SUBMODUL DARI MODUL BEBAS YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

OLEH
SYIFA QOLBY AL-IMANI
NIM. 13610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SUBMODUL DARI MODUL BEBAS YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Syifa Qolby Al-Imani
NIM. 13610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SUBMODUL DARI MODUL BEBAS YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

Oleh
Syifa Qolby Al-Imani
NIM. 13610017

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 22 Januari 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19731212 199803 1 008

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SUBMODUL DARI MODUL BEBAS YANG DIBANGUN SECARA HINGGA ATAS DAERAH IDEAL UTAMA

SKRIPSI

Oleh
Syifa Qolby Al-Imani
NIM. 13610017

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Mei 2020

Penguji Utama	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Dr. Ahmad Barizi, M.A	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Syifa Qolby Al-Imani
NIM	: 13610017
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Submodul dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau, pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya sendiri.

Malang, 22 Januari 2020
Yang membuat pernyataan,

Syifa Qolby Al-Imani
NIM. 13610017

MOTO

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱليُسرَ وَلاَ يُرِيدُ بِكُمُ ٱلعُسرَ

"Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu" (Q.S. Al-Baqarah: 185).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Santoso, ibunda Siti Rohmatun Mu'awanah, dan kakak tercinta Zidna Al'Azizah Rosshofa yang selalu memberikan motivasi dan semangat bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Submodul dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama" untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu penyelesaian skripsi ini, yakni kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing penulis menyelesaikan skripsi ini.

6. Kedua orang tua penulis dan seluruh keluarga penulis yang selalu mendoakan keberhasilan penulis.
7. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang telah banyak memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 22 Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Al-Imani, Syifa Qolby. 2020. **Submodul dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: daerah ideal utama, modul bebas, modul atas daerah ideal utama

Struktur aljabar merupakan salah satu materi yang dipelajari dalam matematika yang melibatkan satu atau lebih himpunan dan satu atau lebih operasi biner dengan memenuhi beberapa aksioma. Beberapa contoh sruktur aljabar dari yang paling sederhana hingga yang kompleks adalah grup, ring, ruang vektor, dan modul. Perlu diketahui bahwa modul terbentuk dari perkalian skalar antara grup dan ring. Modul tersebut terbentuk dari ring yang bersifat secara umum, yang disebut sebagai ring tumpuan. Apabila ring tumpuan modul adalah lapangan, maka modul tersebut disebut ruang vektor.

Sifat yang terdapat pada ring tumpuan mempengaruhi sifat modul. Sebagai contoh sifat khas pada lapangan, yaitu untuk setiap unsur taknolnya memiliki invers, membuat ruang vektor pasti memiliki basis. Begitu juga untuk subruangnya. Selain itu, basis pada subruang dapat diperluas menjadi basis ruang vektor.

Berbeda dengan modul atas ring secara umum. Jika modul tersebut adalah modul bebas, yaitu modul yang memiliki basis, maka submodulnya belum tentu bebas. Begitu juga dengan basis submodulnya belum tentu dapat diperluas menjadi basis modul.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat submodul dari modul bebas atas daerah ideal utama. Penelitian ini dibatasi pada modul yang dibangun secara hingga. Hasil dari penelitian ini adalah:

1. Submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas.
2. Basis submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama tidak dapat diperluas menjadi basis modul. Tetapi, kelipatan beberapa unsur basis modulnya dapat membentuk basis bagi submodul.

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengkaji sifat submodul dari modul bebas atas ring tumpuan lainnya.

ABSTRACT

Al-Imani, Syifa Qolby. 2020. **Submodule of Finitely Generated Free Module Over Principal Ideal Domain**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A

Keyword: principal ideal domain, free module, module over principal ideal domain

The algebraic structure is one of the materials studied in mathematics involving one or more sets and one or more binary operations fulfilling some axioms. Some examples of algebraic structure from the simplest to the complex are groups, rings, vector spaces, and modules. Modules are formed from scalar multiplication between group and ring. The module is formed from a common ring, which is referred to as the base ring. If the base ring of module is a field, then the module is called vector space.

Properties in the base ring affect the properties of the module. As an example the properties of the field, i.e. for every nonzero element has an inverse, making the vector space definitely has a basis. Likewise for his subspace. In addition, the basis on the subspace can be expanded into a vector space basis.

It is different from the module over general ring. If the module is a free module, which is a module that has a basis, then its submodules are not necessarily free. Likewise, its submodules basis may not necessarily be expanded to a module basis.

The purpose of the study is to know the submodule properties of the free modules over principal ideal domain. This research is limited to modules that are finitely generated. The results of this study are:

1. Submodule of the finitely generated free module over principal ideal domain is free.
2. The submodule's basis of the finitely generated free module over principal ideal domain cannot be expanded to a module's basis. However, multiples of some elements of the module's basis can form a basis for submodules.

For further study, it is expected to examine the properties of submodules of free modules over other base rings.

ملخص

الإيماني، شفاء قلبي. ٢٠٢٠. **وحدات فرعية من الوحدات الحرة المبنية على أعلى المناطق المثالية**. بحث جامعي. قسم رياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانج. المشرف:(1) الدكتور هيرور الرحمن الماجستير، (2) الدكتور أحمد باريزي الماجستير

الكلمات المفتاحية: المنطقة المثالية الرئيسية ، وحدة مجانية ، وحدة أعلى منطقة مثالية الرئيسية

التركيب الجبري هو أحد المواد التي تمت دراستها في الرياضيات والتي تتضمن مجموعة أو أكثر من العمليات الثنائية أو أكثر عن طريق تحقيق العديد من البديهيات. بعض الأمثلة على الهياكل الجبرية من أبسطها إلى أكثرها تعقيدًا هي المجموعات والحلقات ومساحات المتجهات والوحدات. يرجى ملاحظة أن يتم تشكيل وحدة عن طريق الضرب العددية بين المجموعة والحلقة. تتشكل الوحدة من حلقة عامة ، والتي تسمى حلقة التمثال. إذا كانت حلقة القدم بالوحدة النمطية عبارة عن حقل ، فيُطلق على الوحدة مساحة متجه.

تؤثر الخصائص الموجودة في حلقة التمثال على طبيعة الوحدة. على سبيل المثال ، تتميز خاصية الحقل ، لكل عنصر غير صفري بعكس ، مما يجعل مساحة المتجه يجب أن يكون لها قاعدة. وبالمثل بالنسبة للفضاء الفرعي. بالإضافة إلى ذلك ، يمكن توسيع القواعد في الفضاءات الفرعية إلى قواعد الفضاء المتجه.

تختلف عن الوحدة في الحلبة بشكل عام. إذا كانت الوحدة النمطية وحدة نمطية مجانية ، أي وحدة نمطية لها قاعدة ، فإن الوحدة الفرعية ليست مجانية بالضرورة. وبالمثل ، قد لا يتم بالضرورة توسيع قاعدة الوحدات الفرعية لتصبح قاعدة للوحدة النمطية.

الغرض من هذه الدراسة هو تحديد الطبيعة الفرعية للوحدة الحرة على المنطقة المثالية الرئيسية. يقتصر هذا البحث على الوحدات التي بنيت في ما يصل إلى. نتائج هذه الدراسة هي:

١. الوحدات الفرعية من الوحدات المجانية المبنية في المنطقة المثالية الرئيسية مجانية.
٢. لا يمكن تمديد قاعدة الوحدة الفرعية للوحدة المجانية التي تم بناؤها إلى المنطقة المثالية الرئيسية لتشمل قاعدة الوحدة النمطية. ومع ذلك ، يمكن أن تشكل مضاعفات بعض العناصر الأساسية للوحدة الأساس لوحدات فرعية

لمزيد من البحث ، من المتوقع أن تكون قادرًا على فحص خصائص الوحدات الفرعية للوحدات الحرة على حلقات التمثال الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan salah satu materi yang dipelajari di matematika. Struktur aljabar melibatkan satu atau lebih himpunan dan satu atau lebih operasi, disebut dengan operasi biner, yang memenuhi beberapa aksioma.

Grup merupakan struktur aljabar yang paling sederhana karena hanya melibatkan satu himpunan dan satu operasi biner. Operasi biner pada grup haruslah bersifat tertutup dan assosiatif. Selain itu, agar bisa dikatakan grup maka pada himpunan tersebut harus memuat unsur identitas dan invers bagi setiap unsur di dalamnya. Jika operasi pada grup bersifat komutatif, maka grup tersebut disebut grup komutatif atau grup Abelian.

Struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup adalah gelanggang atau *ring* karena dilengkapi dua operasi biner. Ring merupakan grup Abelian terhadap operasi biner pertama dan membentuk semigrup terhadap operasi biner kedua, serta berlaku sifat distributif operasi kedua terhadap operasi pertama. Sifat-sifat lain dari operasi biner kedua akan mempengaruhi sifat pada ring sehingga muncul beberapa jenis ring, seperti ring komutatif, ring dengan unsur kesatuan, daerah integral, daerah ideal utama, dan lapangan (*field*).

