GRAF KOMUTATIF DARI GRUP GENERALISASI QUATERNION

SKRIPSI

OLEH
KHAIRIL BARIYAH
NIM. 13610006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

GRAF KOMUTATIF DARI GRUP GENERALISASI QUATERNION

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Khairil Bariyah
NIM. 13610006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

GRAF KOMUTATIF DARI GRUP GENERALISASI QUATERNION

SKRIPSI

Oleh
Khairil Bariyah
NIM. 13610006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 31 Maret 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
M. Nafie Jauhari, M.Si	Mohammad Jamhuri, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056	NIP. 19810502 200501 1 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

GRAF KOMUTATIF DARI GRUP GENERALISASI QUATERNION

SKRIPSI

Oleh
Khairil Bariyah
NIM. 13610006

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Pesyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 13 April 2020

Penguji Utama	: Dr. Imam Sujarwo, M.Pd	
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	
Sekretaris Penguji	: M. Nafie Jauhari, M.Si	
Anggota Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Khairil Bariyah

NIM : 13610006

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya sendiri sesuai perundang-undangan yang berlaku.

Malang, 31 Maret 2020

Yang menyatakan,

Khairil Bariyah

NIM. 13610006

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

مَنْ سَلَكَ طَرِيْقًا يَلْتَمِسُ فِيْهِ عِلْمًا سَهَّلَ اللهُ لَهُ بِهِ طَرِيْقًا إِلَى الْجَنَّةِ

"Barang siapa yang menempuh jalan guna menimba ilmu, niscaya Allah akan mudahkan baginya berkat amalan ini jalan menuju ke surga." (HR. Muslim)

If destiny is point and effort is line, than life is a graph. So, learn graph theory to have wonderful life. (Prof. Slamin)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

- Ayahanda dan Ibunda tercinta, Zainul Bari dan Dahliya yang tak pernah putus menyiramkan kasih sayang dan memohonkan doa untuk mengiringi setiap langkahku,
- Kakakku Badrus Saleh yang telah membantu membimbingku,
- Guru-guruku yang telah menjadi pelita dalam menempuh hidup,
- Sahabat-sahabatku (Qalby, Ke, Rina, Sovil, Niun, Lila, Anna, dan Zidna) yang dalam kebersamaan menjadi layaknya saudara, dan
- Almamater yang kubanggakan, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat ALLAH SWT yang telah memberikan segala rahmat, nikmat, hidayah, da inayahNya sehingga penyusunan skripsi dengan judul "Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion" dapat dirampungkan. *Shalawat* dan *Salam* semoga tetap selalu terlimpah curahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang membawa umatnya menuju alam yang penuh ilmu pengetahuan.

Terselesaikannya skripsi ini tak lepas dari bantuan dari banyak pihak, baik langsung ataupun tidak langsung. Untuk itu, pada kesempatan penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar- besarnya kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu penyelesaian skripsi ini, yaitu kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Kedua orang tua dan seluruh keluarga penulis yang selalu mendoakan dan mendukung penulis.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang telah banyak memberikan motivasi kepada penulis.

Semoga bimbingan, bantuan, dukungan, dorongan, dan motivasi yang telah diberikan dicata sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang terbaik dariNya.

Akhirnya, semoga skripsi yang telah penulis susun ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 31 Maret 2020

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Bariyah, Khairil. 2020. ***Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) M. Nafie Jauhari, M.Si. (2) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata Kunci: graf komutatif dan grup generalisasi quaternion

G dengan operasi biner $*$ $(G,*)$ adalah grup jika G tertutup terhadap operasi biner $*$, operasi biner $*$ bersifat asosiatif, G memiliki identitas, dan G memiliki invers. Grup $(G,*)$ adalah grup komutatif atau abelian jika operasi biner $*$ pada G bersifat komutatif. Grup generalisasi quaternion Q_{4n} adalah grup berorder $4n$ yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$ atau dapat ditulis $Q_{4n} = \langle a, b | b^2 = a^n, a^{2n} = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas dan $n \geq 2$. Graf didefinisikan sebagai pasangan berurut (V, E). V adalah himpunan titik (*vertex*) yang tidak boleh kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang boleh kosong. Tujuan penelitian ini adalah menentukan graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} dengan himpunan titik pada graf merupakan anggota dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} dan dua titik di Q_{4n} akan terhubung langsung jika dan hanya jika kedua titik tersebut komutatif di Q_{4n}. Hasil dari penelitian ini berupa karakteristik sebagai berikut:

1. $\deg(a^{2n}) = \deg(a^n) = 4n - 1$.
2. $\deg(a^i) = 2n - 1$, untuk $i \neq \{2n, n\}$.
3. $\deg(a^i b) = 3$, untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, 2n - 1$.
4. Graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} bukan graf Euler.
5. Bilangan dominasi pada graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} adalah $\gamma(Q_{4n}) = 1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Bariyah, Khairil. 2020. ***Commutative Graph of The Generalized Quaternion Group***. Thesis. Departement of Mathematics Faculties of Sciences and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) M. Nafie Jauhari, M.Si. (2) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keywords: commuting graph and the generalized quaternion group

Suppose the binary operation $*$ is defined for elements of the G set. Then $(G,*)$ is a group if G is closed under $*$, $*$ is associative, G has an identity element e, G contains inverses. $(G,*)$ is called a commutative group i.e abelian group if the binary operation $*$ of G is commutative. The Q_{4n} quaternion generalization group is a $4n$ order group built by two elements $\langle a,b\rangle$ or can be written as $Q_{4n} = \langle a,b|b^2 = a^n, a^{2n} = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ which e is an identity element and $n \geq 2$. A graph G is a pair of sets (V,E) which V is a nonempty set, and E is a possibly empty edge. The purpose of this study is to determine the commuting graph of the generalized quaternion groups Q_{4n} with the set of the point on the graph which are members of the quaternion group and the two points on Q_{4n} will be adjacent if and only if the two points are commutative at Q_{4n}. The results of this study form the following characteristics:

1. $\deg(a^{2n}) = \deg(a^n) = 4n - 1$.
2. $\deg(\mathrm{a}^{\mathrm{i}}) = 2\mathrm{n} - 1$, for $\mathrm{i} \neq \{2\mathrm{n}, \mathrm{n}\}$.
3. $\deg(a^i b) = 3$, for $i = 1, 2, 3, \cdots, 2n - 1$.
4. The commuting group of the generalized quaternion groups Q_{4n} is not Eulerian.
5. The domination number of the commuting group of the generalized quaternion groups Q_{4n} is $\gamma(Q_{4n}) = 1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

الملخص

البرية, خير. ٢٠٢٠. ***المخطط التبادلية لمجموعات التعميم الرباعية***. البحث الجامعى. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجية، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالنج. المشرف: (١) محمد نافع جوهرى الماجستير (٢) محمد جمهورى الماجستير

الكلمات المفتاحية: المخطط التبادلية و المجموعات التعميم الرباعية

G بالعمليات الثنائية $*$ $(G,*)$ هى المجموعة إذا كان G مغلق تحت $*$، $*$ هى ترابطي، G لها عنصر هوية e، G تحتوي على مقلوب. $(G,*)$ تسمى مجموعة تبادلية أو مجموعة أبيلية، إذا كان $*$ تبادلي. إن مجموعة $Q_{4n} = \langle a, b | b^2 = a^n, a^{2n} = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ حيث e هي عنصر الهوية و $n \geq 2$. المخطط عة التعميم الرباعية Q_{4n} هي مجموعة ترتيب $4n$ تم إنشاؤها من عنصرين $\langle a ، b \rangle$ أو يمكن كتابتها G هو ثنائي من المجموعات $(V ، E)$ حيث V غير فارغة ، و E ربما فارغة. الغرض من هذه الدراسة هو تحديد مجموعة التنقّل لمجموعات التعميم الرباعية Q_{4n} مع مجموعة النقاط على الرسم البياني التي هي أعضاء في مجموعة التجمعات الرباعية والنقطتان في Q_{4n} ستكون متجاورة إذا وفقط إذا كانت النقطتان مبدلتان في Q_{4n}. تشكل نتائج هذه الدراسة الخصائص التالية:

١. $\deg(a^{2n}) = \deg(a^n) = 4n - 1$

٢. $\deg(a^i) = 2n - 1$ لـ $i \neq \{2n, n\}$

٣. $\deg(a^i b) = 3$ لـ $i = 1, 2, 3, \cdots, 2n - 1$

٤. مجموعة التنقّل لمجموعات الرباعية المعممة Q_{4n} ليست أويلريان

٥. رقم هيمنة مجموعة التنقّل لمجموعات الرباعية المعممة Q_{4n} هو $\gamma(Q_{4n}) = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seorang matematikawan Swiss L. Euler pertama kali memperkenalkan Teori graf pada tahun 1736. Menurut catatan sejarah, masalah yang pertama kali menggunakan graf adalah masalah jembatan Königsberg. Di kota Königsberg terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof dan bercabang menjadi dua buah anak sungai. Terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Warga kota Königsberg ingin melewati jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Kemudian Euler membuktikan bahwa orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali lalu kembali ke tempat awal.

