

**INDEKS JARAK DERAJAT DAN RESIPROK INDEKS JARAK
DERAJAT PADA GRAF UNIT GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

**OLEH
WINDA ANUGRAHANTI
NIM. 16610002**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**INDEKS JARAK DERAJAT DAN RESIPROK INDEKS JARAK
DERAJAT PADA GRAF UNIT GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**OLEH
WINDA ANUGRAHANTI
NIM. 16610002**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**INDEKS JARAK DERAJAT DAN RESIPROK INDEKS JARAK
DERAJAT PADA GRAF UNIT GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

**OLEH
WINDA ANUGRAHANTI
NIM. 16610002**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 30 April 2020

Pembimbing I,



Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19900511 20160801 1 057

Pembimbing II,



M. Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**INDEKS JARAK DERAJAT DAN RESIPROK INDEKS JARAK
DERAJAT PADA GRAF UNIT GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

**OLEH
WINDA ANUGRAHANTI
NIM. 16610002**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 30 April 2020

Penguji Utama : Evawati Alisah, M.Pd
Ketua Penguji : Juhari, S.Pd., M.Si
Sekretaris Penguji : Muhammad Khudzaifah, M.Si
Anggota Penguji : M. Nafie Jauhari, M.Si



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Winda Anugrahanti
NIM : 16610002
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat
pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur
Kesatuan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2020
Yang membuat pernyataan



Winda Anugrahanti
NIM. 16610002

MOTO

“Perbanyaklah berdoa dan berusaha”



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Shobirin dan ibu Susianah yang selalu memberikan doa demi kelancaran dan kesuksesan anaknya dan saudaraku Ferinda Aris Suzandi serta seluruh keluarga yang selalu memberikan arahan, motivasi dan dukungan waktu.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan”, sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas bimbingan dan arahan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen penguji I yang telah memberikan arahan, nasihat dan masukan kepada penulis.
7. Juhari, S.Pd., M.Si, selaku dosen penguji II yang telah memberikan saran, masukan, dan kritikan kepada penulis.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 30 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xivv
ABSTRACT	xv
ملخص.....	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	2
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf.....	9
2.2 Derajat Titik pada Graf.....	9
2.3 Graf Terhubung	9
2.4 Jarak pada Graf.....	10
2.5 Gelanggang.....	11
2.6 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan	12
2.7 Graf Unit.....	13
2.8 Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat	13
2.9 Kongruensi Linier.....	14
2.10 Nilai-Nilai Islam.....	15

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_p$	16
3.1.1	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$	16
3.1.2	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$	19
3.1.3	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$	20
3.1.4	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$	22
3.2	Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_p$	26
3.2.1	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$	26
3.2.2	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$	27
3.2.3	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$	29
3.2.4	Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$	31
3.3	Nilai-nilai Islam tentang Keterkaitan antar Disiplin Ilmu	48

BAB IV PENUTUP

4.1	Simpulan	50
4.2	Saran	50

DAFTAR PUSTAKA	51
RIWAYAT HIDUP	51

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf G yang <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i>	9
Gambar 2.2	Jarak masing-masing titik pada graf G	10
Gambar 3.1	$G(\mathbb{Z}_2)$	17
Gambar 3.2	$G(\mathbb{Z}_3)$	19
Gambar 3.3	$G(\mathbb{Z}_5)$	21
Gambar 3.4	$G(\mathbb{Z}_7)$	23
Gambar 3.5	$G(\mathbb{Z}_2)$	26
Gambar 3.6	$G(\mathbb{Z}_3)$	27
Gambar 3.7	$G(\mathbb{Z}_5)$	29
Gambar 3.8	$G(\mathbb{Z}_7)$	32

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$	17
Tabel 3.2	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$	18
Tabel 3.3	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$	20
Tabel 3.4	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$	22
Tabel 3.5	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$	25
Tabel 3.6	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$	27
Tabel 3.7	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$	28
Tabel 3.8	Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$	31
Tabel 3.9	Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$	34
Tabel 3.10	Perhitungan Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$	35
Tabel 3.11	Perhitungan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$	36

ABSTRAK

Anugrahanti, Winda. 2020. **Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Muhammad Khudzaifah, M.Si (2) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: indeks jarak derajat, resiprok indeks jarak derajat, gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, graf unit.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung sederhana. Indeks Jarak Derajat pada graf G , yang dinotasikan dengan $DD(G)$ didefinisikan sebagai $DD(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)$. Resiprok Indeks Jarak Derajat pada graf G , yang dinotasikan dengan $H_A(G)$ didefinisikan sebagai $H_A(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)^{-1}$. Dimana $deg(u)$ dan $deg(v)$ adalah derajat titik u, v di $V(G)$ dan $d(u, v)$ adalah jarak dari titik u ke titik v pada graf G . Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada modulo $\mathbb{Z}_p$, dimana p adalah suatu bilangan prima. Langkah dalam penelitian ini yaitu menentukan anggota unit di $\mathbb{Z}_p$, kemudian menentukan aturan keterhubungan, dan menentukan derajat dan jarak setiap titik di G . Hasil penelitian ini adalah:

$$DD(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ p^3 - 2p^2 + 1 & , p \geq 3 \end{cases}$$

$$H_A(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ \frac{2p^3 - 7p^2 + 9p - 4}{2} & , p \geq 3 \end{cases}$$

ABSTRACT

Anugrahanti, Winda. 2020. **Degree Distance and Reciprocal Degree Distance Indices of Unit Graph of Commutative Ring with Unity**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Muhammad Khudzaifah, M.Sc (2) M. Nafie Jauhari, M.Sc.

Keyword: degree distance index, reciprocal degree distance index, commutative ring with unity, unit graph.

Let $G = (V, E)$ be a simple connected graph. The degree distance index of graph G , denoted by $DD(G)$ is defined as $DD(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)$. The reciprocal degree distance index of graph G , denoted by $H_A(G)$ is defined as $H_A(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)^{-1}$. Where $deg(u)$ and $deg(v)$ is the degree of u, v in $V(G)$ and $d(u, v)$ is the distance from vertex u to vertex v of graph G . This research aims to determine the general formula of the degree distance and reciprocal degree distance indices of unit graph of commutative ring with unity of modulo $\mathbb{Z}_p$, where p is a prime number. The step of the research is to determine the unit elements of $\mathbb{Z}_p$, then determine the adjacency rule, and determine the degree and distance of each vertex in G . The results of this research are:

$$DD(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ p^3 - 2p^2 + 1 & , p \geq 3 \end{cases}$$

$$H_A(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ \frac{2p^3 - 7p^2 + 9p - 4}{2} & , p \geq 3 \end{cases}$$

ملخص

أنوكراهنتي, ويندا. ٢٠٢٠. مؤشر درجة المسافة و مؤشرات المسافة المتبادلة الدرجة على الرسم البياني لوحدة من الساحة التبادلية مع عنصر الوحدة. أطروحة. قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانغ. المشرف: (١) محمد خضيفة, ماجستير (٢) محمد نافع الجوهري, ماجستير.

الكلمات الرئيسية: مؤشر درجة المسافة, مؤشرات المسافة المتبادلة الدرجة, الساحة التبادلية مع عنصر الوحدة, الرسم البياني لوحدة.

مثل $G = (V, E)$ رسم بياني متصل بسيط. مؤشر درجة المسافة على الرسم البياني G الذي يلاحظ $DD(G)$ يعرف بأنه $DD(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)$. مؤشرات المسافة المتبادلة الدرجة على الرسم البياني G الذي يلاحظ $H_A(G)$ يعرف بأنه $H_A(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)^{-1}$. حيث $deg(u)$ و $deg(v)$ هي درجة u, v في $V(G)$ و $d(u, v)$ هي مسافة من نقطة u إلى نقطة v . تهدف هذه الدراسة إلى إيجاد الصيغة العامة لفهرس مؤشر درجة المسافة و مؤشرات المسافة المتبادلة الدرجة على الرسم البياني لوحدة من الساحة التبادلية مع عنصر الوحدة مودولو $\mathbb{Z}_p$, فيه p الرقم الرئيس. خطوة هذه الدراسة هي تحديد على عنصر الوحدة من $\mathbb{Z}_p$, ثم تحديد قاعدة المجاورة و تحديد درجة و مسافة كل نقطة من G . نتائج هذه الدراسة هي:

$$DD(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ p^3 - 2p^2 + 1 & , p \geq 3 \end{cases}$$

$$H_A(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ \frac{2p^3 - 7p^2 + 9p - 4}{2} & , p \geq 3 \end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong unsur-unsur berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*). Notasi dari $p(G)$ adalah banyaknya unsur di $V(G)$ yang disebut *order* dari G , sedangkan notasi dari $q(G)$ adalah banyaknya unsur di $E(G)$ yang disebut *ukuran* dari G (Abdussakir dkk., 2009:4-5).

Allah SWT berfirman dalam surah Al-Ghaasyiyah ayat 18-20, yang artinya “*Dan langit, bagaimana ia ditinggikan? Dan gunung-gunung, bagaimana ia ditegakkan? Dan bumi bagaimana ia dihamparkan?*”

Al-Qurthubi (2009), menafsirkan bahwa “*Dan langit, bagaimana ia ditinggikan?*” Maksudnya, diangkat dari bumi tanpa tiang. Ada juga yang mengatakan bahwa maksudnya diangkat, hingga tidak ada sesuatupun yang dapat mencapainya. “*Dan gunung-gunung, bagaimana ia ditegakkan?*” Maksudnya, bagaimana gunung-gunung ditegakkan di atas bumi hingga tidak hancur. Sebab, ketika dihamparkan, bumi itu goncang, maka dikokohkan dengan gunung-gunung. Allah ‘Azza wa Jalla berfirman “*Dan telah Kami jadikan di bumi ini gunung-gunung yang kokoh supaya bumi itu (tidak) goncang bersama mereka*” (Qs. Al-Anbiya’[21]:31). “*Dan bumi bagaimana ia dihamparkan?*” Maksudnya, dibentangkan dan dihamparkan.

