beberapa lomba seperti baca puisi dan dokter kecil, setelah itu melanjutkan pendidikan ke SMPN 1 Tarokan dan lulus pada tahun 2013. Selama di SMP, penulis aktif pada kegiatan ekstrakurikuler membuat batik, dan PMR serta kegiatan intra yaitu OSIS yang menjabat sebagai devisi keagamaan. Kemudian setelah lulus dari SMP penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 1 Grogol dan lulus pada tahun 2016. Pendidikan berikutnya penulis tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis mengikuti ekstra kampus UKM LKP2M atau Unit Kegiatan Mahasiswa Lembaga Kajian, Penelitian dan Pengembangan Mahasiswa dan pernah menjadi anggota devisi kajian ekologi saintek periode 2018-2019. Penulis juga pernah menerbitkan dua karyanya berupa cerpen yang berjudul “Laras” dan “Hutan Real” di buku Batas Semu terbitan UKM LKP2M pada tahun 2018. Selain kegiatan ekstra kampus, penulis juga

pernah menjadi anggota komunitas Generasi Bank Indonesia (GENBI) periode 2018/2019.





**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Putri Lestari  
NIM : 16610011  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Pada Model Dinamika Merokok Dengan Kampanye Anti Rokok, Permen Karet Nikotin, Dan Pengobatan  
Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si  
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	23 Januari 2020	Konsultasi Bab I	1.
2.	25 Januari 2020	Konsultasi Bab I, Bab II	2.
3.	28 Februari 2020	Konsultasi Bab II	3.
4.	5 Maret 2020	Revisi Draft Seminar Proposal	4.
5.	10 Maret 2020	Revisi Draft Seminar Proposal	5.
6.	30 Maret 2020	ACC Draft Seminar Proposal	6.
7.	2 April 2020	ACC Draft Seminar Proposal	7.
8.	20 April 2020	Konsultasi Keagamaan	8.
9.	29 April 2020	Konsultasi & Revisi Bab III & IV	9.
10.	29 April 2020	Konsultasi & Revisi Keagamaan	10.
11.	1 Mei 2020	ACC Bab III & Bab IV	11.
12.	13 Mei 2020	Konsultasi & Revisi Bab III	12.
13.	16 Mei 2020	ACC Keagamaan	13.
14.	20 Mei 2020	ACC Bab III	14.
15.	31 Mei 2020	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 31 Mei 2020  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