Graf G adalah pasangan terurut himpunan titik V yang tidak kosong dan berhingga dengan himpunan sisi E yang mungkin kosong dari dua elemen subset V. Graf G yang mempunyai himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$. Jika uv adalah sisi dari G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (*adjacent vertices*). Jika uv dan uw adalah sisi yang berbeda dari G, maka uv dan uw adalah sisi yang terhubung langsung (*adjacent edges*). Titik u dan sisi uv dikatakan saling terkait (*incident*). (Chartrand, dkk, 2016:3)

Allah berfirman di dalam al-Quran surat Ali ‘imron ayat 190-191, yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

إِنَّ فِى خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿١٩٠﴾ ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِى خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ﴿١٩١﴾

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal (190) (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka (191)"

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah tidaklah menciptakan langit dan bumi (beserta semua yang ada di dalamnya/ di antara keduanya) dengan sia-sia. Hal itu menunjukkan bahwa semua ciptaan Allah itu pasti bermanfaat. Menurut Ibnu Katsir, selain mampu memahami fenomena alam dengan segenap hukumnya yang menunjukan tanda-tanda keagungan, kemurahan dan rahmat Ilahy, ulul albab juga seorang yang senantiasa berdzikir dan berpikir, yang melahirkan kekuatan intelektual, kekayaan spiritual dan keluhuran moral dalam dirinya. Ayat tersebut juga mendorong umat Islam untuk meningkatkan berbagai penilitian terhadap berbagai ciptaan Allah swt. Hal inilah yang dulu dilakukan oleh para ulama kita.

Telah banyak penelitian yang menggunakan graf sebagai solusi. Seiring berjalannya waktu, penelitian tentang graf semakin berkembang. Salah satunya yaitu penelitian mengenai graf dengan grup sebagai himpunan simpulnya mengalami perkembangan pesat. Misalkan G adalah grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf komutatif $\varphi(X, G)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dan dua titik yang berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Misal titik x dan y adalah dua titik yang berbeda. Titik x dan $y$akan terhubung langsung di $\varphi(X, G)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010: 123). Beberapa penelitian mengenai graf komutatif, Xuan Long Ma dkk

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dalam artikelnya yang berjudul *the cyclic graph of finite group* memuat beberapa sifat khusus graf siklik dari grup dihedral dan grup quaternion meliputi bilangan *clique*. Selain itu, Xiu Liu dan Xuanlong Ma dalam artikelnya yang berjudul *the commutator graph of a finite group* salah satunya menjelaskan tentang graf komutator ke-n dari grup dihedral(D_{2n}). Pada tahun 2011 Chelvam dkk meneliti tentang *commuting graphs on dihedral group* yang membahas tentang bilangan *chromatic* dan bilangan *clique*.

Oleh karena itu peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "graf komutatif dari grup generalisasi quaternion" dimana himpunan simpul graf tersebu berupa elemen pada grup generalisasi quaternion. Graf generalisasi quaternion Q_{4n} adalah adalah grup berorder $4n$ yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$ dengan operasi biner perkalian, atau dapat ditulis $Q_{4n} = \langle a, b | b^2 = a^n, a^{2n} = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas dan $n \geq 2$. Misalkan grup quaternion G dan dua titik di G terhubung langsung jika dan hanya jika kedua titik tersebut komutatif di G.Kemudian akan dibentuk graf komutatif dari grup generalisasi quaternion.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka diberikan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} untuk $n = 2, 3, 4, 5$?
2. Bagaimana karakteristik graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}?

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Apakah graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} merupakan graf Euler?
4. Bagaimana formula bilangan dominasi graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bagaimana graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} untuk $n = 2, 3, 4, 5$.
2. Untuk mengetahui bagaimana karakteristik graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}.
3. Untuk mengetahui apakah graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} merupakan graf Euler.
4. Untuk mengetahui bagaimana formula bilangan dominasi graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan menjadi pelajaran yang sangat berharga dan menambah pengetahuan tentang graf, khususnya dalam ruang lingkup graf komutatif pada grup. Serta diharapkan agar dapat menjadi sumbangan pemikiran dalam melakuakan penelitian yang sejenis dengan pengembangan yang berbeda.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Batasan Masalah

Karakteristik graf komutatif Q_{4n} pada penelitian ini terbatas pada derajat titik pada graf komutatif Q_{4n} dengan $n \geq 2$, graf Euler, dan bilangan dominasi. Batasan masalah ini diberikan untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

1.6 Metode Penelitian

Pendekatan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu studi grup dan graf dalam menentukan graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}. Berikut ini adalah langkah-langkah analisis graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}:

1. Menentukan grup generalisasi quaternion Q_8.
2. Membangun graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_8.
3. Mengulang langkah 1 dan 2 untuk Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}
4. Mendeteksi pola graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} dengan ketentuan himpunan titik-titik pada graf berupa anggota pada grup dan sisi pada graf didefinisikan sebagai dua elemen dari anggota grup yang komutatif.
5. Menentukan apakah graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} merupakan graf Euler.
6. Menentukan bilangan dominasi pada graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}.
7. Menuliskan proposisi dan buktinya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bagian ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan serta yang berhubungan dengan penelitian. Bagian ini berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penelitian, salah satunya yaitu teori tentang grup dan graf.

Bab III Pembahasan

Bagian ini membahas masalah graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n}.

Bab IV Penutup

Bagian ini berisi hasil dari pembahasan berupa kesimpulan penelitiaan serta saran-saran untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

Misalkan operasi biner $*$ didefinisikan untuk setiap elemen dari himpunan G. Maka G disebut grup jika memenuhi empat kondisi berikut (Gilbert dan Gilbert, 2009:137):

1. G tertutup terhadap operasi biner $*$

   Artinya jika$(G,*)$ adalah grup maka $x * y \in G, \forall x, y \in G$
2. Operasi biner $*$ bersifat asosiatif

   Misalkan $(G,*)$ adalah grup maka $x * (y * z) = (x * y) * z,\ \forall x, y, z \in G$
3. G memiliki elemen identitas e

   Misalkan $(G,*)$ adalah grup maka $x * e = e * x = x, \forall x \in G$
4. G memiliki invers

   Misalkan $(G,*)$ adalah grup maka untuk setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sehingga $a * b = b * a = e$

Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi biner $*$. Maka G disebut grup komutatif atau grup abelian jika operasi biner $*$ bersifat komutatif (Gilbert dan Gilbert, 2009:138).

Misalkan G adalah suatu grup maka G disebut grup hingga jika banyaknya anggota dari grup G berhingga. Banyaknya anggota grup G disebut order dari G

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang dinotasikan dengan $o(G)$ atau $|G|$. Jika banyaknya anggota dari grup G tidak berhingga, maka G disebut grup tak-hingga (Gilbert dan Gilbert, 2009:141).

Elemen identitas e pada grup G memiliki order 1 karena 1 bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $e^1 = e$. Lebih jauh lagi e adalah satu-satunya elemen dari grup yang ordernya adalah 1, asalkan jika a sebarang elemen dari G yang ordernya 1, maka menurut definisi order elemen $a^1 = e$ yaitu $a = e$ (Raisinghania, 1980).