Dari grup Abelian dan ring dapat dibentuk suatu struktur aljabar yang lain yaitu modul. Modul atas ring adalah grup Abelian yang dilengkapi perkalian skalar dari ring sehingga memenuhi sifat-sifat tertentu. Dalam hal ini, ring tersebut disebut sebagai ring tumpuan. Jika ring tumpuan dari modul adalah lapangan maka modul ini adalah ruang vektor.

Salah satu sifat penting dari ruang vektor adalah bahwa setiap ruang vektor taknol memiliki basis. Demikian juga setiap subruang taknolnya. Lebih lanjut basis subruang dapat diperluas menjadi basis dari ruang vektor. Sifat-sifat tersebut tidak berlaku pada modul dengan ring tumpuan secara umum. Modul yang memiliki basis disebut modul bebas. Submodul dari modul bebas belum tentu bebas atau memiliki basis. Misalkan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}-$modul dan merupakan modul bebas. Salah satu submodul taknol dari modul $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z} \times \{0\}$. Akan tetapi, submodul $\mathbb{Z} \times \{0\}$ bukan merupakan modul bebas karena tidak memiliki unsur bebas linier (Roman, 2008: 142).

Sifat modul dipengaruhi oleh sifat ring tumpuannya. Pada penelitian ini akan dikaji sifat-sifat submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama khususnya terkait sifat kebebasan submodulnya dan sifat basis submodul bebas.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada skripsi ini adalah

1. Apakah submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan modul bebas?
2. Apakah basis submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat diperluas menjadi basis modulnya?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui kebebasan submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.
2. Untuk mengetahui perluasan basis submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah untuk mendapatkan wawasan mengenai kebebasan submodul dan perluasan basis submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.

1.5. Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Langkah pertama yang dilakukan adalah mepelajari materi dasar yang dibutuhkan untuk memahami ruang vektor dan modul. Materi dasar tersebut adalah definisi grup, ring, subring, dan beberapa jenis ring, seperti lapangan dan daerah ideal utama.

Langkah selanjutnya adalah mempelajari ruang vektor. Beberapa materi yang dipelajari adalah definisi ruang vektor dan subruangnya, basis, dan beberapa sifat dari ruang vektor. Begitu juga dalam mempelajari modul. Beberapa materi yang dipelajari adalah definisi modul dan submodul, basis, unsur dan modul torsi, rantai submodul, ring dan modul Noetherian, serta jumlah langsung modul. Selain itu, juga dipelajari beberapa sifat modul yang dipengaruhi oleh ring tumpuannya.

Setelah memahami konsep dasar ruang vektor dan modul, tahapan selanjutnya adalah mempelajari sifat dari modul atas daerah ideal utama beserta submodulnya. Modul yang digunakan pada penelitian ini dibatasi pada modul yang dibangun secara hingga. Langkah inti yang dilakukan dalam penelitian ini adalah membuktikan apakah submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama merupakan modul bebas dan apakah basisnya dapat diperluas.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada proposal penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas mengenai kajian-kajian kepustakaan yang menjadi landasan masalah dalam pembahasan terkait basis subruang vektor dan basis submodul dari modul atas daerah ideal utama yang terdiri dari empat subbab, yaitu grup, ring, ruang vektor, dan modul.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas mengenai basis submodul dari modul atas daerah ideal utama. Jika modul atas daerah ideal utama memiliki basis, apakah submodulnya memiliki basis juga. Pembahasan kedua adalah mengenai perluasan basis submodul dari modul bebas atas daerah ideal utama menjadi basis modulnya.

BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi mengenai kesimpulan dari pembahasan pada bab sebelumnya dan saran bagi pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Grup

Grup merupakan struktur aljabar paling sederhana karena melibatkan satu himpunan tak kosong dan satu operasi biner. Berikut definisinya.

Definisi 2.1

Suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ disebut sebagai **grup**, dinotasikan dengan $(G,*)$, apabila memenuhi sifat-sifat berikut.

1. G bersifat tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Operasi biner $*$ bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. G memuat unsur identitas, yaitu terdapat $i \in G$ sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * i = i * a = a$.
4. G memuat invers, yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = i$ dimana $a^{-1} = b$ disebut invers dari a.

Apabila operasi biner $*$ pada grup $(G,*)$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka grup $(G,*)$ disebut grup Abelian atau **grup komutatif** (Gilbert dan Gilbert, 2009: 138).

Definisi 2.2

Misalkan $(G,*)$ adalah grup. Suatu himpunan tak kosong $S \subseteq G$ disebut **subgrup** dari G apabila S membentuk grup dengan operasi biner $*$ yang terdefinisi pada grup G.

Setiap grup setidaknya memiliki dua subgroup, yaitu himpunan identitas dan grup itu sendiri. Subgrup tersebut disebut **subgrup trivial**.

Contoh 2.3

Himpunan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dengan operasi biner tambah modulo 5 membentuk grup. Lebih lanjut operasi tersebut bersifat komutatif. Jadi grup $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup Abelian.

2.2. Ring

Ring adalah struktur aljabar yang lebih kompleks dari grup, yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan beberapa sifat tambahan. Berikut definisi ring.

Definisi 2.4

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner $*$ dan $\#$ disebut **ring**, dinotasikan dengan $(R, *, \#)$, apabila memenuhi sifat-sifat berikut.

1. R bersifat tertutup terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a * b \in R$.
2. Operasi biner $*$ bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Operasi biner $*$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a * b = b * a$.
4. R memuat unsur identitas terhadap operasi $*$, yaitu terdapat i untuk setiap $a \in R$ berlaku $a * i = i * a = a$.

5. R memuat invers, yaitu untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = i$ dan invers dari a terhadap $*$ dilambangkan dengan $-a$.
6. R bersifat tertutup terhadap operasi biner #, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a\#b \in R$.
7. Operasi biner # bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a\#b)\#c = a\#(b\#c)$.
8. Operasi biner # bersifat distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a * b)\#c = (a\#c) * (b\#c)$ dan $a\#(b * c) = (a\#b) * (a\#c)$.

(Gilbert dan Gilbert, 2009: 257).

Dengan kata lain, suatu ring $(R,*,\#)$ adalah himpunan tak kosong R dengan operasi biner $*$ yang membentuk grup Abelian dan R tertutup terhadap operasi biner #, serta operasi biner # bersifat assosiatif dan distributif.

Secara umum, operasi biner yang digunakan dalam teori ring disebut operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$. Jadi, ring $(R,*,\#)$ dapat ditulis menjadi $(R,+,\times)$. Perlu diperhatikan bahwa perkalian skalar $a \times b$ akan ditulis menjadi ab, untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 2.5

Misalkan $(R,+,\times)$ adalah ring. Suatu himpunan tak kosong $H \subseteq R$ disebut **subring** dari R apabila H membentuk ring dengan operasi biner $+$ dan $\times$ yang terdefinisi pada ring R.

Definisi 2.6

Suatu ring $(R, +, \times)$ disebut **ring komutatif** apabila operasi biner kedua, yaitu perkalian $(\times)$, bersifat komutatif. Dengan kata lain, untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = ba$.

Definisi 2.7

Suatu ring $(R, +, \times)$ disebut **ring dengan kesatuan** apabila $(R, \times)$ membentuk semigrup dengan elemen kesatuan atau identitas. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in R$ dengan e sebagai identitas perkalian maka berlaku $ae = ea = a$.

Jika ring $(R, +, \times)$ adalah ring komutatif dan ring dengan kesatuan maka ring R disebut sebagai **ring komutatif dengan unsur kesatuan** (Gilbert dan Gilbert, 2009: 261).

Contoh 2.8

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan ring dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian, dinotasikan dengan $(\mathbb{R}, +, \times)$. Ring tersebut merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan, dimana 1 sebagai identitas perkalian.

Definisi 2.9

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah ring dan $a \in R$ dimana $a \neq 0$. Jika terdapat $b \in R$ dimana $b \neq 0$ sedemikian sehingga berlaku $ab = 0$ atau $ba = 0$ maka a disebut **pembagi nol (*zero divisor*)** atau pembagi nol sejati (*proper zero divisor*) (Gilbert dan Gilbert, 2009: 263).

Contoh 2.10

Himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ membentuk ring komutatif dengan operasi biner tambah $(+)$ dan kali $(\times)$ modulo 6. Untuk $\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{3} \times \bar{2} = \bar{0}$. Jadi, $\bar{2}$ disebut pembagi nol.

Definisi 2.11

Suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan $e \neq 0$ yang tidak memiliki pembagi nol disebut sebagai **daerah integral**.

Definisi 2.12

Lapangan (*field*) adalah suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan $e \neq 0$ dimana setiap unsur taknolnya memiliki invers (unit) terhadap operasi perkalian.

Contoh 2.13

$(\mathbb{R}, +, \times)$ adalah lapangan dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan riil.

Teorema 2.14

Setiap lapangan (*field*) adalah daerah integral (Gilbert dan Gilbert, 2009: 272).

Bukti:

Misalkan $(F, +, \times)$ adalah lapangan. Akan dibuktikan bahwa ring F adalah daerah integral.

