

**INDEKS WIENER DAN INDEKS HIPER-WIENER  
PADA GRAF TOTAL PEMBAGI NOL GELANGGANG KOMUTATIF  
DENGAN UNSUR KESATUAN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
RIZKY AMELIA KHASANAH  
NIM. 16610001**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**INDEKS WIENER DAN INDEKS HIPER-WIENER  
PADA GRAF TOTAL PEMBAGI NOL GELANGGANG KOMUTATIF  
DENGAN UNSUR KESATUAN**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
RIZKY AMELIA KHASANAH  
NIM. 16610001**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**INDEKS WIENER DAN INDEKS HIPER-WIENER  
PADA GRAF TOTAL PEMBAGI NOL GELANGGANG KOMUTATIF  
DENGAN UNSUR KESATUAN**

**SKRIPSI**

Oleh  
**RIZKY AMELIA KHASANAH**  
**NIM. 16610001**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal, 1 Mei 2020

Pembimbing I,



Muhammad Khudzaifah, M.Si  
NIDT. 19900511 20160801 1 057

Pembimbing II,



Mohammad Nafie Jauhari, M.Si  
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**INDEKS WIENER DAN INDEKS HIPER-WIENER  
PADA GRAF TOTAL PEMBAGI NOL GELANGGANG KOMUTATIF  
DENGAN UNSUR KESATUAN**

**SKRIPSI**

Oleh  
**RIZKY AMELIA KHASANAH**  
**NIM. 16610001**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal, 10 Juni 2020

Penguji Utama : Evawati Alisah, M.Pd

Ketua Penguji : Juhari, S.Pd., M.Si

Sekretaris Penguji : Muhammad Khudzaifah, M.Si

Anggota Penguji : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001



**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Rizky Amelia Khasanah

NIM : 16610001

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Wiener dan Indeks Hiper-Wiener pada graf total  
pembagi nol Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Juni 2020

Yang membuat pernyataan



Rizky Amelia Khasanah  
NIM. 16610001

## **MOTO**

Sebuah impian hanya akan menjadi angan jika kamu tidak mengusahakannya.



## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Nur Kholis, ibunda Sholichatul Laili serta kedua saudaraku Laylis

Andriana dan Salsabila Nur Izzati yang selalu memberikan doa, motivasi dan dukungan waktu.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Alhamdulillah, segala puji dan syukur ke hadirat Allah Swt. yang telah memberikan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan, arahan, dan sumbangan pemikiran dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak melunagkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dan motivasi kepada penulis.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, arahan dan motivasi kepada penulis.



6. Evawati Alisah, M.Pd, selaku penguji utama yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan kepada penulis.
7. Juhari, S.Pd., M.Si, selaku ketua penguji yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan masukan kepada penulis

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 1 Mei 2020

Penulis

## DAFTAR ISI

**HALAMAN JUDUL**

**HALAMAN PENGAJUAN**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

**HALAMAN PENGESAHAN**

**HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

**HALAMAN MOTO**

**HALAMAN PERSEMBAHAN**

**KATA PENGANTAR..... viii**

**DAFTAR ISI..... x**

**DAFTAR GAMBAR..... xii**

**DAFTAR TABEL ..... xiii**

**ABSTRAK ..... xiv**

**ABSTRACT ..... xv**

**ملخص ..... xvi**

### **BAB I PENDAHULUAN**

1.1 Latar Belakang..... 1

1.2 Rumusan Masalah..... 4

1.3 Tujuan Penelitian ..... 5

1.4 Manfaat Penelitian ..... 5

1.5 Batasan Masalah ..... 5

1.6 Metode Penelitian ..... 6

1.7 Sistematika Penulisan ..... 6

### **BAB II KAJIAN PUSTAKA**

2.1 Graf ..... 8

2.2 Graf Terhubung ..... 8

2.3 Jarak pada Graf ..... 9

2.4 Gelanggang ..... 10

2.5 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan ..... 11

2.6 Pembagi Nol ..... 11

2.7 Pengertian Graf Total Pembagi Nol ..... 11

2.8 Indeks Wiener dan Indeks Hiper-Wiener ..... 12

2.9 Kongruensi Linier ..... 12

2.10 Kajian Islam tentang Keterkaitan Antar Disiplin Ilmu..... 13

**BAB III PEMBAHASAN**

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 Indeks Wiener pada Graf Total Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan .....       | 15 |
| 3.1.1 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z8 .....                                | 15 |
| 3.1.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z12 .....                               | 17 |
| 3.1.3 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z20 .....                               | 19 |
| 3.1.4 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z28 .....                               | 23 |
| 3.2 Indeks Hiper-Wiener pada Graf Total Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan ..... | 37 |
| 3.2.1 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z8 .....                                | 37 |
| 3.2.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z12 .....                               | 39 |
| 3.2.3 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z20 .....                               | 41 |
| 3.2.4 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z28 .....                               | 46 |
| 3.3 Kajian Islam Antar Disiplin Ilmu .....                                               | 60 |

**BAB IV PENUTUP**

|                      |    |
|----------------------|----|
| 4.1 Kesimpulan ..... | 63 |
| 4.2 Saran .....      | 63 |

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b> | <b>64</b> |
|-----------------------------|-----------|

**RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

|              |                                              |    |
|--------------|----------------------------------------------|----|
| Gambar 2.1   | Graf Terhubung dan Graf Tidak Terhubung..... | 9  |
| Gambar 2.2   | Graf G .....                                 | 10 |
| Gambar 3.1.1 | $ZT(\mathbb{Z}_8)$ .....                     | 16 |
| Gambar 3.1.2 | $ZT(\mathbb{Z}_{12})$ .....                  | 18 |
| Gambar 3.1.3 | $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ .....                  | 22 |
| Gambar 3.1.4 | $ZT(\mathbb{Z}_{28})$ .....                  | 28 |
| Gambar 3.2.1 | $ZT(\mathbb{Z}_8)$ .....                     | 38 |
| Gambar 3.2.2 | $ZT(\mathbb{Z}_8)$ .....                     | 40 |
| Gambar 3.2.3 | $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ .....                  | 44 |
| Gambar 3.2.4 | $ZT(\mathbb{Z}_{28})$ .....                  | 51 |

## DAFTAR TABEL

|            |                                                                  |    |
|------------|------------------------------------------------------------------|----|
| Tabel 3.1  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_8$ .....                                | 15 |
| Tabel 3.2  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{12}$ .....                             | 17 |
| Tabel 3.3  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{20}$ .....                             | 20 |
| Tabel 3.4  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{28}$ .....                             | 24 |
| Tabel 3.5  | Tabel Gambar $ZT(\mathbb{Z}_{4n})$ .....                         | 31 |
| Tabel 3.6  | Perhitungan Indeks Wiener pada $ZT(\mathbb{Z}_{4n})$ .....       | 32 |
| Tabel 3.7  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_8$ .....                                | 38 |
| Tabel 3.8  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{12}$ .....                             | 39 |
| Tabel 3.9  | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{20}$ .....                             | 42 |
| Tabel 3.10 | Tabel Cayley $\mathbb{Z}_{28}$ .....                             | 47 |
| Tabel 3.11 | Tabel Gambar $ZT(\mathbb{Z}_{4n})$ .....                         | 53 |
| Tabel 3.12 | Perhitungan Indeks hiper-Wiener pada $ZT(\mathbb{Z}_{4n})$ ..... | 54 |



## ABSTRAK

Khasanah, Rizky Amelia. 2020. **Indeks Wiener dan Indeks Hiper-Wiener pada graf total pembagi nol Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Muhammad Khudzaifah, M.Si (2) M. Nafie Jauhari, M.Si

**Kata Kunci:** indeks Wiener, indeks hiper-Wiener, graf total pembagi nol.

Penelitian ini membahas tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Graf total pembagi nol dari gelanggang komutatif  $R$  merupakan graf yang himpunan titiknya adalah himpunan semua pembagi nol dari  $R$ , dan titik berbeda  $u$  dan  $v$  terhubung jika dan hanya jika  $uv = 0$  dan  $u + v \in Z(R)$ . Indeks Wiener pada sebuah graf terhubung  $G$  didefinisikan sebagai:  $W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u, v)$ . Indeks hiper-Wiener pada graf terhubung  $G$  yang didefinisikan sebagai:  $WW(G) = \frac{1}{2} (\sum_{u,v \in V(G)} [d(u, v) + d(u, v)^2])$ . Penelitian ini bertujuan untuk mencari rumus umum indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang diformulasikan dalam bentuk teorema. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Langkah pertama penelitian ini adalah menentukan himpunan titik graf total pembagi nol pada gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, yang kedua yaitu menentukan titik yang terhubung pada graf total pembagi nol pada komutatif dengan unsur kesatuan, yang ketiga yaitu menentukan gambar graf yang diperoleh dari setiap titik yang terhubung, selanjutnya menghitung jarak antar titik pada setiap graf yang diperoleh, kemudian menghitung indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener dari setiap graf dan merumuskan dugaan tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, dan yang terakhir yaitu membuktikan dugaan yang diperoleh. Hasil penelitian ini adalah untuk graf terhubung  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima, maka indeks Wiener pada graf tersebut adalah  $W(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = (2p - 2)^2$  dan indeks hiper-Wiener pada graf tersebut adalah  $WW(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = 6p^2 - 13p + 7$ .

## ABSTRACT

Khasanah, Rizky Amelia. 2020. **Wiener and Hyper-Wiener Indices of Total Zero Divisor Graph of Commutative Ring with Unity**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (1) Muhammad Khudzaifah, M.Si (2) M. Nafie Jauhari, M.Si

**Keywords:** wiener index, hyper-wiener index, total zero divisor graph.

This research discusses about Wiener index and hyper-Wiener index of total zero divisor graph of commutative ring with unity. The total zero divisor graph of a commutative ring with unity  $R$  is a graph whose vertex set is the set of all zero divisors of  $R$ , and where two distinct vertices  $u$  and  $v$  are adjacent if and only if  $uv = 0$  and  $u + v \in Z(R)$ . The Wiener index of a connected graph  $G$  is defined as  $W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$ . The hyper-Wiener index of a connected graph  $G$  is defined as  $WW(G) = \frac{1}{2} (\sum_{u,v \in V(G)} [d(u,v) + d(u,v)^2])$ . This research aims to determine the general formula of Wiener index and hyper-Wiener index of the total zero divisor graph of commutative ring with unity. This research uses the literature study method. The first step of this research is to determine the set of the vertices of the total zero divisor graphs of the commutative ring with the unity, the second is to determine the vertices that are connected in the total zero divisor graph of the commutative ring with unity, the third is to determine the graph obtained from the prior step, then calculates the distance between vertices on each graph, then calculates the Wiener index and hyper-Wiener index of each graph and formulates the conjectures about the Wiener index and hyper-Wiener index of the total zero divisor graph of the commutative ring with unity, and the last is to prove the conjectures. The results of this study are for connected graphs  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$ , where  $p$  is a prime number, the Wiener index of the graph is  $W(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = (2p - 2)^2$  and the hyper-Wiener index of the graph is  $WW(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = 6p^2 - 13p + 7$ .

## ملخص

حسنه, رزقي عمليا. 2020. مؤشر وينر (Wiener) ومؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) على الرسم البياني لإجمالي المقسوم عليه بالحلقة التبيلية بدون فواصل مع عنصر الوحدة. أطروحة. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ. المشرف: (1) مُجّد خضيفة، ماجستير (2) مُجّد نافع الجوهري، ماجستير الكلمات الرئيسية: مؤشر وينر (Wiener)، مؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener)، الرسم البياني لإجمالي المقسوم (total zero divisor graph).

تناقش هذه الدراسة عن مؤشر وينر (Wiener) ومؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) على الرسم البياني لإجمالي المقسوم عليه بالحلقة التبيلية بدون فواصل مع عنصر الوحدة. الرسم البياني لإجمالي المقسوم عليه صفر من الساحة التبادلية  $R$  هو رسم بياني فيه مجموعة نقاطه هي مجموعة كل قواسم الصفر  $R$ ، ونقطة  $u$  و  $v$  نقط المبعثلتان متصلتان إذا  $uv = 0$  و  $u + v \in R$ . فقط  $Z(R)$  مؤشر وينر (Wiener) على رسم بياني متصل  $G$  معرف ك:  $W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$ . مؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) على رسم بياني متصل  $G$  معرف ك:  $WW(G) = \frac{1}{2} (\sum_{u,v \in V(G)} [d(u,v) + d(u,v)^2])$ . تهدف هذه الدراسة إلى إيجاد الصيغة العامة للمؤشر وينر (Wiener) ومؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) في الرسم البياني لمجموع الساحة التبادلية صفر مقسم مع عنصر الوحدة المصاغ في شكل النظري. يستخدم هذا البحث طريقة دراسة المرجعية. الخطوة الأولى من هذا البحث هي تحديد مجموعة نقاط من إجمالي الرسوم البيانية المقسومة على الساحة التبادلية مع عنصر الوحدة، والثانية هي تحديد النقاط المتصلة بالرسم البياني لإجمالي المقسوم على العنصر التبادلي، والثالث هو تحديد صورة الرسم البياني التي تم الحصول عليها من كل نقطة متصلة، ثم حساب المسافة بين النقاط في كل الرسم البياني تم الحصول عليه، ثم حساب المؤشر وينر (Wiener) ومؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) كل رسم بياني وصياغة تخمين حول المؤشر وينر (Wiener) ومؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) في الرسم البياني المقسوم الكلي للساحة التبادلية صفر مع عنصر الوحدة ، والأخير هو إثبات التخمين الذي تم الحصول عليه. نتائج هذه الدراسة هي الرسوم البيانية المتصلة  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$ ، التي  $p$  هي الأعداد الأولية، ثم المؤشر وينر (Wiener) من الرسم البياني  $W(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = (2p - 2)^2$  ومؤشر فرط-وينر (hyper-Wiener) من الرسم البياني  $WW(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = 6p^2 - 13p + 7$ .

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan proses pengabstrakan dari dunia nyata. Abstrak mempunyai arti tidak nyata, lawan kata dari nyata. Abstraksi dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan cara memusatkan perhatian pada sesuatu yang bersifat yang umum dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Objek matematika bersifat abstrak, tetapi dapat dipahami maknanya. Untuk menyatakan hasil abstraksi tersebut, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol (Abdussakir, 2007).

Selain mempunyai sifat abstrak dan menggunakan bahasa simbol, matematika juga bersifat deduktif. Penalaran deduktif merupakan pola berpikir berdasarkan pada pernyataan yang secara umum sudah terbukti benar. Pernyataan yang diperoleh dari beberapa contoh khusus yang kemudian digeneralisasi, masih dikatakan bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika. Pernyataan induktif itu akan diterima setelah dibuktikan dengan penalaran yang ketat dan logis. Matematika memang bersifat deduktif, tetapi ahli matematika juga memperhatikan ilham, dugaan, pengalaman, daya cipta, rasa, dan fenomena dalam mengembangkan matematika (Abdussakir, 2007).

Allah Swt. berfirman dalam QS. Az-Zumar ayat 21 yang artinya:

*“Apakah kamu tidak memperhatikan, bahwa sesungguhnya Allah menurunkan air dari langit, maka diaturnya menjadi sumber-sumber air di bumi kemudian ditumbuhkan-Nya dengan air itu tanam-tanaman yang bermacam-macam warnanya, lalu menjadi kering lalu kamu melihatnya kekuning-kuningan, kemudian dijadikan-Nya hancur*



*berderai-derai. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat pelajaran bagi orang-orang yang mempunyai akal.”(QS. Az-Zumar:21)*

Sayyid Quthub menilai ayat di atas merupakan contoh kehidupan yang fana'. Alqur'an sering kali memaparkan perumpamaan seperti ayat di atas untuk menjelaskan hakikat kehidupan yang fana', yang mengarahkan para Ulul Albab memperhatikan dan menarik pelajaran darinya. Pelajaran tersebut antara lain berupa kuasa Allah, seperti membangkitkan siapa yang telah mati. Turunnya hujan dari langit serta tumbuhnya aneka tumbuhan terlihat setiap saat. Tumbuhan itu hidup berkembang, kemudian layu dan mati. Tidak lama kemudian, terlihat lagi di tempat yang sama tumbuhan baru(Shihab,2003).

Pada ayat tersebut Allah SWT memerintahkan manusia memikirkan salah satu dari suatu proses kejadian di alam ini. Semua kejadian dalam hidup dapat menjadi bahan renungan bagi orang yang mau menggunakan pikirannya. Sesuai dengan yang dikatakan Abdussakir di atas bahwa matematika memang bersifat deduktif, tetapi ahli matematika juga harus memperhatikan ilham, dugaan, pengalaman, daya cipta, rasa, dan fenomena dalam mengembangkan matematika. Kita dapat melaksanakan perintah Allah tersebut dengan pendekatan ilmu-ilmu lain yang mempelajari tentang Alam. Salah satu penelitian matematika yang melalui pendekatan ilmu lain adalah Indeks Wiener. Indeks Wiener merupakan definisi dari persamaan yang biasa digunakan dalam literatur kimia, yaitu dalam persamaan titik didih ikatan karbon. Indeks Wiener juga bisa disebut sebagai penyederhanaan dari persamaan titik didih tersebut. Jalur  $w$  atau biasa disebut indeks Wiener merupakan jumlah dari jarak antara dua atom karbon dalam



molekul. Indeks Wiener pertama kali didefinisikan oleh Harry Wiener pada tahun 1947. Indeks Wiener berpengaruh terhadap ikatan molekul karbon. Semakin kecil total jarak ini, semakin besar kekompakannya dari molekul, maka titik didih molekul juga meningkat. Sedangkan jika total jarak semakin besar, kekompakan antar atom dalam molekul semakin menurun maka titik didih juga menurun. Dalam literatur matematika,  $W$  tampaknya telah dipelajari pertama kali pada tahun 1976. Indeks Wiener dalam literatur matematika merupakan jumlah jarak antara setiap pasangan titik dari graf.

Indeks Wiener pada sebuah graf terhubung  $G$ , yang dinotasikan dengan  $W(G)$ , didefinisikan sebagai (Gui-dong, dkk.,2019:2):

$$W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v).$$

Indeks hiper-Wiener dinotasikan dengan  $WW(G)$  pada graf terhubung didefinisikan sebagai (Gui-dong dkk,2019:2):

$$WW(G) = \frac{1}{2} \left( \sum_{u,v \in V(G)} [d(u,v) + d(u,v)^2] \right).$$

Penelitian terkait indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener sebelumnya dilakukan oleh Mehdi Eliasi dan temannya pada tahun 2012 dengan judul Indeks Wiener pada beberapa operasi graf. Dan Yu Gui-Dong dan teman-temannya pada tahun 2019. Penelitian tersebut membahas tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf bipartit dan graf Hamilton.

Menurut Abdussakir, dkk. (2009) graf adalah salah satu ilmu dalam matematika yang cara memperolehnya harus dikerjakan dengan perhitungan yang

teliti. Graf  $G$  adalah pasangan berurutan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi.

Salah satu penelitian tentang graf dilakukan oleh Alen, dkk pada tahun 2018. Penelitian tersebut membahas tentang graf total pembagi nol pada gelanggang komutatif. Graf total pembagi nol merupakan graf yang dibentuk dari kedua hubungan graf pembagi nol dan graf total. Graf total pembagi nol dari gelanggang komutatif yang dilambangkan dengan  $ZT(R)$  adalah graf yang himpunan titiknya adalah himpunan semua pembagi nol yang tak nol dari  $R$ , dan dimana titik berbeda  $u$  dan  $v$  terhubung jika dan hanya jika  $uv = 0$  dan  $u + v \in Z(R)$ .

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, penulis akan meneliti tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah di uraikan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana rumus umum indeks Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan?
2. Bagaimana rumus umum indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif unsur kesatuan?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini berdasarkan rumusan masalah tersebut adalah:

1. Mengetahui rumus umum indeks Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Mengetahui rumus umum indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk memberikan informasi mengenai rumus umum dari Indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$ , dengan  $p$  bilangan prima.