Berikut ini adalah beberapa sifat pada grup (Raisinghania, 1980):

A. Setiap elemen dari suatu grup memiliki invers tunggal.

   Bukti: misalkan G adalah grup dan e adalah elemen identitas dari G. Misalkan a sebarang elemen pada G dan b dan c adalah invers dari a. Maka, b adalah invers dari a sehingga $ba = ab = e$. Begitu juga c adalah invers dari a sehingga $ca = ac = e$. Pada suatu grup, komposisinya bersifat asosiatif sehingga $b\,(ac) = (ba)c$. Dengan demikian diperoleh $b = c$. Oleh karena itu, invers elemen dari G adalah tunggal.

B. Elemen identitas pada suatu grup adalah tunggal.

   Bukti: misalkan G adalah grup dan e dan e' adalah dua elemen identitas pada G. Maka, e adalah elemen identitas sehingga $ee' = e'e = e$ dan juga e' adalah elemen identitas sehingga $e'e = ee' = e$. Akan tetapi ee' maupun $e'e$ adalah elemen tunggal dari G dengan demikian $e' = ee' = e'e = e$ sehingga $e' = e$. Oleh karena itu, elemen identitas pada G adalah tunggal.

2. Invers dari invers elemen pada suatu grup adalah dirinya sendiri.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti: misalkan G adalah grup dan e adalah elemen identitas pada G. Misalkan a sebarang elemen pada G dan a^{-1} adalah invers dari a pada G. Akan dibuktikan bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$. Karena a^{-1} adalah invers dari a, maka $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

2.2 Grup Generalisasi Quaternion Q_{4n}

Grup quaternion Q adalah grup yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$ dimana $Q = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$dan $ba = a^3b$, $a^4 = 1$, dan $b^2 = a^2$ atau dapat ditulis sebagai berikut (Grillet, 2007:35):

$$Q = \langle a, b | a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1}\rangle.$$

Perkalian yang mungkin dari elemen-elemen Q adalah sebagai berikut: $a^i a^j = a^{i+j}$ untuk semua $0 \leq i, j \leq 3$ (dengan $a^{i+j} = a^{i+j-4}$ jika $i + j \geq 4$); $ba = a^3b, ba^2 = b^3 = a^2b$; $ba^3 = a^2ba = a^2a^3b = ab$, sehingga $ba^i = a^{4-i}b$ untuk setiap $0 \leq i \leq 3$; $a^ib\, a^jb = a^ia^{4-j}b^2 = a^{i+6-j}$ untuk setiap i, j. Berikut ini adalah tabel perkalian dari grup quaternion Q (Grillet, 2007:35):

Tabel 2.1 Tabel Perkalian Grup Quaternion Q

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

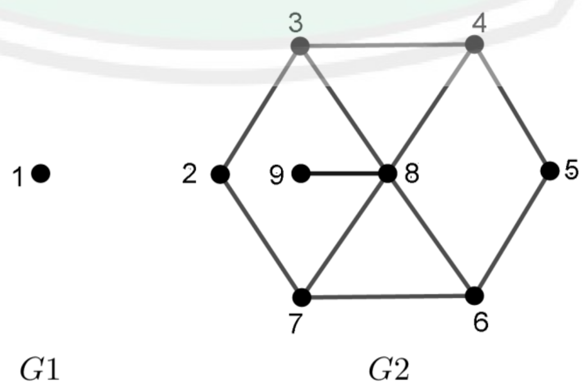
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Grup generalisasi quaternion Q_{4n} adalah grup berorder $4n$ yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$, atau dapat ditulis $Q_{4n} = \langle a, b | b^2 = a^n, a^{2n} = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas dan $n \geq 2$ (jika $n = 2$, maka $Q_{4n} = Q_8$). Adapun anggota Grup Quaternion yang digeneralisasi Q_{4n} dapat dibentuk sebagai berikut (Ma, dkk, 2013:5):

$$Q_{4n} = \{a, a^2, \cdots, a^{2n-1}, e, b, ab, \cdots, a^{2n-1}b\}.$$

2.3 Graf

Graf G didefinisikan sebagai himpunan pasangan (V, E). V adalah himpunan titik (*vertex*) yang tidak boleh kosong, dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang boleh kosong (Hartsfield dan Ringel, 1994:7). Berikut ini beberapa contoh graf.

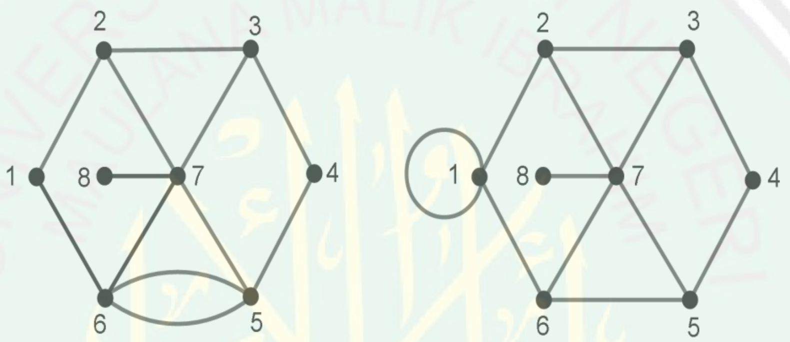


Gambar 2.1 Graf G1 dan G2

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$G1$ adalah graf yang hanya terdiri dari himpunan titik, tanpa ada sisi. $G2$ adalah graf yang terdiri dari himpunan titik dan himpunan sisi.

Suatu graf boleh jadi hingga atau tak-hingga, tergantung pada himpunan V hingga atau tak hinnga. Suatu graf tidak diperbolehkan dua titik digabungkan oleh lebih dari satu sisi. Jika terjadi demikian, maka disebut *multigraf*. Jika sisi graf terkait pada satu titik membentuk *loops*, maka disebut *pseudograf*. (Hartsfield dan Ringel, 1994:7).

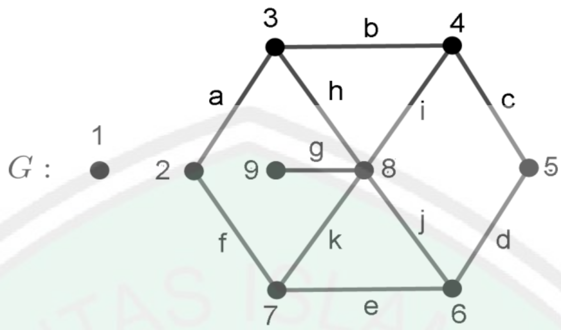


Gambar 2.2 Multigraf dan Pseudograf

Setiap sisi pada graf berhubungan dengan satu atau dua titik. Titik-titik tersebut dinamakan titik ujung graf. Suatu titik dan sisi pada suatu graf dikatakan saling terkait (*incident*) jika titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi pada graf. Suatu sisi pada graf maksimal terkait pada dua titik. Titik pada suatu graf dikatakan terhubung langsusng (*adjacent*) dengan titik yang lain jika titik-titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi yang sama. Sisi pada graf dikatatakan terhubung langsung pada sisi yang lain jika sisi-sisi tersebut saling terkait pada satu titik yang sama. Titik pada suatu graf dikatakan terisolasi (*isolated*) jika tidak ada sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan titik yang lain pada graf. Jumlah titik pada G disebut order dari G dan dinotasikan $n(G)$, dan jumlah sisi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pada G disebut size dari G dan dilambangkan $m(G)$. (Hartsfield dan Ringel, 1994:7).



Gambar 2.3 Hubungan Titik dengan Titik, Titik dengan Sisi, dan Sisi dengan Sisi

Titik 1 pada gambar 2.3 merupakan titik terisolasi (*isolated*), karena tidak ada sisi yang menghubungkan titik tersebut dengan titik yang lain pada graf. Titik 2 saling terkait pada sisi a dan sisi f, titik 3 saling terkait pada sisi a, sisi b, dan sisi h, titik 4 saling terkait pada sisi b, sisi c, dan sisi i. Titik 5 terhubung langsung dengan titik 4 dan titik 6, karena terdapat sisi c yang menghubungkan titik 5 dengan titik 4, dan sisi d yang menghubungkan titik 5 dan titik 6. Demikian pula titik 6 terhubung langsung dengan titik 5 dan titik 7, dan seterusnya. Sisi a terhubung langsung dengan sisi b dan sisi f, karena terdapat titik 2 yang menjadi titik ujung dari sisi a dan sisi f dan titik 3 yang menjadi titik ujung dari sisi a dan sisi b, sisi c bertetangga dengan sisi b dan sisi d, dan seterusnya.