Surah tersebut memerintahkan kita untuk memperhatikan semua yang terjadi di alam ini supaya kita berfikir bahwa ada maksud dari sesuatu yang diciptakan. Hal tersebut juga berlaku bagi peneliti bahwa dalam suatu penelitian dalam bidang yang sama maupun yang berbeda membutuhkan pemikiran untuk menemukan hasil permasalahan yang diteliti. Penelitian mengenai indeks jarak derajat telah banyak diteliti di berbagai bidang. Salah satunya oleh Harry P. Schultz (1989) menunjukkan bahwa indeks jarak derajat bermanfaat pada struktur alkana dalam kimia atom, dalam hal ini aplikasi graf adalah untuk merepresentasikan model struktur kimia. Hal tersebut adalah bentuk pengaplikasian suatu ilmu pada bidang ilmu lain. Indeks jarak derajat merupakan jenis dari indeks topologi.

Indeks topologi adalah jenis deskriptor molekuler yang dihitung berdasarkan grafik molekul suatu senyawa kimia yang dapat digunakan misalnya dalam pengembangan hubungan struktur-aktivitas kuantitatif (QSARs) dimana aktivitas biologis atau sifat-sifat molekul lainnya berkorelasi dengan struktur kimianya. Indeks jarak derajat merupakan jenis indeks topologi yang dapat diterapkan dalam bidang kimia dan biologi molekuler, salah satunya untuk mempelajari struktur molekul kompleks diantaranya untuk menggambarkan dan memprediksi struktur molekul alkana, DNA dan protein dalam batasan tiga dimensi (3-D).

Indeks jarak derajat dari graf G dinotasikan $DD(G)$ diperkenalkan pertama kali oleh Andrey A. Dobrynin dan Amide A. Kochetova dan dipraktekkan pada saat yang sama oleh Gutman. Indeks jarak derajat dari graf G didefinisikan sebagai $DD(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)$, yang berarti jumlah

keseluruhan dari $\deg(u) + \deg(v)$ dikali dengan $d(u, v)$ (Xu Kexiang, dkk, 2014). Penelitian mengenai indeks jarak derajat sebelumnya telah dikaji oleh Dankelmann, dkk (2009) meneliti tentang jarak derajat pada graf, Harry P. Schultz (1989) meneliti tentang teori graf dan indeks topologi pada alkana, A. Dobrynin dan A. Kochetova (1994) meneliti tentang derajat analog pada indeks wiener.

Resiprok indeks jarak derajat adalah penjumlahan pada indeks Harary, dinotasikan dengan $H_A(G)$. Resiprok indeks jarak derajat dari graf G didefinisikan sebagai $H_A(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (\deg(u) + \deg(v)) \cdot d(u, v)^{-1}$, yang berarti jumlah keseluruhan dari $\deg(u) + \deg(v)$ dibagi dengan $d(u, v)$ (Xu Kexiang, dkk, 2014). Sebelumnya terdapat peneliti mengenai resiprok indeks jarak derajat yaitu H. Hua, dkk (2012) tentang resiprok indeks jarak derajat pada graf.

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang. Jika terdapat suatu unsur e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$, untuk setiap x di R . Maka e disebut unsur kesatuan dan R adalah gelanggang dengan unsur kesatuan. Suatu unsur x di R dikatakan unit di R jika terdapat suatu unsur y di R sedemikian sehingga $xy = yx = 1$. Himpunan anggota unit di R dinotasikan dengan $U(R)$ didefinisikan sebagai grup abel yang tertutup terhadap operasi perkalian, asosiatif pada operasi perkalian, dan distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan. Gelanggang R memiliki unsur kesatuan pada operasi kedua. Jika perkalian di R komutatif, maka R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Graf unit dari penelitian ini diperoleh dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, graf unit di R dinotasikan dengan $G(R)$ adalah graf sederhana dengan semua

elemen di R sebagai titik dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ (Huadong dan Yangjiang, 2019). Graf unit sebelumnya telah diteliti oleh Huadong dan Yangjiang (2019) namun pembahasannya tentang diameter graf unit pada gelanggang, dan S. Akbari, dkk.(2011) meneliti tentang graf unit pada gelanggang non-komutatif.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian mengenai graf unit dapat dikembangkan dan diperluas untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya. Dengan demikian, peneliti akan melakukan penelitian pada graf unit mengenai “Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana rumus umum dari Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan?
2. Bagaimana rumus umum dari Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menentukan rumus umum dari Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

2. Untuk menentukan rumus umum dari Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini yaitu untuk memberikan informasi mengenai menentukan rumus umum indeks jarak dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.5 Batasan Masalah

Fokus pembahasan dan penelitian ini adalah menentukan rumus umum indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit $\mathbb{Z}_p$ yang merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dimana p adalah suatu bilangan prima.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka, yaitu melakukan penelaahan terhadap beberapa literatur seperti buku dan artikel yang berhubungan dengan topik bahasan. Adapun langkah-langkah untuk menentukan rumus umum indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, sebagai berikut:

1. Menentukan anggota dari $\mathbb{Z}_p$.
2. Menentukan himpunan titik $U(R)$ dari $\mathbb{Z}_p$ dengan menggunakan tabel Cayley operasi perkalian.

3. Menggambar graf unit yang diperoleh dari setiap titik yang terhubung dari langkah 2.
4. Menghitung jarak dan derajat dari setiap elemen pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$.
5. Menghitung indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$.
6. Mengelompokkan hasil dari langkah 5 dalam bentuk tabel berdasarkan kesamaan jarak dari titik satu ke titik lainnya.
7. Membuat dugaan (konjektur) dari langkah 6.
8. Merumuskan dugaan tentang indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat sebagai suatu proposisi.
9. Menghasilkan proposisi indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan pada penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab terdiri dari beberapa subbab. Sistematika tersebut dimaksudkan agar penulisan penelitian ini lebih terarah dan mudah dipahami. Adapun sistematika tersebut yaitu:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan berisi mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Kajian pustaka berisi mengenai konsep-konsep (teori-teori) yang berkaitan dengan permasalahan. Teori yang digunakan antara lain: teori tentang graf, derajat titik pada graf, graf terhubung, jarak pada graf, gelanggang, gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat, serta nilai-nilai islam.

BAB III Pembahasan

Pembahasan berisi mengenai penyelesaian terhadap permasalahan indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, serta nilai-nilai islam.

BAB IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 2.1

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong unsur-unsur berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*). Notasi dari $p(G)$ adalah banyaknya unsur di $V(G)$ yang disebut *order* dari G , sedangkan notasi dari $q(G)$ adalah banyaknya unsur di $E(G)$ yang disebut *ukuran* dari G (Abdussakir dkk., 2009:4-5).

2.2 Derajat Titik pada Graf

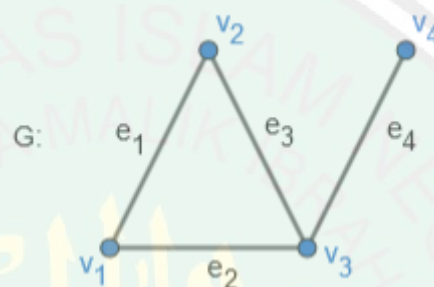
Definisi 2.2

Derajat dari titik v di graf G , dinotasikan $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*Incident*) dengan titik v . Jika dalam suatu pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka notasi $deg_G(v)$ disingkat $deg(v)$. Titik terasing atau titik terisolasi adalah titik yang berderajat 0. Titik ujung atau titik akhir adalah titik yang berderajat 1. Titik genap adalah titik yang berderajat genap dan Titik ganjil adalah titik yang berderajat ganjil (Abdussakir dkk., 2009:9).

2.3 Graf Terhubung

Definisi 2.3

Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = uv$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), titik u dan v disebut ujung dari sisi e (Chartrand dkk., 2016:4).



Gambar 2.1 Graf G yang *Adjacent* dan *Incident*

Dari gambar 2.1, order dari G adalah 4, atau dapat ditulis $p(G) = 4$, sedangkan ukuran dari G adalah 4, atau dapat ditulis $q(G) = 4$. Pada gambar 2.1, titik yang terhubung langsung (*adjacent*) di graf G adalah titik v_1 dan v_2 , v_1 dan v_3 , v_2 dan v_3 , serta v_3 dan v_4 . Titik v_1 dan v_4 , serta v_2 dan v_4 tidak terhubung langsung karena tidak terdapat sisi di antara kedua titik tersebut. Sedangkan titik yang terkait langsung (*incident*) adalah pada sisi e_1 yang terkait langsung v_1 dan v_2 , pada sisi e_2 yang terkait langsung v_1 dan v_3 , pada sisi e_3 yang terkait langsung v_2 dan v_3 , pada sisi e_4 yang terkait langsung v_3 dan v_4 . Sisi e_1 dan e_3 disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan e_1 dan e_4 tidak terhubung langsung.

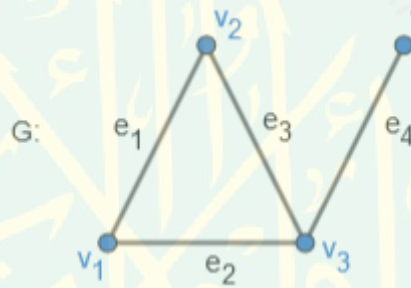
2.4 Jarak pada Graf

Definisi 2.4

Misalkan G graf terhubung dan misalkan u dan v titik di G . Jarak (*distance*) dari u dan v titik di G , dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Abdussakir dkk., 2009:56).

Untuk setiap titik u, v dan w di G , maka

- $d(u, v) \geq 0$ dan $d(u, v) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$



Gambar 2.2 Jarak masing-masing titik pada graf G

Berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh jarak pada masing-masing titik sebagai berikut $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$, $d(v_1, v_4) = 2$ (karena tidak terhubung langsung), $d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_2, v_4) = 2$ (karena tidak terhubung langsung), dan $d(v_3, v_4) = 1$.

2.5 Gelanggang

Definisi 2.5

Misalkan R suatu himpunan yang tak kosong. Himpunan R disebut gelanggang jika di R didefinisikan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian yang dilambangkan dengan $+$ dan $\cdot$ yang memenuhi aksioma berikut (Gilbert dan Gilbert, 2015):

(1) $(R, +)$ merupakan grup abel, dikatakan grup abel jika memenuhi syarat-syarat berikut:

- Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$ (R tertutup terhadap operasi $+$).
- Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c) \in R$ (R bersifat asosiatif terhadap operasi $+$).

- Adanya unsur identitas terhadap operasi $+$.

Untuk $a \in R$ berlaku $a + e = e + a = a \in R$.

- Adanya unsur invers terhadap operasi $+$.

Untuk $a \in R$ berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

- Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a \in R$ (R bersifat komutatif terhadap operasi $+$).

(2) Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$ (R tertutup terhadap operasi $\cdot$).

(3) Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \in R$ (R bersifat asosiatif terhadap operasi $\cdot$).

(4) Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:

(i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, sifat distributif kiri.

(ii) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, sifat distributif kanan.

2.6 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Definisi 2.6

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah gelanggang. Jika terdapat suatu unsur e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$, untuk setiap x di R . Maka e disebut unsur kesatuan dan R adalah gelanggang dengan unsur kesatuan. Suatu unsur x di R dikatakan unit di R jika terdapat suatu unsur y di R sedemikian sehingga $xy = yx = 1$. Himpunan anggota unit di R dinotasikan dengan $U(R)$ didefinisikan sebagai grup abel yang tertutup terhadap operasi perkalian, asosiatif pada operasi perkalian, dan distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan. Gelanggang R memiliki unsur kesatuan pada operasi kedua. Jika perkalian di R komutatif, maka R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert dan Gilbert, 2015).

2.7 Graf Unit

Definisi 2.7

Misalkan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan, graf unit di R dinotasikan dengan $G(R)$ adalah graf sederhana dengan semua elemen di R sebagai titik dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ (Huadong dan Yangjiang, 2019).

2.8 Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat

Definisi 2.8

Indeks Jarak Derajat pada graf G dinotasikan $DD(G)$ diperkenalkan pertama kali oleh Dobrynin dan Kochetova dan dipraktekkan pada saat yang sama oleh Gutman. Indeks Jarak Derajat pada graf G didefinisikan sebagai

$$DD(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)$$

yang berarti jumlah keseluruhan dari $deg(u) + deg(v)$ dikali dengan $d(u, v)$. Dimana $deg(u, v)$ adalah derajat titik pada graf dan $d(u, v)$ adalah jarak dari titik u ke titik v (K. Xu, dkk, 2014).

Resiprok Indeks Jarak Derajat pada graf G dinotasikan $H_A(G)$ adalah versi sulit pada indeks Harary. Resiprok Indeks Jarak Derajat merupakan graf invarian baru didefinisikan sebagai

$$H_A(G) = \sum_{u,v \in V(G)} (deg(u) + deg(v)) \cdot d(u, v)^{-1}$$

yang berarti jumlah keseluruhan dari $deg(u) + deg(v)$ dibagi dengan $d(u, v)$. Dimana $deg(u, v)$ adalah derajat titik pada titik (u, v) dan $d(u, v)$ adalah jarak dari titik u ke titik v (K. Xu, dkk, 2014).

2.9 Kongruensi Linier

Definisi 2.9

Misalkan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo m . Banyaknya selesaian dari $f(x) \equiv 0(mod m)$ adalah banyaknya s_i yang memenuhi $f(s_i) \equiv 0(mod m)$.

Teorema 2.1 (Teorema Bezout).

Diberikan $a, b \in \mathbb{Z}$ yang tidak semuanya nol, maka $FPB(a, b)$ adalah kombinasi linier positif terkecil dari a dan b . Lebih lanjut, terdapat $m, n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $FPB(a, b) = ma + nb$.

Akibat 2.2

Diberikan $a, b \in \mathbb{Z}$, maka a dan b relatif prima jika dan hanya jika terdapat $m, n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $ma + nb = 1$.

Teorema 2.3

Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $ac \equiv bc \pmod{m}$.

2.10 Nilai-Nilai Islam

Allah SWT berfirman di dalam Al-Qur'an surah Al-Jaatsiyah ayat 13, yang artinya:

“Dan Dia menundukkan apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi untukmu semuanya(sebagai rahmat) dari-Nya. Sungguh, dalam hal yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda(kebesaran Allah) bagi orang-orang yang berpikir”(Qs. Al-Jaatsiyah:13).

Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi di dalam Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (2009), menafsirkan bahwa, Dia-lah yang menundukkan untuk kalian apa yang ada dilangit, seperti matahari, bulan, bintang, awan, hujan, dan angin untuk kepentingan kalian. Dan Dia-lah yang menundukkan apa yang ada di bumi, seperti gunung, pepohonan, sungai, lautan, barang tambang, dan berbagai macam binatang. Sesungguhnya pada semua itu, yakni semua yang ditundukkan Allah untuk manusia terdapat tanda-tanda bagi orang yang berfikir sehingga mereka

memuji Allah, bersyukur, beriman, dan mentauhidkan-Nya dalam rububiyah dan uluhiyyah-Nya.

Ahmad Mushthafa Al-Maraghi (1993), menafsirkan bahwa, dan Dia menyediakan bagimu segala yang telah Dia ciptakan di langit dan di bumi, yang berkaitan dengan kemaslahatan-kemaslahatan, dan yang karenanya penghidupanmu menjadi tegak. Di antara makhluk-makhluk Allah yang dia sediakan untukmu di langit ialah matahari, bulan, bintang-bintang yang cemerlang, hujan, awan, dan angin. Dan di antara makhluk-makhluk-Nya yang ada di muka bumi adalah binatang, pohon-pohonan, gunung, kapal, sebagai rahmat dan karunia dari Allah yang semua ini merupakan dalil-dalil yang menunjukkan bahwa penciptanya adalah Allah yang tiada Tuhan melainkan Dia, bagi orang yang mau memperhatikan makhluk-makhluk tersebut, dan mengambil pelajaran dari padanya, di samping memikirkannya dengan benar.

Kajian matematis yang berkaitan dengan Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat adalah bahwa dalam suatu penelitian dalam bidang yang sama maupun yang berbeda membutuhkan pemikiran untuk menemukan hasil permasalahan yang diteliti. Penelitian mengenai jarak derajat telah banyak diteliti di berbagai bidang. Salah satunya dalam penelitian Harry P. Schultz (1989) menunjukkan bahwa indeks jarak derajat bermanfaat pada struktur alkana dalam kimia atom. Dalam bidang kimia banyak hal yang dapat diteliti, salah satunya yaitu struktur kimia. Beberapa struktur molekul kimia merupakan hal yang sangat kompleks untuk dimodelkan, sehingga salah satu bentuk aplikasi graf dalam bidang ini adalah untuk merepresentasikan model struktur kimia. Hal tersebut merupakan bentuk pengaplikasian suatu ilmu pada bidang ilmu lain.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang rumus umum indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Dalam pencarian rumus, terlebih dahulu ditentukan dan ditunjukkan nilai indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$, $p \leq 7$ dengan p adalah bilangan prima.

3.1 Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_p$

Subbab ini membahas tentang penentuan rumus umum indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$. Namun untuk menentukan rumus umum tersebut dalam penelitian ini digunakan $p \leq 7$ dengan p adalah bilangan prima.

3.1.1 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$

Diberikan $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 2 dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.1 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Didefinisikan graf unit yaitu graf sederhana dengan semua elemen di R sebagai titik dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ (Huadong dan Yangjiang, 2019). Berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_2) = \{\bar{1}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_2)$ sebagai berikut.

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_2)$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_2)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_2)) = \{(\bar{0}, \bar{1})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_2$ sebagai berikut.

**Gambar 3.1** $G(\mathbb{Z}_2)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.1.

Derajat titik : $\deg(\bar{0}) = 1, \deg(\bar{1}) = 1$

Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1$

Jadi, indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_2$ adalah

$$\begin{aligned} DD(G(\mathbb{Z}_2)) &= (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})) \cdot d(\bar{0}, \bar{1}) \\ &= (1 + 1) \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3.1.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$

Diberikan $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 3 dengan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.2 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

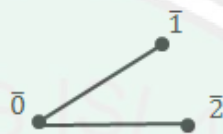
Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_3) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_3)$ sebagai berikut.

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_3)$$

$$\bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_3)$$

$$\bar{1} + \bar{2} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_3)$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_3)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_3)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_3$ sebagai berikut.



Gambar 3.2 $G(\mathbb{Z}_3)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.2.

Derajat titik : $\deg(\bar{0}) = 2, \deg(\bar{1}) = 1, \deg(\bar{2}) = 1$

Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1, d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, d(\bar{1}, \bar{2}) = 2$

Jadi, indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_3$ adalah

$$\begin{aligned}
 DD(G(\mathbb{Z}_3)) &= (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})) \cdot d(\bar{0}, \bar{1}) + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{2})) \cdot d(\bar{0}, \bar{2}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2})) \cdot d(\bar{1}, \bar{2}) \\
 &= (2 + 1) \cdot 1 + (2 + 1) \cdot 1 + (1 + 1) \cdot 2 \\
 &= 3 + 3 + 4 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

3.1.3 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$

Diberikan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 5 dengan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

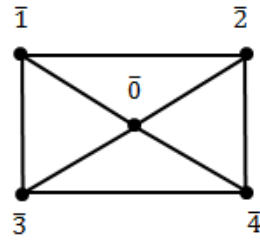
Tabel 3.3 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.3 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_5)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \bar{0} + \bar{1} &= \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{1} + \bar{3} &= \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_5) \\
 \bar{0} + \bar{2} &= \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{1} + \bar{4} &= \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_5) \\
 \bar{0} + \bar{3} &= \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{2} + \bar{3} &= \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_5) \\
 \bar{0} + \bar{4} &= \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{2} + \bar{4} &= \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_5) \\
 \bar{1} + \bar{2} &= \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{3} + \bar{4} &= \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_5)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_5)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_5)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{4})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_5$ sebagai berikut

Gambar 3.3 $G(\mathbb{Z}_5)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.3.

Derajat titik: $\deg(\bar{0}) = 4, \deg(\bar{1}) = 3, \deg(\bar{2}) = 3, \deg(\bar{3}) = 3, \deg(\bar{4}) = 3$.

Jarak titik: $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1, d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, d(\bar{0}, \bar{3}) = 1, d(\bar{0}, \bar{4}) = 1, d(\bar{1}, \bar{2}) = 2,$

$d(\bar{1}, \bar{3}) = 1, d(\bar{1}, \bar{4}) = 2, d(\bar{2}, \bar{3}) = 2, d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, d(\bar{3}, \bar{4}) = 1$.

Jadi, indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_5$ adalah

$$\begin{aligned}
 DD(G(\mathbb{Z}_5)) &= (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})) \cdot d(\bar{0}, \bar{1}) + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{2})) \cdot d(\bar{0}, \bar{2}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{3})) \cdot d(\bar{0}, \bar{3}) + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{0}, \bar{4}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2})) \cdot d(\bar{1}, \bar{2}) + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3})) \cdot d(\bar{1}, \bar{3}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{1}, \bar{4}) + (\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{3})) \cdot d(\bar{2}, \bar{3}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{2}, \bar{4}) + (\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{3}, \bar{4}) \\
 &= (4 + 3) \cdot 1 + (4 + 3) \cdot 1 + (4 + 3) \cdot 1 + (4 + 3) \cdot 1 + (3 + 3) \cdot 1 \\
 &\quad + (3 + 3) \cdot 1 + (3 + 3) \cdot 2 + (3 + 3) \cdot 2 + (3 + 3) \cdot 1 + (3 + 3) \\
 &\quad \cdot 1 \\
 &= ((4 + 3) \cdot 1) \cdot 4 + ((3 + 3) \cdot 1) \cdot 4 + ((3 + 3) \cdot 2) \cdot 2 \\
 &= 28 + 24 + 24 \\
 &= 76
 \end{aligned}$$

3.1.4 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$

Diberikan $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 7 dengan $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.4 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.4 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_7) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_7)$ sebagai berikut.

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{0} + \bar{3} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

$$\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{0} + \bar{5} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{0} + \bar{6} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

$$\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{1} + \bar{3} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{1} + \bar{4} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

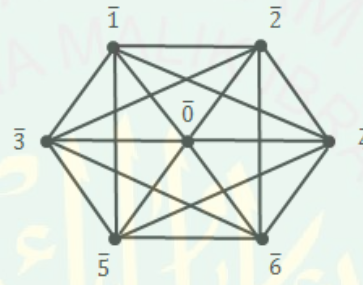
$$\bar{1} + \bar{5} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{1} + \bar{6} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{2} + \bar{3} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

$$\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{2} + \bar{5} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{2} + \bar{6} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

$$\bar{3} + \bar{4} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{3} + \bar{5} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{3} + \bar{6} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

$$\bar{4} + \bar{5} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{4} + \bar{6} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7) \quad \bar{5} + \bar{6} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7)$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_7)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_7)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{6}), (\bar{5}, \bar{6})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_7$ sebagai berikut.



Gambar 3.4 $G(\mathbb{Z}_7)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.4.

Derajat titik : $\deg(\bar{0}) = 6, \deg(\bar{1}) = 5, \deg(\bar{2}) = 5, \deg(\bar{3}) = 5, \deg(\bar{4}) = 5, \deg(\bar{5}) = 5, \deg(\bar{6}) = 5$

Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1, d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, d(\bar{0}, \bar{3}) = 1, d(\bar{0}, \bar{4}) = 1, d(\bar{0}, \bar{5}) = 1, d(\bar{0}, \bar{6}) = 1, d(\bar{1}, \bar{2}) = 1, d(\bar{1}, \bar{3}) = 1, d(\bar{1}, \bar{4}) = 1, d(\bar{1}, \bar{5}) = 1, d(\bar{1}, \bar{6}) = 2, d(\bar{2}, \bar{3}) = 1, d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, d(\bar{2}, \bar{5}) = 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 1, d(\bar{3}, \bar{4}) = 2, d(\bar{3}, \bar{5}) = 1, d(\bar{3}, \bar{6}) = 1, d(\bar{4}, \bar{5}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 1, d(\bar{5}, \bar{6}) = 1$

Jadi, indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_7$ adalah

$$\begin{aligned}
 DD(G(\mathbb{Z}_7)) &= (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})) \cdot d(\bar{0}, \bar{1}) + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{2})) \cdot d(\bar{0}, \bar{2}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{3})) \cdot d(\bar{0}, \bar{3}) + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{0}, \bar{4}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{5})) \cdot d(\bar{0}, \bar{5}) + (\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{6})) \cdot d(\bar{0}, \bar{6}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2})) \cdot d(\bar{1}, \bar{2}) + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3})) \cdot d(\bar{1}, \bar{3}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{1}, \bar{4}) + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{5})) \cdot d(\bar{1}, \bar{5}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{6})) \cdot d(\bar{1}, \bar{6}) + (\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{3})) \cdot d(\bar{2}, \bar{3}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{2}, \bar{4}) + (\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{5})) \cdot d(\bar{2}, \bar{5}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{6})) \cdot d(\bar{2}, \bar{6}) + (\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4})) \cdot d(\bar{3}, \bar{4}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5})) \cdot d(\bar{3}, \bar{5}) + (\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{6})) \cdot d(\bar{3}, \bar{6}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{4}) + \deg(\bar{5})) \cdot d(\bar{4}, \bar{5}) + (\deg(\bar{4}) + \deg(\bar{6})) \cdot d(\bar{4}, \bar{6}) \\
 &\quad + (\deg(\bar{5}) + \deg(\bar{6})) \cdot d(\bar{5}, \bar{6}) \\
 &= (6 + 5) \cdot 1 + (6 + 5) \cdot 1 + (6 + 5) \cdot 1 + (6 + 5) \cdot 1 + (6 + 5) \\
 &\quad \cdot 1 + (6 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 \\
 &\quad + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 2 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \\
 &\quad \cdot 2 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 2 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 \\
 &\quad + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 + (5 + 5) \cdot 1 \\
 &= ((6 + 5) \cdot 1) \cdot 6 + ((5 + 5) \cdot 1) \cdot 12 + ((5 + 5) \cdot 2) \cdot 3 \\
 &= 66 + 120 + 60 \\
 &= 246
 \end{aligned}$$

3.2 Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_p$

Subbab ini membahas tentang penentuan rumus umum resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$. Namun untuk menentukan rumus umum tersebut dalam penelitian ini digunakan $2 \leq p \leq 7$ dengan p adalah bilangan prima.

3.2.1 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$

Diberikan $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 2 dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

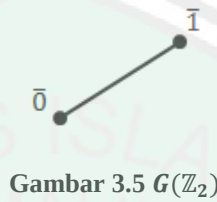
Tabel 3.5 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_2$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Didefinisikan graf unit yaitu graf sederhana dengan semua elemen di R sebagai titik dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in U(R)$ (Huadong dan Yangjiang, 2019). Berdasarkan Tabel 3.5 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_2) = \{\bar{1}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_2)$ sebagai berikut.

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_2)$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_2)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_2)) = \{(\bar{0}, \bar{1})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_2$ sebagai berikut.



Gambar 3.5 $G(\mathbb{Z}_2)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.5.

Derajat titik : $\deg(\bar{0}) = 1, \deg(\bar{1}) = 1$

Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1$

Jadi, resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_2$ adalah

$$\begin{aligned} H_A(G(\mathbb{Z}_2)) &= \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})}{d(\bar{0}, \bar{1})} \\ &= \frac{1 + 1}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

3.2.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$

Diberikan $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 3 dengan $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.6 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_3$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

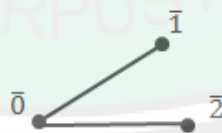
Berdasarkan Tabel 3.6 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_3) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_3)$ sebagai berikut.

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_3)$$

$$\bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_3)$$

$$\bar{1} + \bar{2} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_3)$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_3)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_3)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_3$ sebagai berikut.

**Gambar 3.6** $G(\mathbb{Z}_3)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.6.

Derajat titik : $\deg(\bar{0}) = 2, \deg(\bar{1}) = 1, \deg(\bar{2}) = 1$

Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1, d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, d(\bar{1}, \bar{2}) = 2$

Jadi, resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_3$ adalah

$$\begin{aligned} H_A(G(\mathbb{Z}_3)) &= \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})}{d(\bar{0}, \bar{1})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{2})}{d(\bar{0}, \bar{2})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2})}{d(\bar{1}, \bar{2})} \\ &= \frac{2+1}{1} + \frac{2+1}{1} + \frac{1+1}{2} \\ &= 3 + 3 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

3.2.3 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$

Diberikan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 5 dengan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

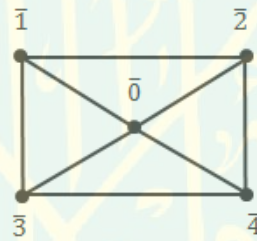
Tabel 3.7 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_5$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.7 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_5)$ sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll}
\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{1} + \bar{3} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_5) \\
\bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{1} + \bar{4} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_5) \\
\bar{0} + \bar{3} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{2} + \bar{3} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_5) \\
\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{2} + \bar{4} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_5) \\
\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_5) & \bar{3} + \bar{4} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_5)
\end{array}$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_5)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_5)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{4})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_5$ sebagai berikut



Gambar 3.7 $G(\mathbb{Z}_5)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan Gambar 3.7.

Derajat titik : $\deg(\bar{0}) = 4, \deg(\bar{1}) = 3, \deg(\bar{2}) = 3, \deg(\bar{3}) = 3, \deg(\bar{4}) = 3$

Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1, d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, d(\bar{0}, \bar{3}) = 1, d(\bar{0}, \bar{4}) = 1, d(\bar{1}, \bar{2}) = 2,$

$d(\bar{1}, \bar{3}) = 1, d(\bar{1}, \bar{4}) = 2, d(\bar{2}, \bar{3}) = 2, d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, d(\bar{3}, \bar{4}) = 1$

Jadi, resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_5$ adalah

$$\begin{aligned}
H_A(G(\mathbb{Z}_5)) &= \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})}{d(\bar{0}, \bar{1})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{2})}{d(\bar{0}, \bar{2})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{3})}{d(\bar{0}, \bar{3})} \\
&\quad + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{0}, \bar{4})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2})}{d(\bar{1}, \bar{2})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3})}{d(\bar{1}, \bar{3})} \\
&\quad + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{1}, \bar{4})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{3})}{d(\bar{2}, \bar{3})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{2}, \bar{4})} \\
&\quad + \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{3}, \bar{4})} \\
&= \frac{4+3}{1} + \frac{4+3}{1} + \frac{4+3}{1} + \frac{4+3}{1} + \frac{3+3}{1} + \frac{3+3}{1} + \frac{3+3}{2} + \frac{3+3}{2} \\
&\quad + \frac{3+3}{1} + \frac{3+3}{1} \\
&= \left(\frac{4+3}{1}\right) \cdot 4 + \left(\frac{3+3}{1}\right) \cdot 4 + \left(\frac{3+3}{2}\right) \cdot 2 \\
&= 28 + 24 + 6 \\
&= 58
\end{aligned}$$

3.2.4 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$

Diberikan $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 7 dengan $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.8 Tabel Cayley Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_7$

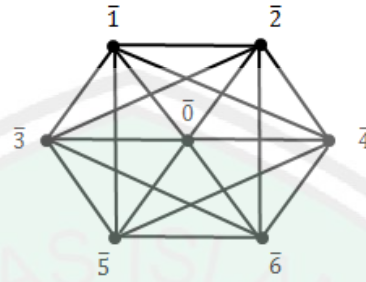
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.8 diperoleh anggota dari $U(\mathbb{Z}_7) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, akan ditunjukkan himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_7)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{0} + \bar{2} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{0} + \bar{3} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7) \\
&\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{0} + \bar{5} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{0} + \bar{6} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7) \\
&\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{1} + \bar{3} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{1} + \bar{4} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7) \\
&\bar{1} + \bar{5} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{1} + \bar{6} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_7) & \bar{2} + \bar{3} = \bar{5} \in U(\mathbb{Z}_7) \\
&\bar{2} + \bar{4} = \bar{6} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{2} + \bar{5} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_7) & \bar{2} + \bar{6} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7) \\
&\bar{3} + \bar{4} = \bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_7) & \bar{3} + \bar{5} = \bar{1} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{3} + \bar{6} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7) \\
&\bar{4} + \bar{5} = \bar{2} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{4} + \bar{6} = \bar{3} \in U(\mathbb{Z}_7) & \bar{5} + \bar{6} = \bar{4} \in U(\mathbb{Z}_7)
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi graf unit diperoleh anggota himpunan titik yang terhubung langsung pada $G(\mathbb{Z}_7)$ yaitu $E(G(\mathbb{Z}_7)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{5}),$

$(\bar{4}, \bar{6}), (\bar{5}, \bar{6})\}$. Sehingga diperoleh graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dari $\mathbb{Z}_7$ sebagai berikut.



Gambar 3.8 $G(\mathbb{Z}_7)$

Berikut hasil perolehan dari derajat titik dan jarak titik berdasarkan

Gambar 3.8.

Derajat titik : $deg(\bar{0}) = 6, deg(\bar{1}) = 5, deg(\bar{2}) = 5, deg(\bar{3}) = 5, deg(\bar{4}) = 5, deg(\bar{5}) = 5, deg(\bar{6}) = 5$

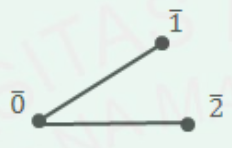
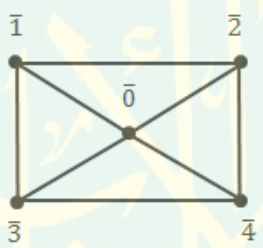
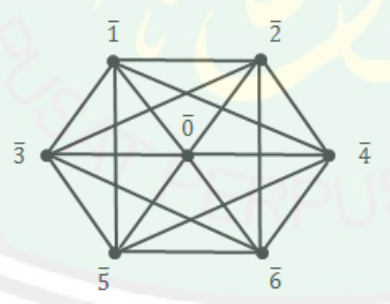
Jarak titik : $d(\bar{0}, \bar{1}) = 1, d(\bar{0}, \bar{2}) = 1, d(\bar{0}, \bar{3}) = 1, d(\bar{0}, \bar{4}) = 1, d(\bar{0}, \bar{5}) = 1, d(\bar{0}, \bar{6}) = 1, d(\bar{1}, \bar{2}) = 1, d(\bar{1}, \bar{3}) = 1, d(\bar{1}, \bar{4}) = 1, d(\bar{1}, \bar{5}) = 1, d(\bar{1}, \bar{6}) = 2, d(\bar{2}, \bar{3}) = 1, d(\bar{2}, \bar{4}) = 1, d(\bar{2}, \bar{5}) = 2, d(\bar{2}, \bar{6}) = 1, d(\bar{3}, \bar{4}) = 2, d(\bar{3}, \bar{5}) = 1, d(\bar{3}, \bar{6}) = 1, d(\bar{4}, \bar{5}) = 2, d(\bar{4}, \bar{6}) = 1, d(\bar{5}, \bar{6}) = 1$

Jadi, resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_7$ adalah

$$\begin{aligned}
H_A(G(\mathbb{Z}_7)) &= \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{1})}{d(\bar{0}, \bar{1})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{2})}{d(\bar{0}, \bar{2})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{3})}{d(\bar{0}, \bar{3})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{0}, \bar{4})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{5})}{d(\bar{0}, \bar{5})} + \frac{\deg(\bar{0}) + \deg(\bar{6})}{d(\bar{0}, \bar{6})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{2})}{d(\bar{1}, \bar{2})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{3})}{d(\bar{1}, \bar{3})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{1}, \bar{4})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{5})}{d(\bar{1}, \bar{5})} + \frac{\deg(\bar{1}) + \deg(\bar{6})}{d(\bar{1}, \bar{6})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{3})}{d(\bar{2}, \bar{3})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{2}, \bar{4})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{5})}{d(\bar{2}, \bar{5})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{6})}{d(\bar{2}, \bar{6})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{4})}{d(\bar{3}, \bar{4})} + \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{5})}{d(\bar{3}, \bar{5})} + \frac{\deg(\bar{3}) + \deg(\bar{6})}{d(\bar{3}, \bar{6})} \\
&+ \frac{\deg(\bar{4}) + \deg(\bar{5})}{d(\bar{4}, \bar{5})} + \frac{\deg(\bar{4}) + \deg(\bar{6})}{d(\bar{4}, \bar{6})} + \frac{\deg(\bar{5}) + \deg(\bar{6})}{d(\bar{5}, \bar{6})} \\
&= \frac{6+5}{1} + \frac{6+5}{1} + \frac{6+5}{1} + \frac{6+5}{1} + \frac{6+5}{1} + \frac{6+5}{1} + \frac{5+5}{1} \\
&+ \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{2} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{2} \\
&+ \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{2} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} + \frac{5+5}{1} \\
&= \left(\frac{6+5}{1}\right) \cdot 6 + \left(\frac{5+5}{1}\right) \cdot 12 + \left(\frac{5+5}{2}\right) \cdot 3 \\
&= 66 + 120 + 15 \\
&= 201
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$ maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut:

Tabel 3.9 Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$

p	$G(\mathbb{Z}_p)$	$DD(G(\mathbb{Z}_p))$	$H_A(G(\mathbb{Z}_p))$
2		2	2
3		10	7
5		76	58
7		246	201

Berdasarkan perhitungan Tabel 3.9, akan dibuat perhitungan dalam bentuk tabel untuk memudahkan dalam mencari pola yaitu dikelompokkan tiap

titik dan dihitung tiap masing-masing titik serta untuk lintasan yang berjarak 1 dan lintasan yang berjarak 2 dihitung secara terpisah, rumusnya dibentuk menjadi:

a) Indeks Jarak Derajat

$$DD(G(\mathbb{Z}_p)) = (\text{banyaknya } \deg(\bar{0}) \cdot \deg(\bar{0})) \cdot \text{panjang lintasan } (\bar{0}) + \\ (\text{banyaknya } \deg(\bar{1}) \cdot \deg(\bar{1})) \cdot \text{panjang lintasan } (\bar{1}) + \dots + \\ (\text{banyaknya } \deg(\overline{p-1}) \cdot \deg(\overline{p-1})) \cdot \text{panjang lintasan } (\overline{p-1})$$

Tabel 3.10 Perhitungan Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$

p	Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$	$DD(G(\mathbb{Z}_p))$
2	$= (1 \cdot 1) \cdot 1 + (1 \cdot 1) \cdot 1$	2
3	$= (2 \cdot 2) \cdot 1 + (1 \cdot 1) \cdot 1 + (1 \cdot 1) \cdot 1 + (1 \cdot 1) \cdot 2$ $+ (1 \cdot 1) \cdot 2$ $= (2 \cdot 2) \cdot 1 + ((1 \cdot 1) \cdot 1) \cdot 2 + ((1 \cdot 1) \cdot 2)$	10
5	$= (4 \cdot 4) \cdot 1 + (3 \cdot 3) \cdot 1 + (3 \cdot 3) \cdot 1 + (3 \cdot 3) \cdot 1$ $+ (3 \cdot 3) \cdot 1 + (1 \cdot 3) \cdot 2 + (1 \cdot 3) \cdot 2$ $+ (1 \cdot 3) \cdot 2 + (1 \cdot 3) \cdot 2$ $= (4 \cdot 4) \cdot 1 + ((3 \cdot 3) \cdot 1) \cdot 4 + ((1 \cdot 3) \cdot 2) \cdot 4$	76

7	$ \begin{aligned} &= (6 \cdot 6) \cdot 1 + (5 \cdot 5) \cdot 1 + (5 \cdot 5) \cdot 1 + (5 \cdot 5) \cdot 1 \\ &\quad + (5 \cdot 5) \cdot 1 + (5 \cdot 5) \cdot 1 + (5 \cdot 5) \cdot 1 \\ &\quad + (1 \cdot 5) \cdot 2 + (1 \cdot 5) \cdot 2 + (1 \cdot 5) \cdot 2 \\ &\quad + (1 \cdot 5) \cdot 2 + (1 \cdot 5) \cdot 2 + (1 \cdot 5) \cdot 2 \\ &= (6 \cdot 6) \cdot 1 + ((5 \cdot 5) \cdot 1) \cdot 6 + ((1 \cdot 5) \cdot 2) \cdot 6 \end{aligned} $	246
$p \geq 3$	$(p-1)^2 + ((p-2)^2 \cdot 1) \cdot (p-1) + (1 \cdot (p-2) \cdot 2) \cdot (p-1)$	

b) Resiprok Indeks Jarak Derajat

$$\begin{aligned}
 H_A(G(\mathbb{Z}_p)) &= (\text{banyaknya } \deg(\overline{0}) \cdot \deg(\overline{0})) \cdot (\text{panjang lintasan } (\overline{0}))^{-1} + \\
 &\quad (\text{banyaknya } \deg(\overline{1}) \cdot \deg(\overline{1})) \cdot (\text{panjang lintasan } (\overline{1}))^{-1} + \dots + \\
 &\quad (\text{banyaknya } \deg(\overline{p-1}) \cdot \deg(\overline{p-1})) \cdot (\text{panjang lintasan } (\overline{p-1}))^{-1}.
 \end{aligned}$$

Tabel 3.11 Perhitungan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$

p	Resiprok Indeks Jarak Derajat pada $G(\mathbb{Z}_p)$	$H_A(G(\mathbb{Z}_p))$
2	$ \begin{aligned} &= \frac{(1 \cdot 1)}{1} + \frac{(1 \cdot 1)}{1} \\ &= 1 + 1 \end{aligned} $	2

3	$= \frac{(2 \cdot 2)}{1} + \frac{(1 \cdot 1)}{1} + \frac{(1 \cdot 1)}{1} + \frac{(1 \cdot 1)}{2} + \frac{(1 \cdot 1)}{2}$ $= (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) \cdot 2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2}\right) \cdot 2$ $= 4 + 2 + 1$	7
5	$= \frac{(4 \cdot 4)}{1} + \frac{(3 \cdot 3)}{1} + \frac{(3 \cdot 3)}{1} + \frac{(3 \cdot 3)}{1} + \frac{(3 \cdot 3)}{1}$ $+ \frac{(1 \cdot 3)}{2} + \frac{(1 \cdot 3)}{2} + \frac{(1 \cdot 3)}{2}$ $+ \frac{(1 \cdot 3)}{2}$ $= (4 \cdot 4) + (3 \cdot 3) \cdot 4 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 4$ $= 16 + 36 + 6$	58
7	$= \frac{(6 \cdot 6)}{1} + \frac{(5 \cdot 5)}{1} + \frac{(5 \cdot 5)}{1} + \frac{(5 \cdot 5)}{1} + \frac{(5 \cdot 5)}{1}$ $+ \frac{(5 \cdot 5)}{1} + \frac{(5 \cdot 5)}{1} + \frac{(1 \cdot 5)}{2}$ $+ \frac{(1 \cdot 5)}{2} + \frac{(1 \cdot 5)}{2} + \frac{(1 \cdot 5)}{2}$ $+ \frac{(1 \cdot 5)}{2} + \frac{(1 \cdot 5)}{2}$ $= (6 \cdot 6) + (5 \cdot 5) \cdot 6 + \left(\frac{5}{2}\right) \cdot 6$ $= 36 + 150 + 15$	201

$p \geq 3$	$(p-1)^2 + (p-2)^2 \cdot (p-1) + \left(\frac{p-2}{2}\right) \cdot (p-1)$	

Berdasarkan perhitungan di atas diperoleh Lemma sebagai berikut:

Lemma 1.

Misal p prima dan $\mathbb{Z}_p$ adalah himpunan bulat modulo p .

Akan dibuktikan $U(\mathbb{Z}_p) = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$.

Bukti:

Anggota himpunan bilangan bulat modulo p adalah $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Berdasarkan Definisi 2.3 maka diperoleh $0 \cdot y = y \cdot 0 = 0 \neq 1, \forall y \in \mathbb{Z}_p$, dengan demikian $0 \notin U(\mathbb{Z}_p)$.

Sebaliknya $\forall u \in \mathbb{Z}_p, u \neq 0$, diperoleh $FPB(u, p) = 1$ karena $u < p$ dan p adalah bilangan prima. Dan dari Teorema 2.1 terdapat $m, n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$mu + np = 1 \Leftrightarrow mu = 1 - np$$

$$\Rightarrow mu \equiv 1 \pmod{np} \quad (\text{Definisi 2.9})$$

$$\Rightarrow mu \equiv 1 \pmod{n \cdot \text{mod } p} \quad (\text{Sifat distributif})$$

$$\Rightarrow mu \equiv 1 \pmod{p} \quad (\dots^*)$$

Selanjutnya ambil $b \equiv m \pmod{p}$, maka

$$bu \equiv (m \pmod{p})(u \pmod{p})$$

$$bu \equiv mu \pmod{p} \quad (\text{Teorema 2.3})$$

$$bu \equiv (1 \pmod{p})(u \pmod{p}) \quad (\text{Substitusi dari pers. } (\dots^*))$$

$$bu \equiv 1(\text{mod } p)$$

Sehingga terbukti bahwa $\forall u \in \mathbb{Z}_p, u \neq 0$ terdapat $m \in \mathbb{Z}_p$ sedemikian sehingga $mu \equiv 1(\text{mod } p)$. Dengan demikian anggota dari $U(\mathbb{Z}_p) = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$.

Lemma 2.

Misal p adalah suatu bilangan prima. Untuk setiap $i, j \in V(G(\mathbb{Z}_p))$ berlaku $(i, j) \in E(G(\mathbb{Z}_p))$ jika dan hanya jika $j \neq p - i$.

Bukti :

$$(\Rightarrow)(i, j) \in E(G(\mathbb{Z}_p)) \Rightarrow j \neq p - i.$$

Akan dibuktikan kontraposisinya, yaitu

$$j = p - i \Rightarrow (i, j) \notin E(G(\mathbb{Z}_p))$$

Jika $j = p - i$, maka $j = 0 - i \Leftrightarrow j + i = 0$ sehingga $(i, j) \notin E(G(\mathbb{Z}_p))$.

$$(\Leftarrow) j \neq p - i \Rightarrow (i, j) \in E(G(\mathbb{Z}_p)).$$

Andaikan $j \neq p - i$ dan $(i, j) \notin E(G(\mathbb{Z}_p))$.

Berdasarkan pengandaian bahwa $(i, j) \notin E(G(\mathbb{Z}_p))$, maka

$$j + i = 0 \Leftrightarrow j = 0 - i$$

$$\Rightarrow j \equiv p - i(\text{mod } p) \quad (\text{Definisi 2.9})$$

$$\Rightarrow j = p - i$$

Hal ini kontradiksi bahwa $j \neq p - i$.

Dengan demikian pernyataan $j \neq p - i \Rightarrow (i, j) \in E(G(\mathbb{Z}_p))$ benar.

Lemma 3.

$$\deg(0) = p - 1.$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 dapat diperoleh bahwa titik 0 terhubung langsung dengan $v \in V(G(\mathbb{Z}_p)), v \neq 0$. Oleh karena itu, titik 0 terhubung langsung dengan titik-titik $v \in V(G(\mathbb{Z}_p)), v \neq 0$. Dengan demikian $\deg(0) = p - 1$.

Lemma 4.

$$\deg(v) = p - 2, v \neq 0.$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2 dapat diperoleh bahwa v terhubung langsung dengan $u \in V(G(\mathbb{Z}_p)), u, v \neq 0$ dan $u + v \neq 0$. Karena dari setiap $V(G(\mathbb{Z}_p))$ pasti ada pasangan titik u dan v , dimana $v = p - u$ sehingga $u + v = u + p - u = p = 0$ yang mengakibatkan titik u tidak terhubung langsung ke titik v , maka diperoleh titik v berderajat $p - 2$. Dengan demikian $\deg(v) = p - 2, v \neq 0$.

Lemma 5.

Untuk setiap $v \in V(G(\mathbb{Z}_p))$ dan $v \neq 0$, maka $d(0, v) = 1$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3 bahwa derajat dari titik 0 adalah $p - 1$, sehingga titik 0 terhubung langsung dengan semua titik di $G(Z_p)$ kecuali dirinya sendiri. Dengan demikian $(0, v) = 1, \forall v \in V(G(Z_p)), v \neq 0$.

Lemma 6.

Untuk setiap $u, v \in V(G(Z_p)), u, v \neq 0$, dan $u + v \neq 0$ maka $d(u, v) = 1$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 2 maka untuk setiap $u, v \in V(G(Z_p)), u, v \neq 0$, dan $u + v \neq 0$ diperoleh bahwa titik u terhubung langsung ke titik v . Dengan demikian $d(u, v) = 1, \forall u, v \in V(G(Z_p)), u, v \neq 0, u + v \neq 0$.

Lemma 7.

Untuk setiap $u, v \in V(G(Z_p))$ dan $u + v = 0$, $d(u, v) = 2$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 2 maka untuk setiap $u, v \in V(G(Z_p))$ dan $u + v = 0$ diperoleh bahwa titik u tidak terhubung langsung ke titik v . Karena titik (u, v) tidak terhubung langsung, maka $d(u, v) \geq 2$ dan karena terdapat lintasan $v - 0 - u$, maka $d(u, v) \leq 2$. Dengan demikian $d(u, v) = 2, \forall u, v \in V(G(Z_p)), u, v \neq 0, u + v = 0$.

Proposisi 3.1

Indeks Derajat Jarak pada graf unit gelanggang komutatif modulo $\mathbb{Z}_p$ dengan $p \geq 3$ dimana p bilangan prima adalah

$$DD(G(\mathbb{Z}_p)) = p^3 - 2p^2 + 1.$$

Bukti:

Graf unit merupakan graf yang mempunyai order p dan berukuran $\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$.

Karena $u, v \in V(G)$ dimana $u, v \neq 0$ dan $u < v$ dan berdasarkan Lemma 3 dan 4 derajat titiknya yaitu $p - 1$ untuk titik 0 dan $p - 2$ untuk $u, v \neq 0$, berdasarkan

Lemma 5, 6, dan 7 diketahui bahwa jarak antar titik pada graf $G(\mathbb{Z}_p)$ yaitu

berjarak 1 atau 2. Dari pernyataan tersebut diketahui bahwa $\deg(0, v)$ berjarak 1 sebanyak $(p - 1)$, $\deg(u, v)$ dimana $u, v \neq 0$, $u < v$, dan $u + v \neq 0$ berjarak 1

sebanyak $\left(\frac{p(p-1)}{2} - \left((p - 1) + \frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)\right)\right)$, dan $\deg(u, v)$ dimana $u, v \neq 0$,

$u < v$, dan $u + v = 0$ berjarak 2 sebanyak $\left(\frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)\right)$. Maka berlaku:

$$\begin{aligned} DD(G(\mathbb{Z}_p)) &= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ v \neq 0}} [\deg(0) + \deg(v)] \cdot d(0, v) \\ &+ \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u + v \neq 0}} [\deg(u) + \deg(v)] \cdot d(u, v) \\ &+ \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u + v = 0}} [\deg(u) + \deg(v)] \cdot d(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ v \neq 0}} [(p-1) + (p-2)] \cdot 1 + \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v \neq 0}} [(p-2) + (p-2)] \cdot 1 \\
&+ \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v=0}} [(p-2) + (p-2)] \cdot 2 \\
&= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ v \neq 0}} 2p-3 + \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v \neq 0}} 2p-4 + \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v=0}} 4p-8 \\
&= (2p-3) \cdot (p-1) + (2p-4) \\
&\cdot \left(\frac{p(p-1)}{2} - \left((p-1) + \frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2} \right) \right) \right) + (4p-8) \\
&\cdot \left(\frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2} \right) \right) \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p-4) \cdot \left(\frac{p^2-p}{2} - \left((p-1) + \frac{p^2-p}{2p} \right) \right) \\
&+ (4p-8) \cdot \left(\frac{p^2-p}{2p} \right) \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p-4) \cdot \left(\frac{p^2-p}{2} - \frac{2p^2-2p+p^2-p}{2p} \right) \\
&+ \frac{4p^3 - 12p^2 + 8p}{2p} \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p-4) \cdot \left(\frac{p^2-p}{2} - \frac{3p^2-3p}{2p} \right) + 2p^2 - 6p \\
&+ 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - p}{2} - \frac{3p - 3}{2} \right) + 2p^2 - 6p + 4 \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - 4p + 3}{2} \right) + 2p^2 - 6p + 4 \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (p - 2) \cdot (p^2 - 4p + 3) + 2p^2 - 6p + 4 \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + p^3 - 4p^2 + 3p - 2p^2 + 8p - 6 + 2p^2 - 6p \\
&\quad + 4 \\
&= p^3 - 2p^2 + 1
\end{aligned}$$

Proposisi 3.2

Resiprok Indeks Derajat Jarak pada graf unit gelanggang komutatif modulo $\mathbb{Z}_p$ dengan $p \geq 3$ dimana p bilangan prima adalah

$$H_A(G(\mathbb{Z}_p)) = \frac{2p^3 - 7p^2 + 9p - 4}{2}$$

Bukti:

Graf unit merupakan graf yang mempunyai order p dan berukuran $\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$.

Karena $u, v \in V(G)$ dimana $u, v \neq 0$ dan $u < v$ dan berdasarkan Lemma 3 dan 4 derajat titiknya yaitu $p - 1$ untuk titik 0 dan $p - 2$ untuk $u, v \neq 0$, berdasarkan Lemma 5, 6, dan 7 diketahui bahwa jarak antar titik pada graf $G(\mathbb{Z}_p)$ yaitu berjarak 1 atau 2. Dari pernyataan tersebut diketahui bahwa $\deg(0, v)$ berjarak 1 sebanyak $(p - 1)$, $\deg(u, v)$ dimana $u, v \neq 0$, $u < v$, dan $u + v \neq 0$ berjarak 1

sebanyak $\left(\frac{p(p-1)}{2} - \left((p-1) + \frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2} \right) \right) \right)$, dan $\deg(u, v)$ dimana $u, v \neq 0$,

$u < v$, dan $u + v = 0$ berjarak 2 sebanyak $\left(\frac{1}{p} \left(\frac{p(p-1)}{2} \right) \right)$. Maka berlaku:

$$\begin{aligned}
 H_A(G(\mathbb{Z}_p)) &= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ v \neq 0}} [\deg(0) + \deg(v)] \cdot d(0, v)^{-1} \\
 &+ \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v \neq 0}} [\deg(u) + \deg(v)] \cdot d(u, v)^{-1} \\
 &+ \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v=0}} [\deg(u) + \deg(v)] \cdot d(u, v)^{-1} \\
 &= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ v \neq 0}} \frac{(p-1) + (p-2)}{1} + \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v \neq 0}} \frac{(p-2) + (p-2)}{1} \\
 &+ \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v=0}} \frac{(p-2) + (p-2)}{2} \\
 &= \sum_{\substack{v \in V(G) \\ v \neq 0}} 2p-3 + \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v \neq 0}} 2p-4 + \sum_{\substack{u, v \in V(G) \\ u < v \\ u, v \neq 0 \\ u+v=0}} \frac{2p-4}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2p - 3) \cdot (p - 1) + (2p - 4) \\
&\quad \cdot \left(\frac{p(p - 1)}{2} - \left((p - 1) + \frac{1}{p} \left(\frac{p(p - 1)}{2} \right) \right) \right) + (p - 2) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{p} \left(\frac{p(p - 1)}{2} \right) \right) \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - p}{2} - \left((p - 1) + \frac{p^2 - p}{2p} \right) \right) \\
&\quad + (p - 2) \cdot \left(\frac{p^2 - p}{2p} \right) \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - p}{2} - \frac{2p^2 - 2p + p^2 - p}{2p} \right) \\
&\quad + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - p}{2} - \frac{3p^2 - 3p}{2p} \right) \\
&\quad + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - p}{2} - \frac{3p - 3}{2} \right) + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (2p - 4) \cdot \left(\frac{p^2 - 4p + 3}{2} \right) + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + (p - 2) \cdot (p^2 - 4p + 3) + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= 2p^2 - 5p + 3 + p^3 - 4p^2 + 3p - 2p^2 + 8p - 6 + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4p^2 + 6p - 3 + p^3 + \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= \frac{-8p^3 + 12p^2 - 6p + 2p^4 + p^3 - 3p^2 + 2p}{2p} \\
&= \frac{-7p^3 + 9p^2 - 4p + 2p^4}{2p} \\
&= \frac{2p^3 - 7p^2 + 9p - 4}{2}
\end{aligned}$$

3.3 Nilai-nilai Islam tentang Keterkaitan antar Disiplin Ilmu

Allah SWT berfirman di dalam Al-Qur'an surah Al-Jaatsiyah ayat 13, yang artinya:

“Dan Dia menundukkan apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi untukmu semuanya(sebagai rahmat) dari-Nya. Sungguh, dalam hal yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda(kebesaran Allah) bagi orang-orang yang berpikir”(Qs. Al-Jaatsiyah:13).

Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi di dalam Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (2009), menafsirkan bahwa, Dia-lah yang menundukkan untuk kalian apa yang ada dilangit, seperti matahari, bulan, bintang, awan, hujan, dan angin untuk kepentingan kalian. Dan Dia-lah yang menundukkan apa yang ada di bumi, seperti gunung, pepohonan, sungai, lautan, barang tambang, dan berbagai macam binatang. Sesungguhnya pada semua itu, yakni semua yang ditundukkan Allah untuk manusia terdapat tanda-tanda bagi orang yang berfikir sehingga mereka memuji Allah, bersyukur, beriman, dan mentauhidkan-Nya dalam rububiyah dan uluhiyyah-Nya.

Ahmad Mushthafa Al-Maraghi (1993), menafsirkan bahwa, dan Dia menyediakan bagimu segala yang telah Dia ciptakan di langit dan di bumi, yang berkaitan dengan kemaslahatan-kemaslahatan, dan yang karenanya penghidupanmu menjadi tegak. Di antara makhluk-makhluk Allah yang dia sediakan untukmu di langit ialah matahari, bulan, bintang-bintang yang cemerlang, hujan, awan, dan angin. Dan di antara makhluk-makhluk-Nya yang ada di muka bumi adalah binatang, pohon-pohonan, gunung, kapal, sebagai rahmat dan karunia dari Allah yang semua ini merupakan dalil-dalil yang menunjukkan bahwa penciptanya adalah Allah yang tiada Tuhan melainkan Dia, bagi orang yang mau memperhatikan makhluk-makhluk tersebut, dan mengambil pelajaran dari padanya, di samping memikirkannya dengan benar.

Ash-Shiddieqy (2000), menafsirkan bahwa, Dialah, Allah yang menundukkan segala yang di langit dan di bumi untuk kemaslahatanmu. Manusia dengan kekuatan akal dan pikiran yang diberikan kepada Allah dapatlah memanfaatkan alam untuk mencapai tujuan-tujuannya. Dia dapat menyelam seperti ikan, dapat terbang seperti burung, bahkan juga dapat berjalan di dasar laut. Sesungguhnya yang demikian itu terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah bagi orang yang berfikir.

Berdasarkan tafsir tersebut dapat dilihat bahwa banyak kejadian di alam ini yang merupakan bentuk kebesaran Allah yang dapat kita pelajari. Namun dalam penerapannya kita tidak dapat langsung menerapkan konsep tersebut ke dalam ilmu matematika, kita membutuhkan penerapan bidang ilmu lain yang mempelajari suatu konsep kemudian dikaji menggunakan ilmu matematika. Salah

satunya dalam penelitian Harry P. Schultz (1989) menunjukkan bahwa indeks jarak derajat bermanfaat pada struktur alkana dalam kimia atom. Dalam bidang kimia banyak hal yang dapat diteliti, salah satunya yaitu struktur kimia. Beberapa struktur molekul kimia merupakan hal yang sangat kompleks untuk dimodelkan, sehingga salah satu bentuk aplikasi graf dalam bidang ini adalah untuk merepresentasikan model struktur kimia. Hal tersebut merupakan bentuk pengaplikasian suatu ilmu pada bidang ilmu lain.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Simpulan

Berdasarkan uraian pembahasan pada Bab III, dapat diambil simpulan bahwa rumus umum indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan sebagai berikut:

1. Indeks jarak derajat untuk sebarang graf terhubung di $G(\mathbb{Z}_p)$, dimana p adalah bilangan prima adalah

$$DD(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ p^3 - 2p^2 + 1 & , p \geq 3 \end{cases}$$

2. Resiprok Indeks Jarak Derajat untuk sebarang graf terhubung di $G(\mathbb{Z}_p)$, dimana p adalah bilangan prima adalah

$$H_A(G(\mathbb{Z}_p)) = \begin{cases} 2 & , p = 2 \\ \frac{2p^3 - 7p^2 + 9p - 4}{2} & , p \geq 3 \end{cases}$$

4.2 Saran

Penelitian ini membahas masalah tentang indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf unit gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah bilangan prima. Penelitian selanjutnya diharapkan membahas masalah tentang indeks jarak derajat dan resiprok indeks jarak derajat pada graf dan modulo lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, dkk.2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.
- Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar, Jilid 6*. Penerjemah, Fityan Amaliy, Lc., Edi Suwanto; Editor, Team Darus Sunnah. Jakarta: Darus Sunnah Press.
- Al-Maraghi, Ahmad Mushthafa. 1993. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi, Juz 25*. Penerjemah, K. Anshori Umar Sitanggal, Bahrin Abubakar, Lc., Drs. Hery Noer Aly; Editor, Drs. Anwar Rosyidi, Drs. Anang Sudrajat. Semarang: Toha Putra.
- Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. *Tafsir Al Qurthubi, Juz 'Amma*. Penerjemah, Dudi Rosyadi dan Faturrahman; Editor, M. Sulton AkbarMukhlis B. Mukti. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Ash-Shiddieqy, Tengku Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-nuur 5*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.
- Chartrand dkk. 2016. *Graph and Digraph*. New York: CRC Press.
- Dankelmann, dkk.2009. On the Degree Distance of a Graph, *Discrete Appllied Mathematics*, 157 ,2773-2777.
- Dobrynin, Andrey A dan Kochetova, Amide A. 1994. A Degree Analogue of the Wiener Index, *J.Chem. Inf. Comput. Sci*, 34, 1082-1086.
- Gilbert, L dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra, Eighth Edition*. US: CHENGAGE Learning.
- H. Hua dan S. Zhang. 2012. On the Reciprocal Degree Distance of Graphs, *Discrete Appllied Mathematics*, 160, 1152-1163.
- K.Xu, dkk.2014. Extremal (n, m) -Graphs with Respect to Distance-Degree-Based Topological Indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 72, 865-880.
- P. Schultz, Harry. 1989. Graph Theory and Topological Indices of Alkanes, *J.Chem. Inf. Comput. Sci*, 29-227-228.
- S. Akbari, dkk. 2011. On the Unit Graph of a Noncommutative Ring, *Algebra Colloquium*.
- Su, Huadong dan Wei, Yangjiang.2019. The Diameter of Unit Graphs Of Rings, *Taiwanese Journal Of Mathematics*. Vol. 23, No. 1, pp.1-10.

RIWAYAT HIDUP



Winda Anugrahanti, lahir di Malang pada tanggal 18 Mei 1999, biasa dipanggil Winda. Anak bungsu dari dua bersaudara yang dilahirkan dari pasangan Bapak Shobirin dan Ibu Susianah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Hasyim Asya'ari Dusun Jegong Desa Jambangan Kecamatan Dampit Kabupaten Malang dan lulus pada tahun 2011. Setelah itu melanjutkan pendidikan di MTs Negeri 2 Kabupaten Malang (ex. MTs Negeri Turen) dan lulus pada tahun 2013. Kemudian melanjutkan pendidikan di MAN 1 Kabupaten Malang (ex. MAN Gondanglegi) dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah Jurusan Matematika di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa, pernah mengikuti komunitas di Jurusan Matematika UIN Malang menjadi anggota MEC (Mathematics English Club) dan MAC (Mathematics Arabic Club).



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Winda Anugrahanti
NIM : 16610002
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Indeks Jarak Derajat dan Resiprok Indeks Jarak Derajat pada Graf Unit Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.
Pembimbing I : Muhammad Khudzaifah, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	11 November 2019	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	1.
2	04 Desember 2019	Melanjutkan Pembuktian	2.
3	26 Desember 2020	Perbaikan Integrasi	3.
4	31 Januari 2020	Perbaikan Pembuktian	4.
5	03 Februari 2019	Perbaikan Bab II	5.
6	10 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan	6.
7	13 Maret 2020	Konsultasi Pembuktian	7.
8	30 Maret 2020	Revisi Bab III (Bimbingan Online)	8.
9	29 April 2020	Revisi Bab I,II dan III (Bimbingan Online)	9.
10	01 Mei 2020	ACC untuk disidangkan	10.

Malang,
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001