### 1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas rumus umum indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$  yang merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuannya dengan  $p$  bilangan prima. Karena graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$  merupakan graf tidak terhubung yang mempunyai titik terisolasi, sedangkan definisi indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener yang digunakan pada graf terhubung, maka dalam penelitian ini titik terisolasi dihilangkan atau tidak digunakan.

### 1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka. Penelitian ini mengkaji tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan pembagi nol dari  $\mathbb{Z}_{4p}$  sebagai himpunan titik graf total pembagi nol dengan menggunakan table Cayley operasi perkalian.
2. Menentukan titik yang terhubung pada graf total pembagi nol dari himpunan titik yang diperoleh.
3. Menentukan graf yang diperoleh dari setiap titik yang terhubung dari langkah 2.
4. Menghitung jarak antar titik pada setiap graf yang diperoleh.
5. Menghitung indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener dari setiap graf.
6. Merumuskan dugaan tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
7. Menghasilkan proposisi tentang indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari 4 bab yang masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

## Bab I Pendahuluan

Pendahuluan tersusun dari beberapa subbab yaitu: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, sistematika penulisan.

## Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang menjadi dasar untuk mengkaji permasalahan dalam pembahasan. Pada penelitian ini teori yang digunakan meliputi: pengertian graf, graf terhubung, jarak pada graf, gelanggang, gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, graf total pembagi nol pada gelanggang komutatif, indeks Wiener, dan indeks hiper-Wiener.

## Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi penjelasan tentang rumus umum yang dibentuk oleh indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

## Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan juga berisi saran-saran untuk penelitian selanjutnya.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Graf

Chartrand dkk (2016) mengatakan graf  $G$  adalah pasangan terurut dari himpunan  $V$  yang merupakan himpunan tak kosong dan terbatas dari titik dan himpunan  $E$  yang merupakan himpunan sisi. Untuk menekankan bahwa  $V$  dan  $E$  adalah titik dan sisi dari graf  $G$ , kita sering menuliskan  $V$  sebagai  $V(G)$  dan  $E$  sebagai  $E(G)$ . Setiap sisi  $u - v$  dari  $G$  biasanya dilambangkan dengan  $uv$  atau  $vu$ . Jika  $e = uv$  adalah sisi dari  $G$ , maka  $e$  dikatakan terkait dengan  $u$  dan  $v$  (Chartrand dkk., 2016:3).

Graf  $G$  menurut Abdussakir(2009) merupakan pasangan terurut  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi. Sisi  $e = (u, v)$  dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ . Jika  $e = (u, v)$  adalah sisi di graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung,  $v$  dan  $e$  serta  $u$  dan  $e$  disebut terkait langsung, dan titik  $u$  dan  $v$  disebut ujung dari  $e$ .

#### 2.2 Graf Terhubung

Sisi  $e = uv$  dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$  jika  $e = uv$  adalah sisi di graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung (*adjacent*),  $v$  dan  $e$  serta  $u$  dan  $e$  disebut terkait langsung (*incident*), titik  $u$  dan  $v$  disebut ujung dari sisi  $e$  (Chartrand, dkk, 2016).

Misalkan  $u$  dan  $v$  titik berbeda pada graf  $G$ . Titik  $u$  dan  $v$  dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan  $u - v$  di  $G$ . Sebaiknya, jika terdapat dua titik  $u$  dan  $v$  di  $G$  tetapi tidak ada lintasan  $u - v$  di  $G$ , maka  $G$  dikatakan tak terhubung (Abdussakir, dkk, 2009).

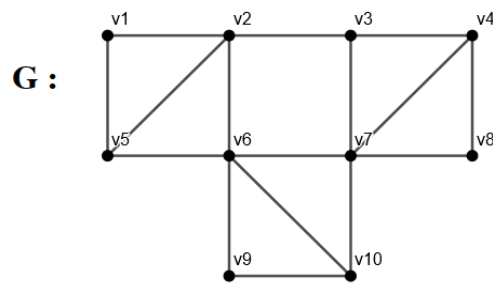


**Gambar 2.1** Graf Terhubung dan Graf Tidak Terhubung

### 2.3 Jarak pada Graf

Chartrand dan Zhang (2009) mengatakan jika  $u$  dan  $v$  adalah titik yang berbeda pada graf  $G$  yang terhubung, maka terdapat garis antara titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ . Pada kenyataannya, mungkin terdapat beberapa lintasan  $u - v$  di  $G$  yang panjangnya bervariasi. Informasi ini dapat digunakan untuk menunjukkan ukuran seberapa dekat antara  $u$  dan  $v$  atau seberapa jauh  $u$  dan  $v$ . Jarak (*distance*)  $d(u, v)$  dari titik  $u$  ke titik  $v$  pada graf  $G$  yang terhubung adalah panjang minimum dari lintasan  $u - v$  di  $G$ . Panjang lintasan  $u - v$  disebut geodesik  $u - v$ .

Dalam graf  $G$  pada gambar 2.2, lintasan  $P = (v_1, v_5, v_6, v_{10})$  adalah geodesik  $v_1 - v_{10}$  jadi  $d(v_1, v_{10}) = 3$ . Selanjutnya,  $d(v_1, v_1) = 0$ ,  $d(v_1, v_2) = 1$ ,  $d(v_1, v_6) = 2$ ,  $d(v_1, v_7) = 3$ , dan  $d(v_1, v_8) = 4$  (Chartrand, 2009:34). Jarak antara dua titik  $u$  dan  $v$  pada component yang berbeda dari graf tidak terhubung adalah tak hingga.



**Gambar 2.2** Graf  $G$

## 2.4 Gelanggang

### Definisi 2.4

Suatu gelanggang  $(R, +, \cdot)$  adalah suatu himpunan tak kosong  $R$  dengan operasi biner penjumlahan  $(+)$  dan perkalian  $(\cdot)$  pada  $R$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut (Mas'ood, 2013:84):

1. Tertutup terhadap penjumlahan  $(+)$ , misalkan  $a, b \in R$  maka  $R$  dikatakan tertutup jika  $a + b \in R$ .
2. Asosiatif terhadap penjumlahan  $(+)$ , misalkan  $a, b, c \in R$  maka  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
3. Terdapat unsur invers penjumlahan  $(+)$ , misalkan  $a \in R$  maka  $a + (-a) = (-a) + a = e = 0$ .
4. Terdapat unsur satuan atau identitas terhadap penjumlahan  $(+)$ , misalkan  $a, b \in R$  maka  $a + e = e + a = a$ .
5. Komutatif terhadap penjumlahan  $(+)$ , misalkan  $a, b \in R$  maka  $a + b = b + a$ .
6. Tertutup terhadap perkalian  $(\cdot)$ , misalkan  $a, b \in R$  maka dikatakan tertutup jika  $a \cdot b \in R$ .

7. Asosiatif terhadap perkalian ( $\cdot$ ), misalkan  $a, b, c \in R$  maka  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
8. Distributif perkalian ( $\cdot$ ) dan terhadap penjumlahan ( $+$ ), misalkan  $a, b, c \in R$  maka  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  dan  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ .

## 2.5 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan

### Definisi 2.5

Misalkan  $R$  gelanggang. Jika terdapat elemen  $e$  di  $R$  sedemikian sehingga memenuhi  $x \cdot e = e \cdot x = x$  untuk setiap  $x$  di  $R$ , maka  $e$  disebut unsur kesatuan, dan  $R$  disebut sebagai gelanggang dengan unsur kesatuan. Jika perkalian di  $R$  bersifat komutatif, maka  $R$  disebut gelanggang komutatif (Gilbert, 2009:261).

## 2.6 Pembagi Nol

### Definisi 2.6

Pembagi nol adalah elemen yang tak nol dari gelanggang komutatif  $R$  sedemikian sehingga terdapat sebuah elemen tak nol  $b \in R$  yang memenuhi  $ab = 0$  (Gallian, 2016:237).

## 2.7 Pengertian Graf Total Pembagi Nol

Alen, dkk. (2018) mengatakan graf total pembagi nol merupakan graf yang dibangun oleh kedua hubungan yang muncul antara graf total dan graf pembagi nol. Graf total pembagi nol dari gelanggang komutatif yang dilambangkan dengan  $ZT(R)$  adalah graf yang himpunan titiknya merupakan

himpunan semua pembagi nol dari  $R$ , dan dimana titik berbeda  $u$  dan  $v$  terhubung jika dan hanya jika  $uv = 0$  dan  $u + v \in Z(R)$ .

## 2.8 Indeks Wiener dan Indeks Hiper-Wiener

Indeks Wiener pada sebuah graf terhubung  $G$ , yang dinotasikan dengan  $W(G)$ , diperkenalkan oleh Wiener pada tahun 1947 didefinisikan sebagai (Guidong, dkk., 2019:2):

$$W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v).$$

Indeks hiper-Wiener, merupakan generalisasi dari Indeks Wiener, yang dinotasikan dengan  $WW(G)$ . Indeks hiper-Wiener pada graf asiklis diperkenalkan oleh Randic pada tahun 1993 dan diperluas pada semua graf terhubung oleh Klein. Indeks hiper-Wiener pada graf terhubung didefinisikan sebagai (Guidong, dkk., 2019:2):

$$WW(G) = \frac{1}{2} \left( \sum_{u,v \in V(G)} [d(u,v) + d(u,v)^2] \right).$$

## 2.9 Kongruensi Linier

### Definisi 2.8

Misalkan  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$  adalah suatu sistem residu lengkap modulo  $m$ .

Banyaknya solusi dari  $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$  adalah banyaknya  $s_i$  yang memenuhi  $f(s_i) \equiv 0 \pmod{m}$  (Irawan dkk., 2014).

### Teorema 2.1



Kongruensi linier  $ax \equiv b \pmod{m}$  dapat diselesaikan hanya jika  $d = \text{fpb}(a, m)$  membagi  $b$ , dan pada kasus ini memiliki  $d$  solusi. Jika  $a$  dan  $m$  relatif prima atau  $d = 1$  maka kongruensi tersebut memiliki satu solusi (Irawan dkk, 2014).

## 2.10 Kajian Islam tentang Keterkaitan Antar Disiplin Ilmu

Allah Swt. berfirman dalam Surah Al-Baqarah ayat 164 yang artinya:

*“Sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi, pergantian malam dan siang, kapal yang berlayar di laut dengan muatan yang bermanfaat bagi manusia, apa yang diturunkan oleh Allah dari langit berupa air, lalu dengan itu dihidupkan-Nya bumi setelah mati (kering), dan Dia tebarkan didalamnya bermacam macam binatang, dan peredaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi, semua itu sungguh, merupakan tanda kebesaran Allah bagi orang-orang yang mengerti.” (al-baqarah : 164)*

Dalam Tafsir Ibnu Katsir (2010) *“(Sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi,)”* yaitu dalam hal ketinggian, kelembutan, dan keluasannya, serta bintang-bintang-bintang yang bergerak dan yang diam, juga peredaran pada garis edarnya; dataran rendah dan dataran tinggi, gunung, laut, gurun pasir, kesunyian, keramaian, dan segala manfaat yang terdapat di dalamnya, pergantian siang dan malam; satu pergi yang lain datang menggantikannya dengan saling mendahului dan tidak sedikitpun mengalami keterlambatan dalam sekejap. *“Dan kapal yang berlayar di laut dengan muatan yang bermanfaat bagi manusia,”* Artinya, dalam penghamparan laut oleh Allah Ta’ala sehingga bahtera itu dapat berlayar dari satu sisi ke sisi yang lain untuk kepentingan kehidupan manusia dan agar mereka dapat mengambil manfaat dari penduduk suatu daerah dan membawanya ke daerah lain silih berganti. *“Dan apa yang diturunkan oleh Allah dari langit berupa air, lalu dengan itu dihidupkan-Nya bumi setelah mati (kering),”* sebagaimana Firman-Nya yang lain dalam surah Yaasiin ayat 33-36

yang artinya *“dan Dia tebarkan didalamnya bermacam macam binatang,”* dalam bentuk, warna, dan manfaat, kecil, dan besar. Dan Dia mengetahui semuanya itu dan memberikan rizki kepadanya, tidak ada satu pun dari hewan-hewan itu yang tidak terjangkau atau tersembunyi dari-Nya. *“Dan pengisaran angin.”* Artinya, terkadang angin itu berhembus dengan membawa rahmat dan terkadang berhembus dengan membawa malapetaka. *“Dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi.”* Artinya berjalan di antara langit dan bumi, yang diarahkan oleh Allah Swt. menuju wilayah dan tempat-tempat mana saja yang dikehendakinya-Nya, sebagaimana Dia telah mengendalikannya. *“Sungguh terdapat tanda-tanda(keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan.”* Maksudnya, pada semuanya itu terdapat bukti-bukti yang menunjukkan keesaan-Nya.

Berdasarkan tafsir tersebut dapat dilihat bahwa banyak kebesaran Allah di dunia ini yang harus kita pelajari. Sebagai seorang matematikawan tentunya kita juga harus mempelajari tanda-tanda kebesaran Allah tersebut. Namun dalam penerapannya kita tidak serta merta langsung menerapkan ilmu matematika dalam konsep-konsep tersebut. Kita membutuhkan penerapan ilmu lain yang mempelajari tentang alam kemudian dikaji dengan ilmu matematika. Salah satu penelitian matematika yang melalui pendekatan ilmu lain adalah Indeks Wiener. Indeks Wiener merupakan definisi dari persamaan yang biasa digunakan dalam literatur kimia, tepatnya persamaan titik didih ikatan karbon. Indeks Wiener pertama kali didefinisikan oleh Harry Wiener pada tahun 1947. Dalam literatur matematika,  $W$  tampaknya telah dipelajari pertama kali pada tahun 1976. Indeks Wiener yang ditemukan dalam literatur matematika merupakan jumlah jarak antara setiap pasangan titik dari graf yang terhubung.

## BAB III

### PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diuraikan langkah-langkah dalam menentukan rumus indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Pada bab ini dibagi menjadi 2 subbab yaitu indeks Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

#### 3.1 Indeks Wiener pada Graf Total Gelanggang Komutatif dengan Unsur

##### Kesatuan

Subbab ini membahas tentang penentuan rumus umum indeks Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$  dengan  $p$  bilangan prima. Penelitian ini menggunakan gelanggang  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{20}$ , dan  $\mathbb{Z}_{28}$  untuk menentukan rumus umum tersebut.

##### 3.1.1 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_8$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 8. Elemen-elemen dari  $\mathbb{Z}_8$  adalah  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari setiap dua unsur  $\mathbb{Z}_8$ .

**Tabel 3.1** Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_8$ 

| $\cdot$   | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{7}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{7}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{0}$ | $\bar{7}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

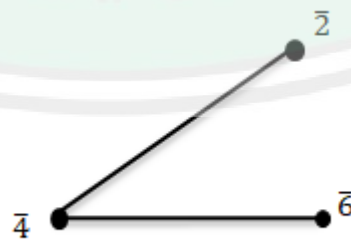
Berdasarkan definisi pembagi nol, dari tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{2}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{0}$$

Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu  $\bar{2}$  dengan  $\bar{4}$  dan  $\bar{2}$  dengan  $\bar{6}$ . Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_8$  sebagai berikut

**Gambar 3.1.1**  $ZT(\mathbb{Z}_8)$

Berdasarkan gambar 3.1.1 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_8)$  sebagai berikut

$$d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, d(\bar{2}, \bar{6}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 1$$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W(ZT(\mathbb{Z}_8)) &= \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_8)} d(u,v) \\ &= d(\bar{2}, \bar{4}) + d(\bar{2}, \bar{6}) + d(\bar{4}, \bar{6}) \\ &= 1 + 2 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Jadi, indeks Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_8$  adalah 4.

### 3.1.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{12}$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 12. Elemen-elemen dari  $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari dua unsur  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Tabel 3.2** Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{12}$

| $\cdot$    | $\bar{0}$ | $\bar{1}$  | $\bar{2}$  | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$  | $\bar{6}$ | $\bar{7}$  | $\bar{8}$ | $\bar{9}$ | $\bar{10}$ | $\bar{11}$ |
|------------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|------------|
| $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  |
| $\bar{1}$  | $\bar{0}$ | $\bar{1}$  | $\bar{2}$  | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$  | $\bar{6}$ | $\bar{7}$  | $\bar{8}$ | $\bar{9}$ | $\bar{10}$ | $\bar{11}$ |
| $\bar{2}$  | $\bar{0}$ | $\bar{2}$  | $\bar{4}$  | $\bar{6}$ | $\bar{8}$ | $\bar{10}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$  | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{8}$  | $\bar{10}$ |
| $\bar{3}$  | $\bar{0}$ | $\bar{3}$  | $\bar{6}$  | $\bar{9}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$  | $\bar{6}$ | $\bar{9}$  | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$  | $\bar{9}$  |
| $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  |
| $\bar{5}$  | $\bar{0}$ | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{3}$ | $\bar{8}$ | $\bar{1}$  | $\bar{6}$ | $\bar{11}$ | $\bar{4}$ | $\bar{9}$ | $\bar{2}$  | $\bar{7}$  |
| $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$  | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$  | $\bar{6}$  |
| $\bar{7}$  | $\bar{0}$ | $\bar{7}$  | $\bar{2}$  | $\bar{9}$ | $\bar{4}$ | $\bar{11}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$  | $\bar{8}$ | $\bar{3}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  |
| $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$ | $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  |
| $\bar{9}$  | $\bar{0}$ | $\bar{9}$  | $\bar{6}$  | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{9}$  | $\bar{6}$ | $\bar{3}$  | $\bar{0}$ | $\bar{9}$ | $\bar{6}$  | $\bar{3}$  |
| $\bar{10}$ | $\bar{0}$ | $\bar{10}$ | $\bar{8}$  | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$  | $\bar{0}$ | $\bar{10}$ | $\bar{8}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$  | $\bar{2}$  |
| $\bar{11}$ | $\bar{0}$ | $\bar{11}$ | $\bar{10}$ | $\bar{9}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$  | $\bar{6}$ | $\bar{5}$  | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$  | $\bar{1}$  |



Berdasarkan definisi pembagi nol, dari tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}, \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6}$$

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{8} = \bar{10}, \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{9} = \bar{11}, \bar{2} \cdot \bar{9} = \bar{6}$$

$$\bar{2} + \bar{10} = \bar{0}, \bar{2} \cdot \bar{10} = \bar{8}$$

$$\bar{3} + \bar{4} = \bar{7}, \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$$

$$\bar{3} + \bar{6} = \bar{9}, \bar{3} \cdot \bar{6} = \bar{6}$$

$$\bar{3} + \bar{8} = \bar{11}, \bar{3} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{3} + \bar{9} = \bar{0}, \bar{3} \cdot \bar{9} = \bar{3}$$

$$\bar{3} + \bar{10} = \bar{13}, \bar{3} \cdot \bar{10} = \bar{6}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{10}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{8} = \bar{12}, \bar{4} \cdot \bar{8} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{9} = \bar{1}, \bar{4} \cdot \bar{9} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{10} = \bar{2}, \bar{4} \cdot \bar{10} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{8} = \bar{2}, \bar{6} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{9} = \bar{3}, \bar{6} \cdot \bar{9} = \bar{6}$$

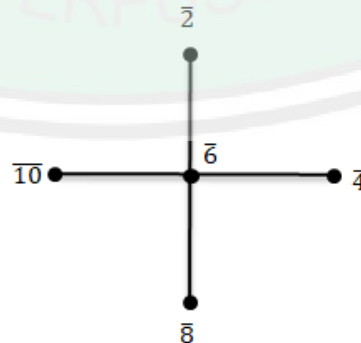
$$\bar{6} + \bar{10} = \bar{4}, \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{9} = \bar{5}, \bar{8} \cdot \bar{9} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{10} = \bar{6}, \bar{8} \cdot \bar{10} = \bar{8}$$

$$\bar{9} + \bar{10} = \bar{7}, \bar{9} \cdot \bar{10} = \bar{6}$$

Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu 2 dengan 6, 4 dengan 6, 8 dengan 6, dan 10 dengan 6. Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_{12}$  sebagai berikut



Gambar 3.1.2  $ZT(\mathbb{Z}_{12})$

Berdasarkan gambar 3.1.2 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_{12})$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} d(\bar{2}, \bar{4}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 1, d(\bar{2}, \bar{8}) = 2, d(\bar{2}, \bar{10}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 1, d(\bar{4}, \bar{8}) \\ &= 2, d(\bar{4}, \bar{10}) = 2, d(\bar{6}, \bar{8}) = 1, d(\bar{6}, \bar{10}) = 1, d(\bar{8}, \bar{10}) = 1 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W(ZT(\mathbb{Z}_{12})) &= \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_{12})} d(u,v) \\ &= d(\bar{2}, \bar{4}) + d(\bar{2}, \bar{6}) + d(\bar{2}, \bar{8}) + d(\bar{2}, \bar{10}) + d(\bar{4}, \bar{6}) + d(\bar{4}, \bar{8}) + d(\bar{4}, \bar{10}) \\ &\quad + d(\bar{6}, \bar{8}) + d(\bar{6}, \bar{10}) + d(\bar{8}, \bar{10}) \\ &= 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 \\ &= (1 \times 4) + (2 \times 6) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Jadi, indeks Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_8$  adalah 16.