2.4 Graf Komutatif

Misalkan G adalah grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf komutatif $\varphi(X, G)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Misal titik x dan y adalah dua titik yang berbeda. Titik x dan y akan terhubung langsung di $\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{G})$ jika dan hanya jika $\mathrm{xy} = \mathrm{yx}$ di G. (Vahidi & Talebi, 2010: 123)

2.5 Graf Komutatif di Grup Generalisasi Quaternion Q_{4n}

Grup generalisasi Quaternion Q_{4n} adalah adalah grup berorder $4n$ yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$, atau dapat ditulis $Q_{4n} = \langle a, b | b^2 = a^n, a^{2n} = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas dan $n \geq 2$ (jika $n = 2$, maka $Q_{4n} = Q_8$). Adapun anggota Grup Quaternion yang digeneralisasi Q_{4n} yaitu $Q_{4n} = \{a, a^2, \cdots, a^{2n-1}, e, b, ab, \cdots, a^{2n-1}b\}$. (Ma, dkk, 2013:5)

Graf komutatif di grup generalisasi quaternion Q_{4n} adalah graf yang memiliki himpunan titik $\mathrm{X} \subset \mathrm{Q}_{4\mathrm{n}}$ dan dan dua titik yang berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di Q_{4n}. Misal titik a dan b adalah dua titik yang berbeda di Q_{4n}. Titik a dan b akan terhubung langsung jika dan hanya jika $ab = ba$ di Q_{4n}.

2.6 Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G adalah jumlah titik di G yang terhubung langsung ke v atau biasa disebut lingkungan dari v dinotasikan dengan $(\mathrm{N}(v))$. Derajat dari titik v dinotasikan dengan $\deg_{\mathrm{G}} v$ atau lebih sederhana $\deg v$. Dengan demikian, derajat titik v pada graf G adalah banyaknya anggota pada $\mathrm{N}(v)$ atau dapat dinotasikan $\deg v = |\mathrm{N}(v)|$. Titik yang berderajat 0 disebut titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung. Derajat terbesar di antara titik-titik di G

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

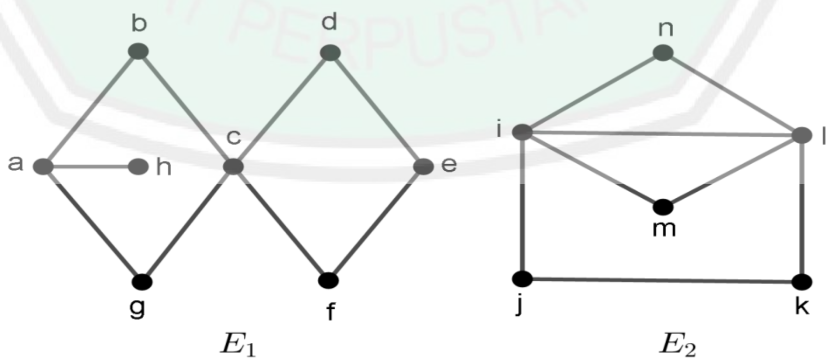
disebut derajat maksimum dari G didefinisikan $\Delta(\mathrm{G})$ dan derajat minimum dari G dinotasikan $\delta(\mathrm{G})$. (Chartrand, dkk, 2016:5)

Derajat titik 1 pada gambar 2.3 adalah 0 ($\deg v = 0$) karena titik tersebut terisolasi. Titik 2 berderajat 2 ($\deg 2 = 2$) karena ada dua sisi yang terkait, yaitu sisi a dan sisi f. Titik 3 berderajat 3 ($\deg 3 = 3$). Titik 4 berderajat 3 ($\deg 4 = 3$) dan seterusnya. Dengan demikian, diperoleh derajat maksimum dari graf G adalah $\Delta(G) = 5$ dan derajat minimum dari graf G adalah $\delta(G) = 0$.

2.7 Graf Euler

Misal G adalah graf terhubung nontrivial. Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing sisi di G tepat satu kali. Jika lintasan tersebut membentuk lintasan tertutup maka disebut sirkuit Euler. Sirkuit Euler adalah suatu sirkuit C dari G yang memuat semua sisi di G tepat satu kali. Suatu graf terhubung yang memuat sirkuit Euler disebut graf Euler. (Chartrand, dkk, 2016:117)

Teorema 2.1 Suatu graf terhubung nontrivial G adalah graf Euler jika dan hanya jika setiap titik di G memiliki derajat yang genap. (Chartrand, dkk, 2016:118)



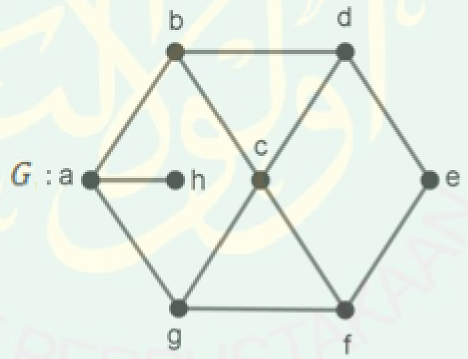
Gambar 2.4 Lintasan Euler dan Sirkuit Euler

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar E_1 adalah contoh lintasan Euler. Lintasan Euler pada E_1 adalah $a - b - c - d - e - f - c - g - a - h$. Gambar E_2 adalah contoh sirkuit Euler karena membentuk lintasan tertutup. Lintasan Euler pada E_2 adalah $i - j - k - l - m - i - l - n -$i. Berdasarkan teorema 2.1 graf G_2 merupakan graf Euler karena setiap titik di E_2 memiliki derajat yang genap.

2.8 Bilangan Dominasi

Misal G adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Suatu himpunan $D \subseteq V$ adalah himpunan dominasi dari G jika setiap titik di V selain D terhubung langsung minimal pada satu titik di D. Bilangan dominasi pada G, dinotasikan $\gamma(G)$, adalah kardinalitas terkecil dari himpunan dominasi G. (Kulli dan Janakiram, 1996:537)



Gambar 2.5 Graf G

Dari gambar 2.5 dapat dibangun himpunan dominasi$G$. Misal $D_1 = \{a, d, f\}$. Karena setiap titik di G selain D_1 terhubung langsung dengan minimal satu titik di G, maka D_1 merupakan himpunan dominasi. Misal $D_2 = \{g, h, d, e\}$ maka D_2 merupakan himpunan dominasi karena setiap titik di G selain D_2 terhubung langsung dengan minimal satu titik di D_2.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.9 Keragaman dalam Al-Quran

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada subbab 2.3 tentang pengertian graf, secara singkat dapat diartikan suatu graf adalah titik yang dihubungkan oleh sisi. Teori graf sebagai salah satu disiplin ilmu matematika telah banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pembuatan peta dimana satu kota dapat dihubungkan dengan kota lain apabila terdapat jalan yang menghubungkan kedua kota tersebut.