Untuk setiap $0 \neq a \in F$ terdapat $a^{-1} \in F$. Anggap bahwa $ab = 0$ untuk suatu $b \in F$ sedemikian sehingga

$$ab = 0 \Leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}.0$$

$$\Leftrightarrow (a^{-1}a)b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad eb = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 0$$

Jadi, lapangan (*field*) adalah daerah integral. ■

Definisi 2.15

Misalkan R adalah ring. Himpunan bagian I dari R disebut sebagai **ideal** dari R jika memenuhi kondisi berikut.

1. I adalah subring dari R.
2. Untuk semua $x \in I$ dan $r \in R$ berlaku
   a. I adalah ideal kanan, yaitu $xr \in I$, dan
   b. I adalah ideal kiri, yaitu $rx \in I$.

Suatu ideal dari ring komutatif dengan unsur kesatuan, yang dibangun oleh satu unsur, disebut **ideal utama**. Misalkan I adalah ideal dari ring R. I disebut ideal utama dari R jika terdapat $a \in R$ sehingga

$$I = \langle a \rangle = \{ar | r \in R\}.$$

Definisi 2.16

Misalkan R adalah daerah integral dan I ideal dari R. Jika setiap ideal I adalah ideal utama maka R disebut **daerah ideal utama** (Roman, 2008: 24).

Contoh 2.17

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah daerah integral dan membentuk daerah ideal utama.

2.3. Ruang Vektor

Ruang vektor merupakan struktur aljabar yang melibatkan lapangan sebagai ring tumpuannya. Berikut definisinya.

Definisi 2.18

Misalkan F adalah lapangan (*field*). Suatu ruang vektor V atas F adalah himpunan tak kosong V dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar

$$F \times V \to V$$

dengan

$$(a, v) \to a.v = av$$

untuk $a \in F$ dan $v \in V$, yang memenuhi sifat-sifat berikut.

1. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $u, v, w \in V$ berlaku

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

2. Operasi penjumlahan bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $u, v \in V$ berlaku

$$u + v = v + u$$

3. V memuat vektor nol pada operasi penjumlahan, yaitu terdapat suatu vektor $0 \in V$ berlaku

$$0 + v = v + 0 = v; \forall v \in V$$

4. V memuat invers pada operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap $u \in V$, terdapat vektor $-u \in V$ sedemikian sehingga

$$u + (-u) = -u + u = 0$$

5. Beberapa sifat perkalian skalar, yaitu untuk setiap skalar $a, b \in F$ dan untuk setiap vektor $u, v \in V$ berlaku

$$a(u + v) = au + av$$

$$(a + b)u = au + bu$$

$$(ab)u = a(bu)$$

$$1u = u$$

(Roman, 2008: 35).

Contoh 2.19

Misalkan $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ adalah himpunan matriks dengan order $m \times n$ dengan entri-entri di lapangan F. Selanjutnya, dapat dibentuk ruang vektor $\mathcal{M}_{m\times n}(F)$ atas lapangan F dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian skalar.

Definisi 2.20

Subruang S dari ruang vektor V adalah himpunan tak kosong $S \subseteq V$ yang membentuk ruang vektor dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian skalar yang terdefinisi pada V. Notasi subruang S dari ruang vektor V adalah $S \leq V$.

Subruang S dikatakan dibangun oleh suatu himpunan vektor-vektor apabila setiap vektor di subruang S dapat dinyatakan dalam kombinasi linier beberapa vektor di himpunan tersebut. Berikut definisi himpunan pembangun.

Definisi 2.21

Misalkan S adalah subruang vektor V dan himpunan tak kosong $H \subseteq V$. **Subruang S yang dibangun oleh himpunan H** adalah himpunan semua kombinasi linier dari vektor-vektor di H, ditulis sebagai

$$\langle H\rangle = \text{span}(H) = \{r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots +_n v_n | r_i \in F, v_i \in H\}$$

(Roman, 2008: 44).

Jika H adalah himpunan berhingga maka subruang S dikatakan **dibangun secara berhingga**. Apabila H membangun ruang vektor V maka dapat ditulis dengan V =span(H).

Definisi 2.22

Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F. Suatu himpunan tak kosong $H \subseteq V$ disebut **bebas linier** jika untuk setiap vektor yang berbeda, yaitu $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$ dan unsur-unsur $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ berlaku

$$a_1 h_1 + a_2 h_2 + \cdots + a_n h_n = 0 \Rightarrow a_i = 0; \;\; i = 1,2, \dots, n$$

(Roman, 2008: 45).

Teorema 2.23

Misalkan H adalah himpunan di ruang vektor V. Pernyataan berikut ekuivalen:

1. H adalah bebas linier dan membangun V.
2. Setiap vektor taknol $v \in V$ dapat dinyatakan secara tunggal oleh kombinasi linier dari vektor-vektor di H.
3. H adalah himpunan pembangun minimal, yaitu H membangun V tetapi tidak terdapat subhimpunan sejati dari H yang membangun V.
4. H merupakan himpunan bebas linier maksimal, yaitu H bebas linier dan tidak terdapat superset sejati dari H yang bebas linier.

Suatu himpunan dari V yang memenuhi sebarang kondisi pada Teorema 2.23 disebut sebagai suatu **basis** ruang vektor V (Roman, 2008: 47).

Setiap ruang vektor, kecuali ruang vektor nol, memiliki basis. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.24

Misalkan V adalah ruang vektor taknol. I adalah subhimpunan bebas linier di V dan S adalah subhimpunan pembangun V yang memuat I. Maka terdapat basis B untuk V sehingga $I \subseteq B \subseteq S$. Khususnya

1. Setiap ruang vektor, kecuali ruang vektor nol $\{0\}$, memiliki basis.
2. Setiap himpunan bebas linier di V termuat di suatu basis V.
3. Setiap himpunan pembangun di V memuat suatu basis V.

(Roman, 2008: 48).

Bukti.

Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan F. Setiap ruang vektor V pasti memiliki himpunan pembangun, minimal dirinya sendiri. Misalkan S adalah himpunan pembangun V yang memuat himpunan bebas linier I di V, ditulis $I \subseteq S$. Anggap bahwa $\mathcal{P}$ adalah koleksi dari semua himpunan bebas linier di ruang vektor V yang memuat I dan termuat di S. Sehingga $\mathcal{P} \neq \emptyset$ karena $I \in \mathcal{P}$.

Jika $\mathcal{C}$ adalah rantai himpunan bebas linier di $\mathcal{P}$, yaitu

$$\mathcal{C} = \{I_k | k \in K\}$$

maka gabungan dari himpunan bebas linier I_k, yaitu

$$\mathcal{U} = \bigcup_{k \in K} I_k$$

adalah bebas linier dan memenuhi rantai $I \subseteq \mathcal{U} \subseteq S$ dimana $\mathcal{U} \in \mathcal{P}$. Dengan demikian rantai pada koleksi $\mathcal{P}$ memiliki batas atas, yaitu $\mathcal{U}$. Berdasarkan Lemma Zorn yang menyatakan bahwa suatu himpunan terurut parsial dimana setiap rantainya memiliki batas atas, maka himpunan tersebut minimal memiliki satu unsur maksimal. Sehingga $\mathcal{P}$ memiliki unsur maksimal, misalkan $\mathcal{B}$, yang juga bebas linier.

Perhatikan bahwa pada Teorema 2.23 menyatakan bahwa jika suatu himpunan adalah bebas linier maksimal maka himpunan tersebut adalah basis ruang vektor. Jadi, $\mathcal{B}$ adalah basis ruang vektor V. ■

Ingat bahwa setiap subruang merupakan ruang vektor. Dengan demikian, setiap subruang juga memiliki basis.

Selanjutnya, misalkan V_1 adalah subruang dari vektor V dan B_1 adalah basis V_1. Karena B_1 bebas linier di V_1 maka B_1 juga bebas linier di V. Sehingga B_1 merupakan basis V dan $B_1 \subseteq B$. Akibatnya basis subruang vektor dapat diperluas menjadi basis ruang vektor.

2.4. Modul

Teori mengenai ruang vektor dapat diperumum menjadi teori modul. Jika skalar ruang vektor dari ring khusus, yaitu lapangan (*field*), maka skalar pada modul dari ring yang tidak memiliki karakteristik khusus. Berikut definisi dari modul.

Definisi 2.25

Misalkan R adalah ring dan M adalah grup Abelian terhadap operasi penjumlahan. Himpunan M disebut **modul kiri** atas R (R-modul) dengan perkalian skalar $R \times M \to M$ jika memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $r(sx) = (rs)x$
2. $(r + s)x = rx + sx$
3. $r(x + y) = rx + ry$
4. $1x = x$, jika R adalah ring dengan unsur kesatuan

untuk setiap $r, s \in R$ dan $x, y \in M$ (Roman, 2008: 109-110).

Pada pembahasan selanjutnya modul kiri cukup disebut modul.

Contoh 2.26

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ membentuk modul atas dirinya sendiri. Perkalian skalar pada $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ adalah perkalian pada ring $\mathbb{Z}$. Jadi, dengan perkalian skalar $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ berakibat $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

Perlu diperhatikan bahwa dalam pembahasan selanjutnya, ring yang digunakan adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Definisi 2.27

Misalkan K adalah subhimpunan tak kosong dari grup Abelian $(M, +)$ dan M adalah R-modul. K disebut submodul dari M apabila K merupakan R-modul terhadap pembatasan perkalian skalar dari M pada K. Submodul dinotasikan dengan "$\leq$" sehingga jika K submodul M dituliskan $K \leq M$.

Teorema 2.28

Misalkan K adalah subhimpunan tak kosong dari M R-modul. K disebut submodul M jika dan hanya jika tertutup terhadap perkalian skalar

$$rx + sy \in K$$

untuk setiap $x, y \in K$ dan $r, s \in R$.

Contoh 2.29

$\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul dengan submodul $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$, dan seterusnya.

Definisi 2.30

Misalkan M adalah R-modul dan S subhimpunan tak kosong dari M. Submodul N dari M dibangun oleh S apabila semua unsur di N dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur di S, yaitu

$$N = \langle S \rangle = \{r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n \mid r_i \in R, m_i \in S, n \geq 1\}$$

Jika S membangun M maka dapat ditulis menjadi $M = \langle S \rangle$.

Apabila himpunan pembangun R-modul M berhingga maka M disebut R-modul yang dibangun secara hingga.

Definisi 2.31

Misalkan M adalah R-modul. Suatu himpunan tak kosong $S \subseteq M$ disebut bebas linier jika untuk setiap unsur berbeda $s_1, \dots, s_n \in S$ dan $r_1, \dots, r_n \in R$ memenuhi kondisi berikut.

$$r_1 s_1 + \cdots + r_n s_n = 0 \Rightarrow r_i = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Definisi 2.32

Misalkan M adalah R-modul. Himpunan tak kosong $B \subseteq M$ disebut basis jika B bebas linier dan membangun M. Jika M memiliki basis atau $M = \{0\}$ maka M disebut modul bebas (Roman, 2008: 116).

Teorema 2.33

Setiap unsur di M dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier unsur-unsur di basis B secara tunggal (Roman, 2008: 116).

Contoh 2.34

Himpunan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ adalah modul atas dirinya sendiri dengan perkalian skalar

$$(n, m)(a, b) = (na, mb) \qquad ; \qquad \forall a, b, n, m \in \mathbb{Z}$$

dan memiliki basis $\{(1,1)\}$.

Perhatikan bahwa jika suatu modul memiliki basis, maka submodulnya belum tentu memiliki basis. Sebagai contoh, himpunan $\mathbb{Z} \times \{0\}$ adalah submodul dari modul $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Akan tetapi, $\mathbb{Z} \times \{0\}$ tidak memiliki basis karena tidak memiliki unsur bebas linier.

Definisi 2.35

Misalkan M adalah R-modul. Untuk suatu unsur taknol $m \in M$ dan unsur taknol $r \in R$ dimana $rm = 0$ maka m disebut **unsur torsi** (Roman, 2008: 115).

Suatu R- modul M dikatakan **modul torsi** jika semua unsur di M adalah unsur torsi. Sebaliknya, jika M tidak memiliki unsur torsi maka M disebut **modul bebas torsi** atau $rm = 0$ hanya dipenuhi oleh unsur $r = 0$ dan $m \neq 0$ (Arifin, 2001: 272).

Teorema 2.36

Misalkan R adalah daerah integral dan M adalah R-modul bebas, maka M bebas torsi.

Bukti.

Misalkan B adalah basis M dan $x \in M$ sehingga $ax = 0$ untuk $a \in R$ dan $a \neq 0$.

Perhatikan bahwa $x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$ untuk $r_i \in R$ dan $b_i \in B$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ sehingga

$$ax = a\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (ar_i) b_i$$

Karena B bebas linier maka $ar_i = 0$ untuk semua i.

R adalah daerah integral dan $a \neq 0$ sehingga diperoleh $r_i = 0$. Akibatnya

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i = 0$$

Jadi, M adalah bebas torsi. ■

Definisi 2.37

Misalkan M adalah R-modul dan $\mathcal{F} = \{S_i | i \in I\}$ adalah koleksi submodul dari M. Modul M disebut sebagai jumlah langsung dari $\mathcal{F}$, dinotasikan $M = \bigoplus \mathcal{F}$ jika

1. M adalah jumlah dari submodul-submodul pada $\mathcal{F}$, yaitu

$$M = \sum_{i \in I} S_i$$

2. Untuk setiap $i \in I$ berlaku

$$S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = \{0\}$$

Jika $S_i \in \mathcal{F}$ banyaknya hingga maka $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$ (Roman, 2008: 119-120).

Definisi 2.38

Misalkan $M_1, M_2, M_3, \ldots$ adalah submodul R-modul M. M disebut memenuhi kondisi rantai naik jika

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$$

adalah rantai naik submodul M dengan $M_i = M_n$ untuk bilangan bulat n dan untuk setiap $i \geq n$. Dengan demikian rantai naik tersebut memiliki titik terminal di M_n.

Suatu R-modul M yang memenuhi kondisi rantai naik disebut **modul Noetherian** (Bland, 2011: 107).

Jika modul Noetherian dilihat dari rantai submodulnya, maka pada ring yang dilihat adalah rantai idealnya. Berikut definisi ring Noetehrian.

Definisi 2.39

Misalkan $I_1, I_2, I_3, \ldots$ adalah ideal dari ring R. R disebut memenuhi kondisi rantai naik ideal jika barisan naik ideal

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

adalah konstan, yaitu untuk suatu indeks n berlaku

$$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$$

Dengan demikian rantai naik tersebut memiliki titik terminal di I_n.

Suatu ring R yang memenuhi kondisi rantai naik ideal disebut **ring Noetherian** (Roman, 2008: 133).

Berikut teorema mengenai modul Noetherian dan ring Noetherian.

Teorema 2.40

Suatu R-modul M adalah Noetherian jika dan hanya jika setiap submodul di M adalah submodul yang dibangun secara hingga.

Bukti.

Diketahui M adalah R-modul Noetherian. Misalkan S adalah submodul dari M dan $a_1 \in M$. Anggap bahwa submodul $S_1 = \langle a_1 \rangle \subseteq S$. Jika $S_1 = S$ maka S dibangun secara hingga. Jika $S_1 \neq S$ maka terdapat $a_2 \in S - S_1$.

Misalkan submodul $S_2 = \langle a_1, a_2 \rangle \subseteq S$. Jika $S_2 = S$ maka S dibangun secara hingga. Jika $S_2 \neq S$ maka terdapat $a_3 \in S - S_2$ dan anggap bahwa submodul $S_3 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

Dengan melakukan langkah yang sama maka diperoleh

$$\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subseteq \cdots \subseteq S$$

Apabila tidak ada submodul $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ yang sama dengan S maka rantai submodulnya tidak stabil. Kontradiksi dengan pernyataan bahwa M adalah R-modul Noetherian. Jadi, $S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Dengan demikian, submodul S dibangun secara hingga.

Selanjutnya, diketahui setiap submodul R-modul M adalah submodul yang dibangun secara hingga. Misalkan M memuat rantai submodul tak hingga

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \cdots$$

Jika $S = \bigcup_i S_i$ adalah himpunan gabungan dari submodul S_i, maka akan dibuktikan bahwa S adalah submodul dari R-modul M. Misalkan $r_1, r_2 \in R$ dan $s_1, s_2 \in S$ dimana $s_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ dan $s_2 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ dengan $a_i, b_i \in \bigcup_i S_i$ dan $i = 1,2, \ldots$ maka

$$\begin{aligned} r_1 s_1 + r_2 s_2 &= r_1(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) + r_2(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) \\ &= (r_1 a_1 + r_1 a_2 + r_1 a_3 + \cdots) + (r_2 b_1 + r_2 b_2 + r_2 b_3 + \cdots) \\ &= r_1 a_1 + r_1 a_2 + r_1 a_3 + r_2 b_1 + r_2 b_2 + r_2 b_3 + \cdots \in S \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa S adalah submodul M sehingga S merupakan submodul yang dibangun secara hingga. Misalkan $S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Karena $a_i \in S$ maka terdapat indeks k_i sedemikian sehingga $a_i \in M_{k_i}$. Jika $k = maks\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ maka

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq M_k$$

sehingga

$$S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq M_{k+2} \subseteq \cdots \subseteq S$$

Dengan demikian rantai submodul M_i adalah rantai submodul yang konstan. Sehingga M adalah modul Noetherian. ■

Perhatikan bahwa suatu ring Noetherian, misalkan R-Noetherian, membentuk modul atas dirinya sendiri. Setiap ideal I di R dapat membentuk submodul pada R-modul R. Karena I membentuk rantai ideal di R yang berakibat I membentuk rantai submodul yang stabil, maka R adalah modul Noetherian. Berdasarkan Teorema 2.40 diperoleh bahwa I adalah submodul yang dibangun secara hingga.

Selanjutnya, misalkan I adalah ideal R dan merupakan submodul yang dibangun secara hingga dari R-modul R. Jika modul R memuat rantai submodul I, maka berdasarkan Teorema 2.40 dapat dibuktikan bahwa R adalah modul Noetherian. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa suatu ring R adalah ring Noetherian jika dan hanya jika setiap idealnya dibangun secara hingga.

Akibat 2.41

Setiap daerah ideal utama adalah ring Noetherian (Bland, 2011: 113).

Bukti.

Karena setiap ideal dari daerah ideal utama dibangun secara hingga, yaitu dibangun oleh satu unsur, maka berdasarkan Teorema 2.40, daerah ideal utama adalah ring Noetherian. ■

Teorema 2.42

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Ring R adalah Noetherian jika dan hanya jika setiap R-modul yang dibangun secara hingga adalah modul Noetherian (Roman, 2008: 134).

Definisi 2.43

Misalkan M adalah R-modul dan $x \in M$. Suatu unsur $a \in R$ disebut membagi x jika terdapat $y \in M$ sedemikian sehingga $x = ay$. Unsur x di

M disebut primitif jika unsur pembaginya hanya unsur-unsur unit di R, yaitu unsur yang memiliki invers (Bland, 2011: 123).

Teorema 2.44

Misalkan M adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama-R. Untuk setiap $x \in M$ dan $x \neq 0$ dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut.

$$x = ax'$$

dimana x' adalah unsur primitif di M dan $a \in R$.

Bukti.

Misalkan $x \in M$ dimana $x \neq 0$. Ada dua kondisi yang digunakan dalam pembuktian proposisi ini. Pertama, jika x adalah unsur primitif maka jelas bahwa x merupakan kelipatan dari unsur primitif itu sendiri, yaitu $x = 1.x$.

Kedua, jika x bukan unsur primitif. Misalkan $x = a_1x_1$ untuk $x_1 \in M$, $a_1 \in R$ dan a_1 bukan suatu unsur unit di R. Sehingga $Rx \subseteq Rx_1$ dan akan ditunjukkan bahwa Rx adalah subhimpunan sejati dari Rx_1.

Jika $Rx = Rx_1$ maka untuk suatu $b \in R$ berlaku

$$x_1 = bx$$

$$x_1 = b(a_1x_1)$$

$$x_1 = ba_1x_1$$

$$x_1 - ba_1x_1 = 0$$

$$(1 - ba_1)\,x_1 = 0$$

Karena $x \neq 0$ maka $x_1 \neq 0$. Selanjutnya karena M adalah modul bebas atas daerah integral-R maka M bebas torsi. Akibatnya $1 - ba_1 = 0$ sehingga $ba_1 = 1$.

Dengan demikian a_1 adalah unit. Pernyataan ini kontradiksi dengan permisalan a_1 bukan unsur unit di R. Akibatnya, $Rx \subset Rx_1$ atau $Rx \subsetneq Rx_1$.

Jika x_1 adalah unsur primitif maka benar bahwa untuk setiap $x \in M$ merupakan kelipatan dari suatu unsur primitif di M.

Jika x_1 bukan unsur primitif maka digunakan cara yang sama, yaitu misalkan $x_1 = a_2 x_2$ dimana a_2 bukan unit di R. Apabila x_2 adalah unsur primitif maka terbukti bahwa x merupakan kelipatan dari suatu unsur primitif, yaitu

$$x = a_1 x_1 = a_1(a_2 x_2) = (a_1 a_2) x_2$$

Jika x_2 bukan unsur primitif maka $Rx_1 \subsetneq Rx_2$. Begitu seterusnya hingga diperoleh rantai naik $Rx_1 \subsetneq Rx_2 \subsetneq Rx_3 \subsetneq \cdots$ dimana $Rx_1, Rx_2, Rx_3, \ldots$ adalah submodul dari M.

Perhatikan bahwa setiap daerah ideal utama adalah Noetherian. Karena M adalah R-modul yang dibangun secara hingga dan R adalah Noetherian maka M Noetherian. Akibatnya rantai submodul naik $Rx_1 \subsetneq Rx_2 \subsetneq Rx_3 \subsetneq \cdots$ akan berhenti pada satu titik terminal, misalkan Rx_n. Dengan demikian, jika x_{n-1} $= a_n x_n$ dan x_n adalah unsur primitif maka diperoleh

$$x = bx_{n-1} = b(a_n x_n) = (ba_n) x_n$$

dimana $b = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$. ■

Definisi 2.45

Misalkan M adalah modul bebas atas daerah ideal utama-R. Jika $x \in M$ dan $x = ax'$ dimana x' adalah unsur primitif di M, maka $a \in R$ disebut sebagai konten dari x, dinotasikan $c(x)$ (Bland, 2011: 126).

Teorems 2.46

Misalkan M adalah modul bebas atas daerah ideal utama-R dengan $rk(M) = 2$. Jika x adalah unsur primitif di M, maka ada basis B dari M yang memuat x (Roman, 2008: 124).

Bukti.

Misalkan $B = \{x_1, x_2\}$ adalah basis M maka $x = a_1x_1 + a_2x_2$ untuk $a_1, a_2 \in R$.

Karena x adalah unsur primitif maka $FPB(a_1, a_2) = 1$ sedemikian sehingga ada $s_1, s_2 \in R$ yang memenuhi $a_1s_1 + a_2s_2 = 1$.

Misalkan $x_2' = -s_2x_1 + s_1x_2$ maka

$$
\begin{aligned}
a_2x_2' = a_2(-s_2x_1) + a_2s_1x_2 &\Leftrightarrow 0 = -a_2s_2x_1 + a_2s_1x_2 - a_2x_2' \\
&\Leftrightarrow x_1 - x_1 = -a_2s_2x_1 + a_2s_1x_2 - a_2x_2' \\
&\Leftrightarrow x_1 = -a_2s_2x_1 + a_2s_1x_2 - a_2x_2' + x_1 \\
&\Leftrightarrow x_1 = (1 - a_2s_2)x_1 + a_2s_1x_2 - a_2x_2'
\end{aligned}
$$

Karena $a_1s_1 + a_2s_2 = 1$ maka $a_1s_1 = 1 - a_2s_2$ sehingga

$$
\begin{aligned}
x_1 = a_1s_1x_1 + a_2s_1x_2 - a_2x_2' &\Leftrightarrow x_1 = s_1(a_1x_1 + a_2x_2) - a_2x_2' \\
&\Leftrightarrow x_1 = s_1x - a_2x_2' \quad \ldots \quad (1)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
a_1x_2' = a_1(-s_2x_1) + a_1s_1x_2 &\Leftrightarrow 0 = -a_1s_2x_1 + a_1s_1x_2 - a_1x_2' \\
&\Leftrightarrow 0 = -a_1s_2x_1 + (1 - a_2s_2)x_2 - a_1x_2' \\
&\Leftrightarrow 0 = -a_1s_2x_1 + x_2 - a_2s_2x_2 - a_1x_2' \\
&\Leftrightarrow -x_2 = -a_1s_2x_1 - a_2s_2x_2 - a_1x_2' \\
&\Leftrightarrow -x_2 = -s_2(a_1x_1 + a_2x_2) - a_1x_2' \\
&\Leftrightarrow x_2 = s_2(a_1x_1 + a_2x_2) + a_1x_2' \\
&\Leftrightarrow x_2 = s_2x + a_1x_2' \quad \ldots \quad (2)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh bahwa $\{x, x_2'\}$ membangun M.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\{x, x_2'\}$ bebas linier. Misalkan $b_1x + b_2x_2' = 0$ maka

$$b_1(a_1x_1 + a_2x_2) + b_2(-s_2x_1 + s_1x_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow b_1a_1x_1 + b_1a_2x_2 + (-b_2s_2)x_1 + b_2s_1x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (b_1a_1 - b_2s_2)x_1 + (b_1a_2 + b_2s_1)x_2 = 0$$

Karena $\{x_1, x_2\}$ bebas linier maka diperoleh $b_1a_1 - b_2s_2 = 0$ dan $b_1a_2 + b_2s_1 = 0$. Perhatikan bahwa $s_1(b_1a_1 - b_2s_2) = s_1.0 \Leftrightarrow b_1a_1s_1 - b_2s_1s_2 = 0$ dan $s_2(b_1a_2 + b_2s_1) = s_2.0 \Leftrightarrow b_1a_2s_2 + b_2s_1s_2 = 0$. Diperoleh

$$b_1a_1s_1 - b_2s_1s_2 + b_1a_2s_2 + b_2s_1s_2 = 0 \Leftrightarrow b_1(a_1s_1 + a_2s_2) + 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow b_1.1 = 0$$
$$\Leftrightarrow b_1 = 0$$

Selanjutnya $-a_2(b_1a_1 - b_2s_2) = -a_2.0 \Leftrightarrow -b_1a_1a_2 + b_2s_2a_2 = 0$ dan $a_1(b_1a_2 + b_2s_1) = a_1.0 \Leftrightarrow b_1a_1a_2 + b_2a_1s_1 = 0$. Diperoleh

$$-b_1a_1a_2 + b_2a_2s_2 + b_1a_1a_2 + b_2a_1s_1 = 0 \Leftrightarrow 0 + b_2(a_2s_2 + a_1s_1) + 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow b_2.1 = 0$$
$$\Leftrightarrow b_2 = 0$$

Karena $b_1 = b_2 = 0$ maka $\{x, x_2'\}$ bebas linier.

Jadi, $\{x, x_2'\}$ adalah basis M. ■

2.5. Kajian Al-Qur'an tentang Himpunan

Pada Subbab 2.1-2.4 telah dijelaskan mengenai definisi grup, ring, ruang vektor, dan modul. Dari definisi tersebut diketahui bahwa himpunan merupakan dasar untuk membentuk keempat struktur aljabar tersebut dengan melibatkan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Selain itu, subhimpunan juga dibutuhkan untuk membentuk subbagian dari grup, ring, ruang vektor, dan modul.

Himpunan adalah kumpulan suatu benda atau objek yang dapat didefinisikan dengan jelas. Sebagai contoh adalah himpunan manusia. Dalam hal ini, manusia sebagai anggota himpunan dimana semasa hidupnya melakukan suatu perbuatan, baik itu suatu kebaikan maupun keburukan. Amal perbuatan inilah yang akan dipertanggungjawabkan kelak di akhirat.

Himpunan manusia di hari kiamat nanti dibagi menjadi tiga golongan (subhimpunan) berdasarkan amal perbuatannya, yaitu golongan kanan, golongan kiri, dan golongan manusia yang lebih dulu beriman. Hal ini tercantum dalam QS. Al-Waqi’ah ayat 7-10 yang berbunyi

وَكُنتُمْ أَزْوَٰجًا ثَلَٰثَةً ٧ فَأَصْحَٰبُ ٱلْمَيْمَنَةِ مَآ أَصْحَٰبُ ٱلْمَيْمَنَةِ ٨ وَأَصْحَٰبُ ٱلْمَشْـَٔمَةِ مَآ
أَصْحَٰبُ ٱلْمَشْـَٔمَةِ ٩ وَٱلسَّٰبِقُونَ ٱلسَّٰبِقُونَ ١٠

“Dan kamu menjadi tiga golongan. Yaitu golongan kanan, alangkah mulianya golongan kanan itu. Dan golongan kiri, alangkah sengsaranya golongan kiri itu. Dan orang-orang yang beriman paling dahulu.”

Manusia dengan golongan kanan adalah mereka yang menerima buku catatan amal perbuatannya dengan tangan kanan. Mereka berada di sebelah kanan ‘arsy dan keluar dari sebelah kanan tubuh Nabi Adam as (Abdullah, 1994a:4). Artinya manusia ini selama hidupnya banyak melakukan amal kebaikan sehingga mereka merupakan golongan orang yang beruntung dan akan menjadi penghuni surga.

Berbeda dengan manusia golongan kiri. Manusia golongan ini akan menerima buku catatan amal ibadahnya dengan tangan kiri. Mereka dibawa ke sebelah kiri ‘arsy dan keluar dari tubuh nabi Adam as sebelah kiri (Abdullah, 1994a:4). Mereka adalah penghuni neraka yang kekal.

Selanjutnya, manusia yang beriman lebih dulu adalah mereka yang memiliki keistimewaan lebih dibanding dengan manusia golongan kanan. Menurut beberapa sahabat, manusia yang masuk ke dalam golongan ini adalah para rasul, nabi, orang-orang yang benar (*ash-shiddiiqun*), dan para syuhada’ yang jumlahnya lebih sedikit dari golongan kanan. Namun, makna *as-sabiquun* sesungguhnya adalah orang-orang yang bersegera dalam kebaikan, seperti segera menuju masjid saat masuk waktu shalat dan mereka yang berjihad di jalan Allah Swt. Oleh karena itu, siapapun yang berlomba-lomba dalam kebaikan akan mendapat kemuliaan terlebih dahulu dibanding manusia lainnya saat di akhirat kelak. Seperti sabda Rasulullah Saw dari Imam Ahmad yang diriwayatkan dari ‘Aisyah ra berikut.

“Tahukah kalian siapa orang-orang yang paling dulu sampai kepada naungan Allah pada hari kiamat kelak? Para sahabat menjawab: Allah dan rasul-Nya yang lebih mengetahui. Beliau menjawab: yaitu orang-orang yang jika diberi kebenaran, maka segera menyambutnya dan segera mencarinya, maka mereka akan berusaha sekuat tenaga, serta memberikan keputusan kepada umat manusia seperti keputusan untuk diri mereka sendiri”.

Oleh karena itu, sebagai manusia yang beriman sebaiknya memperhatikan segala amal perbuatannya selama hidup di dunia karena semuanya akan dimintai pertanggungjawaban dan akan mendapatkan balasan yang setimpal kelak di akhirat.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai basis submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.

3.1. Submodul dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama

Teorema 2.23 menjamin bahwa setiap ruang vektor taknol senantiasa memiliki basis. Akibatnya setiap subruang vektor taknol juga memiliki basis. Namun tidak demikian dengan modul. Pada contoh 2.34 ditunjukkan bahwa terdapat submodul taknol dari modul bebas yang tidak memiliki basis.

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa jika ring tumpuan modul adalah daerah ideal utama maka setiap submodul taknol dari modul bebas yang dibangun secara hingga senantiasa bebas atau memiliki basis.

Teorema 3.1

Misalkan M adalah R-modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Suatu submodul taknol S dari modul M adalah bebas dan $rk(S) \leq rk(M)$.

Bukti:

Misalkan M adalah R-modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dan S adalah submodul M. Karena setiap daerah ideal utama adalah ring Noetherian, maka berdasarkan Teorema 2.42 diperoleh bahwa M adalah R-modul Noetherian.

Misalkan $K \subseteq S$ yang memuat unsur-unsur di S, yaitu

$$K = \{k_i \mid k_i \in S \text{ dan } i = 1,2,3, \dots\}$$

Akan dibuktikan bahwa K adalah basis S.

Perhatikan bahwa suatu R-modul M adalah Noetherian jika dan hanya jika setiap submodulnya dibangun secara hingga. Dengan demikian terdapat himpunan tak kosong $K \subseteq S$, dimana $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ sehingga untuk setiap $s \in S$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier unsur-unsur di K, yaitu

$$s = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

untuk $a_i \in R$ dengan $i = 1,2, \dots, n$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa K bebas linier dengan menggunakan induksi matematika.

Pertama, benar bahwa K bebas linier untuk $i = 1$, yaitu $K = \{k_1\}$. Perhatikan bahwa jika M adalah R-modul bebas atas daerah integral maka M adalah modul bebas torsi. Sehingga $a_1 k_1 = 0$ berakibat $a_1 = 0$.

Anggap benar bahwa K bebas linier untuk $i < n$, yaitu $a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_{n-1} k_{n-1} = 0$ maka $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Untuk $i = n$ maka

$$\begin{aligned} & a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_{n-1} k_{n-1} + a_n k_n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0.k_1 + 0.k_2 + \cdots + 0.k_{n-1} + a_n k_n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a_n k_n = 0 \\ \Rightarrow\ & a_n = 0 \end{aligned}$$

Karena $a_i = 0$ maka K bebas linier untuk $i = n$.

Dengan demikian, K bebas linier dan membangun S maka submodul S bebas dan basisnya memuat paling banyak n unsur. ■

Contoh 3.2

$\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$-modul bebas dengan basis $\{1, -1\}$. $2\mathbb{Z}$ adalah submodul bebas dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ dengan basis $\{2, -2\}$.

3.2. Basis Submodul dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga Atas Daerah Ideal Utama

Teorema 2.24 menjamin bahwa basis subruang dapat diperluas menjadi basis ruang vektor. Dari Teorema 3.1 telah diperoleh bahwa setiap submodul taknol dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas atau memiliki basis. Namun sifat perluasan basis pada ruang vektor tidak berlaku pada modul. Perhatikan contoh berikut.

Pandang $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Basis dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}$ adalah $\{1\}$ dan $\{-1\}$. Perhatikan bahwa $2\mathbb{Z}$ adalah submodul dari $\mathbb{Z}$ dengan basis $\{2\}$ dan $\{-2\}$. Himpunan $\{2\}$ dan $\{-2\}$ tidak dapat diperluas untuk mendapatkan $\{1\}$ dan $\{-1\}$.

Dari contoh ini, hal yang dapat disimpulkan adalah 2.1 dan $2.(-1)$ membentuk basis bagi $2\mathbb{Z}$. Hal ini dapat dipandang sebagai padanan dari sifat perluasan basis pada ruang vektor, yakni kelipatan unsur-unsur basis ruang vektor membentuk basis bagi subruang.

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa pada modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, terdapat basis dari modul sehingga kelipatan beberapa unsurnya membentuk basis bagi submodul.

Proposisi 3.3

Misalkan M adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama-R. Jika $x \in M$ adalah unsur primitif, maka ada suatu basis B dari modul M yang memuat unsur x.

Bukti.

Misalkan $x \in M$ adalah unsur primitif dan $rk(M) = n$.

Untuk $rk(M) = 1$ maka terdapat basis $B = \{x_1\}$ dari M dan berlaku $x = a_1 x_1$ dimana $a_1 \in R$. Karena x adalah unsur primitif maka a_1 adalah unit di R. Akibatnya $Rx = Rx_1$. Jadi, benar bahwa $\{x\}$ adalah basis M.

Misalkan $rk(M) = n$. Asumsikan untuk sebarang K modul bebas dengan $rk(K) < rk(M)$ terdapat basis dari K yang memuat x. Misalkan $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah basis M maka untuk setiap $x \in M$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur basis B, yaitu $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ untuk $a_i \in R$ dimana $i = 1,2, \dots, n$.

Jika $a_n = 0$ maka

$$\begin{aligned} x &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + 0.x_n \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \\ x &\in Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus \dots \oplus Rx_{n-1} \end{aligned}$$

Karena $K = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle$ adalah R-modul bebas dengan $rk(K) < n$ maka terdapat basis $\{x, x'_2, \dots, x'_{n-1}\}$ untuk K. Akibatnya $\{x, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x_n\}$ adalah basis M yang memuat x.

Jika $a_n \neq 0$ dan misalkan $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$ maka $x = y + a_nx_n$. Untuk $y = 0$ maka $x = a_nx_n$. Karena x adalah unsur primitif maka a_n adalah unit. Akibatnya $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x\}$ adalah basis M.

Jika $y \neq 0$ maka berdasarkan Teorema 2.44, y dapat dinyatakan sebagai $y = by'$ dimana y' adalah unsur primitif di M dan b adalah unsur taknol di R.

Akan ditunjukkan y' dan x_n bebas linier. Misalkan $c_1y' + c_2x_n = 0$ dengan $c_1, c_2 \in R$, maka

$$
\begin{aligned}
b(c_1y' + c_2x_n) = b.0 &\Leftrightarrow bc_1y' + bc_2x_n = 0\\
&\Leftrightarrow c_1by' + bc_2x_n = 0\\
&\Leftrightarrow c_1y + bc_2x_n = 0\\
&\Leftrightarrow c_1(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}) + bc_2x_n = 0\\
&\Leftrightarrow c_1a_1x_1 + c_1a_2x_2 + \cdots + c_1a_{n-1}x_{n-1} + bc_2x_n = 0
\end{aligned}
$$

Diketahui bahwa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bebas linier maka $c_1a_1 = c_1a_2 = \cdots = c_1a_{n-1} = bc_2 = 0$. Karena $b \neq 0$ maka $c_2 = 0$ dan berakibat $c_1y' + 0.x_n = 0 \Leftrightarrow c_1y' = 0$. Perhatikan bahwa M adalah modul bebas atas daerah integral utama-R maka M bebas torsi dan y' adalah unsur primitif yang berarti $y' \neq 0$ maka diperoleh $c_1 = 0$. Jadi $Ry' \oplus Rx_n$ adalah R-modul bebas dengan *rank* 2 dan $x \in Ry' \oplus Rx_n$. Berdasarkan Teorema 2.46 bahwa M R-modul dengan $rk(M) = 2$ memiliki basis yang memuat unsur primitif maka $Ry' \oplus Rx_n$ memiliki basis $\{x, y''\}$. Jadi, terdapat basis yang memuat x bagi M, yaitu $\{x, x_2', \dots, x_{n-1}', y''\}$. ■

Teorema 3.4

Misalkan M adalah modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama-R dan N adalah submodul bebas dari modul M dengan $rk(N) = k$. Ada suatu basis B dari modul M dan subhimpunan S dari B dimana $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ sehingga $\{a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_kx_k\}$ adalah basis N untuk suatu unsur taknol $a_1, a_2, \dots, a_k \in R$.

Bukti.

Untuk $N = 0$ jelas bahwa N adalah submodul trivial atas dirinya sendiri. Sehingga basis dari N adalah $\{0\}$.

Selanjutnya untuk $N \neq 0$, teorema akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Jika $k = 1$ maka N memiliki basis dengan 1 unsur, misalkan $\{x\}$ untuk suatu $x \in N$.

Berdasarkan Teorema 2.44, $x \in N$ dapat dinyatakan sebagai $x = c(x)x'$, dimana x' adalah unsur primitif di M dan $c(x) \in R$ adalah konten dari x. Menurut Proposisi 3.3 bahwa ada basis B dari modul M yang memuat x'. Misalkan $x' = x_1$ dan $c(x) = a_1$ maka

$$x = c(x)x' = a_1x_1$$

Jadi $\{a_1x_1\}$ adalah basis N.

Untuk $rk(N) < k$ maka pernyataan pada teorema dianggap benar.

Selanjutnya akan dibuktikan benar untuk $rk(N) = k$.

Misalkan $C = \{\langle c(x)\rangle | x \in N\}$, karena R adalah ring Noetherian maka C memiliki unsur maksimal $\langle a_1\rangle$ untuk suatu $a_1 \in R$ dan $a_1 = c(x)$ untuk suatu $x \in N$. Tulis $x = a_1x_1$ dengan x_1 adalah unsur primitif di M dan B adalah basis M yang memuat x_1.

Misalkan B' adalah suatu himpunan yang didefinisikan sebagai berikut.

$$B' = B - \{x_1\}$$

dan N' adalah submodul M dengan basis B'. Klaim bahwa

$$N = Ra_1x_1 \oplus (N' \cap N)$$

Akan dibuktikan $Ra_1x_1 \cap (N' \cap N) = \{0\}$ dan $N = Ra_1x_1 + (N' \cap N)$.

Misalkan $x \in Ra_1x_1$ maka $x = aa_1x_1$ untuk suatu $a \in R$. Jika $\alpha = aa_1$ maka diperoleh $x = \alpha x_1 \in Rx_1$. Akibatnya $Ra_1x_1 \subseteq Rx_1$.

Kemudian untuk $x \in N' \cap N$ maka $x \in N'$ sehingga $N' \cap N \subseteq N'$.

Sehingga diperoleh

$$Ra_1x_1 \cap (N' \cap N) \subseteq Rx_1 \cap N'$$

Karena N' adalah modul yang dibangun oleh basis $B' = \{x_2, x_3, \dots, x_k\}$ maka $Rx_1 \cap N' = \{0\}$. Jadi,

$$Ra_1x_1 \cap (N' \cap N) \subseteq Rx_1 \cap N' = \{0\}$$

dan jelas bahwa $0 \in Ra_1x_1 \cap (N' \cap N)$ sehingga diperoleh $Ra_1x_1 \cap (N' \cap N) = \{0\}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $N \subseteq Ra_1x_1 + (N' \cap N)$. Misalkan $y \in N$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier unsur-unsur basis B maka

$$y = bx_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i$$

dimana $z_i \in B'$ dan untuk suatu $a_i, b \in R$.

Misalkan $FPB(a_1, b) = d$ maka ada $s_1, s_2 \in R$ sedemikian sehingga $d = a_1s_1 + bs_2$. Jika $w = s_1x + s_2y \in N$ dan $w = c(w)w'$ dimana w' adalah unsur primitif di M dan $c(w)$ adalah konten dari w, maka

$$\begin{aligned} w &= s_1x + s_2y \\ c(w)w' &= s_1(a_1x_1) + s_2\left(bx_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i\right) \\ &= a_1s_1x_1 + bs_2x_1 + s_2\sum_{i=2}^{k} a_i z_i \end{aligned}$$

$$= (a_1 s_1 + b s_2) x_1 + \sum_{i=2}^{k} (a_i s_2) z_i$$

$$= d x_1 + \sum_{i=2}^{k} (a_i s_2) z_i \qquad (1)$$

Karena w' dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier unsur-unsur di B berakibat $c(w)$ membagi koefisien dari ruas kanan persamaan (1). Oleh karena itu $c(w)|d$. Karena $d|a_1$ dan $c(w)|d$ maka $\langle a_1 \rangle \subseteq \langle d \rangle \subseteq \langle c(w) \rangle$. Karena $\langle a_1 \rangle$ merupakan unsur maksimal di C maka $\langle a_1 \rangle = \langle d \rangle = \langle c(w) \rangle$. Sehingga $d = b' a_1$ untuk suatu $b' \in R$.

Perhatikan bahwa untuk suatu $\beta \in R$ berlaku

$$y = b x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i$$

$$= \beta d x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i$$

$$= \beta \left(b' a_1 \right) x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i$$

$$= \left(\beta b' \right) a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i$$

diperoleh

$$\sum_{i=2}^{k} a_i z_i = y - \left(\beta b' \right) a_1 x_1 \in N$$

Karena $y \in N$ dan $y = \left(\beta b' \right) a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i z_i \in R a_1 x_1 + (N' \cap N)$ maka $N \subseteq R a_1 x_1 + (N' \cap N)$.

Selanjutnya, jelas bahwa $Ra_1x_1 \subseteq N$ dan $N' \cap N \subseteq N$ akibatnya $Ra_1x_1 + (N' \cap N) \subseteq N$. Dengan demikian, $N = Ra_1x_1 + (N' \cap N)$.

Karena $Ra_1x_1 \cap (N' \cap N) = \{0\}$ dan $N = Ra_1x_1 + (N' \cap N)$ maka $N = Ra_1x_1 \oplus (N' \cap N)$.

Dengan demikian $rk(N' \cap N) = rk(N) - 1 = k - 1$

Berdasarkan asumsi induksi, ada basis $B"$ dari submodul N' dan himpunan $\{x_2, x_3, \dots, x_k\} \subseteq B"$ dan unsur-unsur taknol $a_1, a_2, \dots, a_k \in R$ sehingga $\{a_2x_2, a_3x_3, \dots, a_kx_k\}$ adalah basis dari $N' \cap N$. Jadi, submodul N memiliki basis $\{a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \dots, a_kx_k\}$ dan $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ termuat pada suatu basis M. ■

3.3. Kajian tentang Ruang Vektor dan Modul dalam Al-Qur'an

Modul dan ruang vektor merupakan struktur aljabar yang melibatkan dua himpunan, yaitu grup dan ring. Tetapi kedua struktur aljabar tersebut memiliki ring tumpuan yang berbeda. Ring tumpuan dari modul adalah ring secara umum, sedangkan ring tumpuan dari ruang vektor adalah lapangan. Oleh karena itu, ruang vektor merupakan modul atas lapangan. Dengan kata lain, modul merupakan perumuman dari ruang vektor.

Dalam Al-qur'an, modul dan ruang vektor tersebut dapat diumpamakan sebagai orang muslim dan orang mukmin. Orang muslim adalah seseorang yang beragam Islam, sedangkan orang mukmin adalah orang yang beragama Islam dan beriman. Sebagaimana firman Allah Swt dalam QS. Al-Hujurat ayat 14 yang berbunyi

قَالَتِ ٱلْأَعْرَابُ ءَامَنَّاۖ قُل لَّمْ تُؤْمِنُواْ وَلَٰكِن قُولُوٓاْ أَسْلَمْنَا وَلَمَّا يَدْخُلِ ٱلْإِيمَٰنُ فِي
قُلُوبِكُمْۖ وَإِن تُطِيعُواْ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥ لَا يَلِتْكُم مِّنْ أَعْمَٰلِكُمْ شَيْـًٔاۚ إِنَّ ٱللَّهَ غَفُورٌ رَّحِيمٌ
١٤

“Orang-orang Arab Badui itu berkata: "Kami telah beriman". Katakanlah: "Kamu belum beriman, tapi katakanlah ´kami telah tunduk´, karena iman itu belum masuk ke dalam hatimu; dan jika kamu taat kepada Allah dan Rasul-Nya, Dia tidak akan mengurangi sedikitpun pahala amalanmu; sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang.”

Pada ayat tersebut dijelaskan bahwa Allah mengingkari pernyataan orang arab Badui yang mengaku telah menjadi hamba yang beriman. Padahal mereka baru masuk Islam dan belum ada keimanan di dalam hatinya. Dengan demikian, iman merupakan suatu hal yang lebih khusus dibandingkan islam (Abdullah, 1994b:499).

Ada sebuah hadits Rasulullah Saw yang menyebutkan mengenai makna islam dan iman. Saat itu, Jibril as menemui Rasulullah Saw dan menanyakan apa yang dimaksud dengan islam, iman, dan ihsan. Rasulullah Saw menjawab bahwa islam dibangun di atas lima perkara, yaitu syahadat, shalat, zakat, puasa, dan menunaikan haji bila mampu. Iman adalah yakin dan percaya kepada Allah Swt, para malaikat, kitab-kitab Allah, para rasul, hari akhir, dan takdir Allah. Dan terakhir adalah ihsan, yaitu dimana seseorang beribadah kepada Allah Swt seolah-olah ia melihat-Nya dan jika tidak mampu melihat-Nya, maka Allah akan melihatnya. Ketiga hal ini disebut dengan tingkatan iman di dalam agama Islam.

Perumpamaan orang muslim dan mukmin juga pernah diceritakan oleh Rasulullah Saw. Diriwayatkan oleh Imam Ahmad dari ‘Amr bi Sa’ad bin Abi Waqqash dari ayahnya bercerita bahwa Rasulullah Saw pernah memberi sesuatu kepada beberapa orang lelaki, tetapi salah satu di antaranya tidak mendapatkan apapun padahal ia adalah seorang mukmin. Kemudian Sa’ad bertanya mengapa beliau melewatkan orang tersebut. Rasulullah pun bertanya kepada Sa’ad apakah orang tersebut adalah muslim atau bukan. Maka Sa'ad menjawab bahwa orang tersebut adalah muslim sampai diulangi tiga kali. Lalu Rasulullah Saw bersabda,

"*Sesungguhnya aku akan memberi beberapa orang dan meninggalkan orang yang paling aku sukai diantara mereka, sehingga aku tidak memberinya sesuatu pun karena khawatir mereka akan merangkak di neraka di atas wajah mereka.''* (*HR. Bukhari dan Muslim).*

Berdasarkan sabda Rasulullah Saw tersebut dapat disimpulkan bahwa orang mukmin memiliki kedudukan lebih tinggi dibanding orang muslim dalam hal keimanan. Tingkat keimanan inilah yang berpengaruh terhadap niat seseorang dalam melaksanakan amal ibadah. Jika seorang muslim melaksanakan ibadah berdasarkan kewajiban sebagai umat Islam semata, maka seorang mukmin akan melaksanakan ibadah berdasarkan rasa cinta terhadap Allah Swt. Dengan demikian, seorang muslim belum tentu menjadi mukmin, tetapi seorang mukmin merupakan seorang muslim.

BAB IV

PENUTUP

4.1.Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraiakn pada Bab III maka dapat diambil kesimpulan bahwa

1. Submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas.
2. Basis submodul dari modul bebas yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama tidak dapat diperluas menjadi basis modul. Tetapi terdapat basis modul sehingga kelipatan beberapa unsurnya membentuk basis bagi submodul.

4.2.Saran

Pada skripsi ini, modul yang digunakan adalah modul bebas atas daerah ideal utama. Oleh karena itu, penulis menyarankan untuk mengkaji basis submodul dari modul bebas atas ring tumpuan lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdullah. 1994a. *Lubaabut Tafsiir Min Ibni Katsiir, Jilid 7*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E.M dan Abu Ihsan Al-Atsari. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Abdullah. 1994b. *Lubaabut Tafsiir Min Ibni Katsiir, Jilid 8*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E.M dan Abu Ihsan Al-Atsari. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

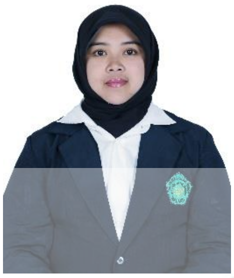
Arifin, Achmad. 2001. *Aljabar Linier Edisi Kedua*. Bandung: Penerbit ITB.

Bland, Paul E. 2011. *Rings and Their Modules*. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.

Gilbert, Linda dan Gilbert, Jimmie. 2009. *Elements of Modern Algebra Seventh Edition*. Canada: Nelson Education, Ltd.

Roman, Steven. 2008. *Advanced Linier Algebra, Third Edition*. New York: Springer Science + Business Media.

RIWAYAT HIDUP



Syifa Qolby Al-imani, lahir di Malang pada tanggal 20 Agustus 1995, biasa dipanggil Syifa, tinggal di Sebaluh RT 16/ RW 04 Desa Pandesari Kecamatan Pujon Kabupaten Malang. Anak kedua dari Bapak Santoso dan Ibu Siti Rohmatun Mu'awanah, serta adik dari Zidna Al'azizah Rosshofa.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Pandesari III dan lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan di SMP Negeri 01 Batu dan lulus pada tahun 2010, dilanjutkan di SMA Negeri 01 Batu dan lulus pada tahun 2013. Pendidikan tinggi selanjutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi siswa, ia pernah mengikuti berbagai kegiatan dan perlombaan, seperti olimpiade matematika dan FLS2N (Festival Lomba Seni Siswa Nasional). Prestasi yang pernah ia peroleh adalah juara I FLS2N cabang seni tari tingkat kota pada tahun 2008. Selain itu, saat menjadi mahasiswa, ia pernah aktif menjadi anggota HMJ pada periode 2014/2015.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Syifa Qolby Al-Imani
NIM : 13610017
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Submodul dari Modul Bebas yang Dibangun Secara Hingga atas Daerah Ideal Utama
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	16 September 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	2 Desember 2019	Konsultasi Agama Bab II		2.
3	4 Desember 2019	ACC Agama Bab II	3.	
4	5 Desember 2019	Konsultasi Bab III		4.
5	18 Desember 2019	Revisi Bab I dan Bab II	5.	
6	19 Desember 2019	ACC Bab I, Bab II, dan Bab III		6.
7	15 Januari 2020	Revisi Bab II dan Konsultasi Bab III	7.	
8	16 Januari 2020	Konsultasi Agama Bab III		8.
9	17 Januari 2020	Revisi Bab III	9.	
10	17 Januari 2020	ACC Agama Keseluruhan		10.
11	20 Januari 2020	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV	11.	
12	22 Januari 2020	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 22 Januari 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001