### 3.1.3 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{20}$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 20. Elemen-elemen dari  $\mathbb{Z}_{20}$  adalah  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari dua unsur  $\mathbb{Z}_{20}$

Tabel 3.3 Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{20}$ 

| ·  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 2  | 0 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3  | 0 | 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 1  | 4  | 7  | 10 | 13 | 16 | 19 | 2  | 5  | 8  | 11 | 14 | 17 |
| 4  | 0 | 4  | 8  | 12 | 16 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 |
| 5  | 0 | 5  | 10 | 15 | 0  | 5  | 10 | 15 | 0  | 5  | 10 | 15 | 0  | 5  | 10 | 15 | 0  | 5  | 10 | 15 |
| 6  | 0 | 6  | 12 | 18 | 4  | 10 | 16 | 2  | 8  | 14 | 0  | 6  | 12 | 18 | 4  | 10 | 16 | 2  | 8  | 14 |
| 7  | 0 | 7  | 14 | 1  | 8  | 15 | 2  | 9  | 16 | 3  | 10 | 17 | 4  | 11 | 18 | 5  | 12 | 19 | 6  | 13 |
| 8  | 0 | 8  | 16 | 4  | 12 | 0  | 8  | 16 | 4  | 12 | 0  | 8  | 16 | 4  | 12 | 0  | 8  | 16 | 4  | 12 |
| 9  | 0 | 9  | 18 | 7  | 16 | 5  | 14 | 3  | 12 | 1  | 10 | 19 | 8  | 17 | 6  | 15 | 4  | 13 | 2  | 11 |
| 10 | 0 | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 | 0  | 10 |
| 11 | 0 | 11 | 2  | 13 | 4  | 15 | 6  | 17 | 8  | 19 | 10 | 1  | 12 | 3  | 14 | 5  | 16 | 7  | 18 | 9  |
| 12 | 0 | 12 | 4  | 16 | 8  | 0  | 12 | 4  | 16 | 8  | 0  | 12 | 4  | 16 | 8  | 0  | 12 | 4  | 16 | 8  |
| 13 | 0 | 13 | 6  | 19 | 12 | 5  | 18 | 11 | 4  | 17 | 10 | 3  | 16 | 9  | 2  | 15 | 8  | 1  | 14 | 7  |
| 14 | 0 | 14 | 8  | 2  | 16 | 10 | 4  | 18 | 12 | 6  | 0  | 14 | 8  | 2  | 16 | 10 | 4  | 18 | 12 | 6  |
| 15 | 0 | 15 | 10 | 5  | 0  | 15 | 10 | 5  | 0  | 15 | 10 | 5  | 0  | 15 | 10 | 5  | 0  | 15 | 10 | 5  |
| 16 | 0 | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 16 | 12 | 8  | 4  |
| 17 | 0 | 17 | 14 | 11 | 8  | 5  | 2  | 19 | 16 | 13 | 10 | 7  | 4  | 1  | 18 | 15 | 12 | 9  | 6  | 3  |
| 18 | 0 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  | 0  | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  |
| 19 | 0 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  |

Berdasarkan definisi pembagi nol tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_{20}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{18}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{5} = \bar{7}, \bar{2} \cdot \bar{5} = \bar{10}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{12}$$

$$\bar{2} + \bar{8} = \bar{10}, \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{16}$$

$$\bar{2} + \bar{10} = \bar{12}, \bar{2} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{12} = \bar{14}, \bar{2} \cdot \bar{12} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{2} \cdot \bar{14} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{15} = \bar{17}, \bar{2} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{2} + \bar{16} = \bar{18}, \bar{2} \cdot \bar{16} = \bar{6}$$

$$\bar{2} + \bar{18} = \bar{0}, \bar{2} \cdot \bar{18} = \bar{6}$$

$$\bar{4} + \bar{5} = \bar{9}, \bar{4} \cdot \bar{5} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{8} = \bar{12}, \bar{4} \cdot \bar{8} = \bar{12}$$

$$\bar{4} + \bar{12} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{12} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{15} = \bar{19}, \bar{4} \cdot \bar{15} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{18} = \bar{2}, \bar{4} \cdot \bar{18} = \bar{12}$$

$$\bar{5} + \bar{8} = \bar{13}, \bar{5} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{5} + \bar{12} = \bar{17}, \bar{5} \cdot \bar{12} = \bar{0}$$

$$\bar{5} + \bar{15} = \bar{0}, \bar{5} \cdot \bar{15} = \bar{15}$$

$$\bar{5} + \bar{18} = \bar{3}, \bar{5} \cdot \bar{18} = \bar{10}$$

$$\bar{6} + \bar{10} = \bar{16}, \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{14} = \bar{0}, \bar{6} \cdot \bar{14} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{16} = \bar{2}, \bar{6} \cdot \bar{16} = \bar{16}$$

$$\bar{8} + \bar{10} = \bar{18}, \bar{8} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{14} = \bar{2}, \bar{8} \cdot \bar{14} = \bar{12}$$

$$\bar{8} + \bar{16} = \bar{4}, \bar{8} \cdot \bar{16} = \bar{8}$$

$$\bar{10} + \bar{12} = \bar{2}, \bar{10} \cdot \bar{12} = \bar{0}$$

$$\bar{10} + \bar{15} = \bar{5}, \bar{10} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{10} + \bar{18} = \bar{8}, \bar{10} \cdot \bar{18} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{15} = \bar{7}, \bar{12} \cdot \bar{15} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{18} = \bar{10}, \bar{12} \cdot \bar{18} = \bar{16}$$

$$\bar{14} + \bar{16} = \bar{10}, \bar{14} \cdot \bar{16} = \bar{4}$$

$$\bar{15} + \bar{16} = \bar{11}, \bar{15} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{16} + \bar{18} = \bar{14}, \bar{16} \cdot \bar{18} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{10}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{10} = \bar{14}, \bar{4} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{14} = \bar{16}$$

$$\bar{4} + \bar{16} = \bar{0}, \bar{4} \cdot \bar{16} = \bar{4}$$

$$\bar{5} + \bar{6} = \bar{11}, \bar{5} \cdot \bar{6} = \bar{10}$$

$$\bar{5} + \bar{10} = \bar{15}, \bar{5} \cdot \bar{10} = \bar{10}$$

$$\bar{5} + \bar{14} = \bar{19}, \bar{5} \cdot \bar{14} = \bar{10}$$

$$\bar{5} + \bar{16} = \bar{1}, \bar{5} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{8} = \bar{14}, \bar{6} \cdot \bar{8} = \bar{8}$$

$$\bar{6} + \bar{12} = \bar{18}, \bar{6} \cdot \bar{12} = \bar{12}$$

$$\bar{6} + \bar{15} = \bar{1}, \bar{6} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{6} + \bar{18} = \bar{4}, \bar{6} \cdot \bar{18} = \bar{8}$$

$$\bar{8} + \bar{12} = \bar{0}, \bar{8} \cdot \bar{12} = \bar{16}$$

$$\bar{8} + \bar{15} = \bar{3}, \bar{8} \cdot \bar{15} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{18} = \bar{6}, \bar{8} \cdot \bar{18} = \bar{4}$$

$$\bar{10} + \bar{14} = \bar{4}, \bar{10} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{10} + \bar{16} = \bar{6}, \bar{10} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{14} = \bar{6}, \bar{12} \cdot \bar{14} = \bar{8}$$

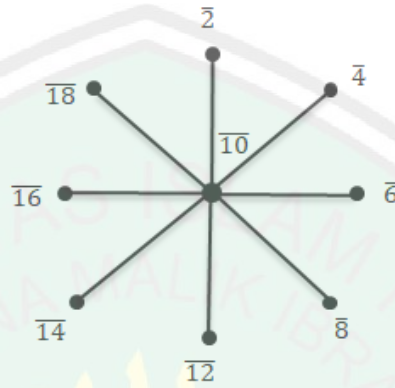
$$\bar{12} + \bar{16} = \bar{8}, \bar{12} \cdot \bar{16} = \bar{12}$$

$$\bar{14} + \bar{15} = \bar{9}, \bar{14} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{14} + \bar{18} = \bar{12}, \bar{14} \cdot \bar{18} = \bar{12}$$

$$\bar{15} + \bar{18} = \bar{13}, \bar{15} \cdot \bar{18} = \bar{10}$$

Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu  $\bar{2}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{4}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{6}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{8}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{12}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{14}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{16}$  dengan  $\bar{10}$ ,  $\bar{16}$  dengan  $\bar{10}$ , dan  $\bar{18}$  dengan  $\bar{10}$ . Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_{20}$  sebagai berikut:



Gambar 3.1.3  $ZT(\mathbb{Z}_{20})$

Berdasarkan gambar 3.1.3 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_{20})$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 d(\bar{2}, \bar{4}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 2, d(\bar{2}, \bar{8}) = 2, d(\bar{2}, \bar{10}) = 1, d(\bar{2}, \bar{12}) = 2, d(\bar{2}, \bar{14}) = 2, \\
 d(\bar{2}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{18}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 2, d(\bar{4}, \bar{8}) = 2, d(\bar{4}, \bar{10}) = 1, d(\bar{4}, \bar{12}) = 2, \\
 d(\bar{4}, \bar{14}) &= 2, d(\bar{4}, \bar{16}) = 2, d(\bar{4}, \bar{18}) = 2, d(\bar{6}, \bar{8}) = 2, d(\bar{6}, \bar{10}) = 1, d(\bar{6}, \bar{12}) = \\
 2, d(\bar{6}, \bar{14}) &= 2, d(\bar{6}, \bar{16}) = 2, d(\bar{6}, \bar{18}) = 2, d(\bar{8}, \bar{10}) = 1, d(\bar{8}, \bar{12}) = \\
 2, d(\bar{8}, \bar{14}) &= 2, d(\bar{8}, \bar{16}) = 2, d(\bar{8}, \bar{18}) = 2, d(\bar{10}, \bar{12}) = 1, d(\bar{10}, \bar{14}) = \\
 1, d(\bar{10}, \bar{16}) &= 1, d(\bar{10}, \bar{18}) = 1, d(\bar{12}, \bar{14}) = 2, d(\bar{12}, \bar{16}) = 2, d(\bar{12}, \bar{18}) = \\
 2, d(\bar{14}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{14}, \bar{18}) = 2, d(\bar{16}, \bar{18}) = 2
 \end{aligned}$$



Sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W(ZT(\mathbb{Z}_{20})) &= \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_{20})} d(u,v) \\
 &= d(\bar{2}, \bar{4}) + d(\bar{2}, \bar{6}) + d(\bar{2}, \bar{8}) + d(\bar{2}, \bar{10}) + d(\bar{2}, \bar{12}) + d(\bar{2}, \bar{14}) \\
 &\quad + d(\bar{2}, \bar{16}) + d(\bar{2}, \bar{18}) + d(\bar{4}, \bar{6}) + d(\bar{4}, \bar{8}) + d(\bar{4}, \bar{10}) \\
 &\quad + d(\bar{4}, \bar{12}) + d(\bar{4}, \bar{14}) + d(\bar{4}, \bar{16}) + d(\bar{4}, \bar{18}) + d(\bar{6}, \bar{8}) \\
 &\quad + d(\bar{6}, \bar{10}) + d(\bar{6}, \bar{12}) + d(\bar{6}, \bar{14}) + d(\bar{6}, \bar{16}) + d(\bar{6}, \bar{18}) \\
 &\quad + d(\bar{8}, \bar{10}) + d(\bar{8}, \bar{12}) + d(\bar{8}, \bar{14}) + d(\bar{8}, \bar{16}) + d(\bar{8}, \bar{18}) \\
 &\quad + d(\bar{10}, \bar{12}) + d(\bar{10}, \bar{14}) + d(\bar{10}, \bar{16}) + d(\bar{10}, \bar{18}) \\
 &\quad + d(\bar{12}, \bar{14}) + d(\bar{12}, \bar{16}) + d(\bar{12}, \bar{18}) + d(\bar{14}, \bar{16}) \\
 &\quad + d(\bar{14}, \bar{18}) + d(\bar{16}, \bar{18}) \\
 &= 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \\
 &\quad + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &\quad + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
 &= (1 \times 8) + (2 \times 28) = 64
 \end{aligned}$$

Jadi, indeks Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_8$  adalah 64.

### 3.1.4 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{28}$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_{28}, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 28 dengan  $\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{23}, \bar{24}, \bar{25}, \bar{26}, \bar{27}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari dua unsur  $\mathbb{Z}_{28}$ .

Tabel 3.4 Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{28}$ 

| ·  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 2  | 0 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 3  | 0 | 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 2  | 5  | 8  | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 4  | 0 | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 |
| 5  | 0 | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 2  | 7  | 12 | 17 | 22 | 27 | 4  | 9  | 14 | 19 | 24 | 1  | 6  |
| 6  | 0 | 6  | 12 | 18 | 24 | 5  | 8  | 14 | 20 | 26 | 4  | 10 | 16 | 22 | 0  | 6  | 12 | 18 | 24 |
| 7  | 0 | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 |
| 8  | 0 | 8  | 16 | 24 | 4  | 12 | 20 | 0  | 8  | 16 | 24 | 4  | 12 | 20 | 0  | 8  | 16 | 24 | 4  |
| 9  | 0 | 9  | 18 | 27 | 8  | 17 | 26 | 7  | 16 | 25 | 6  | 15 | 24 | 5  | 14 | 23 | 4  | 13 | 22 |
| 10 | 0 | 10 | 20 | 2  | 12 | 22 | 4  | 14 | 24 | 6  | 16 | 26 | 8  | 18 | 0  | 10 | 20 | 2  | 12 |
| 11 | 0 | 11 | 22 | 5  | 16 | 27 | 10 | 21 | 4  | 15 | 26 | 9  | 20 | 3  | 14 | 25 | 8  | 19 | 2  |
| 12 | 0 | 12 | 24 | 8  | 20 | 4  | 16 | 0  | 12 | 24 | 8  | 20 | 4  | 16 | 0  | 12 | 24 | 8  | 20 |
| 13 | 0 | 13 | 26 | 11 | 24 | 9  | 22 | 7  | 20 | 5  | 18 | 3  | 16 | 1  | 14 | 27 | 12 | 25 | 10 |
| 14 | 0 | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  |
| 15 | 0 | 15 | 2  | 17 | 4  | 19 | 6  | 21 | 8  | 23 | 10 | 25 | 12 | 27 | 14 | 1  | 16 | 3  | 18 |
| 16 | 0 | 16 | 4  | 20 | 8  | 24 | 12 | 0  | 16 | 4  | 20 | 8  | 24 | 12 | 0  | 16 | 4  | 20 | 8  |
| 17 | 0 | 17 | 6  | 23 | 12 | 1  | 18 | 7  | 24 | 13 | 2  | 19 | 8  | 25 | 14 | 3  | 20 | 9  | 26 |
| 18 | 0 | 18 | 8  | 26 | 16 | 6  | 24 | 14 | 4  | 22 | 12 | 2  | 20 | 10 | 0  | 18 | 8  | 26 | 16 |
| 19 | 0 | 19 | 10 | 1  | 20 | 11 | 2  | 21 | 12 | 3  | 22 | 13 | 4  | 23 | 14 | 5  | 24 | 15 | 6  |
| 20 | 0 | 20 | 12 | 4  | 24 | 16 | 8  | 0  | 20 | 12 | 4  | 24 | 16 | 8  | 0  | 20 | 12 | 4  | 24 |
| 21 | 0 | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 |
| 22 | 0 | 22 | 16 | 10 | 4  | 26 | 20 | 14 | 8  | 2  | 24 | 18 | 12 | 6  | 0  | 22 | 16 | 10 | 4  |
| 23 | 0 | 23 | 18 | 13 | 8  | 3  | 26 | 21 | 16 | 11 | 6  | 1  | 24 | 19 | 14 | 9  | 4  | 27 | 22 |
| 24 | 0 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 24 | 20 | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 24 | 20 | 16 | 12 |
| 25 | 0 | 25 | 22 | 19 | 16 | 13 | 10 | 7  | 4  | 1  | 26 | 23 | 20 | 17 | 14 | 11 | 8  | 5  | 2  |
| 26 | 0 | 26 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  | 0  | 26 | 24 | 22 | 20 |
| 27 | 0 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

Lanjutan Tabel 3.5 Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{28}$ 

| ·  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 2  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |
| 3  | 1  | 4  | 7  | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| 4  | 20 | 24 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5  | 11 | 16 | 21 | 26 | 3  | 8  | 13 | 18 | 23 |
| 6  | 2  | 8  | 14 | 20 | 26 | 4  | 10 | 16 | 22 |
| 7  | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 |
| 8  | 12 | 20 | 0  | 8  | 16 | 24 | 4  | 12 | 20 |
| 9  | 3  | 12 | 21 | 2  | 11 | 20 | 1  | 10 | 19 |
| 10 | 22 | 4  | 14 | 24 | 6  | 16 | 26 | 8  | 18 |
| 11 | 13 | 24 | 7  | 18 | 1  | 12 | 23 | 6  | 17 |
| 12 | 4  | 16 | 0  | 12 | 24 | 8  | 20 | 4  | 16 |
| 13 | 23 | 8  | 21 | 6  | 19 | 4  | 17 | 2  | 15 |
| 14 | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 |
| 15 | 5  | 20 | 7  | 22 | 9  | 24 | 11 | 26 | 13 |
| 16 | 24 | 12 | 0  | 16 | 4  | 20 | 8  | 24 | 12 |
| 17 | 15 | 4  | 21 | 10 | 27 | 16 | 5  | 22 | 11 |
| 18 | 6  | 24 | 14 | 4  | 22 | 12 | 2  | 20 | 10 |
| 19 | 25 | 16 | 7  | 26 | 17 | 8  | 27 | 18 | 9  |
| 20 | 16 | 8  | 0  | 20 | 12 | 4  | 24 | 16 | 8  |
| 21 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  |
| 22 | 26 | 20 | 14 | 8  | 2  | 24 | 18 | 12 | 6  |
| 23 | 17 | 12 | 7  | 2  | 25 | 20 | 15 | 10 | 5  |
| 24 | 8  | 4  | 0  | 24 | 20 | 16 | 12 | 8  | 4  |
| 25 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9  | 6  | 3  |
| 26 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  |
| 27 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  |

Berdasarkan definisi pembagi nol tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_{28}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{24}, \bar{26}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{12}$$

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9}, \bar{2} \cdot \bar{7} = \bar{14}$$

$$\bar{2} + \bar{8} = \bar{10}, \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{16}$$

$$\bar{2} + \bar{10} = \bar{12}, \bar{2} \cdot \bar{10} = \bar{20}$$

$$\bar{2} + \bar{12} = \bar{14}, \bar{2} \cdot \bar{12} = \bar{24}$$

$$\bar{2} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{2} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{16} = \bar{18}, \bar{2} \cdot \bar{16} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{18} = \bar{20}, \bar{2} \cdot \bar{18} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{21} = \bar{23}, \bar{2} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{2} + \bar{24} = \bar{26}, \bar{2} \cdot \bar{24} = \bar{20}$$

$$\bar{4} + \bar{7} = \bar{11}, \bar{4} \cdot \bar{7} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{10} = \bar{14}, \bar{4} \cdot \bar{10} = \bar{12}$$

$$\bar{4} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{18} = \bar{22}, \bar{4} \cdot \bar{18} = \bar{16}$$

$$\bar{4} + \bar{21} = \bar{25}, \bar{4} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{24} = \bar{0}, \bar{4} \cdot \bar{24} = \bar{12}$$

$$\bar{6} + \bar{8} = \bar{14}, \bar{6} \cdot \bar{8} = \bar{20}$$

$$\bar{6} + \bar{12} = \bar{18}, \bar{6} \cdot \bar{12} = \bar{16}$$

$$\bar{6} + \bar{16} = \bar{22}, \bar{6} \cdot \bar{16} = \bar{12}$$

$$\bar{6} + \bar{20} = \bar{26}, \bar{6} \cdot \bar{20} = \bar{8}$$

$$\bar{6} + \bar{22} = \bar{0}, \bar{6} \cdot \bar{22} = \bar{20}$$

$$\bar{6} + \bar{26} = \bar{4}, \bar{6} \cdot \bar{26} = \bar{16}$$

$$\bar{7} + \bar{10} = \bar{17}, \bar{7} \cdot \bar{10} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{14} = \bar{21}, \bar{7} \cdot \bar{14} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{18} = \bar{25}, \bar{7} \cdot \bar{18} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{21} = \bar{0}, \bar{7} \cdot \bar{21} = \bar{7}$$

$$\bar{7} + \bar{24} = \bar{3}, \bar{7} \cdot \bar{24} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{10} = \bar{18}, \bar{8} \cdot \bar{10} = \bar{24}$$

$$\bar{8} + \bar{14} = \bar{22}, \bar{8} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{18} = \bar{26}, \bar{8} \cdot \bar{18} = \bar{4}$$

$$\bar{8} + \bar{21} = \bar{1}, \bar{8} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{20} = \bar{22}, \bar{2} \cdot \bar{20} = \bar{12}$$

$$\bar{2} + \bar{22} = \bar{24}, \bar{2} \cdot \bar{22} = \bar{16}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{10}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{24}$$

$$\bar{4} + \bar{8} = \bar{12}, \bar{4} \cdot \bar{8} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{12} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{12} = \bar{20}$$

$$\bar{4} + \bar{16} = \bar{20}, \bar{4} \cdot \bar{16} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{20} = \bar{24}, \bar{4} \cdot \bar{20} = \bar{24}$$

$$\bar{4} + \bar{22} = \bar{26}, \bar{4} \cdot \bar{22} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{7} = \bar{15}, \bar{6} \cdot \bar{7} = \bar{14}$$

$$\bar{6} + \bar{10} = \bar{16}, \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{14} = \bar{20}, \bar{6} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{18} = \bar{24}, \bar{6} \cdot \bar{18} = \bar{24}$$

$$\bar{6} + \bar{21} = \bar{27}, \bar{6} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{6} + \bar{24} = \bar{2}, \bar{6} \cdot \bar{24} = \bar{4}$$

$$\bar{7} + \bar{8} = \bar{15}, \bar{7} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{12} = \bar{19}, \bar{7} \cdot \bar{12} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{16} = \bar{23}, \bar{7} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{20} = \bar{27}, \bar{7} \cdot \bar{20} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{22} = \bar{1}, \bar{7} \cdot \bar{22} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{26} = \bar{5}, \bar{7} \cdot \bar{26} = \bar{14}$$

$$\bar{8} + \bar{12} = \bar{20}, \bar{8} \cdot \bar{12} = \bar{12}$$

$$\bar{8} + \bar{16} = \bar{24}, \bar{8} \cdot \bar{16} = \bar{16}$$

$$\bar{8} + \bar{20} = \bar{0}, \bar{8} \cdot \bar{20} = \bar{20}$$

$$\bar{8} + \bar{22} = \bar{2}, \bar{8} \cdot \bar{22} = \bar{8}$$

$$\bar{8} + \bar{24} = \bar{4}, \bar{8} \cdot \bar{24} = \bar{24}$$

$$\bar{10} + \bar{12} = \bar{22}, \bar{10} \cdot \bar{12} = \bar{8}$$

$$\bar{10} + \bar{16} = \bar{16}, \bar{10} \cdot \bar{16} = \bar{20}$$

$$\bar{10} + \bar{20} = \bar{2}, \bar{10} \cdot \bar{20} = \bar{4}$$

$$\bar{10} + \bar{22} = \bar{4}, \bar{10} \cdot \bar{22} = \bar{24}$$

$$\bar{10} + \bar{26} = \bar{8}, \bar{10} \cdot \bar{26} = \bar{8}$$

$$\bar{12} + \bar{16} = \bar{0}, \bar{12} \cdot \bar{16} = \bar{24}$$

$$\bar{12} + \bar{20} = \bar{4}, \bar{12} \cdot \bar{20} = \bar{16}$$

$$\bar{12} + \bar{22} = \bar{6}, \bar{12} \cdot \bar{22} = \bar{12}$$

$$\bar{12} + \bar{26} = \bar{10}, \bar{12} \cdot \bar{26} = \bar{4}$$

$$\bar{14} + \bar{18} = \bar{4}, \bar{14} \cdot \bar{18} = \bar{0}$$

$$\bar{14} + \bar{21} = \bar{7}, \bar{14} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{14} + \bar{24} = \bar{10}, \bar{14} \cdot \bar{24} = \bar{0}$$

$$\bar{16} + \bar{18} = \bar{6}, \bar{16} \cdot \bar{18} = \bar{8}$$

$$\bar{16} + \bar{21} = \bar{9}, \bar{16} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{16} + \bar{24} = \bar{12}, \bar{16} \cdot \bar{24} = \bar{20}$$

$$\bar{18} + \bar{20} = \bar{10}, \bar{18} \cdot \bar{20} = \bar{24}$$

$$\bar{18} + \bar{22} = \bar{12}, \bar{18} \cdot \bar{22} = \bar{4}$$

$$\bar{18} + \bar{26} = \bar{14}, \bar{18} \cdot \bar{26} = \bar{20}$$

$$\bar{20} + \bar{22} = \bar{14}, \bar{20} \cdot \bar{22} = \bar{20}$$

$$\bar{20} + \bar{26} = \bar{18}, \bar{20} \cdot \bar{26} = \bar{16}$$

$$\bar{21} + \bar{24} = \bar{17}, \bar{21} \cdot \bar{24} = \bar{0}$$

$$\bar{22} + \bar{24} = \bar{18}, \bar{22} \cdot \bar{24} = \bar{24}$$

$$\bar{24} + \bar{26} = \bar{22}, \bar{24} \cdot \bar{26} = \bar{8}$$

$$\bar{8} + \bar{26} = \bar{6}, \bar{8} \cdot \bar{26} = \bar{12}$$

$$\bar{10} + \bar{14} = \bar{24}, \bar{10} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{10} + \bar{18} = \bar{18}, \bar{10} \cdot \bar{18} = \bar{12}$$

$$\bar{10} + \bar{21} = \bar{3}, \bar{10} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{10} + \bar{24} = \bar{6}, \bar{10} \cdot \bar{24} = \bar{16}$$

$$\bar{12} + \bar{14} = \bar{26}, \bar{12} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{18} = \bar{2}, \bar{12} \cdot \bar{18} = \bar{20}$$

$$\bar{12} + \bar{21} = \bar{5}, \bar{12} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{24} = \bar{8}, \bar{12} \cdot \bar{24} = \bar{8}$$

$$\bar{14} + \bar{16} = \bar{2}, \bar{14} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{14} + \bar{20} = \bar{6}, \bar{14} \cdot \bar{20} = \bar{0}$$

$$\bar{14} + \bar{22} = \bar{8}, \bar{14} \cdot \bar{22} = \bar{0}$$

$$\bar{14} + \bar{26} = \bar{10}, \bar{14} \cdot \bar{26} = \bar{0}$$

$$\bar{16} + \bar{20} = \bar{8}, \bar{16} \cdot \bar{20} = \bar{12}$$

$$\bar{16} + \bar{22} = \bar{10}, \bar{16} \cdot \bar{22} = \bar{16}$$

$$\bar{16} + \bar{26} = \bar{14}, \bar{16} \cdot \bar{26} = \bar{24}$$

$$\bar{18} + \bar{21} = \bar{11}, \bar{18} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{18} + \bar{24} = \bar{14}, \bar{18} \cdot \bar{24} = \bar{12}$$

$$\bar{20} + \bar{21} = \bar{13}, \bar{20} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{20} + \bar{24} = \bar{16}, \bar{20} \cdot \bar{24} = \bar{4}$$

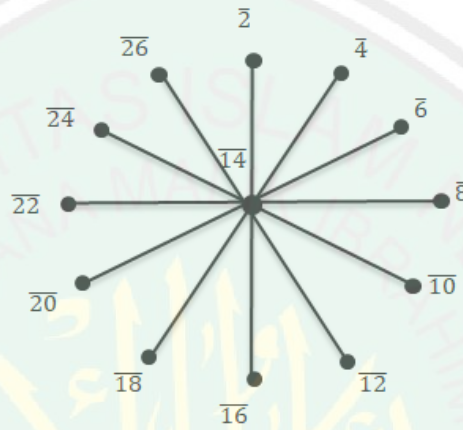
$$\bar{21} + \bar{22} = \bar{15}, \bar{21} \cdot \bar{22} = \bar{14}$$

$$\bar{21} + \bar{26} = \bar{19}, \bar{21} \cdot \bar{26} = \bar{2}$$

$$\bar{22} + \bar{26} = \bar{20}, \bar{22} \cdot \bar{26} = \bar{12}$$



Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu  $\bar{2}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{4}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{6}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{8}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{10}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{12}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{16}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{18}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{20}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{22}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{24}$  dengan  $\bar{14}$ , dan  $\bar{26}$  dengan  $\bar{14}$ . Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_{28}$  sebagai berikut



Gambar 3.1.4  $ZT(\mathbb{Z}_{28})$

Berdasarkan gambar 3.1.4 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_{28})$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 d(\bar{2}, \bar{4}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 2, d(\bar{2}, \bar{8}) = 2, d(\bar{2}, \bar{10}) = 2, d(\bar{2}, \bar{12}) = 2, d(\bar{2}, \bar{14}) = \\
 1, d(\bar{2}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{18}) = 2, d(\bar{2}, \bar{20}) = 2, d(\bar{2}, \bar{22}) = 2, d(\bar{2}, \bar{24}) = \\
 2, d(\bar{2}, \bar{26}) &= 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 2, d(\bar{4}, \bar{8}) = 2, d(\bar{4}, \bar{10}) = 2, d(\bar{4}, \bar{12}) = 2, d(\bar{4}, \bar{14}) = \\
 2, d(\bar{4}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{4}, \bar{18}) = 2, d(\bar{4}, \bar{20}) = 2, d(\bar{4}, \bar{22}) = 2, d(\bar{4}, \bar{24}) = \\
 2, d(\bar{4}, \bar{26}) &= 2, d(\bar{6}, \bar{8}) = 2, d(\bar{6}, \bar{10}) = 2, d(\bar{6}, \bar{12}) = 2, d(\bar{6}, \bar{14}) = \\
 1, d(\bar{6}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{6}, \bar{18}) = 2, d(\bar{6}, \bar{20}) = 2, d(\bar{6}, \bar{22}) = 2, d(\bar{6}, \bar{24}) = \\
 2, d(\bar{6}, \bar{26}) &= 2, d(\bar{8}, \bar{10}) = 2, d(\bar{8}, \bar{12}) = 2, d(\bar{8}, \bar{14}) = 1, d(\bar{8}, \bar{16}) = \\
 2, d(\bar{8}, \bar{18}) &= 2, d(\bar{8}, \bar{20}) = 2, d(\bar{8}, \bar{22}) = 2, d(\bar{8}, \bar{24}) = 2, d(\bar{8}, \bar{26}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2, d(\overline{10}, \overline{12}) = 2, d(\overline{10}, \overline{14}) = 1, d(\overline{10}, \overline{16}) = 2, d(\overline{10}, \overline{18}) = 2, d(\overline{10}, \overline{20}) = \\
&2, d(\overline{10}, \overline{22}) = 2, d(\overline{10}, \overline{24}) = 2, d(\overline{10}, \overline{26}) = 2, d(\overline{12}, \overline{14}) = 1, d(\overline{12}, \overline{16}) = \\
&2, d(\overline{12}, \overline{18}) = 2, d(\overline{12}, \overline{20}) = 2, d(\overline{12}, \overline{22}) = 2, d(\overline{12}, \overline{24}) = 2, d(\overline{12}, \overline{26}) = \\
&2, d(\overline{14}, \overline{16}) = 1, d(\overline{14}, \overline{18}) = 1, d(\overline{14}, \overline{20}) = 1, d(\overline{14}, \overline{22}) = 1, d(\overline{14}, \overline{24}) = \\
&1, d(\overline{14}, \overline{26}) = 1, d(\overline{16}, \overline{18}) = 2, d(\overline{16}, \overline{20}) = 2, d(\overline{16}, \overline{22}) = 2, d(\overline{16}, \overline{24}) = \\
&2, d(\overline{16}, \overline{26}) = 2, d(\overline{18}, \overline{20}) = 2, d(\overline{18}, \overline{22}) = 2, d(\overline{18}, \overline{24}) = 2, d(\overline{18}, \overline{26}) = \\
&2, d(\overline{20}, \overline{22}) = 2, d(\overline{20}, \overline{24}) = 2, d(\overline{20}, \overline{26}) = 2, d(\overline{22}, \overline{24}) = 2, d(\overline{22}, \overline{26}) = \\
&2, d(\overline{24}, \overline{26}) = 2.
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks Wiener sebagai berikut:

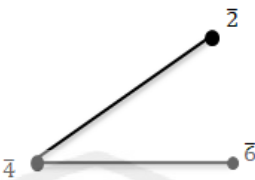
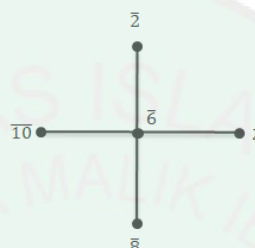
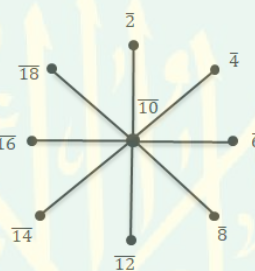
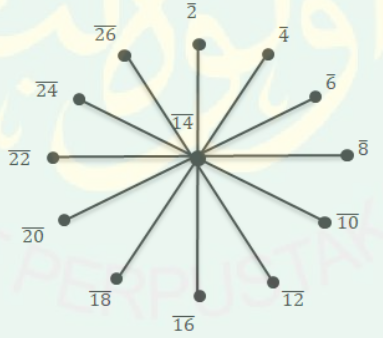
$$\begin{aligned}
W(ZT(\mathbb{Z}_{28})) &= \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_{28})} d(u, v) \\
&= d(\overline{2}, \overline{4}) + d(\overline{2}, \overline{6}) + d(\overline{2}, \overline{8}) + d(\overline{2}, \overline{10}) + d(\overline{2}, \overline{12}) + d(\overline{2}, \overline{14}) + d(\overline{2}, \overline{16}) \\
&\quad + d(\overline{2}, \overline{18}) + d(\overline{2}, \overline{20}) + d(\overline{2}, \overline{22}) + d(\overline{2}, \overline{24}) + d(\overline{2}, \overline{26}) \\
&\quad + d(\overline{4}, \overline{6}) + d(\overline{4}, \overline{8}) + d(\overline{4}, \overline{10}) + d(\overline{4}, \overline{12}) + d(\overline{4}, \overline{14}) + d(\overline{4}, \overline{16}) \\
&\quad + d(\overline{4}, \overline{18}) + d(\overline{4}, \overline{20}) + d(\overline{4}, \overline{22}) + d(\overline{4}, \overline{24}) + d(\overline{4}, \overline{26}) \\
&\quad + d(\overline{6}, \overline{8}) + d(\overline{6}, \overline{10}) + d(\overline{6}, \overline{12}) + d(\overline{6}, \overline{14}) + d(\overline{6}, \overline{16}) \\
&\quad + d(\overline{6}, \overline{18}) + d(\overline{6}, \overline{20}) + d(\overline{6}, \overline{22}) + d(\overline{6}, \overline{24}) + d(\overline{6}, \overline{26})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d(\overline{8}, \overline{10}) + d(\overline{8}, \overline{12}) + d(\overline{8}, \overline{14}) + d(\overline{8}, \overline{16}) + d(\overline{8}, \overline{18}) + d(\overline{8}, \overline{20}) + d(\overline{8}, \overline{22}) \\
& + d(\overline{8}, \overline{24}) + d(\overline{8}, \overline{26}) + d(\overline{10}, \overline{12}) + d(\overline{10}, \overline{14}) + d(\overline{10}, \overline{16}) \\
& + d(\overline{10}, \overline{18}) + d(\overline{10}, \overline{20}) + d(\overline{10}, \overline{22}) + d(\overline{10}, \overline{24}) + d(\overline{10}, \overline{26}) \\
& + d(\overline{12}, \overline{14}) + d(\overline{12}, \overline{16}) + d(\overline{12}, \overline{18}) + d(\overline{12}, \overline{20}) + d(\overline{12}, \overline{22}) \\
& + d(\overline{12}, \overline{24}) + d(\overline{12}, \overline{26}) + d(\overline{14}, \overline{16}) + d(\overline{14}, \overline{18}) + d(\overline{14}, \overline{20}) \\
& + d(\overline{14}, \overline{22}) + d(\overline{14}, \overline{24}) + d(\overline{14}, \overline{26}) + d(\overline{16}, \overline{18}) + d(\overline{16}, \overline{20}) \\
& + d(\overline{16}, \overline{22}) + d(\overline{16}, \overline{24}) + d(\overline{16}, \overline{26}) + d(\overline{18}, \overline{20}) + d(\overline{18}, \overline{22}) \\
& + d(\overline{18}, \overline{24}) + d(\overline{18}, \overline{26}) + d(\overline{20}, \overline{22}) + d(\overline{20}, \overline{24}) + d(\overline{20}, \overline{26}) \\
& + d(\overline{22}, \overline{24}) + d(\overline{22}, \overline{26}) + d(\overline{24}, \overline{26}) \\
& = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
& + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 \\
& + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
& + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
& + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
& + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\
& = (1 \times 12) + (2 \times 66) = 144
\end{aligned}$$

Jadi, indeks Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{28}$  adalah 144.

Bedasarkan pengamatan dan perhitungan pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{20}$ , dan  $\mathbb{Z}_{28}$  dapat dibentuk tabel graf sebagai berikut:

**Tabel 3.6** Tabel Gambar  $ZT(\mathbb{Z}_{4n})$ 

| $G$                   | Gambar Graf                                                                         | $W(ZT(\mathbb{Z}_{4n}))$ |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| $ZT(\mathbb{Z}_8)$    |    | 4                        |
| $ZT(\mathbb{Z}_{12})$ |    | 16                       |
| $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ |   | 64                       |
| $ZT(\mathbb{Z}_{28})$ |  | 144                      |

Berdasarkan perhitungan indeks Wiener dibuat tabel untuk memudahkan dalam mencari pola, dengan mengelompokkan pasangan titik yang memiliki jarak yang sama.

**Tabel 3.7** Perhitungan Indeks Wiener pada  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$ 

| $p$ | $G$                   | $W(G)$                                |
|-----|-----------------------|---------------------------------------|
| 2   | $ZT(\mathbb{Z}_8)$    | $(1 \times 2) + (2 \times 1) = 4$     |
| 3   | $ZT(\mathbb{Z}_{12})$ | $(1 \times 4) + (2 \times 6) = 16$    |
| 5   | $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ | $(1 \times 8) + (2 \times 28) = 64$   |
| 7   | $ZT(\mathbb{Z}_{28})$ | $(1 \times 12) + (2 \times 66) = 100$ |

Dari tabel 3.7, diperoleh dugaan bahwa indeks Wiener dari  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  adalah  $W(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = (2(p-1))^2$ . Dari dugaan tersebut akan dibuktikan dengan proposisi-proposisi sebagai berikut:

**Proposisi 1**

$$Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{p, 2p, 3p, 2k : k = 1, 2, \dots, 2p-1\}.$$

Bukti:

$\forall k = 1, 2, \dots, 2p-1$  berlaku

$$2k \cdot 2p = 4p \cdot k \equiv 0 \pmod{4p},$$

artinya  $\{2k; k = 1, 2, \dots, 2p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

dan berlaku

$$p \cdot 4 = 4p \equiv 0 \pmod{4p},$$

$$3p \cdot 4 = 4p \cdot 3 \equiv 0 \pmod{4p},$$

artinya  $p, 3p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Dengan demikian  $\{2k; k = 1, 2, \dots, 2p-1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{4p})$  dan  $p, 3p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa semua unsur  $\mathbb{Z}_{4p}$  yang bukan kelipatan  $p$  dan genap bukan merupakan unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .



Misalkan  $x \in \mathbb{Z}_{4p}$  dan  $x$  ganjil bukan kelipatan  $p$ .  $x = 2k - 1$  untuk suatu  $k \in \mathbb{Z}$ .

Karena  $FPB(2k - 1, 4p) = 1$ , dari teorema 1 dapat dikatakan bahwa kongruensi berikut ini

$$(2k - 1)(x) \equiv 0 \pmod{4p}$$

memiliki satu solusi yaitu  $x = 0$

Dengan demikian semua unsur  $\mathbb{Z}_{4p}$  yang bukan kelipatan  $p$  dan genap bukan merupakan unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

### Proposisi 2

Semua titik  $u \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $u \neq p, u \neq 3p$  hanya terhubung langsung dengan  $2p$ , untuk  $p \geq 3$ .

Bukti:

Misalkan  $x \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ , dan  $x$  genap. Misalkan  $x = 2k$  untuk suatu  $k = 1, 2, \dots, 2p - 1$  dan  $k \neq p$

berlaku,

$$x \cdot 2p = 2k \cdot 2p = 4p \cdot k \equiv 0 \pmod{4p}$$

dan

$$2k + 2p = 2(k + p) \text{ sehingga } 2k + 2p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$$

Dengan demikian semua titik yang genap terhubung langsung dengan  $2p$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa semua titik  $u \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $u \neq p, u \neq 2p, u \neq 3p$ , tidak terhubung langsung.

Misalkan  $x, y \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ , dan  $x$  dan  $y$  genap. Misalkan  $x = 2k$  dan  $y = 2l$  untuk suatu  $k, l = 1, 2, \dots, 2p - 1$  dan  $k \neq p, l \neq p$ .

Karena  $FPB(2k, 4p) = FPB(k, 2p) = \begin{cases} 2 & \text{jika } k \text{ genap} \\ 1 & \text{jika } k \text{ ganjil} \end{cases}$

Untuk  $k$  ganjil kongruensi  $k \cdot 2l \equiv 0 \pmod{4p}$  hanya terpenuhi jika  $2l = 0$ , sedangkan  $2l = 0 \notin Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Untuk  $k$  genap kongruensi  $k \cdot 2l \equiv 0 \pmod{4p}$  hanya terpenuhi jika  $2l = 0$  atau  $l = p$  sedangkan  $2l = 0 \notin Z(\mathbb{Z}_{4p})$  dan  $l \neq p$ .

Sehingga  $2k$  dan  $2l$  tidak saling terhubung langsung.

### Proposisi 3

$p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan semua unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ ,  $p \geq 3$ .

Bukti:

- Akan ditunjukkan bahwa  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2p$ .

$2p \cdot p = 2p^2$  karena  $\frac{2p^2}{4p} = \frac{p}{2}$ , artinya  $2p^2$  tidak habis dibagi  $4p$  maka  $2p^2 \not\equiv 0 \pmod{4p}$ .

Jadi,  $2p$  dengan  $p$  tidak saling terhubung langsung.

$2p \cdot 3p = 6p^2$  karena  $\frac{6p^2}{4p} = \frac{3p}{2}$ , artinya  $6p^2$  tidak habis dibagi  $4p$  maka  $6p^2 \not\equiv 0 \pmod{4p}$ .

Jadi,  $2p$  dengan  $3p$  tidak saling terhubung langsung.

- Akan ditunjukkan bahwa  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk suatu  $k = 1, 2, \dots, 2p - 1$  dan  $k \neq p$ .

Kongruensi berikut ini

$$p \cdot 2k \equiv 0 \pmod{4p},$$

$$3p \cdot 2k \equiv 0 \pmod{4p}$$

akan terpenuhi hanya jika  $k$  genap, artinya  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk  $k$  ganjil.

Selanjutnya akan ditunjukkan  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk  $k$  genap.

Misalkan  $k$  genap, maka dapat dituliskan sebagai  $k = 2n$  untuk suatu  $n = 1, 2, \dots, p-1$ .

Maka

$$p \cdot 2k = p \cdot 2(2n) = 4p \cdot n \equiv 0 \pmod{4p}$$

dan

$$3p \cdot 2k = 3p \cdot 2(2n) = 4p \cdot 3n \equiv 0 \pmod{4p}$$

Akan tetapi,

$p + 2k = p + 4n$  dan  $3p + 2k = 3p + 4n$  adalah anggota  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$  hanya jika  $n = 0$ .

Sehingga  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk  $k$  genap.

Dengan demikian  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan semua unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ , artinya  $p$  dan  $3p$  merupakan titik terisolasi.

#### Proposisi 4

Untuk setiap  $u, v \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $u, v$  genap dan  $u \neq 2p, v \neq 2p$ ,  $d(u, v) = 2$ .

Bukti:

Karena titik  $2p$  terhubung langsung dengan semua titik  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  kecuali  $p, 2p, 3p$  berdasarkan proposisi 2, maka  $u, v$  tidak terhubung langsung sehingga  $d(u, v) \geq$

2, dan karena terdapat lintasan  $v - 2p - u$  maka  $d(u, v) \leq 2$ . Dengan demikian  $d(u, v) = 2$ .

### Proposisi 5

Untuk setiap  $u \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $d(u, 2p) = 1$ .

Bukti:

Karena titik  $2p$  terhubung langsung dengan semua titik  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  kecuali  $p, 2p, 3p$  maka berdasarkan proposisi 2  $d(u, 2p) = 1$ .

### Proposisi 3.1

Untuk setiap  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  dimana  $p$  adalah bilangan prima, indeks Wiener pada graf tersebut adalah

$$W(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = (2(p-1))^2.$$

Bukti:

Karena graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$ ,  $p$  bilangan prima mempunyai order  $2p-1$ , dan berdasarkan proposisi 5 diketahui bahwa titik yang berjarak 1 sebanyak  $2(p-1)$ , serta berdasarkan proposisi 4 titik yang berjarak 2 sebanyak  $2(p-1) - 1 + (2(p-1)) - 2 + \dots + 2 + 1$  atau dapat ditulis sebagai jumlah deret aritmatika sebanyak  $2(p-1) - 1$  suku dengan beda 1 yang dinotasikan sebagai  $S_{2(p-1)-1}$ , maka didapatkan:

$$\begin{aligned} W(G) &= \sum_{u,v \in V(G)} d(u, v) \\ &= \sum_{u, 2p \in V(G)} 1 + \sum_{u,v \in V(G)} 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 \times 2(p-1)) + (2 \times S_{2(p-1)-1}) \\
&= (2p-2) + 2 \times \left( \frac{2(p-1)-1}{2} \times (2 \times 1 + (2(p-1)-1) \times 1) \right) \\
&= 2p-2 + (2p-3) \times (2p-2) \\
&= 2p-2 + 4p^2 - 10p + 6 \\
&= 4p^2 - 8p + 4 \\
&= (2p-2)^2
\end{aligned}$$

### 3.2 Indeks Hiper-Wiener pada Graf Total Gelanggang Komutatif dengan

#### Unsur Kesatuan

Subbab ini membahas tentang penentuan rumus umum indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$  dengan  $p$  bilangan prima. Penelitian ini menggunakan gelanggang  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{20}$ , dan  $\mathbb{Z}_{28}$  untuk menentukan rumus umum tersebut.

#### 3.2.1 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_8$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 8. Elemen-elemen dari  $\mathbb{Z}_8$  adalah  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari setiap dua unsur  $\mathbb{Z}_8$ .

**Tabel 3.6** Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_8$ 

| $\cdot$   | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{7}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{7}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{0}$ | $\bar{7}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

Berdasarkan definisi pembagi nol, dari tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{2}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{0}$$

Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu  $\bar{2}$  dengan  $\bar{4}$  dan  $\bar{2}$  dengan  $\bar{6}$ . Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_8$  sebagai berikut

**Gambar 3.2.1**  $ZT(\mathbb{Z}_8)$ 

Berdasarkan gambar 3.2.1 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_8)$  sebagai berikut



$$d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, d(\bar{2}, \bar{6}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 1$$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks hiper-Wiener sebagai berikut:

$$\begin{aligned} WW(ZT(\mathbb{Z}_8)) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_8)} [d(u,v) + d(u,v)^2] \\ &= \frac{1}{2} [\{d(\bar{2}, \bar{4}) + d(\bar{2}, \bar{4})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{6}) + d(\bar{2}, \bar{6})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{8}) + d(\bar{2}, \bar{8})^2\}] \\ &= \frac{1}{2} [\{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\}] \\ &= \frac{1}{2} [2 + 6 + 2] = 5 \end{aligned}$$

Jadi, indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_8$  adalah 5.

### 3.2.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{12}$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 12. Elemen-elemen dari  $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari dua unsur  $\mathbb{Z}_{12}$ .

**Tabel 3.8** Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{12}$

| $\cdot$    | $\bar{0}$ | $\bar{1}$  | $\bar{2}$  | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$  | $\bar{6}$ | $\bar{7}$  | $\bar{8}$ | $\bar{9}$ | $\bar{10}$ | $\bar{11}$ |
|------------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|------------|
| $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  |
| $\bar{1}$  | $\bar{0}$ | $\bar{1}$  | $\bar{2}$  | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$  | $\bar{6}$ | $\bar{7}$  | $\bar{8}$ | $\bar{9}$ | $\bar{10}$ | $\bar{11}$ |
| $\bar{2}$  | $\bar{0}$ | $\bar{2}$  | $\bar{4}$  | $\bar{6}$ | $\bar{8}$ | $\bar{10}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$  | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{8}$  | $\bar{10}$ |
| $\bar{3}$  | $\bar{0}$ | $\bar{3}$  | $\bar{6}$  | $\bar{9}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$  | $\bar{6}$ | $\bar{9}$  | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$  | $\bar{9}$  |
| $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  |
| $\bar{5}$  | $\bar{0}$ | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{3}$ | $\bar{8}$ | $\bar{1}$  | $\bar{6}$ | $\bar{11}$ | $\bar{4}$ | $\bar{9}$ | $\bar{2}$  | $\bar{7}$  |
| $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$  | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$  | $\bar{6}$  |
| $\bar{7}$  | $\bar{0}$ | $\bar{7}$  | $\bar{2}$  | $\bar{9}$ | $\bar{4}$ | $\bar{11}$ | $\bar{6}$ | $\bar{1}$  | $\bar{8}$ | $\bar{3}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  |
| $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$ | $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  |
| $\bar{9}$  | $\bar{0}$ | $\bar{9}$  | $\bar{6}$  | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{9}$  | $\bar{6}$ | $\bar{3}$  | $\bar{0}$ | $\bar{9}$ | $\bar{6}$  | $\bar{3}$  |
| $\bar{10}$ | $\bar{0}$ | $\bar{10}$ | $\bar{8}$  | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$  | $\bar{0}$ | $\bar{10}$ | $\bar{8}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$  | $\bar{2}$  |
| $\bar{11}$ | $\bar{0}$ | $\bar{11}$ | $\bar{10}$ | $\bar{9}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$  | $\bar{6}$ | $\bar{5}$  | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$  | $\bar{1}$  |

Berdasarkan definisi pembagi nol, dari tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}, \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6}$$

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{8} = \bar{10}, \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{9} = \bar{11}, \bar{2} \cdot \bar{9} = \bar{6}$$

$$\bar{2} + \bar{10} = \bar{0}, \bar{2} \cdot \bar{10} = \bar{8}$$

$$\bar{3} + \bar{4} = \bar{7}, \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$$

$$\bar{3} + \bar{6} = \bar{9}, \bar{3} \cdot \bar{6} = \bar{6}$$

$$\bar{3} + \bar{8} = \bar{11}, \bar{3} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{3} + \bar{9} = \bar{0}, \bar{3} \cdot \bar{9} = \bar{3}$$

$$\bar{3} + \bar{10} = \bar{13}, \bar{3} \cdot \bar{10} = \bar{6}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{10}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{8} = \bar{12}, \bar{4} \cdot \bar{8} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{9} = \bar{1}, \bar{4} \cdot \bar{9} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{10} = \bar{2}, \bar{4} \cdot \bar{10} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{8} = \bar{2}, \bar{6} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{9} = \bar{3}, \bar{6} \cdot \bar{9} = \bar{6}$$

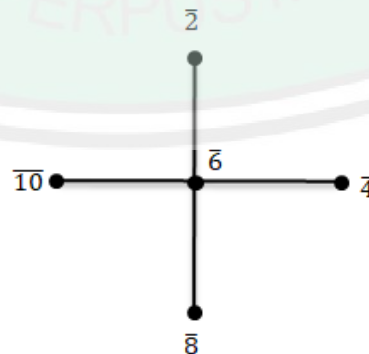
$$\bar{6} + \bar{10} = \bar{4}, \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{9} = \bar{5}, \bar{8} \cdot \bar{9} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{10} = \bar{6}, \bar{8} \cdot \bar{10} = \bar{8}$$

$$\bar{9} + \bar{10} = \bar{7}, \bar{9} \cdot \bar{10} = \bar{6}$$

Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu 2 dengan 6, 4 dengan 6, 8 dengan 6, dan 10 dengan 6. Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_{12}$  sebagai berikut



Gambar 3.2.2  $ZT(\mathbb{Z}_{12})$

Berdasarkan gambar 3.2.2 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_{12})$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} d(\bar{2}, \bar{4}) = 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 1, d(\bar{2}, \bar{8}) = 2, d(\bar{2}, \bar{10}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 1, d(\bar{4}, \bar{8}) \\ = 2, d(\bar{4}, \bar{10}) = 2, d(\bar{6}, \bar{8}) = 1, d(\bar{6}, \bar{10}) = 1, d(\bar{8}, \bar{10}) = 1 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks hiper-Wiener sebagai berikut:

$$\begin{aligned} WW(ZT(\mathbb{Z}_{12})) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_8)} [d(u, v) + d(u, v)^2] \\ &= \frac{1}{2} [\{d(\bar{2}, \bar{4}) + d(\bar{2}, \bar{4})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{6}) + d(\bar{2}, \bar{6})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{8}) + d(\bar{2}, \bar{8})^2\} \\ &\quad + \{d(\bar{2}, \bar{10}) + d(\bar{2}, \bar{10})^2\} + \{d(\bar{4}, \bar{6}) + d(\bar{4}, \bar{6})^2\} \\ &\quad + \{d(\bar{4}, \bar{8}) + d(\bar{4}, \bar{8})^2\} + \{d(\bar{4}, \bar{10}) + d(\bar{4}, \bar{10})^2\} \\ &\quad + \{d(\bar{6}, \bar{8}) + d(\bar{6}, \bar{8})^2\} + \{d(\bar{6}, \bar{10}) + d(\bar{6}, \bar{10})^2\} \\ &\quad + \{d(\bar{8}, \bar{10}) + d(\bar{8}, \bar{10})^2\}] \\ &= \frac{1}{2} [\{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} \\ &\quad + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\}] \\ &= \frac{1}{2} [6 + 2 + 6 + 6 + 2 + 6 + 6 + 2 + 2 + 6] \\ &= \frac{1}{2} [(2 \times 4) + (6 \times 6)] \\ &= 22 \end{aligned}$$

Jadi, indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{12}$  adalah 22.

### 3.2.3 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{20}$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 20. Elemen-elemen dari  $\mathbb{Z}_{20}$  adalah

$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari dua unsur  $\mathbb{Z}_{20}$ .

**Tabel 3.9** Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{20}$

| ·          | $\bar{0}$ | $\bar{1}$  | $\bar{2}$  | $\bar{3}$  | $\bar{4}$  | $\bar{5}$  | $\bar{6}$  | $\bar{7}$  | $\bar{8}$  | $\bar{9}$  | $\bar{10}$ | $\bar{11}$ | $\bar{12}$ | $\bar{13}$ | $\bar{14}$ | $\bar{15}$ | $\bar{16}$ | $\bar{17}$ | $\bar{18}$ | $\bar{19}$ |
|------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\bar{0}$  | $\bar{0}$ | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  | $\bar{0}$  |
| $\bar{1}$  | $\bar{0}$ | $\bar{1}$  | $\bar{2}$  | $\bar{3}$  | $\bar{4}$  | $\bar{5}$  | $\bar{6}$  | $\bar{7}$  | $\bar{8}$  | $\bar{9}$  | $\bar{10}$ | $\bar{11}$ | $\bar{12}$ | $\bar{13}$ | $\bar{14}$ | $\bar{15}$ | $\bar{16}$ | $\bar{17}$ | $\bar{18}$ | $\bar{19}$ |
| $\bar{2}$  | $\bar{0}$ | $\bar{2}$  | $\bar{4}$  | $\bar{6}$  | $\bar{8}$  | $\bar{10}$ | $\bar{12}$ | $\bar{14}$ | $\bar{16}$ | $\bar{18}$ | $\bar{0}$  | $\bar{2}$  | $\bar{4}$  | $\bar{6}$  | $\bar{8}$  | $\bar{10}$ | $\bar{12}$ | $\bar{14}$ | $\bar{16}$ | $\bar{18}$ |
| $\bar{3}$  | $\bar{0}$ | $\bar{3}$  | $\bar{6}$  | $\bar{9}$  | $\bar{12}$ | $\bar{15}$ | $\bar{18}$ | $\bar{1}$  | $\bar{4}$  | $\bar{7}$  | $\bar{10}$ | $\bar{13}$ | $\bar{16}$ | $\bar{19}$ | $\bar{2}$  | $\bar{5}$  | $\bar{8}$  | $\bar{11}$ | $\bar{14}$ | $\bar{17}$ |
| $\bar{4}$  | $\bar{0}$ | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  | $\bar{12}$ | $\bar{16}$ | $\bar{0}$  | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  | $\bar{12}$ | $\bar{16}$ | $\bar{0}$  | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  | $\bar{12}$ | $\bar{16}$ | $\bar{0}$  | $\bar{4}$  | $\bar{8}$  | $\bar{12}$ | $\bar{16}$ |
| $\bar{5}$  | $\bar{0}$ | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{15}$ | $\bar{0}$  | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{15}$ | $\bar{0}$  | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{15}$ | $\bar{0}$  | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{15}$ | $\bar{0}$  | $\bar{5}$  | $\bar{10}$ | $\bar{15}$ |
| $\bar{6}$  | $\bar{0}$ | $\bar{6}$  | $\bar{12}$ | $\bar{18}$ | $\bar{4}$  | $\bar{10}$ | $\bar{16}$ | $\bar{2}$  | $\bar{8}$  | $\bar{14}$ | $\bar{0}$  | $\bar{6}$  | $\bar{12}$ | $\bar{18}$ | $\bar{4}$  | $\bar{10}$ | $\bar{16}$ | $\bar{2}$  | $\bar{8}$  | $\bar{14}$ |
| $\bar{7}$  | $\bar{0}$ | $\bar{7}$  | $\bar{14}$ | $\bar{1}$  | $\bar{8}$  | $\bar{15}$ | $\bar{2}$  | $\bar{9}$  | $\bar{16}$ | $\bar{3}$  | $\bar{10}$ | $\bar{17}$ | $\bar{4}$  | $\bar{11}$ | $\bar{18}$ | $\bar{5}$  | $\bar{12}$ | $\bar{19}$ | $\bar{6}$  | $\bar{13}$ |
| $\bar{8}$  | $\bar{0}$ | $\bar{8}$  | $\bar{16}$ | $\bar{4}$  | $\bar{12}$ | $\bar{0}$  | $\bar{8}$  | $\bar{16}$ | $\bar{4}$  | $\bar{12}$ | $\bar{0}$  | $\bar{8}$  | $\bar{16}$ | $\bar{4}$  | $\bar{12}$ | $\bar{0}$  | $\bar{8}$  | $\bar{16}$ | $\bar{4}$  | $\bar{12}$ |
| $\bar{9}$  | $\bar{0}$ | $\bar{9}$  | $\bar{18}$ | $\bar{7}$  | $\bar{16}$ | $\bar{5}$  | $\bar{14}$ | $\bar{3}$  | $\bar{12}$ | $\bar{1}$  | $\bar{10}$ | $\bar{19}$ | $\bar{8}$  | $\bar{17}$ | $\bar{6}$  | $\bar{15}$ | $\bar{4}$  | $\bar{13}$ | $\bar{2}$  | $\bar{11}$ |
| $\bar{10}$ | $\bar{0}$ | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ | $\bar{0}$  | $\bar{10}$ |
| $\bar{11}$ | $\bar{0}$ | $\bar{11}$ | $\bar{2}$  | $\bar{13}$ | $\bar{4}$  | $\bar{15}$ | $\bar{6}$  | $\bar{17}$ | $\bar{8}$  | $\bar{19}$ | $\bar{10}$ | $\bar{1}$  | $\bar{12}$ | $\bar{3}$  | $\bar{14}$ | $\bar{5}$  | $\bar{16}$ | $\bar{7}$  | $\bar{18}$ | $\bar{9}$  |
| $\bar{12}$ | $\bar{0}$ | $\bar{12}$ | $\bar{4}$  | $\bar{16}$ | $\bar{8}$  | $\bar{0}$  | $\bar{12}$ | $\bar{4}$  | $\bar{16}$ | $\bar{8}$  | $\bar{0}$  | $\bar{12}$ | $\bar{4}$  | $\bar{16}$ | $\bar{8}$  | $\bar{0}$  | $\bar{12}$ | $\bar{4}$  | $\bar{16}$ | $\bar{8}$  |
| $\bar{13}$ | $\bar{0}$ | $\bar{13}$ | $\bar{6}$  | $\bar{19}$ | $\bar{12}$ | $\bar{5}$  | $\bar{18}$ | $\bar{11}$ | $\bar{4}$  | $\bar{17}$ | $\bar{10}$ | $\bar{3}$  | $\bar{16}$ | $\bar{9}$  | $\bar{2}$  | $\bar{15}$ | $\bar{8}$  | $\bar{1}$  | $\bar{14}$ | $\bar{7}$  |
| $\bar{14}$ | $\bar{0}$ | $\bar{14}$ | $\bar{8}$  | $\bar{2}$  | $\bar{16}$ | $\bar{10}$ | $\bar{4}$  | $\bar{18}$ | $\bar{12}$ | $\bar{6}$  | $\bar{0}$  | $\bar{14}$ | $\bar{8}$  | $\bar{2}$  | $\bar{16}$ | $\bar{10}$ | $\bar{4}$  | $\bar{18}$ | $\bar{12}$ | $\bar{6}$  |
| $\bar{15}$ | $\bar{0}$ | $\bar{15}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  | $\bar{0}$  | $\bar{15}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  | $\bar{0}$  | $\bar{15}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  | $\bar{0}$  | $\bar{15}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  | $\bar{0}$  | $\bar{15}$ | $\bar{10}$ | $\bar{5}$  |
| $\bar{16}$ | $\bar{0}$ | $\bar{16}$ | $\bar{12}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  | $\bar{0}$  | $\bar{16}$ | $\bar{12}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  | $\bar{0}$  | $\bar{16}$ | $\bar{12}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  | $\bar{0}$  | $\bar{16}$ | $\bar{12}$ | $\bar{8}$  | $\bar{4}$  |
| $\bar{17}$ | $\bar{0}$ | $\bar{17}$ | $\bar{14}$ | $\bar{11}$ | $\bar{8}$  | $\bar{5}$  | $\bar{2}$  | $\bar{19}$ | $\bar{16}$ | $\bar{13}$ | $\bar{10}$ | $\bar{7}$  | $\bar{4}$  | $\bar{1}$  | $\bar{18}$ | $\bar{15}$ | $\bar{12}$ | $\bar{9}$  | $\bar{6}$  | $\bar{3}$  |
| $\bar{18}$ | $\bar{0}$ | $\bar{18}$ | $\bar{16}$ | $\bar{14}$ | $\bar{12}$ | $\bar{10}$ | $\bar{8}$  | $\bar{6}$  | $\bar{4}$  | $\bar{2}$  | $\bar{0}$  | $\bar{18}$ | $\bar{16}$ | $\bar{14}$ | $\bar{12}$ | $\bar{10}$ | $\bar{8}$  | $\bar{6}$  | $\bar{4}$  | $\bar{2}$  |
| $\bar{19}$ | $\bar{0}$ | $\bar{19}$ | $\bar{18}$ | $\bar{17}$ | $\bar{16}$ | $\bar{15}$ | $\bar{14}$ | $\bar{13}$ | $\bar{12}$ | $\bar{11}$ | $\bar{10}$ | $\bar{9}$  | $\bar{8}$  | $\bar{7}$  | $\bar{6}$  | $\bar{5}$  | $\bar{4}$  | $\bar{3}$  | $\bar{2}$  | $\bar{1}$  |

Berdasarkan definisi pembagi nol tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_{20}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{18}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{5} = \bar{7}, \bar{2} \cdot \bar{5} = \bar{10}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{12}$$

$$\bar{2} + \bar{8} = \bar{10}, \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{16}$$

$$\bar{2} + \bar{10} = \bar{12}, \bar{2} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{12} = \bar{14}, \bar{2} \cdot \bar{12} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{2} \cdot \bar{14} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{16} = \bar{18}, \bar{2} \cdot \bar{16} = \bar{6}$$

$$\bar{4} + \bar{5} = \bar{9}, \bar{4} \cdot \bar{5} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{8} = \bar{12}, \bar{4} \cdot \bar{8} = \bar{12}$$

$$\bar{4} + \bar{12} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{12} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{15} = \bar{19}, \bar{4} \cdot \bar{15} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{18} = \bar{2}, \bar{4} \cdot \bar{18} = \bar{12}$$

$$\bar{5} + \bar{8} = \bar{13}, \bar{5} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{5} + \bar{12} = \bar{17}, \bar{5} \cdot \bar{12} = \bar{0}$$

$$\bar{5} + \bar{15} = \bar{0}, \bar{5} \cdot \bar{15} = \bar{15}$$

$$\bar{5} + \bar{18} = \bar{3}, \bar{5} \cdot \bar{18} = \bar{10}$$

$$\bar{6} + \bar{10} = \bar{16}, \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{14} = \bar{0}, \bar{6} \cdot \bar{14} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{16} = \bar{2}, \bar{6} \cdot \bar{16} = \bar{16}$$

$$\bar{8} + \bar{10} = \bar{18}, \bar{8} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{14} = \bar{2}, \bar{8} \cdot \bar{14} = \bar{12}$$

$$\bar{8} + \bar{16} = \bar{4}, \bar{8} \cdot \bar{16} = \bar{8}$$

$$\bar{10} + \bar{12} = \bar{2}, \bar{10} \cdot \bar{12} = \bar{0}$$

$$\bar{10} + \bar{15} = \bar{5}, \bar{10} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{10} + \bar{18} = \bar{8}, \bar{10} \cdot \bar{18} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{15} = \bar{7}, \bar{12} \cdot \bar{15} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{18} = \bar{10}, \bar{12} \cdot \bar{18} = \bar{16}$$

$$\bar{14} + \bar{16} = \bar{10}, \bar{14} \cdot \bar{16} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{15} = \bar{17}, \bar{2} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{2} + \bar{18} = \bar{0}, \bar{2} \cdot \bar{18} = \bar{6}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{10}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{10} = \bar{14}, \bar{4} \cdot \bar{10} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{14} = \bar{16}$$

$$\bar{4} + \bar{16} = \bar{0}, \bar{4} \cdot \bar{16} = \bar{4}$$

$$\bar{5} + \bar{6} = \bar{11}, \bar{5} \cdot \bar{6} = \bar{10}$$

$$\bar{5} + \bar{10} = \bar{15}, \bar{5} \cdot \bar{10} = \bar{10}$$

$$\bar{5} + \bar{14} = \bar{19}, \bar{5} \cdot \bar{14} = \bar{10}$$

$$\bar{5} + \bar{16} = \bar{1}, \bar{5} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{8} = \bar{14}, \bar{6} \cdot \bar{8} = \bar{8}$$

$$\bar{6} + \bar{12} = \bar{18}, \bar{6} \cdot \bar{12} = \bar{12}$$

$$\bar{6} + \bar{15} = \bar{1}, \bar{6} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

$$\bar{6} + \bar{18} = \bar{4}, \bar{6} \cdot \bar{18} = \bar{8}$$

$$\bar{8} + \bar{12} = \bar{0}, \bar{8} \cdot \bar{12} = \bar{16}$$

$$\bar{8} + \bar{15} = \bar{3}, \bar{8} \cdot \bar{15} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{18} = \bar{6}, \bar{8} \cdot \bar{18} = \bar{4}$$

$$\bar{10} + \bar{14} = \bar{4}, \bar{10} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{10} + \bar{16} = \bar{6}, \bar{10} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{12} + \bar{14} = \bar{6}, \bar{12} \cdot \bar{14} = \bar{8}$$

$$\bar{12} + \bar{16} = \bar{8}, \bar{12} \cdot \bar{16} = \bar{12}$$

$$\bar{14} + \bar{15} = \bar{9}, \bar{14} \cdot \bar{15} = \bar{10}$$

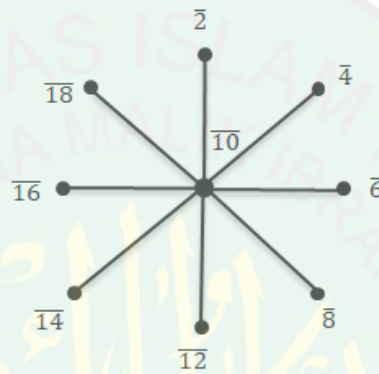
$$\bar{14} + \bar{18} = \bar{12}, \bar{14} \cdot \bar{18} = \bar{12}$$

$$\overline{15} + \overline{16} = \overline{11}, \overline{15} \cdot \overline{16} = \overline{0}$$

$$\overline{15} + \overline{18} = \overline{13}, \overline{15} \cdot \overline{18} = \overline{10}$$

$$\overline{16} + \overline{18} = \overline{14}, \overline{16} \cdot \overline{18} = \overline{8}$$

Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu  $\overline{2}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{4}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{6}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{8}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{12}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{14}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{16}$  dengan  $\overline{10}$ ,  $\overline{16}$  dengan  $\overline{10}$ , dan  $\overline{18}$  dengan  $\overline{10}$ . Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_{20}$  sebagai berikut:



Gambar 3.2.3  $ZT(\mathbb{Z}_{20})$

Berdasarkan gambar 3.2.3 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_{20})$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} d(\overline{2}, \overline{4}) &= 2, d(\overline{2}, \overline{6}) = 2, d(\overline{2}, \overline{8}) = 2, d(\overline{2}, \overline{10}) = 1, d(\overline{2}, \overline{12}) = 2, d(\overline{2}, \overline{14}) = 2, \\ d(\overline{2}, \overline{16}) &= 2, d(\overline{2}, \overline{18}) = 2, d(\overline{4}, \overline{6}) = 2, d(\overline{4}, \overline{8}) = 2, d(\overline{4}, \overline{10}) = 1, d(\overline{4}, \overline{12}) = 2, \\ d(\overline{4}, \overline{14}) &= 2, d(\overline{4}, \overline{16}) = 2, d(\overline{4}, \overline{18}) = 2, d(\overline{6}, \overline{8}) = 2, d(\overline{6}, \overline{10}) = 1, d(\overline{6}, \overline{12}) = \\ 2, d(\overline{6}, \overline{14}) &= 2, d(\overline{6}, \overline{16}) = 2, d(\overline{6}, \overline{18}) = 2, d(\overline{8}, \overline{10}) = 1, d(\overline{8}, \overline{12}) = \\ 2, d(\overline{8}, \overline{14}) &= 2, d(\overline{8}, \overline{16}) = 2, d(\overline{8}, \overline{18}) = 2, d(\overline{10}, \overline{12}) = 1, d(\overline{10}, \overline{14}) = \\ 1, d(\overline{10}, \overline{16}) &= 1, d(\overline{10}, \overline{18}) = 1, d(\overline{12}, \overline{14}) = 2, d(\overline{12}, \overline{16}) = 2, d(\overline{12}, \overline{18}) = \\ 2, d(\overline{14}, \overline{16}) &= 2, d(\overline{14}, \overline{18}) = 2, d(\overline{16}, \overline{18}) = 2. \end{aligned}$$



Sehingga dapat dihitung nilai indeks hiper-Wiener sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 WW(ZT(\mathbb{Z}_{20})) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_{20})} [d(u,v) + d(u,v)^2] \\
 &= \frac{1}{2} [\{d(\bar{2}, \bar{4}) + d(\bar{2}, \bar{4})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{6}) + d(\bar{2}, \bar{6})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{8}) + d(\bar{2}, \bar{8})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{2}, \bar{10}) + d(\bar{2}, \bar{10})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{12}) + d(\bar{2}, \bar{12})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{2}, \bar{14}) + d(\bar{2}, \bar{14})^2\} + \{d(\bar{2}, \bar{16}) + d(\bar{2}, \bar{16})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{2}, \bar{18}) + d(\bar{2}, \bar{18})^2\} + \{d(\bar{4}, \bar{6}) + d(\bar{4}, \bar{6})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{4}, \bar{8}) + d(\bar{4}, \bar{8})^2\} + \{d(\bar{4}, \bar{10}) + d(\bar{4}, \bar{10})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{4}, \bar{12}) + d(\bar{4}, \bar{12})^2\} + \{d(\bar{4}, \bar{14}) + d(\bar{4}, \bar{14})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{4}, \bar{16}) + d(\bar{4}, \bar{16})^2\} + \{d(\bar{4}, \bar{18}) + d(\bar{4}, \bar{18})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{6}, \bar{8}) + d(\bar{6}, \bar{8})^2\} + \{d(\bar{6}, \bar{10}) + d(\bar{6}, \bar{10})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{6}, \bar{12}) + d(\bar{6}, \bar{12})^2\} + \{d(\bar{6}, \bar{14}) + d(\bar{6}, \bar{14})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{6}, \bar{16}) + d(\bar{6}, \bar{16})^2\} + \{d(\bar{6}, \bar{18}) + d(\bar{6}, \bar{18})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{8}, \bar{10}) + d(\bar{8}, \bar{10})^2\} + \{d(\bar{8}, \bar{12}) + d(\bar{8}, \bar{12})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{8}, \bar{14}) + d(\bar{8}, \bar{14})^2\} + \{d(\bar{8}, \bar{16}) + d(\bar{8}, \bar{16})^2\} \\
 &\quad + \{d(\bar{8}, \bar{18}) + d(\bar{8}, \bar{18})^2\} + d(\bar{10}, \bar{12}) + d(\bar{10}, \bar{12})^2 + d(\bar{10}, \bar{14}) \\
 &\quad + d(\bar{10}, \bar{14})^2 + d(\bar{10}, \bar{16}) + d(\bar{10}, \bar{16})^2 + d(\bar{10}, \bar{18}) \\
 &\quad + d(\bar{10}, \bar{18})^2 + d(\bar{10}, \bar{18}) + d(\bar{10}, \bar{18})^2 + d(\bar{12}, \bar{16}) \\
 &\quad + d(\bar{12}, \bar{16})^2 + d(\bar{12}, \bar{18}) + d(\bar{12}, \bar{18})^2 + d(\bar{14}, \bar{16}) \\
 &\quad + d(\bar{14}, \bar{16})^2 + d(\bar{14}, \bar{18}) + d(\bar{14}, \bar{18})^2 + d(\bar{14}, \bar{18}) \\
 &\quad + d(\bar{14}, \bar{18})^2 + \{d(\bar{16}, \bar{18}) + d(\bar{16}, \bar{18})^2\}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [\{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} \\
&\quad + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} \\
&\quad + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} \\
&\quad + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} \\
&\quad + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} \\
&\quad + \{1 + 1^2\} + \{1 + 1^2\} + \{1 + 1^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} \\
&\quad + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\}] \\
&= \frac{1}{2} [(2 \times 8) + (6 \times 28)] = 92
\end{aligned}$$

Jadi, indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{20}$  berturut-turut adalah 92.

### 3.2.4 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{28}$

Diketahui  $(\mathbb{Z}_{28}, +, \cdot)$  sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo 28 dengan  $\mathbb{Z}_{28} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{23}, \bar{24}, \bar{25}, \bar{26}, \bar{27}\}$ . Berikut ini merupakan tabel Cayley hasil operasi perkalian dari dua unsur  $\mathbb{Z}_{28}$ .

Tabel 3.10 Tabel Cayley  $\mathbb{Z}_{28}$ 

| ·  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 0 | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 2  | 0 | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  |
| 3  | 0 | 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 2  | 5  | 8  | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 4  | 0 | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 |
| 5  | 0 | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 2  | 7  | 12 | 17 | 22 | 27 | 4  | 9  | 14 | 19 | 24 | 1  | 6  |
| 6  | 0 | 6  | 12 | 18 | 24 | 5  | 8  | 14 | 20 | 26 | 4  | 10 | 16 | 22 | 0  | 6  | 12 | 18 | 24 |
| 7  | 0 | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 |
| 8  | 0 | 8  | 16 | 24 | 4  | 12 | 20 | 0  | 8  | 16 | 24 | 4  | 12 | 20 | 0  | 8  | 16 | 24 | 4  |
| 9  | 0 | 9  | 18 | 27 | 8  | 17 | 26 | 7  | 16 | 25 | 6  | 15 | 24 | 5  | 14 | 23 | 4  | 13 | 22 |
| 10 | 0 | 10 | 20 | 2  | 12 | 22 | 4  | 14 | 24 | 6  | 16 | 26 | 8  | 18 | 0  | 10 | 20 | 2  | 12 |
| 11 | 0 | 11 | 22 | 5  | 16 | 27 | 10 | 21 | 4  | 15 | 26 | 9  | 20 | 3  | 14 | 25 | 8  | 19 | 2  |
| 12 | 0 | 12 | 24 | 8  | 20 | 4  | 16 | 0  | 12 | 24 | 8  | 20 | 4  | 16 | 0  | 12 | 24 | 8  | 20 |
| 13 | 0 | 13 | 26 | 11 | 24 | 9  | 22 | 7  | 20 | 5  | 18 | 3  | 16 | 1  | 14 | 27 | 12 | 25 | 10 |
| 14 | 0 | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  |
| 15 | 0 | 15 | 2  | 17 | 4  | 19 | 6  | 21 | 8  | 23 | 10 | 25 | 12 | 27 | 14 | 1  | 16 | 3  | 18 |
| 16 | 0 | 16 | 4  | 20 | 8  | 24 | 12 | 0  | 16 | 4  | 20 | 8  | 24 | 12 | 0  | 16 | 4  | 20 | 8  |
| 17 | 0 | 17 | 6  | 23 | 12 | 1  | 18 | 7  | 24 | 13 | 2  | 19 | 8  | 25 | 14 | 3  | 20 | 9  | 26 |
| 18 | 0 | 18 | 8  | 26 | 16 | 6  | 24 | 14 | 4  | 22 | 12 | 2  | 20 | 10 | 0  | 18 | 8  | 26 | 16 |
| 19 | 0 | 19 | 10 | 1  | 20 | 11 | 2  | 21 | 12 | 3  | 22 | 13 | 4  | 23 | 14 | 5  | 24 | 15 | 6  |
| 20 | 0 | 20 | 12 | 4  | 24 | 16 | 8  | 0  | 20 | 12 | 4  | 24 | 16 | 8  | 0  | 20 | 12 | 4  | 24 |
| 21 | 0 | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 |
| 22 | 0 | 22 | 16 | 10 | 4  | 26 | 20 | 14 | 8  | 2  | 24 | 18 | 12 | 6  | 0  | 22 | 16 | 10 | 4  |
| 23 | 0 | 23 | 18 | 13 | 8  | 3  | 26 | 21 | 16 | 11 | 6  | 1  | 24 | 19 | 14 | 9  | 4  | 27 | 22 |
| 24 | 0 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 24 | 20 | 16 | 12 | 8  | 4  | 0  | 24 | 20 | 16 | 12 |
| 25 | 0 | 25 | 22 | 19 | 16 | 13 | 10 | 7  | 4  | 1  | 26 | 23 | 20 | 17 | 14 | 11 | 8  | 5  | 2  |
| 26 | 0 | 26 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  | 0  | 26 | 24 | 22 | 20 |
| 27 | 0 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

| ·  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 1  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 2  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |
| 3  | 1  | 4  | 7  | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| 4  | 20 | 24 | 0  | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5  | 11 | 16 | 21 | 26 | 3  | 8  | 13 | 18 | 23 |
| 6  | 2  | 8  | 14 | 20 | 26 | 4  | 10 | 16 | 22 |
| 7  | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 | 0  | 7  | 14 | 21 |
| 8  | 12 | 20 | 0  | 8  | 16 | 24 | 4  | 12 | 20 |
| 9  | 3  | 12 | 21 | 2  | 11 | 20 | 1  | 10 | 19 |
| 10 | 22 | 4  | 14 | 24 | 6  | 16 | 26 | 8  | 18 |
| 11 | 13 | 24 | 7  | 18 | 1  | 12 | 23 | 6  | 17 |
| 12 | 4  | 16 | 0  | 12 | 24 | 8  | 20 | 4  | 16 |
| 13 | 23 | 8  | 21 | 6  | 19 | 4  | 17 | 2  | 15 |
| 14 | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 | 0  | 14 |
| 15 | 5  | 20 | 7  | 22 | 9  | 24 | 11 | 26 | 13 |
| 16 | 24 | 12 | 0  | 16 | 4  | 20 | 8  | 24 | 12 |
| 17 | 15 | 4  | 21 | 10 | 27 | 16 | 5  | 22 | 11 |
| 18 | 6  | 24 | 14 | 4  | 22 | 12 | 2  | 20 | 10 |
| 19 | 25 | 16 | 7  | 26 | 17 | 8  | 27 | 18 | 9  |
| 20 | 16 | 8  | 0  | 20 | 12 | 4  | 24 | 16 | 8  |
| 21 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  | 0  | 21 | 14 | 7  |
| 22 | 26 | 20 | 14 | 8  | 2  | 24 | 18 | 12 | 6  |
| 23 | 17 | 12 | 7  | 2  | 25 | 20 | 15 | 10 | 5  |
| 24 | 8  | 4  | 0  | 24 | 20 | 16 | 12 | 8  | 4  |
| 25 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9  | 6  | 3  |
| 26 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  |
| 27 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  |

Berdasarkan definisi pembagi nol tabel di atas diperoleh  $Z(\mathbb{Z}_{28}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}, \bar{21}, \bar{22}, \bar{24}, \bar{26}\}$ . Kemudian akan kita jumlahkan dan kalikan setiap elemen pembagi nolnya untuk menentukan titik yang terhubung

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6}, \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{6} = \bar{8}, \bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{12}$$

$$\bar{2} + \bar{7} = \bar{9}, \bar{2} \cdot \bar{7} = \bar{14}$$

$$\bar{2} + \bar{8} = \bar{10}, \bar{2} \cdot \bar{8} = \bar{16}$$

$$\bar{2} + \bar{10} = \bar{12}, \bar{2} \cdot \bar{10} = \bar{20}$$

$$\bar{2} + \bar{12} = \bar{14}, \bar{2} \cdot \bar{12} = \bar{24}$$

$$\bar{2} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{2} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{2} + \bar{16} = \bar{18}, \bar{2} \cdot \bar{16} = \bar{4}$$

$$\bar{2} + \bar{18} = \bar{20}, \bar{2} \cdot \bar{18} = \bar{8}$$

$$\bar{2} + \bar{20} = \bar{22}, \bar{2} \cdot \bar{20} = \bar{12}$$

$$\bar{2} + \bar{21} = \bar{23}, \bar{2} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{2} + \bar{24} = \bar{26}, \bar{2} \cdot \bar{24} = \bar{20}$$

$$\bar{4} + \bar{7} = \bar{11}, \bar{4} \cdot \bar{7} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{10} = \bar{14}, \bar{4} \cdot \bar{10} = \bar{12}$$

$$\bar{4} + \bar{14} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{18} = \bar{22}, \bar{4} \cdot \bar{18} = \bar{16}$$

$$\bar{4} + \bar{21} = \bar{25}, \bar{4} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{4} + \bar{24} = \bar{0}, \bar{4} \cdot \bar{24} = \bar{12}$$

$$\bar{6} + \bar{8} = \bar{14}, \bar{6} \cdot \bar{8} = \bar{20}$$

$$\bar{6} + \bar{12} = \bar{18}, \bar{6} \cdot \bar{12} = \bar{16}$$

$$\bar{6} + \bar{16} = \bar{22}, \bar{6} \cdot \bar{16} = \bar{12}$$

$$\bar{6} + \bar{20} = \bar{26}, \bar{6} \cdot \bar{20} = \bar{8}$$

$$\bar{6} + \bar{22} = \bar{0}, \bar{6} \cdot \bar{22} = \bar{20}$$

$$\bar{6} + \bar{26} = \bar{4}, \bar{6} \cdot \bar{26} = \bar{16}$$

$$\bar{7} + \bar{10} = \bar{17}, \bar{7} \cdot \bar{10} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{14} = \bar{21}, \bar{7} \cdot \bar{14} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{18} = \bar{25}, \bar{7} \cdot \bar{18} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{21} = \bar{0}, \bar{7} \cdot \bar{21} = \bar{7}$$

$$\bar{7} + \bar{24} = \bar{3}, \bar{7} \cdot \bar{24} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{10} = \bar{18}, \bar{8} \cdot \bar{10} = \bar{24}$$

$$\bar{8} + \bar{14} = \bar{22}, \bar{8} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{18} = \bar{26}, \bar{8} \cdot \bar{18} = \bar{4}$$

$$\bar{8} + \bar{21} = \bar{1}, \bar{8} \cdot \bar{21} = \bar{0}$$

$$\bar{8} + \bar{24} = \bar{4}, \bar{8} \cdot \bar{24} = \bar{24}$$

$$\bar{2} + \bar{22} = \bar{24}, \bar{2} \cdot \bar{22} = \bar{16}$$

$$\bar{4} + \bar{6} = \bar{10}, \bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{24}$$

$$\bar{4} + \bar{8} = \bar{12}, \bar{4} \cdot \bar{8} = \bar{4}$$

$$\bar{4} + \bar{12} = \bar{16}, \bar{4} \cdot \bar{12} = \bar{20}$$

$$\bar{4} + \bar{16} = \bar{20}, \bar{4} \cdot \bar{16} = \bar{8}$$

$$\bar{4} + \bar{20} = \bar{24}, \bar{4} \cdot \bar{20} = \bar{24}$$

$$\bar{4} + \bar{22} = \bar{26}, \bar{4} \cdot \bar{22} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{7} = \bar{15}, \bar{6} \cdot \bar{7} = \bar{14}$$

$$\bar{6} + \bar{10} = \bar{16}, \bar{6} \cdot \bar{10} = \bar{4}$$

$$\bar{6} + \bar{14} = \bar{20}, \bar{6} \cdot \bar{14} = \bar{0}$$

$$\bar{6} + \bar{18} = \bar{24}, \bar{6} \cdot \bar{18} = \bar{24}$$

$$\bar{6} + \bar{21} = \bar{27}, \bar{6} \cdot \bar{21} = \bar{14}$$

$$\bar{6} + \bar{24} = \bar{2}, \bar{6} \cdot \bar{24} = \bar{4}$$

$$\bar{7} + \bar{8} = \bar{15}, \bar{7} \cdot \bar{8} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{12} = \bar{19}, \bar{7} \cdot \bar{12} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{16} = \bar{23}, \bar{7} \cdot \bar{16} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{20} = \bar{27}, \bar{7} \cdot \bar{20} = \bar{0}$$

$$\bar{7} + \bar{22} = \bar{1}, \bar{7} \cdot \bar{22} = \bar{14}$$

$$\bar{7} + \bar{26} = \bar{5}, \bar{7} \cdot \bar{26} = \bar{14}$$

$$\bar{8} + \bar{12} = \bar{20}, \bar{8} \cdot \bar{12} = \bar{12}$$

$$\bar{8} + \bar{16} = \bar{24}, \bar{8} \cdot \bar{16} = \bar{16}$$

$$\bar{8} + \bar{20} = \bar{0}, \bar{8} \cdot \bar{20} = \bar{20}$$

$$\bar{8} + \bar{22} = \bar{2}, \bar{8} \cdot \bar{22} = \bar{8}$$

$$\bar{8} + \bar{26} = \bar{6}, \bar{8} \cdot \bar{26} = \bar{12}$$

$$\overline{10} + \overline{12} = \overline{22}, \overline{10} \cdot \overline{12} = \overline{8}$$

$$\overline{10} + \overline{16} = \overline{16}, \overline{10} \cdot \overline{16} = \overline{20}$$

$$\overline{10} + \overline{20} = \overline{2}, \overline{10} \cdot \overline{20} = \overline{4}$$

$$\overline{10} + \overline{22} = \overline{4}, \overline{10} \cdot \overline{22} = \overline{24}$$

$$\overline{10} + \overline{26} = \overline{8}, \overline{10} \cdot \overline{26} = \overline{8}$$

$$\overline{12} + \overline{16} = \overline{0}, \overline{12} \cdot \overline{16} = \overline{24}$$

$$\overline{12} + \overline{20} = \overline{4}, \overline{12} \cdot \overline{20} = \overline{16}$$

$$\overline{12} + \overline{22} = \overline{6}, \overline{12} \cdot \overline{22} = \overline{12}$$

$$\overline{12} + \overline{26} = \overline{10}, \overline{12} \cdot \overline{26} = \overline{4}$$

$$\overline{14} + \overline{18} = \overline{4}, \overline{14} \cdot \overline{18} = \overline{0}$$

$$\overline{14} + \overline{21} = \overline{7}, \overline{14} \cdot \overline{21} = \overline{14}$$

$$\overline{14} + \overline{24} = \overline{10}, \overline{14} \cdot \overline{24} = \overline{0}$$

$$\overline{16} + \overline{18} = \overline{6}, \overline{16} \cdot \overline{18} = \overline{8}$$

$$\overline{16} + \overline{21} = \overline{9}, \overline{16} \cdot \overline{21} = \overline{0}$$

$$\overline{16} + \overline{24} = \overline{12}, \overline{16} \cdot \overline{24} = \overline{20}$$

$$\overline{18} + \overline{20} = \overline{10}, \overline{18} \cdot \overline{20} = \overline{24}$$

$$\overline{18} + \overline{22} = \overline{12}, \overline{18} \cdot \overline{22} = \overline{4}$$

$$\overline{18} + \overline{26} = \overline{14}, \overline{18} \cdot \overline{26} = \overline{20}$$

$$\overline{20} + \overline{22} = \overline{14}, \overline{20} \cdot \overline{22} = \overline{20}$$

$$\overline{20} + \overline{26} = \overline{18}, \overline{20} \cdot \overline{26} = \overline{16}$$

$$\overline{21} + \overline{24} = \overline{17}, \overline{21} \cdot \overline{24} = \overline{0}$$

$$\overline{22} + \overline{24} = \overline{18}, \overline{22} \cdot \overline{24} = \overline{24}$$

$$\overline{24} + \overline{26} = \overline{22}, \overline{24} \cdot \overline{26} = \overline{8}$$

$$\overline{10} + \overline{14} = \overline{24}, \overline{10} \cdot \overline{14} = \overline{0}$$

$$\overline{10} + \overline{18} = \overline{18}, \overline{10} \cdot \overline{18} = \overline{12}$$

$$\overline{10} + \overline{21} = \overline{3}, \overline{10} \cdot \overline{21} = \overline{14}$$

$$\overline{10} + \overline{24} = \overline{6}, \overline{10} \cdot \overline{24} = \overline{16}$$

$$\overline{12} + \overline{14} = \overline{26}, \overline{12} \cdot \overline{14} = \overline{0}$$

$$\overline{12} + \overline{18} = \overline{2}, \overline{12} \cdot \overline{18} = \overline{20}$$

$$\overline{12} + \overline{21} = \overline{5}, \overline{12} \cdot \overline{21} = \overline{0}$$

$$\overline{12} + \overline{24} = \overline{8}, \overline{12} \cdot \overline{24} = \overline{8}$$

$$\overline{14} + \overline{16} = \overline{2}, \overline{14} \cdot \overline{16} = \overline{0}$$

$$\overline{14} + \overline{20} = \overline{6}, \overline{14} \cdot \overline{20} = \overline{0}$$

$$\overline{14} + \overline{22} = \overline{8}, \overline{14} \cdot \overline{22} = \overline{0}$$

$$\overline{14} + \overline{26} = \overline{10}, \overline{14} \cdot \overline{26} = \overline{0}$$

$$\overline{16} + \overline{20} = \overline{8}, \overline{16} \cdot \overline{20} = \overline{12}$$

$$\overline{16} + \overline{22} = \overline{10}, \overline{16} \cdot \overline{22} = \overline{16}$$

$$\overline{16} + \overline{26} = \overline{14}, \overline{16} \cdot \overline{26} = \overline{24}$$

$$\overline{18} + \overline{21} = \overline{11}, \overline{18} \cdot \overline{21} = \overline{14}$$

$$\overline{18} + \overline{24} = \overline{14}, \overline{18} \cdot \overline{24} = \overline{12}$$

$$\overline{20} + \overline{21} = \overline{13}, \overline{20} \cdot \overline{21} = \overline{0}$$

$$\overline{20} + \overline{24} = \overline{16}, \overline{20} \cdot \overline{24} = \overline{4}$$

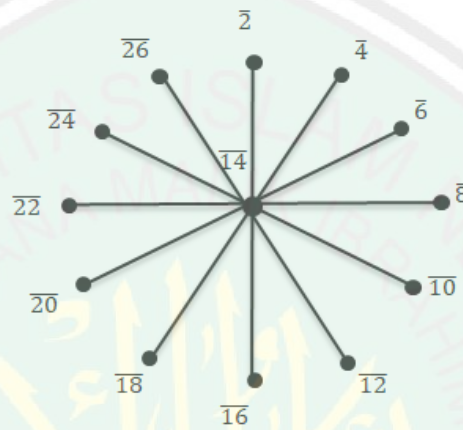
$$\overline{21} + \overline{22} = \overline{15}, \overline{21} \cdot \overline{22} = \overline{14}$$

$$\overline{21} + \overline{26} = \overline{19}, \overline{21} \cdot \overline{26} = \overline{2}$$

$$\overline{22} + \overline{26} = \overline{20}, \overline{22} \cdot \overline{26} = \overline{12}$$



Berdasarkan definisi graf total pembagi nol diperoleh titik yang terhubung langsung yaitu  $\bar{2}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{4}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{6}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{8}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{10}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{12}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{16}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{18}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{20}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{22}$  dengan  $\bar{14}$ ,  $\bar{24}$  dengan  $\bar{14}$ , dan  $\bar{26}$  dengan  $\bar{14}$ . Sehingga dapat digambarkan graf total pembagi nol pada  $\mathbb{Z}_{28}$  sebagai berikut



Gambar 3.2.4  $ZT(\mathbb{Z}_{28})$

Berdasarkan gambar 3.2.4 diperoleh jarak dari setiap pasang titik  $ZT(\mathbb{Z}_{28})$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 d(\bar{2}, \bar{4}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 2, d(\bar{2}, \bar{8}) = 2, d(\bar{2}, \bar{10}) = 2, d(\bar{2}, \bar{12}) = 2, d(\bar{2}, \bar{14}) = \\
 1, d(\bar{2}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{2}, \bar{18}) = 2, d(\bar{2}, \bar{20}) = 2, d(\bar{2}, \bar{22}) = 2, d(\bar{2}, \bar{24}) = \\
 2, d(\bar{2}, \bar{26}) &= 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 2, d(\bar{4}, \bar{8}) = 2, d(\bar{4}, \bar{10}) = 2, d(\bar{4}, \bar{12}) = 2, d(\bar{4}, \bar{14}) = \\
 2, d(\bar{4}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{4}, \bar{18}) = 2, d(\bar{4}, \bar{20}) = 2, d(\bar{4}, \bar{22}) = 2, d(\bar{4}, \bar{24}) = \\
 2, d(\bar{4}, \bar{26}) &= 2, d(\bar{6}, \bar{8}) = 2, d(\bar{6}, \bar{10}) = 2, d(\bar{6}, \bar{12}) = 2, d(\bar{6}, \bar{14}) = \\
 1, d(\bar{6}, \bar{16}) &= 2, d(\bar{6}, \bar{18}) = 2, d(\bar{6}, \bar{20}) = 2, d(\bar{6}, \bar{22}) = 2, d(\bar{6}, \bar{24}) = \\
 2, d(\bar{6}, \bar{26}) &= 2, d(\bar{8}, \bar{10}) = 2, d(\bar{8}, \bar{12}) = 2, d(\bar{8}, \bar{14}) = 1, d(\bar{8}, \bar{16}) = \\
 2, d(\bar{8}, \bar{18}) &= 2, d(\bar{8}, \bar{20}) = 2, d(\bar{8}, \bar{22}) = 2, d(\bar{8}, \bar{24}) = 2, d(\bar{8}, \bar{26}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2, d(\overline{10}, \overline{12}) = 2, d(\overline{10}, \overline{14}) = 1, d(\overline{10}, \overline{16}) = 2, d(\overline{10}, \overline{18}) = 2, d(\overline{10}, \overline{20}) = \\
&2, d(\overline{10}, \overline{22}) = 2, d(\overline{10}, \overline{24}) = 2, d(\overline{10}, \overline{26}) = 2, d(\overline{12}, \overline{14}) = 1, d(\overline{12}, \overline{16}) = \\
&2, d(\overline{12}, \overline{18}) = 2, d(\overline{12}, \overline{20}) = 2, d(\overline{12}, \overline{22}) = 2, d(\overline{12}, \overline{24}) = 2, d(\overline{12}, \overline{26}) = \\
&2, d(\overline{14}, \overline{16}) = 1, d(\overline{14}, \overline{18}) = 1, d(\overline{14}, \overline{20}) = 1, d(\overline{14}, \overline{22}) = 1, d(\overline{14}, \overline{24}) = \\
&1, d(\overline{14}, \overline{26}) = 1, d(\overline{16}, \overline{18}) = 2, d(\overline{16}, \overline{20}) = 2, d(\overline{16}, \overline{22}) = 2, d(\overline{16}, \overline{24}) = \\
&2, d(\overline{16}, \overline{26}) = 2, d(\overline{18}, \overline{20}) = 2, d(\overline{18}, \overline{22}) = 2, d(\overline{18}, \overline{24}) = 2, d(\overline{18}, \overline{26}) = \\
&2, d(\overline{20}, \overline{22}) = 2, d(\overline{20}, \overline{24}) = 2, d(\overline{20}, \overline{26}) = 2, d(\overline{22}, \overline{24}) = 2, d(\overline{22}, \overline{26}) = \\
&2, d(\overline{24}, \overline{26}) = 2.
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dihitung nilai indeks hiper-Wiener sebagai berikut:

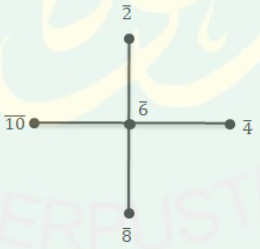
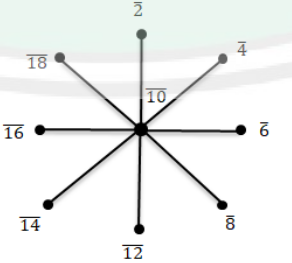
$$\begin{aligned}
WW(ZT(\mathbb{Z}_{28})) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(\mathbb{Z}_{28})} [d(u,v) + d(u,v)^2] \\
&= \frac{1}{2} [\{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\
&\quad \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{1 + 1^2\} + \{1 + 1^2\} + \\
&\quad \{1 + 1^2\} + \{1 + 1^2\} + \{1 + 1^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} +
\end{aligned}$$

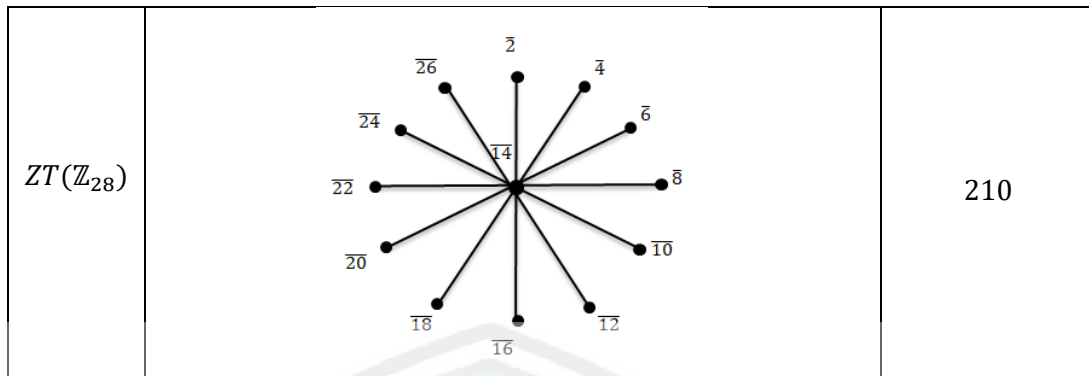
$$\begin{aligned} & \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\ & \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \\ & \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} + \{2 + 2^2\} = \frac{1}{2} [(2 \times 12) + \\ & (6 \times 66)] = 210 \end{aligned}$$

Jadi, indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{28}$  adalah 210.

Bedasarkan pengamatan dan perhitungan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{20}$ , dan  $\mathbb{Z}_{28}$  dapat dibentuk tabel graf sebagai berikut:

Tabel 3.11 Tabel Gambar  $ZT(\mathbb{Z}_{4n})$

| $G$                   | Gambar Graf                                                                         | $WW(ZT(\mathbb{Z}_{4n}))$ |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| $ZT(\mathbb{Z}_8)$    |  | 5                         |
| $ZT(\mathbb{Z}_{12})$ |  | 22                        |
| $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ |  | 92                        |



Berdasarkan perhitungan indeks hiper-Wiener akan dibuat tabel untuk memudahkan dalam mencari pola, dengan mengelompokkan pasangan titik yang memiliki jarak yang sama

**Tabel 3.12** Perhitungan Indeks Hiper-Wiener

| $p$ | $G$                   | $WW(G)$                                            |
|-----|-----------------------|----------------------------------------------------|
| 2   | $ZT(\mathbb{Z}_8)$    | $\frac{1}{2}[(2 \times 2) + (6 \times 1)] = 5$     |
| 3   | $ZT(\mathbb{Z}_{12})$ | $\frac{1}{2}[(2 \times 4) + (6 \times 6)] = 22$    |
| 5   | $ZT(\mathbb{Z}_{20})$ | $\frac{1}{2}[(2 \times 8) + (6 \times 28)] = 92$   |
| 7   | $ZT(\mathbb{Z}_{28})$ | $\frac{1}{2}[(2 \times 12) + (6 \times 66)] = 210$ |

Dari tabel 3.12, diperoleh dugaan bahwa indeks hiper-Wiener dari  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  adalah  $WW(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = 6p^2 - 13p + 7$ . Dari dugaan tersebut akan dibuktikan dengan proposisi-proposisi sebagai berikut:

**Proposisi 1**

$$Z(\mathbb{Z}_{4p}) = \{p, 2p, 3p, 2k: k = 1, 2, \dots, 2p - 1\}.$$

Bukti:

$\forall k = 1, 2, \dots, 2p - 1$  berlaku

$$2k \cdot 2p = 4p \cdot k \equiv 0 \pmod{4p},$$

artinya  $\{2k; k = 1, 2, \dots, 2p - 1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

dan berlaku

$$p \cdot 4 = 4p \equiv 0 \pmod{4p},$$

$$3p \cdot 4 = 4p \cdot 3 \equiv 0 \pmod{4p},$$

artinya  $p, 3p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Dengan demikian  $\{2k; k = 1, 2, \dots, 2p - 1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{4p})$  dan  $p, 3p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa semua unsur  $\mathbb{Z}_{4p}$  yang bukan kelipatan  $p$  dan genap bukan merupakan unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Misalkan  $x \in \mathbb{Z}_{4p}$  dan  $x$  ganjil bukan kelipatan  $p$ .  $x = 2k - 1$  untuk suatu  $k \in \mathbb{Z}$ .

Karena  $FPB(2k - 1, 4p) = 1$ , dari teorema 1 dapat dikatakan bahwa kongruensi berikut ini

$$(2k - 1)(x) \equiv 0 \pmod{4p}$$

memiliki satu solusi yaitu  $x = 0$

Dengan demikian semua unsur  $\mathbb{Z}_{4p}$  yang bukan kelipatan  $p$  dan genap bukan merupakan unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

## Proposisi 2

Semua titik  $u \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $u \neq p, u \neq 3p$  hanya terhubung langsung dengan  $2p$ , untuk  $p \geq 3$ .

Bukti:

Misalkan  $x \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ , dan  $x$  genap. Misalkan  $x = 2k$  untuk suatu  $k = 1, 2, \dots, 2p - 1$  dan  $k \neq p$

berlaku,

$$x \cdot 2p = 2k \cdot 2p = 4p \cdot k \equiv 0 \pmod{4p}$$

dan

$$2k + 2p = 2(k + p) \text{ sehingga } 2k + 2p \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$$

Dengan demikian semua titik yang genap terhubung langsung dengan  $2p$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa semua titik  $u \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $u \neq p, u \neq 2p, u \neq 3p$ , tidak terhubung langsung.

Misalkan  $x, y \in Z(\mathbb{Z}_{4p})$ , dan  $x$  dan  $y$  genap. Misalkan  $x = 2k$  dan  $y = 2l$  untuk suatu  $k, l = 1, 2, \dots, 2p - 1$  dan  $k \neq p, l \neq p$ .

Karena  $FPB(2k, 4p) = FPB(k, 2p) = \begin{cases} 2 & \text{jika } k \text{ genap} \\ 1 & \text{jika } k \text{ ganjil} \end{cases}$

Untuk  $k$  ganjil kongruensi  $k \cdot 2l \equiv 0 \pmod{4p}$  hanya terpenuhi jika  $2l = 0$ , sedangkan  $2l = 0 \notin Z(\mathbb{Z}_{4p})$ .

Untuk  $k$  genap kongruensi  $k \cdot 2l \equiv 0 \pmod{4p}$  hanya terpenuhi jika  $2l = 0$  atau  $l = p$  sedangkan  $2l = 0 \notin Z(\mathbb{Z}_{4p})$  dan  $l \neq p$ .

Sehingga  $2k$  dan  $2l$  tidak saling terhubung langsung.

### Proposisi 3

$p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan semua unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ ,  $p \geq 3$ .



Bukti:

- Akan ditunjukkan bahwa  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2p$ .

$2p \cdot p = 2p^2$  karena  $\frac{2p^2}{4p} = \frac{p}{2}$ , artinya  $2p^2$  tidak habis dibagi  $4p$  maka  $2p^2 \not\equiv 0(\text{mod } 4p)$ .

Jadi,  $2p$  dengan  $p$  tidak saling terhubung langsung.

$2p \cdot 3p = 6p^2$  karena  $\frac{6p^2}{4p} = \frac{3p}{2}$ , artinya  $6p^2$  tidak habis dibagi  $4p$  maka  $6p^2 \not\equiv 0(\text{mod } 4p)$ .

Jadi,  $2p$  dengan  $3p$  tidak saling terhubung langsung.

- Akan ditunjukkan bahwa  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk suatu  $k = 1, 2, \dots, 2p - 1$  dan  $k \neq p$ .

Kongruensi berikut ini

$$p \cdot 2k \equiv 0(\text{mod } 4p),$$

$$3p \cdot 2k \equiv 0(\text{mod } 4p)$$

akan terpenuhi hanya jika  $k$  genap, artinya  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk  $k$  ganjil.

Selanjutnya akan ditunjukkan  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk  $k$  genap.

Misalkan  $k$  genap, maka dapat dituliskan sebagai  $k = 2n$  untuk suatu  $n = 1, 2, \dots, p - 1$ .

Maka

$$p \cdot 2k = p \cdot 2(2n) = 4p \cdot n \equiv 0(\text{mod } 4p)$$

dan

$$3p \cdot 2k = 3p \cdot 2(2n) = 4p \cdot 3n \equiv 0(\text{mod } 4p)$$

Akan tetapi,

$p + 2k = p + 4n$  dan  $3p + 2k = 3p + 4n$  adalah anggota  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$  hanya jika  $n = 0$ .

Sehingga  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan  $2k$  untuk  $k$  genap.

Dengan demikian  $p$  dan  $3p$  tidak saling terhubung langsung dengan semua unsur  $Z(\mathbb{Z}_{4p})$ , artinya  $p$  dan  $3p$  merupakan titik terisolasi.

#### Proposisi 4

Untuk setiap  $u, v \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $u, v$  genap dan  $u \neq 2p, v \neq 2p$ ,  $d(u, v) = 2$ .

Bukti:

Karena titik  $2p$  terhubung langsung dengan semua titik  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  kecuali  $p, 2p, 3p$  berdasarkan proposisi 2, maka  $u, v$  tidak terhubung langsung sehingga  $d(u, v) \geq 2$ , dan karena terdapat lintasan  $v - 2p - u$  maka  $d(u, v) \leq 2$ . Dengan demikian  $d(u, v) = 2$ .

#### Proposisi 5

Untuk setiap  $u \in V(ZT(\mathbb{Z}_{4p}))$ ,  $d(u, 2p) = 1$ .

Bukti:

Karena titik  $2p$  terhubung langsung dengan semua titik  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  kecuali  $p, 2p, 3p$  maka berdasarkan proposisi 2  $d(u, 2p) = 1$ .

### Proposisi 3.2

Untuk setiap  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$  dimana  $p$  adalah bilangan prima, indeks hiper-Wiener pada graf tersebut adalah

$$WW(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = 6p^2 - 13p + 7$$

Bukti:

Karena graf total pembagi nol  $\mathbb{Z}_{4p}$ ,  $p$  bilangan prima mempunyai order  $2p - 1$ , dan berdasarkan proposisi 5 diketahui bahwa titik yang berjarak 1 sebanyak  $2(p - 1)$ , serta berdasarkan proposisi 4 titik yang berjarak 2 sebanyak  $2(p - 1) - 1 + (2(p - 1)) - 2 + \dots + 2 + 1$  atau dapat ditulis sebagai jumlah deret aritmatika sebanyak  $2(p - 1) - 1$  suku dengan beda 1 yang dinotasikan sebagai  $S_{2(p-1)-1}$ , maka didapatkan:

$$\begin{aligned} WW(G) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{u,v \in V(G)} [d(u,v) + d(u,v)^2] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{u, 2p \in V(G)} [1 + 1^2] \right) + \left( \sum_{u,v \in V(G)} [2 + 2^2] \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} ([1 \times 2(p - 1) + 1^2 \times 2(p - 1)] + [2 \times S_{2(p-1)-1} + 2^2 \times S_{2(p-1)-1}]) \\ &= \frac{1}{2} (([1 + 1^2] \times 2(p - 1)) + ([2 + 2^2] \times S_{2(p-1)-1})) \\ &= \frac{1}{2} ((2 \times 2(p - 1)) + (6 \times S_{2(p-1)-1})) \\ &= (4p - 4) + 6 \times \left( \frac{2(p - 1) - 1}{2} \times (2 \times 1 + (2(p - 1) - 1) \times 1) \right) \\ &= \frac{1}{2} (4p - 4 + 3 \times ((2p - 3) \times (2p - 2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(4p - 4 + 3 \times (4p^2 - 10p + 6)) \\
&= \frac{1}{2}(4p - 4 + 12p^2 - 30p + 18) \\
&= \frac{1}{2}(12p^2 - 26p + 14) \\
&= 6p^2 - 13p + 7
\end{aligned}$$

### 3.3 Kajian Islam Antar Disiplin Ilmu

Allah Swt. berfirman dalam Surah Al-Baqarah ayat 164 yang artinya:

*“Sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi, pergantian malam dan siang, kapal yang berlayar di laut dengan muatan yang bermanfaat bagi manusia, apa yang diturunkan oleh Allah dari langit berupa air, lalu dengan itu dihidupkan-Nya bumi setelah mati (kering), dan Dia tebarkan didalamnya bermacam macam binatang, dan perkisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi, semua itu sungguh, merupakan tanda kebesaran Allah bagi orang-orang yang mengerti.” (al-baqarah : 164)*

Dalam Tafsir Ibnu Katsir(2010) *“(Sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi,)”* yaitu dalam hal ketinggian, kelembutan, dan keluasannya, serta bintang-bintang-bintang yang bergerak dan dan yang diam, juga peredaran pada garis edarnya; dataran rendah dan dataran tinggi, gunung, laut, gurun pasir, kesunyian, keramaian, dan segala manfaat yang terdapat di dalamnya, pergantian siang dan malam; satu pergi yang lain datang menggantikannya dengan saling mendahului dan tidak sedikitpun mengalami keterlambatan dalam sekejap. *“Dan kapal yang berlayar di laut dengan muatan yang bermanfaat bagi manusia,”* Artinya, dalam penghamparan laut oleh Allah Ta’ala sehingga bahtera itu dapat berlayar dari satu sisi ke sisi yang lain untuk kepentingan kehidupan manusia dan agar mereka dapat mengambil manfaat dari penduduk suatu daerah dan membawanya ke daerah lain silih berganti. *“Dan apa yang diturunkan oleh Allah*

dari langit berupa air, lalu dengan itu dihidupkan-Nya bumi setelah mati (kering),” sebagaimana Firman-Nya yang lain dalam surah Yaasiin ayat 33-36 yang artinya “*Dan Dia tebarkan didalamnya bermacam macam binatang,*” dalam bentuk, warna, dan manfaat, kecil, dan besar. Dan Dia mengetahui semuanya itu dan memberikan rizki kepadanya, tidak ada satu pun dari hewan-hewan itu yang tidak terjangkau atau tersembunyi dari-Nya. “*Dan pengisaran angin.*” Artinya, terkadang angin itu berhembus dengan membawa rahmat dan terkadang berhembus dengan membawa malapetaka. “*Dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi.*” Artinya berjalan di antara langit dan bumi, yang diarahkan oleh Allah Swt. menuju wilayah dan tempat-tempat mana saja yang dikehendakinya-Nya, sebagaimana Dia telah mengendalikannya. “*Sungguh terdapat tanda-tanda(keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan.*” Maksudnya, pada semuanya itu terdapat bukti-bukti yang menunjukkan keesaan-Nya.

Berdasarkan tafsir tersebut dapat dilihat bahwa banyak kebesaran Allah di dunia ini yang harus kita pelajari. Sebagai seorang matematikawan tentunya kita juga harus mempelajari tanda-tanda kebesaran Allah tersebut. Namun dalam penerapannya kita tidak serta merta langsung menerapkan ilmu matematika dalam konsep-konsep tersebut. Kita membutuhkan penerapan ilmu lain yang mempelajari tentang alam kemudian dikaji dengan ilmu matematika. Salah satu penelitian matematika yang melalui pendekatan ilmu lain adalah Indeks Wiener. Indeks Wiener merupakan definisi dari persamaan yang biasa digunakan dalam literatur kimia, tepatnya persamaan titik didih ikatan karbon. Indeks Wiener pertama kali didefinisikan oleh Harry Wiener pada tahun 1947. Dalam literatur matematika, W tampaknya telah dipelajari pertama kali pada tahun 1976. Indeks

Wiener yang ditemukan dalam literatur matematika merupakan jumlah jarak antara setiap pasangan titik dari graf yang terhubung.





## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Untuk  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima, maka indeks Wiener pada graf tersebut adalah

$$W(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = (2p - 2)^2.$$

2. Untuk  $ZT(\mathbb{Z}_{4p})$ , dimana  $p$  adalah bilangan prima, maka indeks hiper-Wiener pada graf tersebut adalah

$$WW(ZT(\mathbb{Z}_{4p})) = 6p^2 - 13p + 7.$$

#### 4.2 Saran

Penelitian ini membahas masalah indeks Wiener dan indeks hiper-Wiener pada graf total pembagi nol gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya membahas tentang indeks wiener dan indeks hiper-wiener pada graf lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7*, penerjemah, M. Abdul Ghoftar E.M., Abu Ihsan al-Atsari; Jakarta: Pustaka Imam Syafi'i.
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.
- Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.
- Chartrand, Gary. dan Zhang, Ping. 2009. *Chromatic Graph Theory*. New York: CRC Press.
- Chartrand, Gary., Lesniak, Linda., Zhang, Ping. 2016. *Graphs & Digraphs*. New York: CRC Press.
- Duric, Alen., Jevdevic, Sara., Oblak, Polona., dan Stopar, Nik. 2018. The Total Zero-divisor Graph of Commutative Rings. *Journal of Algebra and Its Applications*.
- Eliasi, Mehdi., Raeisib, Ghaffar., Taerib, Bijan. 2012. Wiener index of some graph operations. *Journal of Discrete Applied Mathematics*.
- Gallian, Joshep A. 2016. *Contemorary Abstract Algebra Ninth Edition*. USA: CRC Press.
- Gilbert, Linda dan Gilbert, Jimmie. 2009. *Elements of Modern Algebra*. USA: Brooks/Cole.
- Gui-dong, YU, Li-fang, REN, dan Xing-xing, LI, 2019. Wiener-Index, HyperWiener Index, Harary Index and Hamiltonicity Properties of graphs. *Appl. Math. J. Chinese Univ*, 34(2), 162-172.
- Irawan, Wahyu Hengki dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki PRESS
- Mas'oed, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Palembang: Akademia Permata.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al Mishbah: pesan, kesan dan keserasian AlQur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

## RIWAYAT HIDUP



Rizky Amelia Khanasah, biasa dipanggil Amel, lahir di Blitar pada tanggal 6 Oktober 1997. Anak kedua dari tiga bersaudara yang dilahirkan dari pasangan Bapak Nur Kholis dan Ibu Sholichatul Laili.

Pendidikan dasarnya ditempuh di Madrasah Ibtidaiyah (MI) Ma'arif Banggle 1 dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu melanjutkan ke Madrasah Tsanawiyah (MTs) Negeri 1 Kota Blitar, lulus pada tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Blitar dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, pernah mengikuti organisasi ekstra kampus menjadi anggota PKPT IPNU IPPNU UIN Malang. Selain itu juga aktif di sekolah tahfidz Ha'iah Tahfidz Al-Qur'an.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Rizky Amelia Khasanah  
NIM : 16610001  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Indeks Wiener dan Indeks Hiper-Wiener pada graf total pembagi nol Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan  
Pembimbing I : Muhammad Khudzaifah, M.Si  
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

| No | Tanggal          | Hal                                                          | Tanda Tangan |
|----|------------------|--------------------------------------------------------------|--------------|
| 1  | 11 November 2019 | Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III                           | 1.           |
| 2  | 03 Desember 2019 | Perbaikan Integrasi                                          | 2.           |
| 3  | 31 Januari 2020  | Melanjutkan Pembuktian                                       | 3.           |
| 4  | 03 Februari 2020 | Perbaikan Ayat                                               | 4.           |
| 5  | 05 Februari 2020 | Penambahan Tafsir                                            | 5.           |
| 6  | 10 Februari 2020 | ACC untuk diseminarkan                                       | 6.           |
| 7  | 13 Maret 2020    | Konsultasi Pembuktian                                        | 7.           |
| 8  | 30 Maret 2020    | Revisi Bab III (Bimbingan Online)                            | 8.           |
| 9  | 29 April 2020    | Revisi Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV (Bimbingan Online) | 9.           |
| 10 | 1 Mei 2020       | ACC untuk disidangkan                                        | 10.          |

Malang,  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001