Banyak isyarat dalam al-Quran tentang disiplin ilmu matematika, salah satunya adalah tentang teori graf sebagaimana firman Allah dalam surah al-Baqarah/2:198-199:

لَيْسَ عَلَيْكُمْ جُنَاحٌ أَن تَبْتَغُوا۟ فَضْلًا مِّن رَّبِّكُمْ ۚ فَإِذَآ أَفَضْتُم مِّنْ عَرَفَٰتٍ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ
عِندَ ٱلْمَشْعَرِ ٱلْحَرَامِ ۖ وَٱذْكُرُوهُ كَمَا هَدَىٰكُمْ وَإِن كُنتُم مِّن قَبْلِهِۦ لَمِنَ ٱلضَّآلِّينَ ﴿١٩٨﴾
ثُمَّ أَفِيضُوا۟ مِنْ حَيْثُ أَفَاضَ ٱلنَّاسُ وَٱسْتَغْفِرُوا۟ ٱللَّهَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ غَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴿١٩٩﴾

"Bukanlah suatu dosa bagimu mencari karunia dari Tuhanmu. Maka apabila kamu bertolak dari Arafah, berzikirlah kepada Allah di Masy'arilharam. Dan berzikirlah kepada-Nya sebagaimana Dia telah memberi petunjuk kepadamu, sekalipun sebelumnya kamu benar-benar termasuk orang yang tidak tahu.(198). Kemudian bertolaklah kamu dari tempat orang banyak bertolak (Arafah) dan mohonlah ampunan kepada Allah. Sungguh, Allah Maha Pengampun, Maha Penyayang.(199)"

Tafsir Ibnu Katsir menjelaskan bahwa firman Allah "*Maka apabila kamu bertolak dari Arafah, berzikirlah kepada Allah di Masy'arilharam.*" Ditashrifkannya kata *'Arafaat* meskipun menjadi sebutan nama untuk jenis *mu'annats* (perempuan), karena pada dasarnya kata itu merupakan jamak dan dijadikan nama untuk tempat tertentu. 'Arafah adalah tempat wukuf dalam menunaikan ibadah haji. Dan wukuf itu sendiri merupakan amalan utama dalam ibadah haji. Dan diriwayatkan dari Ibnu 'Abbas, Sa'id bin Jubair, 'Ikrimah,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Mujahid, as-Suddi, Rabi' binAnas, al-Hasan al-Bashri, dan Qatadah. Mereka semua mengatakan "Masy'arilharam itu terletak di antara dua gunung". Sehubungan dengan hal tersebut, *Al-Masya'ir* berarti tanda-tanda yang jelas. Muzdalifah disebut Masy'arilharam karena berada dalam wilayah Tanah Haram (suci). (Abdullah, 1994:494)

Firman Allah "*Kemudian bertolaklah kamu dari tempat orang banyak bertolak (Arafah) dan mohonlah ampunan kepada Allah. Sungguh, Allah Maha Pengampun, Maha Penyayang.*" Kata *tsumma* dalam ayat ini digunakan untuk menyambungkan pernyataan dengan pernyataan secara berurutan dan tertib. Seolah-olah Allah memerintahkan orang yang telah berwukuf di 'Arafah agar bertolak ke Muzdalifah untuk berdzikir kepada Allah di Masy'arilharam. Juga memerintahkan supaya wukufnya dikerjakan bersama orang banyak di 'Arafah. (Abdullah, 1994:499)

Ayat di atas merupakan salah satu anjuran bagi orang-orang yang melakukan ibadah haji untuk berwukuf di 'Arafah kemudian bertolak ke Muzdalifah untuk berwukuf di Muzdalifah. Hal tersebut merupakan salah satu representasi teori graf pada al-Quran dimana 'Arafah dan Muzdalifah sebagai titik dan perjalanan yang dilakukan dari 'Arafah ke Muzdalifah adalah sisi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion Q_{4n}

Adapun langkah-langkah membangun graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} yaitu dengan menentukan hasil perkalian dari setiap dua anggota grup Q_{4n} kemudian membangun graf komutatif dari grup Q_{4n} dimana himpunan titiknya berupa semua anggota grup Q_{4n} dan dua titik yang berbeda akan saling terhubung jika saling komutatif di Q_{4n}.

3.1.1 Grup Quaternion Q_8

Grup quaternion Q_{4n}dengan $n = 2$ atau Q_8 adalah grup berorder 8 yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$, atau dapat ditulis $Q_8 = \langle a, b | b^2 = a^2, a^4 = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas. Adapun anggota $Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Perkalian elemen Q_8 akan disajikan pada tabel berikut:

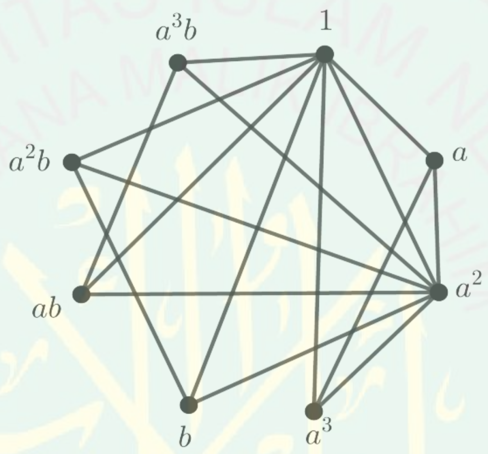
Tabel 3.1 Tabel Perkalian Q_8

$\cdot$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	1	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	1	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	1	a^3	a^2

Kemudian dari hasil perkalian tersebut dibentuk graf komutatif dari grup quaternion Q_8 dimana himpunan titik-titik pada graf berupa anggota pada grup dan sisi pada graf didefinisikan sebagai dua elemen dari anggota grup yang komutatif.



Gambar 3.1 Graf Komutatif Q_8

Graf komutatif dari Q_8 memiliki karakteristik titik 1 dan a^2 terhubung langsung pada semua titik di Q_8. Titik a dan a^3 saling terhubung langsung. Titik b terhubung langsung dengan a^2b. Titik ab terhubung langsung dengan a^3b.

3.1.2 Grup Quaternion Q_{12}

Grup quaternion Q_{4n} dengan $n = 3$ atau Q_{12} adalah grup berorder 12 yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$, atau dapat ditulis $Q_{12} = \langle a, b | b^2 = a^3, a^6 = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas. Adapun anggota $Q_{12} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b\}$. Perkalian elemen Q_{12} akan disajikan pada tabel berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

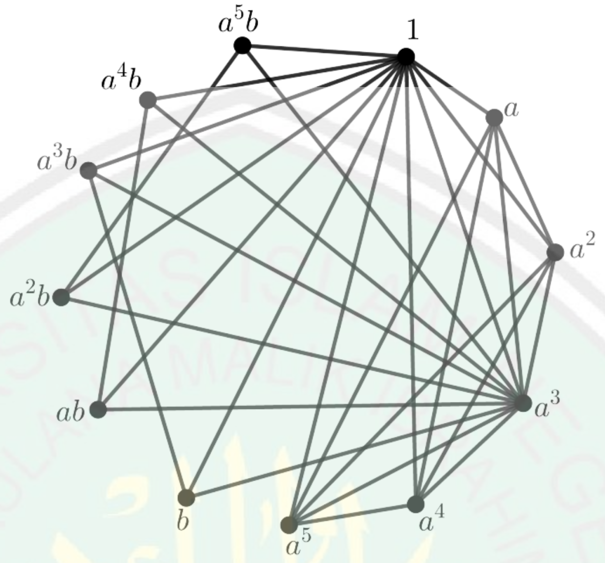
Tabel 3.2 Tabel Perkalian Q_{12}

$\cdot$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{a^3}$	$\boldsymbol{a^4}$	$\boldsymbol{a^5}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{ab}$	$\boldsymbol{a^2b}$	$\boldsymbol{a^3b}$	$\boldsymbol{a^4b}$	$\boldsymbol{a^5b}$
$\boldsymbol{1}$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
$\boldsymbol{a}$	a	a^2	a^3	a^4	a^5	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b
$\boldsymbol{a^2}$	a^2	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab
$\boldsymbol{a^3}$	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b
$\boldsymbol{a^4}$	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b
$\boldsymbol{a^5}$	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
$\boldsymbol{b}$	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^3	a^2	a	1	a^5	a^4
$\boldsymbol{ab}$	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^5
$\boldsymbol{a^2b}$	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	a^3b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
$\boldsymbol{a^3b}$	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a^4b	1	a^5	a^4	a^3	a^2	a
$\boldsymbol{a^4b}$	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^5b	a	1	a^5	a^4	a^3	a^2
$\boldsymbol{a^5b}$	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^2	a	1	a^5	a^4	a^3

Kemudian dari hasil perkalian tersebut dibentuk graf komutatif dari grup quaternion Q_{12} dimana himpunan titik-titik pada graf berupa anggota pada grup

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan sisi pada graf didefinisikan sebagai dua elemen dari anggota grup yang komutatif.



Gambar 3.2 Graf Komutatif Q_{12}

Graf komutatif dari Q_{12} memiliki karakteristik titik 1 dan a^3 terhubung langsung pada semua titik di Q_{12}. Titik $a$terhubung langsung dengan a^2, a^4 dan a^5. Titik b terhubung langsung dengan a^3b. Titik abterhubung langsung dengan a^4b. Titik a^2b terhubung langsung dengan a^5b.

3.1.3 Grup Quaternion Q_{16}

Grup quaternion Q_{4n} dengan $n = 4$ atau Q_{16} adalah grup berorder 16 yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b\rangle$, atau dapat ditulis $Q_{16} = \langle a, b | b^2 = a^4, a^8 = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ dimana e adalah elemen identitas. Adapun anggota $Q_{16} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b\}$. Perkalian elemen Q_{16} akan disajikan pada tabel berikut:

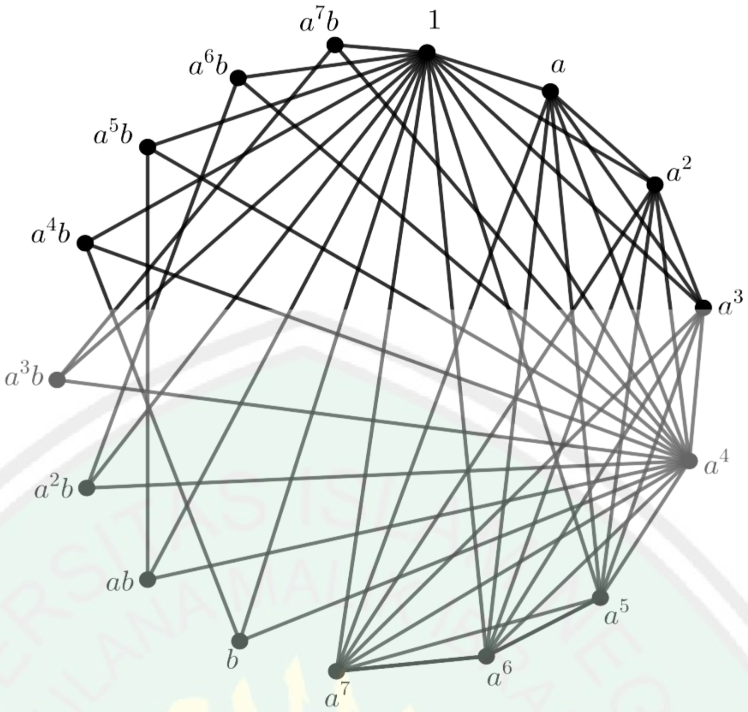
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.3 Tabel Perkalian Q_{16}

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{a^3}$	$\boldsymbol{a^4}$	$\boldsymbol{a^5}$	$\boldsymbol{a^6}$	$\boldsymbol{a^7}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{ab}$	$\boldsymbol{a^2b}$	$\boldsymbol{a^3b}$	$\boldsymbol{a^4b}$	$\boldsymbol{a^5b}$	$\boldsymbol{a^6b}$	$\boldsymbol{a^7b}$
$\mathbf{1}$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
$\boldsymbol{a}$	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b
$\boldsymbol{a^2}$	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab
$\boldsymbol{a^3}$	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b
$\boldsymbol{a^4}$	a^4	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b
$\boldsymbol{a^5}$	a^5	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
$\boldsymbol{a^6}$	a^6	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
$\boldsymbol{a^7}$	a^7	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
$\boldsymbol{b}$	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5
$\boldsymbol{ab}$	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6
$\boldsymbol{a^2b}$	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^7
$\boldsymbol{a^3b}$	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
$\boldsymbol{a^4b}$	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a^5b	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
$\boldsymbol{a^5b}$	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^6b	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
$\boldsymbol{a^6b}$	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^7b	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
$\boldsymbol{a^7b}$	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	1	a^7	a^6	a^5	a^4

Kemudian dari hasil perkalian tersebut dibentuk graf komutatif dari grup quaternion Q_{16} dimana himpunan titik-titik pada graf berupa anggota pada grup dan sisi pada graf didefinisikan sebagai dua elemen dari anggota grup yang komutatif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.3 Graf Komutatif Q_{16}

Graf komutatif dari Q_{16} memiliki karakteristik titik 1 dan a^4 terhubung langsung pada semua titik di Q_{16}. Titik a terhubung langsung dengan a^2, a^3, a^5, a^6 dan a^7. Titik b terhubung langsung dengan a^4b. Titik ab terhubung langsung dengan a^5b. Titik a^2b terhubung langsung dengan a^6b. Titik a^3b terhubung langsung dengan a^7b.

3.1.4 Grup Quaternion Q_{20}

Grup quaternion Q_{4n} dengan $n = 5$ atau Q_{20} adalah grup berorder 20 yang dibangun oleh dua elemen $\langle a, b \rangle$, atau dapat ditulis $Q_{20} = \langle a, b | b^2 = a^5, a^{10} = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ dimana e adalah elemen identitas. Adapun anggota $Q_{12} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, a^6b, a^7b, a^8b,$ $a^9b\}$. Perkalian elemen Q_{20} akan disajikan pada tabel berikut:

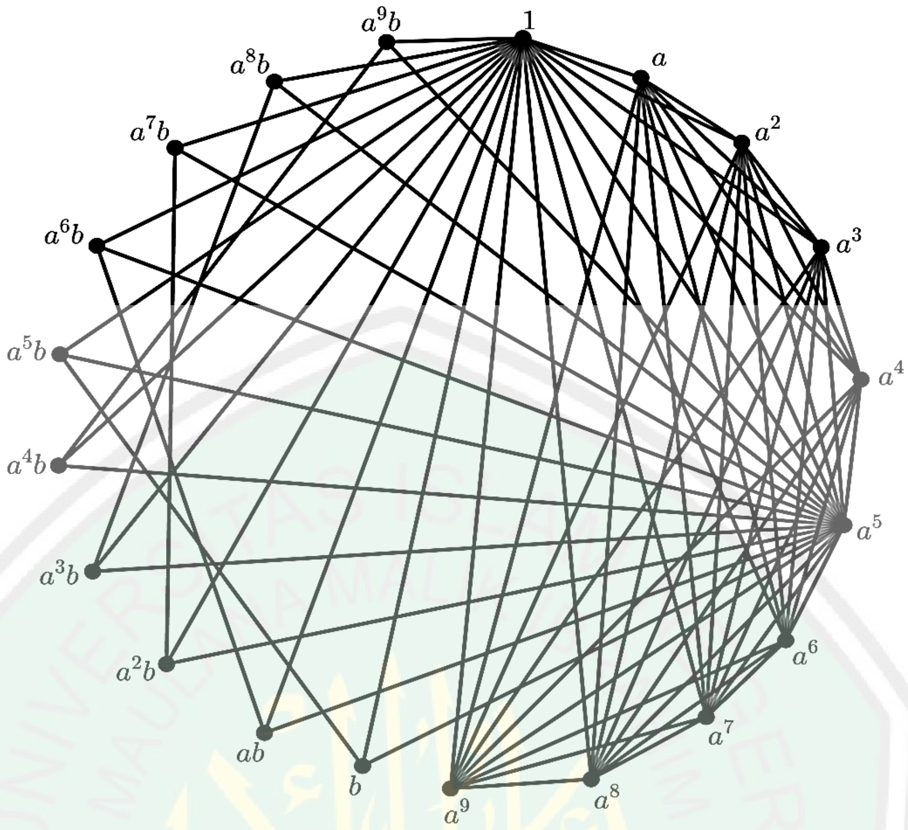
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.4 Tabel Perkalian Q_{20}

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{a^3}$	$\boldsymbol{a^4}$	$\boldsymbol{a^5}$	$\boldsymbol{a^6}$	$\boldsymbol{a^7}$	$\boldsymbol{a^8}$	$\boldsymbol{a^9}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{ab}$	$\boldsymbol{a^2b}$	$\boldsymbol{a^3b}$	$\boldsymbol{a^4b}$	$\boldsymbol{a^5b}$	$\boldsymbol{a^6b}$	$\boldsymbol{a^7b}$	$\boldsymbol{a^8b}$	$\boldsymbol{a^9b}$
$\mathbf{1}$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b
$\boldsymbol{a}$	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b
$\boldsymbol{a^2}$	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab
$\boldsymbol{a^3}$	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b
$\boldsymbol{a^4}$	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b
$\boldsymbol{a^5}$	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
$\boldsymbol{a^6}$	a^6	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6b	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b
$\boldsymbol{a^7}$	a^7	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7b	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b
$\boldsymbol{a^8}$	a^8	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8b	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b
$\boldsymbol{a^9}$	a^9	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9b	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	a^5b	a^6b	a^7b	a^8b
$\boldsymbol{b}$	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6
$\boldsymbol{ab}$	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7
$\boldsymbol{a^2b}$	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8
$\boldsymbol{a^3b}$	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9
$\boldsymbol{a^4b}$	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
$\boldsymbol{a^5b}$	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a
$\boldsymbol{a^6b}$	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^7b	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2
$\boldsymbol{a^7b}$	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^8b	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4	a^3
$\boldsymbol{a^8b}$	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^9b	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5	a^4
$\boldsymbol{a^9b}$	a^9b	a^8b	a^7b	a^6b	a^5b	a^4b	a^3b	a^2b	ab	b	a^4	a^3	a^2	a	1	a^9	a^8	a^7	a^6	a^5

Kemudian dari hasil perkalian tersebut dibentuk graf komutatif dari grup quaternion Q_{20} dimana himpunan titik-titik pada graf berupa anggota pada grup dan sisi pada graf didefinisikan sebagai dua elemen dari anggota grup yang komutatif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.4 Graf Komutatif Q_{20}

Graf komutatif dari Q_{20} memiliki karakteristik titik 1 dan a^5 terhubung langsung pada semua titik di Q_{20}. Titik a terhubung langsung dengan $a^2, a^3, a^4, a^6, a^7, a^8$ dan a^9. Titik b terhubung langsung dengan a^5b. Titik ab terhubung langsung dengan a^6b. Titik a^2b terhubung langsung dengan a^7b. Titik a^3b terhubung langsung dengan a^8b. Titik a^4b terhubung langsung dengan a^9b.

3.2 Karakteristik Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion Q_{4n}

Berdasarkan uraian di atas, penulis dapat membuat karakteristik umum graf komutatif dari grup quaternion Q_{4n}, yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

A. Karakteristik Graf Komutatif dari Q_8

Graf komutatif dari Q_8 memiliki karakteristik titik 1 dan a^2 terhubung langsung pada semua titik di Q_8. Titik a dan a^3 saling terhubung langsung. Titik b terhubung langsung dengan a^2b. Titik ab terhubung langsung dengan a^3b. Dari gambar 3.1 dapat diketahui bahwa $deg(1) = deg(a^2) = 7$, $deg(a) = deg(a^3) = 3$, $deg(b) = deg(ab) = deg(a^2b) = deg(a^3b) = 3$.

B. Karakteristik Graf Komutatif dari Q_{12}

Graf komutatif dari Q_{12} memiliki karakteristik titik 1 dan a^3 terhubung langsung pada semua titik di Q_{12}. Titik $a$terhubung langsung dengan a^2, a^4 dan a^5. Titik b terhubung langsung dengan a^3b. Titik abterhubung langsung dengan a^4b. Titik a^2b terhubung langsung dengan a^5b. Dari gambar 3.2 dapat diketahui bahwa $deg(1) = deg(a^3) = 11$, $deg(a) = deg(a^2) = deg(a^4) = deg(a^5) = 5$, $deg(b) = deg(ab) = deg(a^2b) = deg(a^3b) = deg(a^4b) = deg(a^5b) = 3$.

C. KarakteristikGraf Komutatif dari Q_{16}

Graf komutatif dari Q_{16} memiliki karakteristik titik 1 dan a^4 terhubung langsung pada semua titik di Q_{16}. Titik a terhubung langsung dengan a^2, a^3, a^5, a^6 dan a^7. Titik b terhubung langsung dengan a^4b. Titik ab terhubung langsung dengan a^5b. Titik a^2b terhubung langsung dengan a^6b. Titik a^3b terhubung langsung dengan a^7b. Dari gambar 3.3 dapat diketahui bahwa $deg(1) = deg(a^4) = 15$, $deg(a) = deg(a^2) = deg(a^3) = deg(a^5) = deg(a^6) = deg(a^7) = 7$, dan $deg(b) = deg(ab) = deg(a^2b) = deg(a^3b) = deg(a^4b) = deg(a^5b) = deg(a^6b) = deg(a^7b) = 3$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

D. Karakteristik Graf Komutatif dari Q_{20}

Graf komutatif dari Q_{20} memiliki karakteristik titik 1 dan a^5 terhubung langsung pada semua titik di Q_{20}. Titik a terhubung langsung dengan $a^2, a^3, a^4, a^6, a^7, a^8$ dan a^9. Titik b terhubung langsung dengan a^5b. Titik ab terhubung langsung dengan a^6b. Titik a^2b terhubung langsung dengan a^7b. Titik a^3b terhubung langsung dengan a^8b. Titik a^4b terhubung langsung dengan a^9b. Dari gambar 3.4 dapat diketahui bahwa $deg(1) = deg(a^5) = 19$, $deg(a) = deg(a^2) = deg(a^3) = deg(a^4) = deg(a^6) = deg(a^7) = \deg(a^8) = \deg(a^9) = 9$, dan $deg(b) = deg(ab) = deg(a^2b) = deg(a^3b) = deg(a^4b) = deg(a^5b) = deg(a^6b) = deg(a^7b) = \deg(a^8b) = \deg(a^9b) = 3$.

Berdasarkan uraian tersebut,dapat dirumuskan karakteristik umum graf komutatif dari grup generalisasi Quaternion Q_{4n} sebagai berikut.

Proposisi 1 $\deg(1) = \deg(a^n) = 4n - 1$

Bukti.

Berdasarkan definisi grup quaternion Q_{4n},$a^{2n} = e$.Misalkan $x \in Q_{4n}$ maka $e \cdot x = x \cdot e = x$ sehingga titik a^{2n} terhubung langsung dengan semua titik di Q_{4n}.

Misalkan $Q_1 = \{1, a, a^2, a^3, \dots, a^{2n-1}\}$ adalah *subset* dari Q_{4n} maka $a^n \cdot a^i = a^{n+i} = a^{i+n} = a^i \cdot a^n$ dengan $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$. Misalkan $Q_2 = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{2n-1}\}$ adalah *subset* dari Q_{4n} maka:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a^n \cdot a^i b = a^{n+i} \cdot b$$

$$= a^{i+n} \cdot b$$

$$= a^i \cdot a^n b$$

$$= a^i \cdot b^2 b$$

$$= a^i \cdot b^{2+1}$$

$$= a^i \cdot b^{1+2}$$

$$= a^i \cdot b \cdot b^2$$

$$= a^i b \cdot a^n$$

Sehingga terbukti bahwa a^n terhubung langsung dengan semua titik di Q_{4n}. Dengan demikian a^{2n} dan a^n terhubung langsung dengan semua titik di Q_{4n}. Artinya $\deg(a^{2n}) = \deg(a^n) = 4n - 1$.

Proposisi2 $\deg\left(a^i\right) = 2n - 1$, dengan $i \notin \{2n, n\}$

Bukti.

Untuk $j = 0,1,2, \ldots ,2n - 1$ maka $a^i \cdot a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j \cdot a^i$. Dengan demikian a^i terhubung langsung dengan a^j.

Berdasarkan definisi grup quaternion Q_{4n}, $bab^{-1} = a^{-1}$, maka:

$$a^j b \cdot a^i = a^j \cdot \left(a^i\right)^{-1} b$$

$$= a^j \cdot a^{-i} b$$

$$= a^{j-i} b$$

$$= a^{-i+j} b$$

$$= a^{-i} \cdot a^j b$$

$$= \left(a^i\right)^{-1} \cdot a^j b$$

$$= a^{2n-1} \cdot a^j b$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $j = 0,1,2, \dots, 2n-1$. Sehingga $a^j b \cdot a^i \neq a^i \cdot a^j b$. Dengan demikian a^i tidak terhubung langsung dengan $a^j b$.

Dengan demikian a^i hanya terhubung langsung dengan a^j dengan $j = 0,1,2, \dots, 2n-1$. Artinya $\deg(a^i) = 2n-1$, dengan $i \notin \{2n, n\}$.

Proposisi 3 $\deg(a^i b) = 3$

Bukti.

Untuk $i = 0,1,2, \dots, 2n-1$ maka:

$$
\begin{aligned}
a^{n+i}b \cdot a^i b &= a^{n+i} \cdot \left(a^i\right)^{-1} b \cdot b \\
&= a^{n+i} \cdot \left(a^i\right)^{-1} \cdot a^n \\
&= a^{i+n} \cdot \left(a^i\right)^{-1} \cdot a^n \\
&= a^i \cdot a^n \cdot \left(a^i\right)^{-1} \cdot a^n \\
&= a^i b \cdot b \cdot b a^i b^{-1} \cdot b \cdot b \\
&= a^i b . a^n \cdot a^i b \\
&= a^i b . a^{n+i} b
\end{aligned}
$$

Sehingga terbukti bahwa $a^{n+i}b$ terhubung langsung dengan $a^i b$. Dengan demikian $\deg(a^i b) = 3$.

3.3 Graf Euler pada Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion Q_{4n}

Pembahasan pada poin ini yaitu untuk menentukan apakah graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} merupakan graf Euler. Berdasarkan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

teorema 2.1 bahwa suatu graf terhubung nontrivial G disebut graf Euler jika dan hanya jika setiap titik di G memiliki derajat yang genap.

Berdasarkan proposisi 3, yaitu $\deg(a^i b) = 3$ untuk $i = 0,1,2, \dots ,2n - 1$, maka graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} bukan graf Euler.

3.4 Bilangan Dominasi pada Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion Q_{4n}

Bilangan dominasi pada suatu graf G, dinotasikan $\gamma(G)$, adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi. Berdasarkan proposisi 1 yaitu $\deg(1) = 4n - 1$, artinya titik 1 terhubung langsung dengan semua titik di graf komutatif daru Q_{4n}. Dengan demikian bilangan dominasi graf komutatif Q_{4n} $\gamma(Q_{4n}) = 1$.

Dari hasil penelitian tersebut, dapat ditarik sebuah kesimpulan bahwa satu titik mendominasi titik lainnya. Dalam kajian keislaman dapat di *qiyas*-kan dengan konsep ketuhanan, Tuhan adalah esa dan realitas yang esa. Kesatuan ketuhanan (tauhid) yang memberi kepada setiap kehidupan dan benda suatu arti dalam hubungannya dengan keseluruhan, bukan merupakan suatu kesatuan yang tidak berdaya. Artinya kesatuan ketuhanan adalah suatu gerak. Gerak tuhan yang selalu mencipta sesuatu, bukan gerak totalitas akan tetapi gerak pemersatu dan penyeluruh. (Garaudy, 1982: 47). Sebagaimana firman Allah dalam surah al-Fatihah ayat 2

الحَمْدُ لِلّٰهِ رَبِّ الْعٰلَمِيْنَ

"Segala puji bagi Allah, Tuhan semesta alam".

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ibnu Katsir dalam kitabnya menjelaskan bahwa "ا" dan "ل" dalam kata " الحَمْدُ " dimaksudkan untuk melengkapi bahwa segala macam jenis dan bentuk pujian itu, hanya untuk Allah. Kemudian kata *ar-Rabb* secara mutlak digunakan hanya untuk Allah kecuali jika disambungkan dengan kata lain setelahnya. Sedangkan *al-‘alamiin* adalah bentuk jama’ dari kata *‘aalamun*, yang tidak memiliki bentuk *mufrad*, artinya segala sesuatu yang ada selain Allah yang meliputi berbagai macam makhluk yang ada di langit, bumi, daratan, maupun lautan atau disebut juga dengan alam. (Abdullah, 1994: 26). Firman Allah dalam surah al-Israa’ ayat 44 *”Langit yang tujuh, bumi dan semua yang ada di dalamnya bertasbih kepada Allah. Dan tidak ada sesuatu pun melainkan bertasbih dengan memuji-Nya, tetapi kamu tidak mengerti tasbih mereka. Sungguh, Dia Maha Penyantun, Maha Pengampun.”* Ayat tersebut menjelaskan bahwa tujuh lapis langit dan juga bumi seisinya yang terdiri dari berbagai makhluk telah bertasbih kepada-Nya, mensucikan, mengagungkan, dan membesarkan-Nya. Dan semua itu menjadi saksi akan keesan-Nya. Hal itu bersifat umum, berlaku pada hewan, benda-benda dan juga tumbuh-tumbuhan. Akan tetapi manusia tidak mengerti tasbih mereka, karena mereka memiliki bahasa yang berbeda dengan bahasa manusia. (Abdullah, 1994: 169). Berdasarkan uraian tersebut, bahwa Allah adalah tuhan semesta alam yang berkuasa berkuasa atas seluruh makhluk dan Allah mendominasi segala makhluk di alam semesta.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan dapat disimpulkan beberapa karakteristik pada graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} yaitu:

1. Derajat titik Q_{4n}
   a. $\deg(1) = \deg(a^n) = 4n - 1$.
   b. $\deg(a^i) = 2n - 1$, untuk $i \neq \{2n, n\}$.
   c. $\deg(a^i b) = 3$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 2n - 1$.
2. Graf komutatif dari grup generalisasi quaternion Q_{4n} bukan graf Euler.
3. Bilangan dominasi pada graf komutatif Q_{4n} adalah $\gamma(Q_{4n}) = 1$.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, diharapkan bagi pembaca atau peneliti lain dapat mengembangkan penelitian ini menggunakan aturan yang berbeda misal dengan grup yang berbeda atau dengan menentukan apakah graf komutatif dari Q_{4n} merupakan graf Hamilton.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. 1994. *Lubabut Tafsir Min Ibni Katsir*, Jilid I. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E.M. Surabaya: Pustaka Imam Asy-Safi'i

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and digraphs Sixth Edition*. CRC Press Taylor& Francis Group

Garaudy, R. 1982. *Janji-Janji Islam*. Jakarta: N.V. Bulan Bintang

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra seventh Edition*. USA

Grillet, P.A. 2007. *Abstract Algebra Second Edition*. USA

Hartsfield. N dan Ringel. G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. New York: Academic Press

Kulli, V. R. & Janakiram, B. 1996. The Total Global Domination Number of a Graph. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 27 (6): 537-542

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980.*Modern Algebra*. New Delhi: S, Chand &Company LTD

Ma, X.L dan Wei, H.Q dan Zhong, G. 2013. *The Cyclic Graph of a Finite Group*.

Vahidi, j. & Talebi, A.A. 2010. The Commuting Graphs on Groups D_{2n} dan Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 1 (2): 123-127

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Khairil Bariyah adalah perempuan kelahiran Situbondo pada 19 Agustus 1995 dengan nama kecil *Iying*, biasa dipanggil Iril adalah anak kedua dari pasangan suami istri Zainul Bari dan Dahliya. Adik dari Badrus Saleh ini terlahir di Kp. Tengah Desa Asembagus RT. 03 RW. 04 Kecamatan Asembagus Kabupaten Situbondo. Selama menempuh kuliah tinggal di Jl. Sunan Kali Jaga Dalam No. 17 Dinoyo Lowokwaru Malang.

Jenjang pendidikannya dimulai dari Madrasah Ibtidaiyah Islamiyah Nahdlatul Ulama Trigonco Asembagus sejak tahun 2001 dan lulus pada tahun 2007. Sejak tahun 2007 melanjutkan ke SMP Ibrahimy Sukorejo hingga lulus pada tahun 2010. Jenjang sekolah menengah atasnya ditempuh di SMA Ibrahimy Sukorejo, masuk pada tahun 2010 dan lulus pada tahun 2013. Akhirnya menempuh pendidikan perkuliahan di Kampus Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sejak tahun 2013 dengan memilih Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Khairil Bariyah
NIM : 13610006
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Graf Komutatif dari Grup Generalisasi Quaternion
Pembimbing I : M. Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	4 Desember 2019	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	4 Desember 2019	Konsultasi kajian agama Bab I dan Bab II		2.
3	10 Desember 2019	Revisi Bab I dan Bab II, Konsultasi Bab III	3.	
4	20 Desember 2019	ACC		4.
5	27 Desember 2019	ACC kajian Agama	5.	
6	10 Maret 2020	Revisi proposal dan konsultasi lanjutan Bab III		6.
7	13 Maret 2020	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV	7.	
8	27 Maret 2020	ACC kajian Agama		8.
9	31 Maret 2020	ACC Keseluruhan	9.	

Malang, 31 Maret 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG