

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL PENYAKIT CAMPAK**

SKRIPSI

**OLEH
SAIDAH AJILATUN NAHDAWIYAH
NIM. 16610031**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL PENYAKIT CAMPAK**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Saidah Ajilatun Nahdawiyah
NIM. 16610031**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL PENYAKIT CAMPAK**

SKRIPSI

**Oleh
Saidah Ajilatun Nahdawiyah
NIM. 16610031**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 29 April 2020

Pembimbing I,



Heni Widayani, M.Si
NIP. 19901006 20180201 2 229

Pembimbing II,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



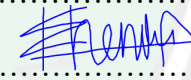
Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL DAN KONTROL OPTIMAL
MODEL PENYAKIT CAMPAK**

SKRIPSI

Oleh
Saidah Ajilatun Nahdawiyah
NIM. 16610031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 12 Mei 2020

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd	 
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	 
Sekretaris Penguji	: Heni Widayani, M.Si	 
Anggota Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	 

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Saidah Ajilatun Nahdawiyah

NIM : 16610031

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Global dan Kontrol Optimal Model Penyakit
Campak

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 April 2020
Yang membuat pernyataan



Saidah Ajilatun N
NIM.16610031

MOTO

“Awali Hari dengan Senyuman dan Lakukan yang Terbaik Untuk Orang Lain”



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda Juwariyah, Ayahanda Agus Setiyono, dan kakak tercinta Aji Fajar Rhomadhoni yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai.

Keluarga penulis yang selalu memberi doa.

Teman serta sahabat penulis yang tidak dapat disebutkan.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu ad-Din al-Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah banyak memberikan arahan dan ilmunya kepada penulis.

6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu serta kakak tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016 yang berjuang bersama-sama untuk menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karuniaNya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	8
2.1.1 Persamaan Diferensial Linier	8
2.1.2 Persamaan Diferensial NonLinier	9
2.2 Batas Solusi	9
2.3 Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium).....	10
2.4 Analisis Sensitivitas.....	11
2.4.1 Bilangan Reproduksi Dasar.....	12
2.4.2 Matriks Next Generation	13
2.5 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen	14
2.6 Fungsi Lyapunov	14
2.7 Ukuran Lozinskii	15
2.8 Teori Kontrol Optimal	19
2.8.1 Formulasi Masalah Kontrol Optimal.....	20
2.9 Hamiltonian	21

2.10	Prinsip Minimum Pontryagin	21
2.11	Metode Runge Kutta Orde 4.....	23
2.12	Model Penyakit Campak.....	24
2.13	Kajian Islam Keseimbangan	28

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1	Analisis Kestabilan	31
3.1.1	Batas Solusi Model.....	31
3.1.2	Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	32
3.1.3	Bilangan Reproduksi Dasar.....	34
3.1.4	Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit...	35
3.1.5	Kestabilan Global Titik Keseimbangan Bebas Penyakit .	37
3.1.6	Titik Keseimbangan Endemik.....	39
3.1.7	Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik	41
3.1.8	Kestabilan Global Titik Keseimbangan Endemik.....	43
3.2	Analisis Kontrol optimal	54
3.2.1	Analisis Kontrol Optimal Model SVEIR	54
3.2.2	Simulasi Numerik.....	59
3.3	Keseimbangan dalam Al-Qur'an	63

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1	Kesimpulan.....	65
4.2	Saran	66

DAFTAR PUSTAKA	67
-----------------------------	-----------

LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Model Penyakit Campak	25
Gambar 3.1	Model Penyakit Campak dengan Kontrol	55
Gambar 3.2	Simulasi Populasi Terpapar.....	60
Gambar 3.3	Simulasi Populasi Terinfeksi.....	61
Gambar 3.4	Simulasi Populasi Kebal	61
Gambar 3.5	Simulasi Kontrol Pengobatan Individu Terpapar.....	62
Gambar 3.6	Simulasi Kontrol Pengobatan Individu Terinfeksi.....	62

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai Parameter Pada Model Penyakit Campak.....	28
-----------	---	----



ABSTRAK

Nahdawiyah, Saidah Ajilatun, 2020. **Analisis Kestabilan Global dan Kontrol Optimal Model Penyakit Campak**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Heni Widayani, M.Si (2) Mohammad Jamhuri, M.Si

Kata kunci: kestabilan global, kestabilan lokal, kontrol optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, model penyakit campak.

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian analisis kestabilan global model penyakit campak dengan menggunakan metode Fungsi Lyapunov dan Ukuran Lozinskii. Pada model yang digunakan terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal, dan dengan menggunakan metode Fungsi Lyapunov didapatkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit tersebut stabil asimtotik global. Sedangkan untuk hasil kestabilan titik kesetimbangan endemik juga menunjukkan bahwa stabil asimtotik lokal, pada titik kesetimbangan endemik digunakan metode Ukuran Lozinskii untuk menunjukkan bahwa titik kesetimbangan endemik ini stabil asimtotik global.

Kemudian dibahas juga analisis kontrol optimal model penyakit campak dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dengan memberikan tiga kontrol yaitu vaksinasi, pengobatan untuk individu terpapar dan pengobatan untuk individu terinfeksi. Lalu, simulasi numerik yang diperoleh menunjukkan adanya perbedaan penyebaran penyakit campak ketika tanpa adanya kontrol dan dengan diberikan kontrol. Dari hasil yang didapatkan penyebaran penyakit campak yang diberikan tiga kontrol dapat mengurangi laju penyebaran penyakit campak tersebut dengan mengurangi populasi individu terpapar dan terinfeksi.

Kurva untuk populasi individu terpapar menunjukkan peningkatan drastis pada awal tahun pertama kemudian terus mengalami penurunan yang stabil sampai tahun kelima karena individu terpapar dapat berpindah menjadi individu terinfeksi. Dengan diberikannya kontrol pengobatan untuk populasi ini, maka dapat menurunkan kurva atau mengurangi individu terpapar. Sedangkan pada populasi individu terinfeksi kurvanya menunjukkan peningkatan yang stabil dalam lima tahun. Dengan diberikan kontrol pengobatan pada populasi ini laju kurva tersebut menunjukkan penurunan yang artinya populasi ini berkurang. Karena setelah diberikan kontrol terhadap model persamaan penyebaran campak hasil simulasi pada populasi individu terpapar dan populasi individu terinfeksi menunjukkan penurunan, maka jelas bahwa untuk hasil simulasi populasi kebal akan mengalami kenaikan yang artinya jumlah pada populasi ini akan lebih besar dari sebelum diberikan kontrol.

ABSTRACT

Nahdawiyah, Saidah Ajilatun. 2020. **Global Stability Analysis and Optimal Control of Measles Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Heni Widayani, M.Si (2) Mohammad Jamhuri, M.Si

Keywords: global stability, local stability, optimal control, Pontryagin's Minimum Principle, measles model.

This study discusses the solution of global stability analysis of the measles model using the Lyapunov Function and Lozinskii Measure. In the model, there are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The result indicates that the stability of the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable. Besides, the result of the Lyapunov Function method claims that the disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable. As for the results of the stability of the endemic equilibrium point also show that locally asymptotically stable, at the endemic equilibrium point the Lozinskii measure is used to show that the endemic equilibrium point is globally asymptotically stable.

The analysis of optimal control of the measles disease model also discussed by using the Pontryagin's Minimum Principle by providing three controls namely vaccination, treatment for exposed individuals, and treatment for infected individuals. The obtained numerical simulation shows the difference in the spread of measles when there is no control and with the control. From the results obtained by the spread of measles with three controls can reduce the rate of spread of measles reducing the population of exposed and infected individuals.

The curve for the population of exposed individuals show a drastic increase at the beginning of the first year and then continues to experience a steady decline until the fifth year because exposed individuals can move into infected individuals. By providing treatment control for this population, it can reduce the curve or reduce the exposed individuals. Whereas the population of individuals infected with their curves showed a steady increase in five years. Given treatment control of this population, the rate of the curve shows a decrease which means this population is decreasing. Since after controlling for the measles distribution model the spread of the simulation results in the populations of exposed individuals and infected individuals show a decrease. Accordingly the results of the simulation recovered individuals will increase which means the amount in this population will be greater than before being given control.

مخلص

نحوية ، سعيدة عاجلة ، ٢٠٢٠ . تحليل الاستقرار العالمي والتحكم الأمثل في نموذج مرض الحصبة . أطروحة . قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية في مالانغ . المشرف (١ :) هيني ويداياني ، ماجستير (٢) محمد جمهوري ، ماجستير .

الكلمات الرئيسية : الاستقرار العالمي ، الاستقرار المحلي ، التحكم الأمثل ، مبادئ الحد الأدنى من (Pontryagin) ، نموذج مرض الحصبة .

ناقش هذه الدراسة استكمال تحليل الاستقرار العالمي لنموذج مرض الحصبة باستخدام طريقة دالة ليايونوف وقياس لوزينسكي يوجد في النموذج المستخدم نقطتان للتوازن ، وهما نقطة التوازن الخالية من الأمراض ونقطة التوازن المتوطنة تشير نتائج هذه الدراسة . إلى أن استقرار نقطة التوازن الخالية من الأمراض استقرار تحقاري المحلي وباستخدام طريقة ، وظيفة ليايونوف ، وجد أن نقطة التوازن الخالية من الأمراض مستقرة بشكل مقارب عالميًا . أما بالنسبة لنتائج استقرار نقطة التوازن المتوطنة ، يدل أيضًا على المستقيم المقارب المحلي ، عند نقطة التوازن المتوطنة يتم استخدام طريقة حجم لوزينسكي . لإظهار أن نقطة . التوازن المستوطنة مستقرة بشكل مقارب ، على ، مستوى العالم .

ثم ناقش أيضًا تحليل التحكم الأمثل لنموذج مرض الحصبة باستخدام مبدأ الحد الأدنى من (Pontryagin) من خلال توفير ثلاث ضوابط هي التطعيم ، وعلاج الأفراد المعرضين ، وعلاج الأفراد المصابين . ثم ، تظهر المحاكاة العددية التي تم الحصول عليها الاختلافات في انتشار الحصبة عندما لا يكون هناك تحكم ويتم إعطاء السيطرة . من النتائج التي تم الحصول عليها انتشار الحصبة نظرًا لثلاث ضوابط يمكن أن تقلل من معدل انتشار الحصبة عن طريق تقليل عدد السكان المعرضين والمصابين .

يظهر منحنى عدد السكان المعرضين كبيرة في بداية السنة الأولى ، ثم يستمر في الانخفاض حتى السنة الخامسة لأن الأفراد المعرضين يمكنهم أن يصبحوا الأفراد المصابين . من خلال توفير ضوابط العلاج لهذه الفئة ، يمكن أن تنخفض المنحنى أو تقلل عدد الاثراء المفهرين في حين . لاظهر سكان الأفراد المصابين بمنحنياتهم زيادة مطردة في خمس سنوات . بالنظر إلى التحكم في العلاج في هذه المجموعة ، يظهر معدل المنحنى انخفاضًا مما يعني أن هذا العدد يتناقص . لأنه بعد التحكم في نموذج توزيع الحصبة ، ينتشر انتشار المحاكاة في عدد الأفراد المعرضين ويظهر عدد الأفراد المصابين انخفاضًا ، من الواضح أن نتائج محاكاة المجموعات المناعية ستزداد مما . يعني أن الكمية في هذه المجموعة ستكون أكبر مما كانت عليه قبل إعطائها السيطرة .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan salah satu cara untuk menyelesaikan permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dan dapat diselesaikan menggunakan penerapan ilmu matematika. Model matematika ialah model yang digambarkan dalam suatu persamaan matematika yang sifatnya abstrak dan menggunakan simbol matematika untuk menunjukkan komponen-komponen dan korelasinya, seperti nilai konstanta, variabel, fungsi persamaan dan ketidaksamaan. Persamaan tersebut merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena, salah satu persamaan yang biasa digunakan adalah persamaan diferensial. Kita dapat menggunakan model matematika untuk menggambarkan suatu fenomena sehingga menjadi lebih jelas dalam memahaminya (Fitria, 2011). Fenomena yang dapat digambarkan menggunakan model matematika salah satunya yaitu pada bidang kesehatan. Dalam bidang kesehatan pemodelan matematika dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran campak.

Campak merupakan penyakit menular atau *infeksius* yang disebabkan oleh virus campak dari family *Paramyxovirus* genus *Morbillivirus*. Gejala yang timbul biasanya berupa demam, batuk, pilek, dan *konjungtivitas*, dan disusul dengan munculnya ruam makulopapuler yang menyeluruh di seluruh tubuh. Pada beberapa kasus yang sama terkadang tidak mengalami gejala-gejala tersebut. Penularannya dapat terjadi melalui udara yang terkontaminasi oleh sekret orang yang telah terinfeksi (Nurani, Ginanjar, & S., 2012). Virus campak mulai masuk melalui saluran pernapasan dan melekat di sel-sel epitel saluran nafas. Selanjutnya virus

memperbanyak diri dan menyebar ke kelenjar limfe regional. Setelah itu, terjadi viremia primer dan diikuti multiplikasi virus pada sistem retikuloendotelial di limpa, hati, dan kelenjar limfe. Multiplikasi virus juga terjadi di tempat awal melekatnya virus. Masa inkubasi campak terjadi selama 10-14 hari. Masa inkubasi ini merupakan jangka waktu dari mulai mendapatkan paparan sampai munculnya gejala klinis (Halim, 2016).

Gejala klinis yang timbul setelah masa inkubasi terdiri dari tiga stadium. Stadium pertama biasanya disebut stadium *prodromal* yaitu demam dengan suhu tubuh lebih dari 38°C yang berlangsung selama 3-5 hari dengan disertai beberapa gejala lain yaitu batuk, pilek, dan gejala *konjungtivitas*. Gejala yang lebih spesifik yaitu adanya bercak putih keabu-abuan dengan merah pada pipi bagian dalam. Stadium kedua adalah stadium *erupsi* yang ditandai dengan batuk dan pilek bertambah parah, suhu pada badan meningkat, timbul bercak merah di seluruh tubuh yang biasanya terjadi selama 4-8 hari dan warnanya menjadi merah kehitaman. Stadium terakhir adalah stadium *convalescens* terjadi ketika tanda-tanda dari stadium sebelumnya mereda dan menghilang tanpa bekas atau menimbulkan bekas coklat kehitaman karena terjadi pengelupasan (Oktaviasari, 2018).

Campak merupakan salah satu penyakit berbahaya karena bisa menyebabkan kecacatan dan kematian yang diakibatkan oleh komplikasi seperti radang paru dan radang telinga. Pada umumnya campak berpotensi menyerang bayi dan anak-anak, oleh sebab itu campak adalah salah satu penyebab utama kematian pada anak. Individu yang rentan terinfeksi campak adalah individu yang usianya dibawah 5 tahun. Oleh karena itu untuk mencegah terinfeksinya campak dan mengurangi angka kematian, diberikan imunisasi atau vaksinasi dan pengobatan pada individu

terpapar serta pengobatan pada individu terinfeksi virus tersebut. Tidak ada pengobatan khusus untuk infeksi campak yang sudah mapan. Namun, terdapat beberapa tindakan yang dapat diambil untuk melindungi individu terpapar dan terinfeksi virus yaitu, memberikan terapi obat campak dan dianjurkan untuk cukup tidur agar individu tersebut dapat beristirahat. Jika individu terpapar adalah individu yang tidak diimunisasi maka mereka bisa diberi vaksin campak dalam waktu 72 jam sejak paparan awal. Apabila terjangkit campak setelah imunisasi pasca paparan, virus dapat memiliki gejala yang jauh lebih ringan dan berlangsung untuk jangka waktu yang lebih singkat (Obumneke, Adamu, & Ado, 2017).

Pemberian vaksin dan obat-obatan yang tepat dan seimbang akan mendapatkan hasil yang seimbang dengan apa yang diberikan. Pada kasus ini, pemberian vaksin yang tepat akan menjadikan individu kebal terhadap virus campak. Begitu pula dengan pemberian obat yang tepat mengenai sumber penyakit, maka penyakit tersebut akan hilang. Semua kejadian di dunia telah diatur oleh Allah dengan sebaik-baiknya dan sesuai dengan fungsi dan ukuran yang seimbang. Sebagaimana telah dituliskan dalam Al-Qur'an firman Allah SWT yaitu Q.S Al-Furqan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَمَآ يَشَاءُ وَمَا يُخِذُ وَلَدًا وَمَا يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ
فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

“yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapih-rapihnya.”

Ayat di atas menunjukkan bahwa sesungguhnya Allah menciptakan segala sesuatu dan mengatur dengan sempurna sesuai kekuasaanNya. Allah menentukan

ajal dan rezeki sesuai yang telah Allah tetapkan. Pada kasus ini pula, dengan seimbang Allah menurunkan penyakit disertai dengan penawarnya yaitu berupa vaksinasi atau pengobatan.

Penelitian ini merujuk pada jurnal (Viriyapong & Ridbamroong, 2019), pada penelitiannya model yang digunakan adalah pengembangan model deterministik penularan campak yang melibatkan vaksinasi dan pengobatan dengan memperluas hasil penelitian dari (Edward, et al., 2015) dan (Obumneke, Adamu, & Ado, 2017). (Edward, et al., 2015) membahas tentang model matematika untuk kontrol dan sistem dinamik penyebaran penyakit campak pada penelitiannya. Sedangkan (Obumneke, Adamu, & Ado, 2017) membahas tentang sistem dinamik model penyakit campak dengan efek gabungan vaksinasi dan pengobatan. Dengan mempertimbangkan bahwa penularan campak dapat terjadi pada individu terpapar sehingga individu terpapar dapat dimasukkan dalam model penelitian ini. Model pada penelitian ini terdapat dua titik kesetimbangan utama yaitu, bebas penyakit dan endemik dengan analisa stabilitasnya. Telah disimpulkan bahwa ketika titik kesetimbangan kurang dari satu maka stabil secara lokal dan global yang berarti penyakit dapat diberantas dalam kondisi seperti itu. Ketika lebih besar dari satu kesetimbangan endemik stabil secara global. Selain itu, model ini diperluas ke model kontrol optimal dengan peran vaksinasi dan pengobatan pada individu terpapar dan individu terinfeksi untuk meminimalkan penularan campak dengan menggunakan prinsip minimum Pontryagin. Terakhir, adalah simulasi numerik yang hasilnya menunjukkan bahwa kombinasi dari ketiga kontrol tersebut memberikan hasil terbaik dalam mengurangi jumlah individu yang terinfeksi campak. Hasil ini menunjukkan bahwa vaksinasi yang diikuti oleh beberapa

pengobatan untuk individu terpapar dan individu terinfeksi secara terpisah akan membuat pemberantasan campak lebih efisien.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka telah didapatkan beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis kestabilan model untuk penyebaran campak?
2. Bagaimana analisis kontrol optimal model penyebaran campak dengan vaksinasi, pengobatan individu terpapar dan pengobatan individu terinfeksi?

1.3 Tujuan Masalah

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui analisis kestabilan model penyebaran campak.
2. Untuk mengetahui analisis kontrol optimal model penyebaran campak dengan vaksinasi, pengobatan individu terpapar dan pengobatan individu terinfeksi.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh pengetahuan kestabilan model penyebaran campak.
2. Memperoleh pengetahuan analisis kontrol optimal model penyebaran campak.
3. Memperoleh pengetahuan teori kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dalam model penyebaran campak.

4. Memperoleh pengetahuan tentang simulasi numerik pada model penyebaran campak.
5. Sebagai referensi bagi pembaca untuk melakukan penelitian selanjutnya.

1.5 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi ruang lingkup pembahasannya yaitu analisis kestabilan global pada penyebaran campak dengan memberikan tiga kontrol optimal yaitu kontrol vaksinasi, pengobatan individu terpapar dan pengobatan individu terinfeksi.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian ini didasari dengan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada beberapa studi literatur yang dibutuhkan dalam penelitian. Pendekatan kepustakaan diperoleh dari jurnal, buku, artikel atau referensi lainnya. Langkah-langkah yang dapat mempermudah penyelesaian masalah analisis kestabilan dan kontrol optimal model penyebaran campak sebagai berikut:

1. Menganalisis model dengan menggunakan titik-titik kesetimbangan.
2. Menganalisis sensitivitas model dari angka reproduksi dasar.
3. Menganalisis kestabilan lokal dan global titik-titik kesetimbangan.
4. Menganalisis kontrol optimal pada model penyebaran campak.
5. Menganalisis model matematika dengan simulasi numerik.
6. Membuat kesimpulan dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Supaya penulisan hasil penelitian ini lebih teratur dan mudah dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Setiap bab terbagi dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian kajian pustaka berisi tentang konsep-konsep atau teori-teori pendukung untuk bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan hasil penelitian ini.

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dan pembahasan berisi hasil penelitian yang dibahas secara rinci dan jelas. Pembahasan tersebut diantaranya membahas tentang cara menganalisis kestabilan global dan kontrol optimal serta simulasi numerik pada penyebaran campak.

BAB IV PENUTUP

Bab penutup ini telah didapatkan kesimpulan dan saran dari penulisan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Pada dasarnya persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Persamaan Diferensial Biasa (PDB) merupakan persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas. Turunannya dilambangkan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ atau y' . Sedangkan fungsi yang tidak diketahui dilambangkan dengan keberadaan variabel terkaitnya. Sebagai contoh

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad (2.1)$$

dengan x adalah variabel bebas dan y sebagai variabel terikat (Sihombing & Dahlia, 2018).

2.1.1 Persamaan Diferensial Linier

Bentuk umum persamaan diferensial biasa linier orde satu biasanya didefinisikan seperti:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \quad (2.2)$$

a dan b merupakan koefisien konstan (Boyce & DiPrima, 2009).

2.1.2 Persamaan Diferensial NonLinier

Bentuk umum sistem n persamaan diferensial biasa nonlinier orde pertama adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan variabel bebas dan t merupakan variabel terikat dari persamaan umum tersebut. Sehingga, $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif dari fungsi x_n terhadap t (Kartono, 2012).

2.2 Batas Solusi

Dalam salah satu metode matematika yaitu metode optimasi perlu ditentukan titik minimum suatu fungsi pada subset ruang bilangan riil tak kosong. Lebih spesifiknya dapat dirumuskan sebagai berikut: misal $\mathbf{R}$ adalah ruang bilangan riil dan S subset tak kosong dari $\mathbf{R}$, dimisalkan fungsi $f: S \rightarrow \mathbf{R}$. Selanjutnya dicari titik minimum f pada S , sebuah elemen $\bar{x} \in S$ dikatakan titik minimum f pada S jika $f(\bar{x}) \leq f(x)$ untuk semua $x \in S$. Himpunan S dinamakan himpunan pembatas dan fungsi f dinamakan fungsi objektif (Umar & DEA, 2011).

Contohnya diberikan fungsi f yang didefinisikan dengan

$$f(x) = \int_a^b l(x(t), x'(t), t) dt \quad (2.4)$$

dimana $-\infty < a < b < \infty$ dan l adalah fungsi kontinu dan dapat didiferensialkan secara kontinu terhadap x dan t . Didefinisikan pula sebuah kelas kurva sebagai berikut:

$$S := \{x \in C^1[a, b] \mid x(a) = x_1 \text{ dan } x(b) = x_2\} \quad (2.5)$$

dimana x_1 dan x_2 adalah titik terminal tetap (Umar & DEA, 2011).

2.3 Titik Keseimbangan (Ekuilibrium)

Titik ekuilibrium adalah sentral dalam studi dinamika sistem fisika apapun. Pada banyak aplikasi dalam biologi, ekonomi, fisika, teknik, dan lain-lain. Semua solusi dari sistem yang diberikan cenderung pada keadaan setimbangan (titik). Hal ini adalah subjek studi tentang teori stabilitas, topik yang sangat penting bagi para ilmuwan dan insinyur. Definisi titik ekuilibrium adalah suatu titik x^* dalam domain f dikatakan sebagai titik keseimbangan dari persamaan $x(n+1) = f(x(n))$ jika titik tetap dari f yaitu, $f(x^*) = x^*$. Dengan kata lain, x^* adalah solusi konstan dari persamaan $x(n+1) = f(x(n))$, karena jika $x(0) = x^*$ adalah titik awal. Maka, $x(1) = f(x^*)$ dan $x(2) = f(x(1)) = f(x^*)$ dan seterusnya (Elaydi, 2000).

Misal diberikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.7)$$

Titik (x_0, y_0) dapat dikatakan sebagai titik keseimbangan dari persamaan (2.6) dan (2.7), apabila dipenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan

suatu konstanta sama dengan nol, maka fungsi konstan $x(t) = x_0$ dan $y(t) = y_0$ merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.6) dan (2.7) (A'maludin, Faruk, & Cahyono, 2016).

Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium) pada model *SEIR* terdapat dua titik utama yaitu, bebas penyakit dan endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit berarti di dalam populasi tidak terdapat individu yang bias menyebarkan penyakit atau tidak terdapat individu yang terserang penyakit. Sedangkan Titik ekuilibrium endemik yaitu di dalam populasi terdapat individu yang terserang penyakit (Soleh & Rahmah, 2012).

2.4 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas digunakan untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter terhadap variabel-variabel tertentu seperti *basic reproduction number*, populasi *exposed* dan *infectious*. Hal tersebut penting untuk mengetahui parameter yang berpengaruh besar terhadap dinamika dari model epidemik tersebut. Terdapat dua jenis analisis sensitivitas yaitu, analisis sensitivitas lokal dan global. Analisis sensitivitas lokal digunakan untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter terhadap nilai *basic reproduction ratio* (R_0), titik endemik (E^*, I^*).

Normalized sensitivity index didapatkan dengan indeks sensitivitas normalisasi dari variabel V , terdiferensialkan pada parameter p , dan didefinisikan sebagai berikut:

$$C_p^V = \frac{\partial V}{\partial p} \times \frac{p}{V} \quad (2.8)$$

dimana V adalah variabel yang akan dianalisis dan p adalah parameter (Hurint, Ndi, & Lobo, 2017).

Pada analisis kuantitatif nilai input sering kali tidak pasti dan nilai output model berdasarkan perubahan faktor sangat dekat dengan nilai nominal. Oleh karena itu, analisis sensitivitas lokal tidak cocok untuk analisis kuantitatif, analisis sensitivitas yang diperlukan adalah analisis sensitivitas global. Teknik global ini biasanya diterapkan menggunakan simulasi, oleh karena itu teknik ini disebut juga metode berbasis sampel (Marino, Hogue, Ray, & Kirschner, 2008).

2.4.1 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah angka harapan banyaknya kasus baru (sekunder) yang dihasilkan pada suatu populasi rentan dari individu yang terinfeksi (kasus primer). Jika $R_0 < 1$, maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu yang terinfeksi baru selama periode menular dan infeksi tidak bisa tumbuh. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka setiap individu yang terinfeksi menghasilkan rata-rata lebih dari satu infeksi baru sehingga penyakit dapat menyerang populasi.

Dalam model kompartemen untuk penularan penyakit, suatu kompartemen (kelas) disebut kompartemen penyakit jika individu-individu didalamnya terinfeksi penyakit. Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Dimisalkan x menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Model kompartemen (kelas) dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \dot{y} &= \eta_j(x, y), j = 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned}\tag{2.9}$$

φ_i merupakan matriks dari laju individu baru terinfeksi penyakit yang menambah kelas terinfeksi dan ψ_j merupakan matriks laju perkembangan penyakit, kematian dan kesembuhan yang mengurangi kelas terinfeksi.

Penentuan bilangan reproduksi dasar R_0 berdasarkan linearisasi dari persamaan (2.9) pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen kelas terinfeksi yang telah dilinearisasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$F = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_j}(0, y_0) \text{ dan } V = \frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_j}(0, y_0) \quad (2.10)$$

Dengan F dan V adalah matriks $n \times n$ yang memenuhi:

1. F matriks tak negatif,
2. V matriks tak singular,
3. Semua nilai eigen bernilai real positif (Oktafiani & A. Kusnanto, 2013).

2.4.2 Matriks Next Generation

Matriks Next Generation adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian matriks F dengan invers dari matriks V atau yang dapat didefinisikan dengan:

$$K = FV^{-1} \quad (2.11)$$

dimana V^{-1} merupakan rata-rata panjang waktu yang dibutuhkan individu selama waktu hidupnya dan F merupakan laju individu terinfeksi yang menimbulkan infeksi baru pada individu lainnya. Sehingga didapatkan R_0 dari:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \quad (2.12)$$

dengan $\rho(K)$ menunjukkan radius spektral dari matriks K (Oktafiani & A. Kusnanto, 2013).

2.5 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Sebuah matriks ordo $n \times n$ dimisalkan A , dan sebuah vektor kolom dimisalkan x . Vektor x adalah vektor dalam ruang R^n yang dihubungkan dengan sebuah persamaan:

$$Ax = \lambda x \quad (2.13)$$

dimana x merupakan vektor tidak nol dan λ adalah suatu skalar yang merupakan nilai eigen dari matriks A . Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks ordo $n \times n$. Vektor x dalam persamaan (2.13) adalah suatu vektor tidak nol yang memenuhi persamaan (2.13) untuk nilai eigen yang sesuai dan disebut dengan vektor eigen. Jadi nilai x memiliki nilai eigen tertentu (Adhiguna & Pujiyanta, 2014).

Dari persamaan (2.13) dapat juga dituliskan menjadi persamaan:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.14)$$

Jika A adalah matriks 2×2 , maka dari persamaan (2.14) didapatkan

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

maka akan didapatkan $\Delta(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$ (Boyce & DiPrima, 2009).

2.6 Fungsi Lyapunov

Metode ini membantu untuk pengkontruksian fungsi Lyapunov secara sistematis dan terstruktur. Fungsi Lyapunov didefinisikan $V: D \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $x_e \in D$ titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinier. Untuk turunan pertama Fungsi Lyapunov sendiri digunakan aturan turunan berantai, yaitu turunan

fungsi tersebut terhadap waktu. Fungsi V dinyatakan sebagai Fungsi Lyapunov dengan syarat:

1. Fungsi V kontinu dan turunan parsial pertamanya juga kontinu pada D .
2. Fungsi $V(x) > 0$ untuk $x \in D$ dengan $x \neq x_e$ dan $V(x_e) = 0$ dengan $x = x_e$ (dengan titik kesetimbangan x_e merupakan titik minimum global).
3. Fungsi $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in D$.

Contoh:

diberikan fungsi persamaan diferensial dengan solusi $x \in \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\dot{x} = -x \quad (2.15)$$

karena untuk x^2 selalu positif di sekitar domainnya, maka didapatkan Fungsi Lyapunov dari persamaan x adalah $V(x) = x^2$ di $\mathbb{R}$, dengan turunan pertamanya yaitu:

$$\dot{V}(x) = V'(x)\dot{x} = 2x(-x) = -2x^2. \quad (2.16)$$

Dengan $V(x)$ adalah fungsi Lyapunov, karena fungsi tersebut positif dan untuk turunan pertamanya juga positif dan kontinu di domainnya, sehingga memenuhi syarat Fungsi Lyapunov (Sundari & Apriliani, 2017).

2.7 Ukuran Lozinskii

Ukuran Lozinskii merupakan salah satu metode untuk menentukan kestabilan global pada titik kesetimbangan endemik. Perhatikan jika diberikan persamaan:

$$\dot{\bar{x}} = f(x) \quad (2.17)$$

dimana $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ open set dan $f \in C^1(D)$.

Kemudian didapatkan asumsi berikut:

(H1) D kontinu;

(H2) Terdapat $K \subset D$;

(H3) $\bar{x}$ merupakan titik kesetimbangan endemik (2.17) di D .

Terdapat dua teorema yang menyatakan bahwa suatu titik kesetimbangan dapat dikatakan stabil asimtotik global, yaitu:

Teorema 4

Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari persamaan (2.17) stabil asimtotik global di domain D jika $\bar{q} < 0$, dimana

$$\bar{q} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} v(B(x(s, x_0))) ds \quad (2.18)$$

dengan matriks B yang didefinisikan $B = A_f A^{-1} + A \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} A^{-1}$, dan A_f diperoleh dengan mengganti letak A_{ij} dari matriks A dengan turunan solusi dari f dan $A \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$, dan $A \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$ merupakan matriks jacobian dari persamaan (2.17).

Selanjutnya, ukuran Lozinskii dengan norm vector $\|\cdot\|$ di $\mathbb{R}^n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$v(B) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|I + hB| - 1}{h} \quad (2.19)$$

Kemudian, terdapat lemma yang mengikuti teorema untuk menentukan suatu titik kesetimbangan stabil global.

Lemma 1

Suatu sistem S, E, I, R kontinu di domain D saat $R_v > 1$.

Bukti:

Karena sistem S, E, I, R kontinu di domain D , maka terdapat konstan $c > 0$ sebagai berikut:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) > c, \liminf_{t \rightarrow \infty} E(t) > c, \liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > c, \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) > c$$

terbukti $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in D$.

Teorema 5

Suatu titik kesetimbangan endemik dapat dikatakan stabil asimtotik global di domain D saat $R_v > 1$ dan $\bar{b} > 0$, dimana $\bar{b}$ adalah persamaan ukuran lozinskii yang didapatkan.

Contoh:

Misal diberikan model persamaan S, E, I, R sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S' &= -\lambda SI + v - vS + \delta R, \\ E' &= \lambda IS - (\varepsilon + v)E, \\ I' &= \varepsilon E - (\gamma + v)I, \\ R' &= \gamma I - (\delta + v)R \end{aligned} \quad (2.20)$$

dengan batas solusinya $\Gamma = \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^4 : S + E + I + R = 1\}$.

Dari persamaan tersebut bisa didapatkan $R = 1 - S - E - I$, sehingga didapatkan sistem tiga dimensi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S' &= -\lambda SI + v - vS + \delta(1 - S - E - I), \\ E' &= \lambda SI - (\varepsilon + v)E, \\ I' &= \varepsilon E - (\gamma + v)I \end{aligned} \quad (2.21)$$

dengan batas solusinya $T = \{(S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq S + E + I \leq 1\}$.

Terdapat $c > 0$ disetiap solusi $(S(t), E(t), I(t))$ dengan $(S(0), E(0), I(0))$ di domain T seperti berikut:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |S(t), E(t), I(t)| \geq c$$

Selanjutnya, menentukan matriks diagonal yang di devinisikan dengan A seperti berikut:

$$A(S, E, I) = \text{diag}\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right). \quad (2.22)$$

$$A_f A^{-1} = \text{diag} \left(0, \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)_f, \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)_f \right). \quad (2.23)$$

Kemudian, menentukan matriks $J^{[2]}$ dari matriks Jacobian $J = \frac{\partial f}{\partial x}$ yang didapatkan sebagai berikut:

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} -\lambda I - \delta - \varepsilon - 2\nu & \lambda S & \lambda S + \delta \\ \varepsilon & -\lambda I - \delta - \gamma - 2\nu & -\delta \\ 0 & \lambda I & -\varepsilon - \gamma - 2\nu \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Lalu, menentukan matriks $B = A_f A^{-1} + A J^{[2]} A^{-1}$ yang didapatkan seperti berikut:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

dengan:

$$B_{11} = -\lambda I - \delta - \varepsilon - 2\nu, \quad B_{12} = \left(\frac{\lambda S I}{E}, \frac{(\lambda S + \delta) I}{E} \right), \quad B_{21} = \left(\frac{\varepsilon E}{I}, 0 \right),$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right) - \lambda I - \delta - \gamma - 2\nu & -\delta \\ \lambda I & \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)_f - \varepsilon - \gamma - 2\nu \end{bmatrix}.$$

Norm vektor $\| \cdot \|$ di $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{(3)}_2$ adalah sebagai berikut:

$$\|(u, v, w)\| = \sup \{ |u|, |v|, |w| \}. \quad (2.26)$$

Ukuran Lozinskii matriks B didapatkan sebagai berikut:

$$\mu(B) \leq \sup \{ g_1, g_2 \}. \quad (2.27)$$

dimana,

$$\begin{aligned} g_1 &= B_{11} + |B_{12}| = -\lambda I - \delta - \varepsilon - 2\nu + \frac{(\lambda S + \delta) I}{E} \\ g_2 &= \mu_1(B_{22}) + |B_{21}| \leq \frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)_f - \delta - \gamma - 2\nu + \frac{\varepsilon E}{I} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Karena matriks B_{11} skalar, maka ukuran Lozinskii dari matriks B_{11} sama dengan vektor norm di $\mathbb{R}^1$. Sehingga didapatkan solusi pada $(S(t), E(t), I(t))$ dengan $(S(0), E(0), I(0))$ di K untuk $t \rightarrow \infty$ yaitu:

$$\frac{I}{E} \left(\frac{E}{I} \right)' = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}$$

$$\frac{\lambda SI}{E} = \frac{E'}{E} + \varepsilon + \nu,$$

$$\frac{\varepsilon E}{I} = \frac{I'}{I} + \gamma + \nu.$$

Kemudian hasil persamaan tersebut disubstitusikan pada persamaan ukuran Lozinskii matriks B sehingga didapatkan persamaan seperti berikut:

$$\mu(B) \leq \frac{E'}{E} - \delta - \nu + \sup \left\{ \frac{\delta}{E} - \lambda I, 0 \right\}. \quad (2.29)$$

Saat $R_v > 1$ terdapat $c > 0$ dan $T > 0$ sehingga $t > T$, maka:

$$E(t) \geq c, \quad I(t) \geq c, \quad \text{dan} \quad \frac{1}{t} \log E(t) < \frac{\delta + \nu}{2}$$

untuk semua $(S(0), E(0), I(0)) \in K$. Set $\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \lambda c^2 \right\}$, lalu $t > T$ dan $\delta < \bar{\delta}$

maka $\frac{\delta}{E} - \lambda I \leq 0$, dengan demikian

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) dt < \log E(t) - (\delta + \nu) < -\frac{1}{2}(\delta + \nu) \quad (2.30)$$

dari hasil perhitungan diatas didapatkan $\bar{q} < 0$, maka titik kesetimbangan endemik model $SEIR$ tersebut stabil asimtotik global (LI & Muldowney, 1996).

2.8 Teori Kontrol Optimal

Sistem kontrol yang stabil tetapi tidak memerlukan energi yang berlebihan dan dapat dicapai melalui pengaturan indeks performansi yang tepat dinamakan

sistem kontrol optimal. Sistem tersebut merupakan perluasan dari kalkulus variasi, yaitu metode optimasi yang bertujuan untuk meminimumkan usaha atau memaksimumkan manfaat yang diinginkan. Kontrol optimal berkaitan dengan masalah menemukan hukum kontrol untuk sistem tertentu seperti, masalah pengendalian mencakup biaya fungsional merupakan fungsi dari variabel dan kontrol. Sebuah kontrol optimal adalah satu set persamaan diferensial yang menggambarkan jalan dari variabel-variabel kontrol yang meminimalkan biaya fungsional (Syahril & Garnadi, 2018).

Teori kontrol optimum berkembang secara pesat pada tahun 50-an, dengan adanya penemuan dua metode penyelesaian masalah kontrol optimum, yaitu *dynamic programming* yang ditemukan oleh Richard Bellman (1957) dan *maximum principle* yang ditemukan oleh Pontryagin (1962). Dengan penemuan tersebut, teknik kontrol optimum yang berkembang mempunyai dua pendekatan, yaitu pendekatan program dinamis dan pendekatan prinsip maksimum. Teori tersebut memilih peubah kontrol $u(t)$ diantara semua peubah kontrol yang admissible, yaitu kontrol yang membawa sistem dari state awal $x(t_0)$ pada waktu t_0 ke state terminal $x(T)$ pada waktu terminal T , sehingga memberi nilai maksimum atau nilai minimum bagi fungsional objektif yang juga disebut sebagai *performance index* (Syahril & Garnadi, 2018).

2.8.1 Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Tujuannya kalkulus variasi dalam bentuk baku adalah untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsional objektif

$$J[x(t)] = \int_0^T f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.31)$$

dengan fungsi kendala atau tanpa kendala. Fungsi kendala bisa berupa persamaan differensial atau persamaan aljabar. Misalnya fungsi kendala pada masalah kalkulus variasi tersebut adalah $\dot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t)$. Apabila $\dot{x}(t) = u(t)$, maka masalah tersebut sama saja dengan masalah kontrol optimum (Syahril & Garnadi, 2018).

2.9 Hamiltonian

Bentuk fungsi Hamiltonian adalah kombinasi fungsi dari suatu masalah $f(x, u, t)$ dan perkalian fungsi subjek berbentuk persamaan differensial $g(t, x, u)$ dengan suatu faktor pengendali yang dinamakan pengendali Lagrange $\gamma(t)$. Sehingga didapatkan bentuk fungsi Hamiltonian dengan tiga variabel (Naidu, 2002).

Fungsi Hamiltonian dengan tiga variabel t, x, u yang merepresentasikan waktu, vektor *state*, dan vektor kontrol. Didefinisikan sebagai:

$$H(t, x(t), \gamma(t)) = f(t, x(t), \gamma(t)) + \gamma(t)g(t, x(t), \gamma(t)) \quad (2.32)$$

dengan $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_s(t))^T$ adalah s – vektor *costate*.

2.10 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip penting untuk memperoleh solusi yang optimal dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal disebut Prinsip Minimum Pontryagin. Prinsip tersebut digunakan dengan cara meminimumkan persamaan fungsi objektif dengan persamaan kendala dan diberikan persamaan kontrol (Mahmudah & Naf'an, 2014).

Langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin adalah:

Misal diberikan suatu sistem persamaan yang kontinu terhadap waktu, dengan kendala $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$,

sistem dengan fungsional objektif (*performace index*)

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.33)$$

dan kontrol $u(t) \in U$.

Fungsi $L(x(t), u(t), t)$ adalah fungsi bobot yang pemilihannya tergantung pada penekanan dari sistem yang akan dioptimalkan.

Kontrol $u^*(t)$ yang mengoptimalkan J menggunakan metode pengali Lagrange. Masing-masing kendala mempunyai satu pengali Lagrange. Misalkan pengali Lagrange disimbolkan $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$, maka akan dibentuk perluasan dari J yang disimbolkan J_a , yaitu:

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [L(x, u, t) + \lambda^T(t) (f(x, u, t) - \dot{x})] dt \quad (2.34)$$

dengan λ merupakan pengali lagrange.

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x, u, t, \lambda) = L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t). \quad (2.16)$$

2. Mencari fungsi Pontryagin yang memenuhi kondisi stasioner

$$\frac{\partial H(x, u, t, \lambda)}{\partial u} = 0 \quad (2.35)$$

untuk mendapatkan $u^* = u^*(x, t, \lambda)$.

3. Dengan menggunakan u^* maka didapatkan fungsi Hamiltonian baru:

$$H^*(t, x(t), \gamma(t)) = H(x, u^*(x, t, \lambda), t, \lambda) \quad (2.36)$$

4. Menyelesaikan

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \text{ (persamaan state)} \quad (2.37)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ (persamaan costate)} \quad (2.38)$$

5. Mensubstitusikan hasil dari langkah 4 ke u^* untuk menentukan kontrol optimal (Mahmudah & Naf'an, 2014).

2.11 Metode Runge Kutta Orde 4

Terdapat metode alternatif tanpa harus menggunakan metode Deret Taylor metode tersebut adalah metode Runge Kutta. Metode ini dapat memberikan derajat ketelitian yang lebih tinggi tanpa harus mencari turunannya dengan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih di setiap selang langkah. Terbagi empat macam metode Runge-Kutta yaitu, Runge-Kutta Orde Satu, metode Runge-Kutta Orde Dua, metode Runge-Kutta Orde Tiga, dan metode Runge-Kutta Orde Empat (Munir, 2010).

Metode Runge-Kutta yang banyak digunakan adalah Orde Tiga dan Orde Empat, karena kedua metode tersebut tingkat ketelitian solusinya lebih tinggi dibandingkan dengan metode sebelumnya. Metode Runge-Kutta Orde Empat berbentuk:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_r, y_r) \\ k_2 &= hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_3\right) \\ y_{r+1} &= y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Galat perlangkah metode Runge-Kutta orde empat adalah $O(h^3)$, sedangkan longgokannya adalah $O(h^2)$ (Munir, 2010).

2.12 Model Penyakit Campak

Pada jurnalnya Viriyapong dan Witchaya 2019 mengembangkan model matematika pada penularan campak kompartemen deterministik yang berisi lima subkelas yaitu, individu rentan (*Susceptible*) $S(t)$, individu divaksin (*vaccinated*) $V(t)$, individu terpapar (*Exposed*) $E(t)$, individu terinfeksi (*Infectious*) $I(t)$, dan individu yang kebal (*Recovered*) $R(t)$, dengan memberikan pengobatan campak untuk individu terpapar dan terinfeksi dengan mempertimbangkan fakta bahwa campak dapat terjadi pada individu terpapar dan individu terinfeksi. Individu yang terpapar penyakit campak adalah individu yang terkena virus campak tetapi belum menunjukkan gejala terinfeksi dan belum dapat menginfeksi individu sehat yang lain. Hal ini terkait dengan masa inkubasi virus campak selama 10-14 hari.

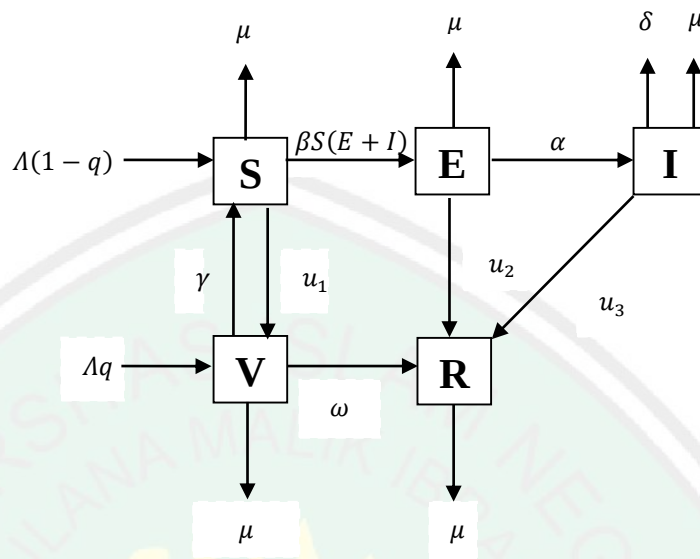
Persamaan model matematika yang didapatkan tersebut dituliskan dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda(1-q) - \beta S(E+I) + \gamma V - \mu S - u_1 S \\ \frac{dV}{dt} &= \Lambda q + u_1 S - \gamma V - \mu V - \omega V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S(E+I) - \mu E - \alpha E - u_2 E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I \\ \frac{dR}{dt} &= u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R\end{aligned}\tag{2.40}$$

dengan kondisi awal $S(0) \geq 0, V(0) \geq 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0$

dan dengan total populasi N adalah $N = S + V + E + I + R$.

Sehingga model matematika tersebut dapat digambarkan dalam diagram sebagai berikut:



Gambar 2.1 Model Penyebaran Campak

Gambar di atas adalah gambar model penyebaran campak. Pada model matematika penularan campak tersebut, individu rentan direkrut pada tingkat Λ dengan proporsi $(1 - q)$ sedangkan individu divaksinasi direkrut pada tingkat yang sama dengan proporsi q . Individu rentan ditularkan dengan tingkat β , dengan individu terpapar dan individu terinfeksi $\beta S (E + I)$. Beberapa individu rentan dapat pindah ke kelompok yang divaksinasi dengan tingkat vaksinasi u_1 , sedangkan tingkat vaksin berkurang adalah γ . Namun, ketika vaksin bekerja dengan baik, individu divaksinasi akan menjadi individu kebal dengan laju ω . Perkembangan individu yang terpapar menjadi individu yang terinfeksi adalah tingkat α . Parameter u_3 adalah tingkat pemulihan untuk orang yang terinfeksi, di mana u_2 adalah tingkat pengobatan campak dari individu terpapar menjadi kebal. Tingkat kematian alami untuk semua individu adalah μ dan tingkat kematian yang disebabkan oleh campak adalah δ .

Berdasarkan Gambar 2.1 menunjukkan bahwa tingkat rekrutmen pada populasi individu rentan sebesar $(1 - q)$. Laju penyebaran penyakit dimisalkan dengan β , maka dalam satu waktu laju dari *susceptible* menjadi *exposed* dan dapat juga menjadi *infected* dikarenakan mengalami penurunan pada populasi individu rentan maka diasumsikan sebagai $-\beta S(E + I)$ dengan β positif. Pada populasi ini juga dipengaruhi oleh tingkat vaksin yang berkurang karena setelah divaksin tidak menutup kemungkinan individu tersebut akan menjadi individu rentan, sehingga diasumsikan γV . Pada populasi *susceptible* dan *infected* terdapat subpopulasi yang memiliki kondisi tetap, yaitu terdapat bilangan konstan pada *susceptible*. Bilangan konstan tersebut menandakan laju kematian alami yakni μS . Kemudian tingkat vaksin akan bertambah karena individu rentan dapat menjadi *vaccinated* dan diasumsikan $u_1 S$. Karenanya, diperoleh persamaan untuk kompartemen S adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda(1 - q) - \beta S(E + I) + \gamma V - \mu S - u_1 S \quad (2.41)$$

Perubahan populasi individu divaksin terhadap waktu dipengaruhi oleh tingkat proporsi bayi yang baru lahir Λq dan bertambahnya tingkat individu divaksin dari individu rentan $u_1 S$ serta laju tingkat vaksin yang berkurang γV dan tingkat vaksin yang bekerja dengan baik ωV karena individu yang telah divaksin dapat menjadi *recovered*. Pada populasi *vaccinated* juga terdapat laju kematian alami yakni μV , dan diperoleh persamaan persamaan untuk kompartemen V adalah sebagai berikut:

$$\frac{dV}{dt} = \Lambda q + u_1 S - \gamma V - \mu V - \omega V \quad (2.26)$$

Perubahan populasi yang terpapar terhadap waktu dipengaruhi oleh laju penyebaran penyakit terhadap individu terpapar dan terinfeksi serta jumlah populasi individu yang rentan. Karena laju kematian selalu konstan maka pada populasi *exposed* juga terdapat laju kematian alami μE . Pada populasi ini juga dipengaruhi oleh berkurangnya tingkat perkembangan dari individu terpapar ke individu terinfeksi αE dan tingkat pengobatan campak pada individu yang terpapar $u_2 E$. Sehingga diperoleh persamaan untuk kompartemen E adalah sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(E + I) - \mu E - \alpha E - u_2 E \quad (2.43)$$

Selanjutnya adalah perubahan individu terinfeksi terhadap waktu dipengaruhi oleh tingkat perkembangan dari orang yang terpapar ke individu terinfeksi pada populasi individu terpapar αE . Kemudian juga dipengaruhi oleh tingkat kematian yang disebabkan oleh penyakit δI dan tingkat kekebalan $u_3 I$ yang berkurang pada populasi *Infectious* karena telah menjadi populasi *recovered* serta laju kematian alami μI . Oleh karena itu, didapatkan persamaan untuk kompartemen I adalah sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I \quad (2.44)$$

Terakhir adalah perubahan populasi individu yang kebal terhadap waktu t dipengaruhi oleh tingkat pengobatan campak pada individu terpapar $u_2 E$, tingkat vaksin yang bekerja dengan baik ωV dan tingkat kekebalan dari individu terinfeksi $u_3 I$. Namun pada populasi *recovered* ini juga terdapat laju kematian alami μR , sehingga didapatkan persamaan untuk kompartemen R sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R \quad (2.45)$$

Nilai parameter pada persamaan SVEIR adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1 Nilai Parameter Pada Model Penyakit Campak

Parameter	Deskripsi	Nilai	Satuan
λ	Laju penyembuhan	10	Pertahun
β	Laju penyebaran	0.09091	Pertahun
μ	Laju kematian alami	0.00875	Pertahun
γ	Laju vaksin berkurang	0.16700	Pertahun
q	Proporsi bayi baru lahir yang divaksinasi	0.50000	Pertahun
α	Laju perkembangan dari orang yang terpapar ke terinfeksi	0.12500	Pertahun
ω	Laju vaksin yang bekerja dengan baik	0.80000	Pertahun
δ	Laju kematian yang disebabkan oleh penyakit	0.03000	Diasumsikan
u_1	Laju vaksinasi	0.20000	Diasumsikan
u_2	Laju pengobatan campak individu yang terpapar	0.10000	Diasumsikan
u_3	Laju kekebalan	0.14286	Pertahun

2.13 Kajian Islam Tentang Keseimbangan

Allah menciptakan segala sesuatu dengan berpasang-pasangan. Allah menciptakan siang hari disertai dengan adanya malam hari, menciptakan matahari

disertai dengan bulan, menciptakan laki-laki dan perempuan, begitu pula Allah menurunkan penyakit disertai dengan penawarnya. Selain menciptakan kehidupan di dunia, Allah juga menciptakan kehidupan di akhirat. Kehidupan di akhirat hanya akan ditempati kelak setelah kehidupan di dunia berakhir. Dunia adalah sarana yang mengantarkan manusia ke akhirat. Oleh karena itu sebagai hamba Allah harus menyeimbangkan antara kepentingan di dunia dengan kepentingan di akhirat, karena sesungguhnya manusia yang menyeimbangkan kepentingan dunia dan akhirat akan mendapatkan ketenangan dalam menjalani hidupnya.

Penjelasan di atas tersebut sesuai dengan firman Allah pada Q.S Al-Qashash ayat 77:

وَابْتَغِ فِيمَا آتَاكَ اللَّهُ الدَّارَ الْآخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَأَحْسِنَ كَمَا أَحْسَنَ اللَّهُ إِلَيْكَ وَلَا تَبْغِ الْفُسَادَ فِي الْأَرْضِ ۚ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِينَ ﴿٧٧﴾

“dan carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bahagianmu dari (kenikmatan) duniawi dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik, kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di (muka) bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan.”

Ayat tersebut memerintahkan kepada manusia supaya dapat hidup secara seimbang dengan mengutamakan kebahagiaan akhirat dan mendapatkan kehidupan dunia serta kenikmatannya dengan ridha Allah sebagai bekal untuk kehidupan di akhirat. Jangalah hidup dengan keserakahan dan mengejar harta untuk kesenangan dunia saja, sehingga lupa dengan kehidupan akhirat yang lebih kekal dari segala apapun yang ada di dunia. Selain itu Allah juga memerintahkan supaya manusia

berbuat baik terhadap sesamanya, sebagaimana Allah telah memberikan segala kebaikan kepada manusia.



BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini akan membahas penyelesaian analisis global dan kontrol optimal model penyakit campak dengan vaksinasi dan pengobatan. Penyelesaian kontrol optimal disini menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Selanjutnya, model tersebut akan disimulasikan menggunakan metode numerik.

3.1 Analisis Kestabilan

3.1.1 Batas Solusi Model

Pada tahap ini akan ditentukan batas solusi dari persamaan (2.40) karena $N = S + V + E + I + R$, maka:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \\
 &= \Lambda(1-q) - \beta S(E+I) + \gamma V - \mu S - u_1 S + \Lambda q + u_1 S - \gamma V - \mu V - \omega V \\
 &\quad + \beta S(E+I) - \mu E - \alpha E - u_2 E + \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I + u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R \\
 &= \Lambda - \delta I - \mu(S+V+E+I+R) \\
 &= \Lambda - \delta I - \mu N
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

jadi, jumlah populasi bervariasi bergantung terhadap waktu. Kemudian dari persamaan (3.1), untuk setiap $t \geq 0$ populasi terbebas dari penyakit maka diasumsikan sebagai:

$$\frac{dN}{dt} \leq \Lambda - \mu N \tag{3.2}$$

Kemudian akan dihitung integral dari persamaan (3.2) dan didapatkan:

$$\begin{aligned} \int_{N_0}^{N_t} \frac{dN}{\Lambda - \mu N} &\leq \int_0^t dt \\ -\frac{1}{\mu} \ln(\Lambda - \mu N_t) + \frac{1}{\mu} \ln(\Lambda - \mu N_0) &\leq t \\ \ln \left[\frac{(\Lambda - \mu N_t)}{(\Lambda - \mu N_0)} \right] &\geq -\mu t \\ N_t &\leq \frac{\Lambda}{\mu} - \left[\frac{\Lambda}{\mu} N_0 \right] e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Jika t membesar maka diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ sehingga $0 \leq N_t \leq \frac{\Lambda}{\mu}$. Dapat dijelaskan jumlah populasi manusia dalam jangka waktu yang panjang menuju kapasitas batas yaitu $\frac{\Lambda}{\mu}$. Jadi daerah solusi untuk model (3.3) didefinisikan:

$$\Omega = \left\{ (S, V, E, I, R) \in R_+^5 : N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \quad (3.4)$$

3.1.2 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan dapat dicari dengan membuat nol persamaan (2.40) sehingga didapatkan persamaan berikut:

$$\Lambda(1-q) - \beta S_0(E_0 + I_0) + \gamma V_0 - \mu S_0 - u_1 S_0 = 0 \quad (3.5)$$

$$\Lambda q + u_1 S_0 - \gamma V_0 - \mu V_0 - \omega V_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$\beta S(E_0 + I_0) - \mu E_0 - \alpha E_0 - u_2 E_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$\alpha E_0 - \delta I_0 - \mu I_0 - u_3 I_0 = 0 \quad (3.8)$$

$$u_2 E_0 + \omega V_0 + u_3 I_0 - \mu R_0 = 0 \quad (3.9)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit didefinisikan dengan $P_0 = (S_0, V_0, E_0, I_0, R_0)$. Penentuan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak tergantung dari syarat R_v sehingga dapat langsung membuat E_0 dan I_0 sama dengan nol.

$$E_0 = 0 \quad (3.10)$$

$$I_0 = 0 \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.6) didapatkan V_0

$$\begin{aligned} (\gamma + \mu + \omega)V_0 &= \Lambda q + u_1 S_0 \\ V_0 &= \frac{\Lambda q + u_1 S_0}{\gamma + \mu + \omega} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) disubstitusi ke persamaan (3.5)

$$\begin{aligned} \Lambda - \Lambda q + \gamma \left(\frac{\Lambda q + u_1 S_0}{\gamma + \mu + \omega} \right) - \mu S - u_1 S &= 0 \\ \Lambda - (1-q) + \gamma \left(\frac{\Lambda q + u_1 S_0}{\gamma + \mu + \omega} \right) - S_0 (\mu + u_1) &= 0 \\ \Lambda - (1-q) + \gamma \frac{\gamma (\Lambda q)}{\gamma + \mu + \omega} &= \left((\mu + u_1) - \frac{\gamma u_1}{\gamma + \mu + \omega} \right) S_0 \\ S_0 &= \frac{\Lambda (1-q)(\gamma + \mu + \omega)}{\mu(\gamma + \mu + \omega) + u_1(\mu + \omega)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substitusikan persamaan (3.10), (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.9)

$$\begin{aligned} \omega V_0 &= \mu R_0 \\ R_0 &= \frac{\omega V_0}{\mu} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dari penjabaran di atas telah didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit:

$$P_0 = \left(\frac{\Lambda (1-q)(\gamma + \mu + \omega)}{\mu(\gamma + \mu + \omega) + u_1(\mu + \omega)}, \frac{\Lambda q + u_1 S_0}{\gamma + \mu + \omega}, 0, 0, \frac{\omega V_0}{\mu} \right) \quad (3.15)$$

3.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_v) merupakan jumlah rata-rata banyaknya infeksi dari banyaknya individu terinfeksi. Untuk menghitung R_v digunakan matriks next-generation oleh Van Den Driessche dari persamaan model individu terpapar dan terinfeksi.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \beta S(E + I) - \mu E - \alpha E - u_2 E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta S(E + I) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mu E + \alpha E + u_2 E \\ -\alpha E + \delta I + \mu I + u_3 I \end{bmatrix}$$

Solusi kesetimbangan dengan $E = I = 0$ adalah $x_0 = (0, 0, S_0, 0)^t$, dimana S_0 adalah solusi yang positif dari $\Lambda - \Lambda q(S_0) = \mu(S_0)$. Hal ini akan menjadi $\Lambda - \Lambda q'(S_0) < \mu$ tanpa menghilangkan sifat umum dan diasumsikan $S_0 = 1$, maka:

$$F = \begin{bmatrix} \beta S & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad V = \begin{bmatrix} \mu + \alpha + u_2 & 0 \\ -\alpha & \delta + \mu + u_3 \end{bmatrix}$$

dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit, didapatkan:

$$F(P_0) = \begin{bmatrix} \beta S_0 & \beta S_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad V(P_0) = \begin{bmatrix} \mu + \alpha + u_2 & 0 \\ -\alpha & \delta + \mu + u_3 \end{bmatrix}$$

dan:

$$\begin{aligned}V^{-1} &= \frac{1}{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)} \begin{bmatrix} \delta + \mu + u_3 & 0 \\ \alpha & \mu + \alpha + u_2 \end{bmatrix} \\ FV^{-1} &= \begin{bmatrix} \beta S_0 & \beta S_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + \alpha + u_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)} & \frac{1}{\delta + \mu + u_3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta S_0 (\delta + \mu + u_3)}{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)} & \frac{\beta S_0}{(\delta + \mu + u_3)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bilangan reproduksi dasar adalah $\rho(FV^{-1})$, yaitu:

$$R_v = \frac{\beta S_0 (\delta + \mu + u_3)}{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)} \quad (3.17)$$

dimana R_0 bilangan reproduksi dasar tanpa vaksinasi. Sehingga, tanpa vaksinasi $u_1 = 0$ dan $q = 0$ dan didapatkan:

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda (\delta + \mu + u_3 + \alpha)}{\mu (\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)} \quad (3.18)$$

Pada solusi batasnya $S_0 \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, $u_1 = 0$ dan $q = 0$ oleh karena itu $R_v = R_0$ dan $R_v \leq R_0$.

3.1.4 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Persamaan (2.40) dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1 &= \Lambda(1-q) - \beta S(E+I) + \gamma V - \mu S - u_1 S \\ f_2 &= \Lambda q + u_1 S - \gamma V - \mu V - \omega V \\ f_3 &= \beta S(E+I) - \mu E - \alpha E - u_2 E \\ f_4 &= \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I \\ f_5 &= u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R \end{aligned} \quad (3.19)$$

selanjutnya persamaan (3.19) diturunkan terhadap S, V, E, I, R dengan menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J(S, V, E, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial V} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial V} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5}{\partial S} & \frac{\partial f_5}{\partial V} & \frac{\partial f_5}{\partial E} & \frac{\partial f_5}{\partial I} & \frac{\partial f_5}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks berikut:

$$J(S, V, E, I, R) = \begin{bmatrix} -\beta(E+I) - \mu - u_1 & \gamma & -\beta S & -\beta S & 0 \\ u_1 & -\gamma - \mu - \omega & 0 & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S - \mu - \alpha - u_2 & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 & 0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Kemudian substitusi titik kesetimbangan $P_0 = (S_0, V_0, E_0, I_0, R_0)$ ke matriks

(3.20)

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -\mu - u_1 & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 & 0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega & 0 & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 & \beta S_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 & 0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (3.21) adalah

$$(-\mu - \lambda)[(\lambda^2 + (2\mu + u_1 + \gamma + \omega)\lambda + \mu(\gamma + \mu + \omega + u_1) + u_1\omega)(\lambda^2 + (\delta + 2\mu + u_3 - \beta S_0 + \alpha + u_2)\lambda + (\delta + \mu + u_3)(-\beta S_0 + \mu + \alpha + u_2) - \alpha\beta S_0)] = 0.$$

$$-(\lambda + \mu)P_1(\lambda).P_2(\lambda) = 0$$

dengan:

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 + a_1 + a_2$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + b_1 + b_2$$

$$a_1 = 2\mu + u_1 + \gamma + \omega > 0$$

$$a_2 = \mu(\gamma + \mu + \omega + u_1) + u_1\omega > 0$$

$$b_1 = \delta + 2\mu + u_3 + \alpha + u_2 - \beta S_0$$

$$b_2 = (\delta + \mu + u_3)(-\beta S_0 + \mu + \alpha + u_2) - \alpha\beta S_0$$

Karena ketika $R_v < 1$ kita dapat mengklarifikasi $\beta S_0 < \delta + 2\mu + u_3 + \alpha + u_2$, sehingga $b_1 > 0$.

$$b_2 = (\delta + \mu + u_3)(-\beta S_0 + \mu + \alpha + u_2) - \alpha\beta S_0$$

$$b_2 = (\mu\delta + \alpha\delta + u_2\delta - \beta S_0\delta) + (\mu^2 + \alpha\mu + u_2\mu - \beta S_0\mu) + (\mu u_3 + \alpha u_3 + u_2 u_3 - \beta S_0 u_3) - \alpha\beta S_0$$

$$b_2 = (\mu\delta + \alpha\delta + u_2\delta) + (\mu^2 + \alpha\mu + u_2\mu) + (\mu u_3 + \alpha u_3 + u_2 u_3) - \beta S_0\delta - \beta S_0\mu - \beta S_0 u_3 - \alpha\beta S_0$$

$$b_2 = (\delta + \mu + u_3)(-\beta S_0 + \mu + \alpha + u_2)(-\beta S_0)(\delta + \mu + u_3 + \alpha)$$

$$b_2 = (\delta + \mu + u_3)(-\beta S_0 + \mu + \alpha + u_2) \left[1 - \left(\frac{\beta S_0(\delta + \mu + u_3 + \alpha)}{(\delta + \mu + u_3)(\mu + \alpha + u_2)} \right) \right]$$

$$b_2 = (\delta + \mu + u_3)(-\beta S_0 + \mu + \alpha + u_2)[1 - R_v]$$

Oleh sebab itu, $b_2 > 0$ saat $R_v < 1$.

Karena pada bagian ini menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk $n = 2$; ketika $R_v < 1$ maka dengan melihat hasil di atas terbukti bahwa a_1, a_2, b_1 dan $b_2 > 0$ jadi P_0 stabil asimtotik lokal.

3.1.5 Kestabilan Global Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Untuk menganalisis kestabilan global titik keseimbangan bebas penyakit pada model akan dibangun dengan fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov dibangun dari kombinasi fungsi kuadrat komposit, kuadrat bersama, fungsi logaritma,

fungsi linier. Metode ini mengisyaratkan untuk mengkontruksi sebuah fungsi yang dapat menganalisis sistem.

Titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 dari model SVEIR stabil asimtotik global jika $R_v \leq 1$.

Bukti:

Didefinisikan $L: \Gamma \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$,

karena untuk $(\delta + \mu + u_3 + \alpha)E + (\mu + \alpha + u_2)I$ positif di sekitar domainnya, maka didapatkan fungsi Lyapunov dari model persamaan SVEIR yang didefinisikan dengan L yaitu seperti berikut:

$$L(S, V, E, I, R) = (\delta + \mu + u_3 + \alpha)E + (\mu + \alpha + u_2)I \quad (3.22)$$

Fungsi L dapat disebut fungsi Lyapunov karena memenuhi syarat fungsi Lyapunov sebagai berikut:

1. Fungsi (3.22) berupa fungsi linier dan jelas bahwa bernilai positif, sehingga jelas fungsi tersebut adalah fungsi yang kontinu pada Γ . Kemudian turunan parsial pertama juga kontinu.
2. Untuk sebarang $P = (S, V, E, I, R) \in \Gamma$ dengan $P \neq P_0$ maka $L(P) = (\mu + \alpha + u_2)I > 0$, selanjutnya jika $P = P_0$ maka $L(P) = 0$.
3. Turunan pertama pada fungsi $L(S, V, E, I, R)$ terhadap t menggunakan fungsi turunan dengan aturan rantai, sehingga untuk turunan dari variabel yang ada pada fungsi tersebut digunakan persamaan pada model SVEIR yang diturunkan terhadap t . Sehingga didapatkan persamaannya seperti berikut:

$$L'(t) = (\delta + \mu + u_3 + \alpha)[\beta S(E + I) - \mu E - \alpha E - u_2 E] + (\mu + \alpha + u_2)[\alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I]$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta + \mu + u_3 + \alpha)[\beta S(E + I) - E(\mu + \alpha + u_2)] + (\mu + \alpha + u_2)[\alpha E - I(\delta + \mu + u_3)] \\
&= (\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha) \left[\frac{\beta S(\delta + \mu + u_3 + \alpha)}{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha)} - 1 \right] (E + I).
\end{aligned}$$

Pada solusi batasnya $S_0 \leq \frac{A}{\mu}$, didapatkan:

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq (\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha) \left[\frac{\beta S(\delta + \mu + u_3 + \alpha)}{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha)} - 1 \right] (E + I) \\
&= (\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha)[R_0 - 1](E + I),
\end{aligned}$$

jelas bahwa $L'(t) \leq 0$ asalkan $R_0 \leq 1$. Karena $R_v \leq R_0$ maka jelas bahwa $R_v \leq 1$, jadi terbukti $L(S, V, E, I, R)$ adalah fungsi Lyapunov.

Telah diketahui bahwa $L(S, V, E, I, R)$ merupakan fungsi Lyapunov dan $L'(t) \leq 0$ asalkan $R_0 \leq 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi $L'(t) = 0$ ketika $E = I = 0$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
L'(t) &= (\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha)[R_0 - 1](E + I) \\
&= (\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3 + \alpha)[R_0 - 1](0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena terbukti bahwa $L'(t) = 0$ ketika $E = I = 0$ dan $R_v \leq 1$ maka berdasarkan prinsip invarian LaSalle titik kesetimbangan P_0 stabil asimtotik global.

3.1.6 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik didefinisikan dengan $P_1 = (S^*, V^*, E^*, I^*, R^*)$.

Cara mencari titik kesetimbangan endemik sama seperti cara mencari titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu dengan cara membuat nol model matematika persamaan sebelumnya.

Dari persamaan (3.9) didapatkan R^*

$$\mu R^* = u_2 E^* + \omega V^* + u_3 I^*$$

$$R^* = \frac{u_2 E^* + \omega V^* + u_3 I^*}{\mu} \quad (3.23)$$

Kemudian dari persamaan (3.5) didapatkan E^*

$$\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1 + \beta I^*) = \beta S^* E^*$$

$$E^* = \frac{\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1 + \beta I^*)}{\beta S^*} \quad (3.24)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.6) diperoleh V^*

$$\Lambda q + u_1 S^* = \gamma V^* + \mu V^* + \omega V^*$$

$$V^* = \frac{\Lambda q + u_1 S^*}{\gamma + \mu + \omega} \quad (3.25)$$

Substitusi persamaan (3.24) ke persamaan (3.8)

$$\alpha \left(\frac{\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1 + \beta I^*)}{\beta S^*} \right) = \delta I^* + \mu I^* + u_3 I^*$$

$$\alpha \left(\frac{\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1)}{\beta S^*} \right) = \frac{\delta I^* + \mu I^* + u_3 I^*}{\frac{-S^* \beta I^*}{\beta S^*}}$$

$$I^* = \frac{\alpha(\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1))}{\beta S^*(\delta + \mu + u_3)} \quad (3.26)$$

Substitusi persamaan (3.24) dan (3.26) ke persamaan (3.7) sehingga didapatkan S^*

$$S^* = \frac{\mu E^* + \alpha E^* + u_2 E^*}{\beta(E^* + I^*)}$$

$$S^* = \frac{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)}{\beta(\alpha + \delta + \mu + u_3)} \quad (3.27)$$

Dari penjabaran di atas telah didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu:

$$P_1 = \left(\frac{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)}{\beta(\alpha + \delta + \mu + u_3)}, \frac{\Lambda q + u_1 S^*}{\gamma + \mu + \omega}, \frac{\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1 + \beta I^*)}{\beta S^*}, \frac{\alpha(\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1))}{\beta S^*(\delta + \mu + u_3)}, \frac{u_2 E^* + \omega V^* + u_3 I^*}{\mu} \right) \quad (3.28)$$

dengan kondisi $\Lambda(1 - q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1 + \beta I^*) > 0$.

3.1.7 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik

Cara mencari matriks jacobian pada titik keseimbangan endemik adalah dengan mensubstitusikan titik keseimbangan $P_1 = (S^*, V^*, E^*, I^*, R^*)$ ke matriks (3.20) sehingga didapatkan matriks jacobian seperti berikut:

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -\beta(E^* + I^*) - \mu - u_1 & \gamma & -\beta S^* & -\beta S^* & 0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega & 0 & 0 & 0 \\ \beta(E^* + I^*) & 0 & \beta S^* - \mu - \alpha - u_2 & \beta S^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 & 0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (3.29) yang diperoleh adalah:

$$(-\mu - \lambda) \times (\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4) = 0$$

$$a_1 = 4\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*) + \gamma + \omega + \delta + u_3 - \beta S^* + \alpha + u_2$$

$$a_2 = -\alpha\beta S^* + \beta^2 S^*(E^* + I^*) + (\delta + \mu + u_3)(-\beta S^* + \mu + \alpha + u_2) + (\delta + 2\mu + u_3 - \beta S^* + \alpha + u_2)(2\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*) + \gamma + \omega) + (\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*)(\gamma + \mu + \omega) - \gamma u_1$$

$$a_3 = (\alpha\beta^2 S^*(E^* + I^*) - \alpha\beta S^*(2\mu + u_1 + \gamma + \omega + \beta(E^* + I^*))) + \beta^2 S^*(E^* + I^*) - (\delta + \mu + u_3)(\beta S^* + \mu + \alpha + u_2)(2\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*)) + \beta^2 S^*(E^* + I^*)(\delta + 2\mu + u_3 + \gamma + \omega) + (\delta + \mu + u_3)(-\beta S^* + \mu + \alpha +$$

$$u_2)(2\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*) + \gamma + \omega) + (\delta + 2\mu - u_3 - \beta S^* + \alpha + u_2)(\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*))(\gamma + \mu + \omega) - \gamma u_1(\delta + 2\mu + u_3 - \beta S^* + \alpha + u_2)$$

$$a_4 = \alpha\beta^2 S^*(E^* + I^*)(\gamma + \mu + \omega) - \alpha\beta S^*(\mu + u_1 + \beta(E^* + I^*))(\gamma + \mu + \omega) + \alpha\beta S^* \gamma u_1 + \beta^2 S^*(E^* + I^*)(\delta + \mu + u_3)(\gamma + \mu + \omega) - \gamma u_1(\delta + \mu + u_3)(-\beta S^* + \mu + \alpha + u_2).$$

Pada kriteria Routh-Hurwitz untuk $n = 4$, P_1 stabil ketika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$, dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$. Pembuktian Kriteria Routh-Hurwitz secara umum sulit untuk dilakukan, oleh karena itu penulis menganalisa kestabilan sistem khusus untuk nilai parameter yang terdapat di Tabel 2.1 sehingga diperoleh nilai koefisien $a_1 = 5.1318$, $a_2 = 5.6042$, $a_3 = 1.1575$ dan $a_4 = 0.6454$.

$$a_1 = 5.1318 > 0$$

$$a_2 = 5.6042 > 0$$

$$a_3 = 1.1575 > 0$$

$$a_4 = 0.6454 > 0$$

Dari hasil di atas terbukti bahwa $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_4 > 0$. Selanjutnya akan dibuktikan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

$$a_1 a_2 a_3 = 33.2896$$

$$a_3^2 + a_1^2 a_4 = 28.3208$$

Terbukti bahwa $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$. Jadi, terbukti bahwa P_1 stabil asimtotik lokal.

3.1.8 Kestabilan Global Titik Keseimbangan Endemik

Pada tahap ini untuk menganalisis kestabilan global titik keseimbangan endemik digunakan pendekatan geometrik dan ukuran Lozinskii. Terdapat dua teorema untuk menyatakan bahwa titik keseimbangan endemik P_1 stabil asimtotik global.

Teorema 4

Titik keseimbangan endemik P_1 stabil asimtotik global di daerah solusi Ω jika $\bar{q} < 0$. Dimana,

$$\bar{q} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in \Gamma} \frac{1}{t} \int_0^t v(B(x(s, x_0))) ds \quad (3.30)$$

Matriks B didefinisikan $B = Q_f Q^{-1} + Q J^{[2]} Q^{-1}$, dimana Q_f diperoleh dengan mengganti entri Q_{ij} dari Q dengan turunannya yang mendekati solusi fungsi yang digunakan, $J^{[2]}$ adalah tambahan kedua pada matriks Jacobian model $SVEIR$.

Teorema 5

Titik keseimbangan endemik P_1 stabil asimtotik global di daerah solusi Ω ketika $R_v > 1$ $\bar{b} > 0$.

Langkah pertama adalah menentukan matriks Jacobian $J^{[2]}$. Untuk menentukan matriks tersebut digunakan persamaan (2.40) dengan diturunkan terhadap S, V, E, I

$$J(S, V, E, I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial V} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial V} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} \end{bmatrix}$$

$$J(S, V, E, I) = \begin{bmatrix} -(\mu + u_1 + \beta(E + I)) & \gamma & -\beta S & -\beta S \\ u_1 & -\gamma - \mu - \omega & 0 & 0 \\ \beta(E + I) & 0 & \beta S - \mu - \alpha - u_2 & \beta S \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Misalkan:

$$M_{11} = \mu + u_1 + \beta(E + I)$$

$$M_{22} = \gamma + \mu + \omega$$

$$M_{33} = \beta S - \mu - \alpha - u_2$$

$$M_{44} = -\delta - \mu - u_3$$

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} -(M_{11} + M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & -M_{11} + M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \beta S \\ 0 & \alpha & -M_{11} + M_{44} & 0 & \gamma & -\beta S \\ -\beta(E + I) & u_1 & 0 & -M_{22} + M_{33} & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & \alpha & -M_{22} + M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E + I) & 0 & 0 & M_{33} + M_{44} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Selanjutnya diambil fungsi $Q = Q(S, V, E, I)$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 Q_f Q^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

kemudian hitung $QJ^{[2]}Q^{-1}$, lalu menentukan matriks $B = Q_f Q^{-1} + QJ^{[2]}Q^{-1}$ yang didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} -(M_{11}+M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ 0 & -M_{11}+M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \frac{\beta S}{E} \\ 0 & \alpha & -M_{11}+M_{44} & 0 & \frac{\gamma}{E} & \frac{-\beta S}{E} \\ -\beta(E+I) & u_1 & 0 & -M_{22}+M_{33} & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & u_1 E & \alpha E & (-M_{22}+M_{44})+\frac{E'}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E+I)E & 0 & 0 & (M_{33}+M_{44})+\frac{E'}{E} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

dimana $B_{11} = [-(M_{11} + M_{22})]$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta S & \frac{\beta S}{E} & 0 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta(E+I) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan

$$B_{22} = \begin{bmatrix} -(M_{11} + M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ 0 & -M_{11} + M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \frac{\beta S}{E} \\ 0 & \alpha & -M_{11} + M_{44} & 0 & \frac{\gamma}{E} & \frac{-\beta S}{E} \\ -\beta(E+I) & u_1 & 0 & -M_{22} + M_{33} & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & u_1 E & \alpha E & (-M_{22} + M_{44}) + \frac{E'}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E+I)E & 0 & 0 & (M_{33} + M_{44}) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}.$$

Ukuran Lozinskii dari matriks B didefinisikan:

$$v(B) \leq \max \{g_1, g_2\} \quad (3.35)$$

dimana $g_1 = v(B_{11}) + \|B_{12}\|$ dan $g_2 = \|B_{21}\| + v(B_{22})$, dengan

$$v(B_{11}) = -(M_{11} + M_{22}),$$

$$\|B_{12}\| = \beta S,$$

$$\|B_{21}\| = \beta(E+I)$$

sehingga didapatkan

$$g_1 = -(M_{11} + M_{22}) + \beta S \quad (3.36)$$

$$g_2 = \beta(E+I) + v(B_{22}). \quad (3.37)$$

Selanjutnya menentukan $v(B_{22})$ dengan cara partisi matriks B_{22}

$$B_{22} = c = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

dimana

$$C_{11} = [-M_{11} + M_{33}],$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} \beta S & \gamma & 0 & \frac{\beta S}{E} \end{bmatrix},$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} \alpha \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} -M_{11} + M_{44} & 0 & \frac{\gamma}{E} & \frac{-\beta S}{E} \\ 0 & -M_{22} + M_{33} & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ u_1 E & \alpha E & (-M_{22} + M_{44}) + \frac{E'}{E} & 0 \\ \beta(E + I)E & 0 & 0 & (M_{22} + M_{44}) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}.$$

Ukuran Lozinskii dari matriks C dapat didefinisikan seperti:

$$v(C) \leq \max\{g_3, g_4\} \quad (3.38)$$

dimana $g_3 = v(C_{11}) + \|C_{12}\|$ dan $g_4 = \|C_{21}\| + v(C_{22})$, dengan

$$v(C_{11}) = -M_{11} + M_{33},$$

$$\|C_{12}\| = \max\left\{\beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E}\right\},$$

$$\|C_{21}\| = \alpha + u_1$$

sehingga didapatkan

$$g_3 = -M_{11} + M_{33} + \max\left\{\beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E}\right\} g_3 = -M_{11} + M_{33} + \max\left\{\beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E}\right\} \quad (3.39)$$

$$g_4 = \alpha + u_1 + v(C_{22}). \quad (3.40)$$

Selanjutnya menentukan $v(C_{22})$ dengan cara partisi matriks C_{22}

$$C_{22} = F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

dimana

$$F_{11} = [-M_{11} + M_{44}],$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{E} & -\frac{\beta S}{E} \end{bmatrix},$$

$$F_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 E \\ \beta(E + I)E \end{bmatrix},$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} -M_{22} + M_{33} & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ \alpha E & (-M_{22} + M_{44}) + \frac{E'}{E} & 0 \\ 0 & 0 & (M_{33} + M_{44}) \end{bmatrix}.$$

Ukuran Lozinskii dari matriks F dapat didefinisikan seperti:

$$v(F) \leq \max\{g_5, g_6\} \quad (3.41)$$

dimana $g_5 = v(F_{11}) + \|F_{12}\|$ dan $g_6 = \|F_{21}\| + v(F_{22})$, dengan

$$v(F_{11}) = -M_{11} + M_{44},$$

$$\|F_{12}\| = \max\left\{\frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E}\right\},$$

$$\|F_{21}\| = (u_1 + \beta(E + I))E$$

sehingga didapatkan

$$g_5 = -M_{11} + M_{44} + \max \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} \quad (3.42)$$

$$g_6 = (u_1 + \beta(E + I))E + v(F_{22}). \quad (3.43)$$

Selanjutnya menentukan $v(F_{22})$ dengan cara partisi matriks F_{22}

$$F_{22} = G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

dimana

$$G_{11} = [-M_{22} + M_{33}],$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\beta S}{E} & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} \alpha E \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{22} = \begin{bmatrix} (-M_{22} + M_{33}) + \frac{E'}{E} & 0 \\ 0 & (M_{33} + M_{44}) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}.$$

Ukuran Lozinskii dari matriks G dapat didefinisikan seperti:

$$v(G) \leq \max \{g_7, g_8\} \quad (3.44)$$

dimana $g_7 = v(G_{11}) + \|G_{12}\|$ dan $g_8 = \|G_{21}\| + v(G_{22})$, dengan

$$v(G_{11}) = -M_{22} + M_{33},$$

$$\|G_{12}\| = \frac{\beta S}{E},$$

$$\|G_{21}\| = \alpha E,$$

$$\begin{aligned}
v(G_{22}) &= \max \left\{ -M_{22} + M_{44} + \frac{E'}{E}, M_{33} + M_{44} + \frac{E'}{E} \right\} \\
&= \max \left\{ -(\gamma + \mu + \omega) + M_{44} + \frac{E'}{E}, \beta S - \mu - \alpha - u_2 + M_{44} + \frac{E'}{E} \right\} \\
&= M_{44} + \frac{E'}{E} + \sup \left\{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \right\}
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$g_7 = -M_{22} + M_{33} + \frac{\beta S}{E} \quad (3.45)$$

$$g_8 = \alpha E + M_{44} + \frac{E'}{E} + \sup \left\{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \right\}. \quad (3.46)$$

Dari persamaan ketiga model (2.40), didapatkan

$$\begin{aligned}
E' &= \beta S(E + I)E - \mu E - \alpha E - u_2 E \\
\frac{E'}{E} &= \frac{\beta SI}{E} + (\beta S - \mu - \alpha - u_2) \\
\frac{E'}{E} - \frac{\beta SI}{E} &= \beta S - \mu - \alpha - u_2 \\
\frac{E'}{E} - \frac{\beta SI}{E} &= M_{33}.
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Substitusi persamaan (3.47) ke (3.45)

$$\begin{aligned}
g_7 &= -M_{22} + \frac{E'}{E} - \frac{\beta SI}{E} + \frac{\beta S}{E} \\
&= \frac{E'}{E} + \frac{\beta S(1-I)}{E} - M_{22}.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
v(G) &\leq \max \{g_7, g_8\} \\
&= \max \left\{ \frac{E'}{E} + \frac{\beta S(1-I)}{E} - M_{22}, \alpha E + M_{44} + \frac{E'}{E} + \sup \left\{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{E'}{E} \max \left\{ \frac{\beta S(1-I)}{E} - M_{22}, \alpha E + M_{44} + \frac{E'}{E} + \sup \{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \} \right\}.$$

Dari persamaan (3.41)

$$v(F) \leq \max \{g_5, g_6\}$$

dimana

$$g_5 = -M_{11} + M_{44} + \max \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} \text{ dan } g_6 = (u_1 + \beta(E + I))E + v(F_{22})$$

g_5 dapat dimisalkan sebagai

$$\begin{aligned} g_5 &= M_{44} + \max \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} + 0 \\ &= M_{44} + \max \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \\ &= \frac{E'}{E} + M_{44} + \max \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} - \frac{E'}{E} \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} v(F) &\leq \frac{E'}{E} + \max \left\{ M_{44} + \sup \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} - \frac{E'}{E}, (u_1 + \beta(E + I))E + \frac{E'}{E} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta S(1-I)}{E} - M_{22}, (u_1 + \beta(E + I))E + \alpha E + M_{44} \right. \\ &\quad \left. + \sup \{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \} \right\}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.38)

$$v(C) \leq \max \{g_3, g_4\}$$

dimana

$$g_3 = -M_{11} + M_{33} + \max \left\{ \beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E} \right\} \text{ dan } g_4 = \alpha + u_1 + v(C_{22})$$

g_3 dapat dimisalkan

$$\begin{aligned}
 g_3 &= M_{33} + \max \left\{ \beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} + 0 \\
 &= M_{33} + \max \left\{ \beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \\
 &= \frac{E'}{E} + M_{33} + \max \left\{ \beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} - \frac{E'}{E}.
 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
 v(C) &\leq \frac{E'}{E} \max \left\{ M_{33} + \sup \left\{ \beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} - \frac{E'}{E}, \alpha + u_1 + M_{44} + \sup \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - M_{11} - \frac{E'}{E}, \alpha + u_1 + (u_1 + \beta(E + I))E + \frac{\beta S(1 - I)}{E} - M_{22}, \alpha \right. \\
 &\quad \left. + u_1 + (u_1 + \beta(E + I))E + \alpha E + M_{44} \right. \\
 &\quad \left. + \sup \{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \} \right\}.
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.35)

$$v(B) \leq \max \{ g_1, g_2 \}$$

dimana

$$g_1 = -(M_{11} + M_{22}) + \beta S \text{ dan } g_2 = \beta(E + I) + v(B_{22})$$

g_1 dapat dimisalkan

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \beta S - (M_{11} + M_{22}) + 0 \\
 &= \beta S - (M_{11} + M_{22}) + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \\
 &= \frac{E'}{E} + \beta S - (M_{11} + M_{22}) - \frac{E'}{E}.
 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
v(B) &\leq \frac{E'}{E} + \max \left\{ \beta S - (M_{11} + M_{22}) - \frac{E'}{E}, \beta(E + I) + M_{33} + \sup \left\{ \beta S, \gamma, \frac{\beta S}{E} \right\} \right. \\
&\quad - M_{11} - \frac{E'}{E}, \beta(E + I) + \alpha + u_1 + M_{44} + \sup \left\{ \frac{\gamma}{E}, \frac{\beta S}{E} \right\} - M_{11} \\
&\quad - \frac{E'}{E}, \beta(E + I) + \alpha + u_1 + (u_1 + \beta(E + I))I + \frac{\beta S(1 - I)}{E} \\
&\quad - M_{22}, \beta(E + I) + \alpha + u_1 + (u_1 + \beta(E + I))I + \alpha E + M_{44} \\
&\quad \left. + \sup \{ -(\gamma + \mu + \omega), \beta S - \mu - \alpha - u_2 \} \right\} \\
&\leq \frac{E'}{E} + \min \left\{ -\beta S + (M_{11} + M_{22}) + \frac{E'}{E}, -\beta(E + I) - M_{33} \right. \\
&\quad - \inf \left\{ -\beta S, -\gamma, \frac{-\beta S}{E} \right\} + M_{11} + \frac{E'}{E}, -\beta(E + I) - \alpha - u_1 \\
&\quad - M_{44} - \inf \left\{ \frac{-\gamma}{E}, \frac{-\beta S}{E} \right\} + M_{11} + \frac{E'}{E}, -\beta(E + I) - \alpha - u_1 \\
&\quad - (u_1 + \beta(E + I))I - \frac{\beta S(1 - I)}{E} + M_{22}, -\beta(E + I) - \alpha \\
&\quad - u_1 - (u_1 + \beta(E + I))I - \alpha E - M_{44} \\
&\quad \left. - \inf \{ (\gamma + \mu + \omega), -\beta S + \mu + \alpha + u_2 \} \right\}.
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $v(B) \leq \frac{E'}{E} - \bar{b}$,

$$\begin{aligned}
\bar{b} &= \min \left\{ -\beta S + (M_{11} + M_{22}) + \frac{E'}{E}, -\beta(E + I) - M_{33} - \inf \left\{ -\beta S, -\gamma, \frac{-\beta S}{E} \right\} \right. \\
&\quad + M_{11} + \frac{E'}{E}, -\beta(E + I) - \alpha - u_1 - M_{44} - \inf \left\{ \frac{-\gamma}{E}, \frac{-\beta S}{E} \right\} + M_{11} \\
&\quad + \frac{E'}{E}, -\beta(E + I) - \alpha - u_1 - (u_1 + \beta(E + I))I - \frac{\beta S(1 - I)}{E} \\
&\quad + M_{22}, -\beta(E + I) - \alpha - u_1 - (u_1 + \beta(E + I))I - \alpha E - M_{44} \\
&\quad \left. - \inf \{ (\gamma + \mu + \omega), -\beta S + \mu + \alpha + u_2 \} \right\}.
\end{aligned}$$

Pertimbangkan setiap solusi dari $S(t), V(t), E(t), I(t)$ yang berada pada $\Gamma \subset \Omega$. Persamaan $(S(t), V(t), E(t), I(t)) \subset \Gamma$ untuk setiap $t \geq \bar{t}$. Kemudian di daerah

solusi $S(t), V(t), E(t), I(t)$, sedemikian sehingga $(S(0), V(0), E(0), I(0)) \in \Gamma$

untuk $t > \bar{t}$, $\frac{1}{t} [\ln E(t) - \ln E(0)] < \frac{\bar{b}}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t v(B) ds &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{E'}{E} - \bar{b} \right) ds \\ &= \frac{1}{t} \left((\ln E(t) - \ln E(0)) - \bar{b}t \right) \\ &= \frac{\ln E(t) - \ln E(0)}{t} - \bar{b} \\ &< -\frac{\bar{b}}{2} \end{aligned}$$

dari hasil di atas berarti bahwa $\bar{q} \leq -\frac{\bar{b}}{2} < 0$ yang berarti juga $\bar{q} < 0$. Oleh sebab itu, dari teorema 4 titik kesetimbangan endemik P_1 stabil asimtotik global.

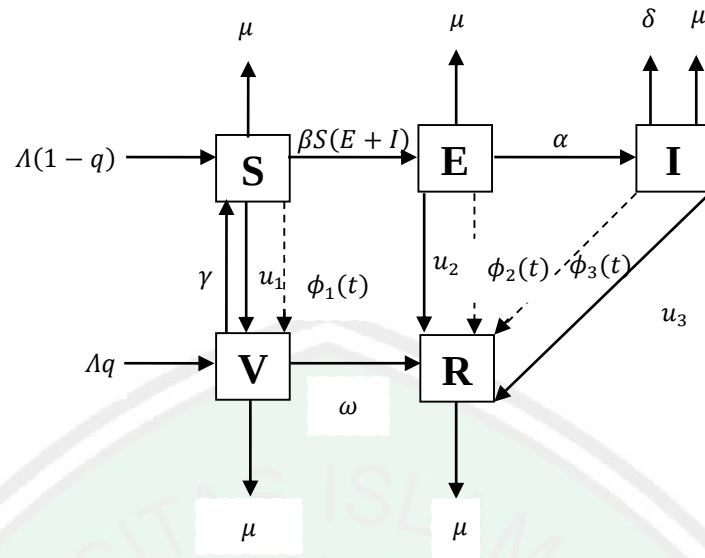
3.2 Analisis Kontrol Optimal

3.2.1 Analisis Kontrol Optimal Model SVEIR

Pada model persamaan (3.6) dikembangkan dengan menerapkan variabel kontrol optimal atau menentukan strategi terbaik yang diterapkan dalam waktu yang ditentukan. Kontrol optimal yang diterapkan pada model tersebut adalah:

1. $\phi_1(t)$ adalah vaksinasi.
2. $\phi_2(t)$ adalah pengobatan untuk individu yang terpapar.
3. $\phi_3(t)$ adalah pengobatan untuk individu yang terinfeksi.

Sehingga dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Model Penyebaran Campak dengan Kontrol

Model persamaannya dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda(1-q) + \gamma V - \mu S - u_1 S - \beta S(E+I) - \phi_1(t) S \\
 \frac{dV}{dt} &= \Lambda q + u_1 S + \phi_1(t) S - \gamma V - \mu V - \omega V \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta S(E+I) - \mu E - \alpha E - u_2 E - \phi_2(t) E \\
 \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I - \phi_3(t) I \\
 \frac{dR}{dt} &= u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R + \phi_3(t) I + \phi_2(t) E
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Selanjutnya adalah memodelkan fungsi tujuan yang menginterpretasikan banyaknya populasi yang terpapar ($M_1 E$) dan populasi yang terinfeksi ($M_2 I$) dimana M_1 dan M_2 adalah variabel bobot. Tujuan dari model kontrol optimal ini adalah untuk meminimalkan jumlah populasi yang terpapar dan terinfeksi penyakit campak dengan biaya kontrol yang minimal pada interval waktu $[0, T]$. Berdasarkan hubungan biaya yang dikeluarkan untuk vaksin ($\phi_1(t)$) dan pengobatan ($\phi_2(t), \phi_3(t)$) dengan banyaknya jumlah populasi yang terpapar dan

terinfeksi memiliki hubungan tidak linier sehingga fungsi biaya dimodelkan dengan persamaan nonlinier dan digunakan fungsi kuadratik $\phi_1^2(t)$, $\phi_2^2(t)$, $\phi_3^2(t)$. Berdasarkan uraian tersebut fungsi biaya untuk vaksin adalah $M_3\phi_1^2$ dan untuk fungsi biaya pengobatan adalah $M_4\phi_2^2$, dan $M_5\phi_3^2$ dengan M_3 , M_4 , M_5 adalah variable bobot dan penyeimbang dari keuntungan biaya. Fungsi objektif yang didapatkan adalah:

$$J(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \min \int_0^T \left[M_1E + M_2I + \frac{1}{2} (M_3\phi_1^2(t) + M_4\phi_2^2(t) + M_5\phi_3^2(t)) \right] dt \quad (3.49)$$

Kita dapat menentukan solusi optimal dari masalah kontrol optimal dengan menentukan Hamiltonian untuk masalah tersebut. Dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin, dapat membentuk Hamiltonian dan memperoleh sistem optimalitas seperti berikut:

$$\begin{aligned} H &= f + \sum \lambda g \\ H &= M_1E + M_2I + \frac{1}{2} (M_3\phi_1^2(t) + M_4\phi_2^2(t) + M_5\phi_3^2(t)) + \lambda_1[\Lambda(1-q) + \gamma V - \\ &\quad \mu S - u_1S - \beta S(E+I) - \phi_1(t)S] + \lambda_2[\Lambda q + u_1S + \phi_1(t)S - \gamma V - \mu V - \\ &\quad \omega V] + \lambda_3[\beta S(E+I) - \mu E - \alpha E - u_2E - \phi_2(t)E] + \lambda_4[\alpha E - \delta I - \mu I - \\ &\quad u_3I - \phi_3(t)I] + \lambda_5[u_2E + \omega V + u_3I - \mu R + \phi_3(t)I + \phi_2(t)E] \end{aligned}$$

dimana λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 dan λ_5 adalah fungsi adjoint yang terkait dengan persamaan untuk keadaan S , V , E , I dan R masing-masing.

Selanjutnya menentukan persamaan *state* dan *co-state* dari Hamiltonian yang telah didapatkan. Persamaan *state* dari Hamiltonian tersebut ialah:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \Lambda(1-q) + \gamma V - \mu S - u_1S - \beta S(E+I) - \phi_1(t)S \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \Lambda q + u_1 S + \phi_1(t) S - \gamma V - \mu V - \omega V \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \beta S(E + I) - \mu E - \alpha E - u_2 E - \phi_2(t) E \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I - \phi_3(t) I \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R + \phi_3(t) I + \phi_2(t) E \quad (3.54)$$

Kemudian didapatkan persamaan *co-state* nya, yaitu:

$$-\frac{\partial H}{\partial S} = -\left[\lambda_1(-\mu - u_1 - \beta(E + I) - \phi_1(t)) + \lambda_2(u_1 + \phi_1(t)) + \lambda_3\beta(E + I) \right] \quad (3.55)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial V} = -\left[\lambda_1\gamma + \lambda_2(-\gamma - \mu - \omega) + \lambda_5\omega \right] \quad (3.56)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial E} = -\left[M_1 + \lambda_1\beta S + \lambda_3(\beta S - \mu - \alpha - u_2 - \phi_2(t)) + \lambda_4\alpha + \lambda_5(u_2 + \phi_2(t)) \right] \quad (3.57)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial I} = -\left[M_2 - \lambda_1\beta S + \lambda_3\beta S + \lambda_4(-\delta - \mu - u_3 - \phi_3(t)) + \lambda_5(u_3 + \phi_3(t)) \right] \quad (3.58)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial R} = -\left[-\mu\lambda_5 \right] \quad (3.59)$$

dengan syarat batas (*transversality*),

$$\lambda_1(T) = 0, \lambda_2(T) = 0, \lambda_3(T) = 0, \lambda_4(T) = 0, \lambda_5(T) = 0.$$

Kondisi optimalisasi bentuk Hamiltonian terhadap kontrol optimal didapatkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi_1} = \frac{1}{2} M_3 \phi_1^2(t) - \lambda_s \phi_1(t) \tilde{S} + \lambda_v \phi_1(t)$$

$$= \frac{1}{4} M_3 \phi_1(t) - \frac{1}{2} \lambda_s \tilde{S} + \frac{1}{2} \lambda_v \tilde{S}$$

$$\phi_1^*(t) = \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \phi_2} &= \frac{1}{2} M_4 \phi_2^2(t) - \lambda_E \phi_2(t) \tilde{E} + \lambda_R \phi_2(t) \tilde{E} \\ &= \frac{1}{4} M_4 \phi_2(t) - \frac{1}{2} \lambda_E \tilde{E} + \frac{1}{2} \lambda_R \tilde{E} \\ \phi_2^*(t) &= \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \phi_3} &= \frac{1}{2} M_5 \phi_3^2(t) - \lambda_I \phi_3(t) \tilde{I} + \lambda_R \phi_3(t) \tilde{I} \\ &= \frac{1}{4} M_5 \phi_3(t) - \frac{1}{2} \lambda_I \tilde{I} + \frac{1}{2} \lambda_R \tilde{I} \\ \phi_3^*(t) &= \frac{\tilde{I}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Untuk kontrol pertama yaitu vaksin batas nilai ϕ_1 adalah $0 \geq \phi_1 \geq 1$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan:

$$\phi_1^* = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3} \leq 0 \\ \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3} & \text{if } 0 < \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3} < 1 \\ 0.9 & \text{if } \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3} \geq 1 \end{cases}$$

sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\phi_1^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3}, 0.9 \right\} \right\}.$$

Untuk kontrol kedua yaitu pengobatan pada individu yang terpapar batas nilai ϕ_2 adalah $0 \geq \phi_2 \geq 1$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan:

$$\phi_2^* = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4} \leq 0 \\ \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4} & \text{if } 0 < \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4} < 1 \\ 0 & \text{if } \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4} \geq 1 \end{cases}$$

dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\phi_2^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4}, 0.9 \right\} \right\}.$$

Sedangkan untuk kontrol ketiga yaitu pengobatan pada individu yang telah terinfeksi batas nilai ϕ_3 adalah $0 \geq \phi_3 \geq 1$, sehingga terdapat beberapa kemungkinan:

$$\phi_3^* = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\tilde{I}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5} \leq 0 \\ \frac{\tilde{I}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5} & \text{if } 0 < \frac{\tilde{I}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5} < 1 \\ 0 & \text{if } \frac{\tilde{I}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5} \geq 1 \end{cases}$$

dapat dituliskan sebagai berikut:

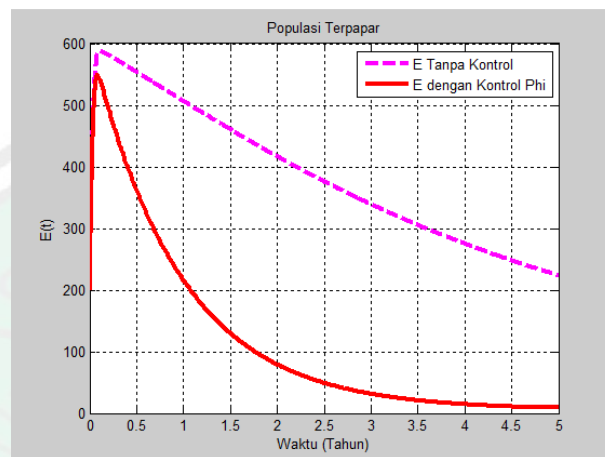
$$\phi_3^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\tilde{I}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5}, 0.9 \right\} \right\}.$$

3.2.2 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan ditampilkan gambar solusi numerik dari persamaan model penyebaran campak dengan menggunakan bantuan aplikasi MATLAB dan menggunakan nilai parameter dari persamaan tersebut, sehingga didapatkan perbandingan dari beberapa kondisi. Pada penelitian ini akan dibandingkan simulasi numerik kondisi penyebaran campak tanpa kontrol dan penyebaran campak dengan kontrol dalam waktu $T = 5$ tahun. Dimana pada bagian ini

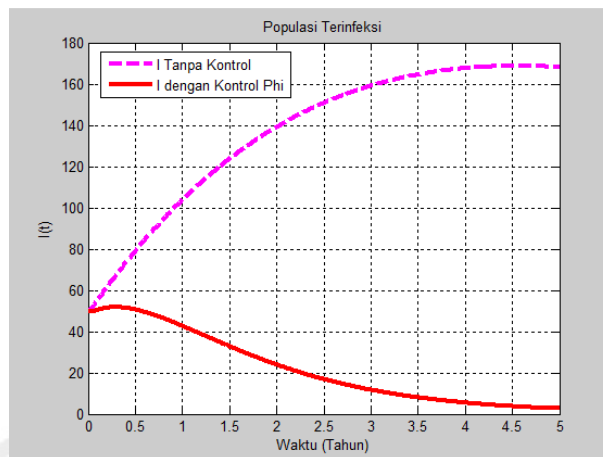
perbedaan yang terlihat dari hasil simulasinya terdapat pada grafik populasi individu terpapar dan populasi individu terinfeksi serta populasi individu kebal.

Berikut adalah hasil perbandingan simulasi numerik penyebaran campak tanpa kontrol dan dengan kontrol yang didapatkan:



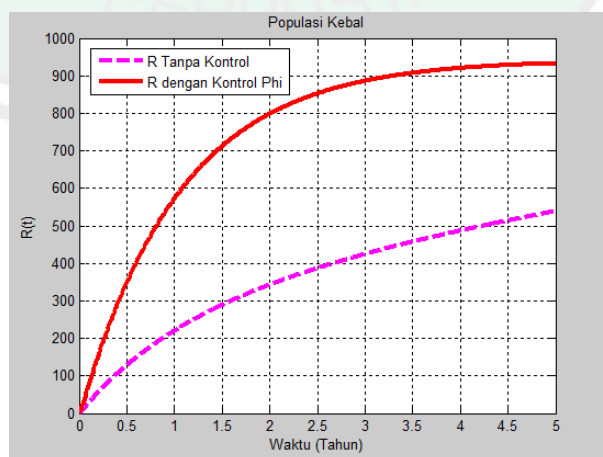
Gambar 3.2 Simulasi Populasi Terpapar

Kurva untuk populasi individu terpapar (*Exposed*) $E(t)$ dengan nilai awal 200 mengalami peningkatan drastis pada awal tahun pertama kemudian terus mengalami penurunan yang stabil sampai tahun kelima karena individu terpapar dapat berpindah menjadi individu terinfeksi. Dengan diberikannya kontrol pengobatan untuk populasi ini, maka dapat menurunkan kurva atau mengurangi individu terpapar agar individu tersebut tidak menjadi individu yang terinfeksi melainkan sembuh atau berpindah menjadi individu yang kebal.



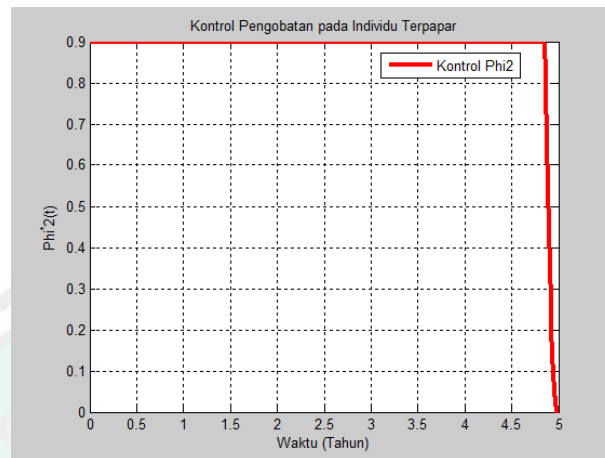
Gambar 3.3 Simulasi Populasi Terinfeksi

Selanjutnya populasi individu terinfeksi (*Infectious*) $I(t)$ dengan nilai awal 50 pada grafiknya kurva menunjukkan peningkatan yang stabil dalam lima tahun. Untuk menurunkan laju kurva pada populasi ini atau mengurangi individu terinfeksi, diberikan kontrol pengobatan sehingga individu pada populasi ini menjadi sembuh atau berpindah menjadi individu yang kebal. Karena setelah diberikan kontrol terhadap model persamaan penyebaran campak hasil simulasi pada populasi individu terpapar dan populasi individu terinfeksi menunjukkan penurunan, maka jelas bahwa untuk hasil simulasi populasi kebal akan mengalami kenaikan atau jumlah pada populasi ini akan lebih besar dari pada sebelum diberikan kontrol. Berikut hasil simulasi untuk populasi individu kebal:

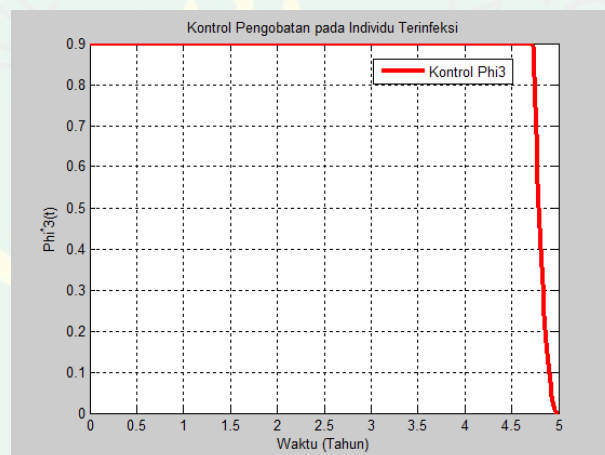


Gambar 3.4 Simulasi Populasi Kebal

Untuk hasil simulasi numerik dari kontrol pengobatan untuk individu terpapar (ϕ_2) dan pengobatan untuk individu terpapar (ϕ_3) adalah sebagai berikut:



Gambar 3.5 Simulasi Kontrol Pengobatan Individu Terpapar



Gambar 3.6 Simulasi Kontrol Pengobatan Individu Terinfeksi

Dari hasil simulasi numerik pada kedua kontrol tersebut kurva akan menunjukkan nilai maksimum yaitu 0.9 di tahun-tahun pertama karena pada kondisi ini angka populasi individu yang terpapar dan populasi individu terinfeksi masih sangat tinggi sehingga harus diberikan kontrol yang maksimum. Kemudian laju kurva tersebut akan menurun menuju nilai minimumnya yaitu 0 disaat laju penyebaran campak serta angka populasi individu yang terpapar dan populasi individu terinfeksi juga

sudah mulai menurun, karena pemberian kontrol yang diberikan mengikuti kondisi dari penyebaran campak tersebut.

Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi di atas bahwa pada kasus penyebaran penyakit campak yang diberikan tiga kontrol yaitu vaksinasi, pengobatan untuk individu terpapar dan pengobatan untuk individu yang terinfeksi dapat mengurangi laju penyebaran penyakit campak tersebut dengan mengurangi populasi individu terpapar dan terinfeksi.

3.3 Keseimbangan dalam Al-Qur'an

Segala sesuatu di dunia ini telah Allah ciptakan secara seimbang. Artinya, Allah menciptakan segala sesuatu berpasang-pasangan untuk saling melengkapi. Hal tersebut, ditetapkan agar kita sebagai makhluk Allah selalu mengingat kekuasaan dan kebesaran Allah. Sebagaimana telah disebutkan dalam Q.S Adh-Dhaariyat ayat 49:

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

“dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah.”

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah menggambarkan bahwa Dia yang menciptakan setiap sesuatunya berpasang-pasangan, bermacam-macam dan beraneka ragam. Misalnya Allah menciptakan kebahagiaan dan kegundahan, petunjuk dan kesesatan, malam dan siang, bumi dan langit, serta Allah menurunkan penyakit disertai dengan penawarnya. Yang demikian ini supaya kita selalu mengingat kekuasaan Allah dan beribadah hanya kepadaNya, karena sesungguhnya hanya Allah yang memberikan kebahagiaan kepada hamba-hambaNya.

Salah satu kekuasaan Allah yang merupakan bentuk keseimbangan di dunia ini yaitu, Allah menurunkan penyakit disertai dengan penawarnya yang disebutkan dalam hadist shahih riwayat Imam Bukhari, bahwa Rasulullah shallallahu 'alaihi wa sallam bersabda:

مَا أَنْزَلَ اللَّهُ دَاءً إِلَّا أَنْزَلَ لَهُ شِفَاءً

“Tidaklah Allah menurunkan penyakit kecuali Dia juga menurunkan penawarnya.”

Isi hadist di atas menjelaskan bahwa jika siapapun dapat mengalami dan mendapatkan ujian sakit di dalam hidupnya. Tetapi, dengan kekuasaanNya Allah telah menciptakan penawar untuk setiap penyakit yang diturunkannya. Sehingga setiap manusia yang diberi ujian sakit oleh Allah dapat sembuh. Hal tersebut sama halnya dalam kasus yang ditulis pada penelitian ini yang menunjukkan kekuasaan Allah dalam menciptakan segala sesuatu dengan seimbang, yaitu Allah menurunkan penyakit campak dengan memberikan penawarnya berupa vaksinasi ataupun pengobatan. Sehingga setiap individu yang rentan terhadap penyakit campak setelah diberikan vaksin akan kebal terhadap penyakit tersebut, serta setiap individu yang terpapar dan terinfeksi penyakit campak setelah diberikan pengobatan akan sembuh.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada titik kesetimbangan bebas penyakit

$$P_0 = \left(\frac{\Lambda(1-q)(\gamma + \mu + \omega)}{\mu(\gamma + \mu + \omega) + u_1(\mu + \omega)}, \frac{\Lambda q + u_1 S}{\gamma + \mu + \omega}, 0, 0, \frac{\omega V_0}{\mu} \right)$$

terbukti stabil asimtotik lokal dan stabil asimtotik global saat $R_v < 1$.

Pada titik kesetimbangan endemik

$$P_1 = \left(\frac{(\mu + \alpha + u_2)(\delta + \mu + u_3)}{\beta(\alpha + \delta + \mu + u_3)}, \frac{\Lambda q + u_1 S^*}{\gamma + \mu + \omega}, \frac{\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1 + \beta I^*)}{\beta S^*}, \frac{\alpha(\Lambda(1-q) + \gamma V^* - S^*(\mu + u_1))}{\beta S^*(\delta + \mu + u_3)}, \frac{u_2 E^* + \omega V^* + u_3 I^*}{\mu} \right)$$

juga terbukti stabil asimtotik lokal saat $R_v < 1$ dan stabil asimtotik global saat

$R_v > 1$.

2. Model penyebaran campak dengan kontrol vaksinasi, pengobatan untuk individu terpapar dan pengobatan untuk individu terinfeksi yang didapatkan yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda(1-q) + \gamma V - \mu S - u_1 S - \beta S(E+I) - \phi_1(t)S \\
\frac{dV}{dt} &= \Lambda q + u_1 S + \phi_1(t)S - \gamma V - \mu V - \omega V \\
\frac{dE}{dt} &= \beta S(E+I) - \mu E - \alpha E - u_2 E - \phi_2(t)E \\
\frac{dI}{dt} &= \alpha E - \delta I - \mu I - u_3 I - \phi_3(t)I \\
\frac{dR}{dt} &= u_2 E + \omega V + u_3 I - \mu R + \phi_3(t)I + \phi_2(t)E
\end{aligned}$$

Penyelesaian kontrol optimal model penyebaran campak tersebut diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin sehingga diperoleh kontrol yang optimal yaitu $\phi_1^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\tilde{S}(\lambda_V - \lambda_S)}{M_3}, 0.9 \right\} \right\}$, $\phi_2^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\tilde{E}(\lambda_R - \lambda_E)}{M_4}, 0.9 \right\} \right\}$ dan $\phi_3^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\tilde{S}(\lambda_R - \lambda_I)}{M_5}, 0.9 \right\} \right\}$ dengan nilai masing-masing λ yang ada pada bab pembahasan.

4.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai analisis kestabilan dari titik-titik kesetimbangannya menggunakan metode Fungsi Lyapunov dan Ukuran Lozinskii. Dibahas juga mengenai kontrol optimal model penyebaran campak dengan vaksinasi, pengobatan individu terpapar dan pengobatan individu terinfeksi disertai dengan simulasi numerik menggunakan aplikasi MATLAB. Selanjutnya disarankan pada penelitian berikutnya untuk memperoleh kestabilan titik-titik kesetimbangannya menggunakan metode lain. Kemudian dibandingkan untuk mendapatkan kelebihan dan kekurangan masing-masing metode, serta mengetahui metode mana yang paling baik dalam menyelesaikan persamaan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- A'maludin, H., Faruk, A., & Cahyono, E. S. (2016). Analisis Kestabilan Model Epidemik SIR untuk Penyakit Tuberkulosis. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA*, 22-24.
- Adhiguna, K., & Pujiyanta, A. (2014). Aplikasi Bantu untuk Menemukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Berbasis Multimedia. *Jurnal Sarjana Teknik Informatika*, Volume 2 Nomor 1, 91-100.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Son.
- Edward, S., E., K. R., T., K. G., Nestory, F., G., M. G., & P., M. A. (2015). A Mathematical Model for Control and Elimination of the Transmission Dynamics of Measles. *Applied and Computational Mathematics*, 4(6):, 396-408.
- Elaydi, S. (2000). *An Introduction to Difference Equations*. Texas: San Antonio.
- Fitria, V. A. (2011). Model Matematika Terhadap Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Rumah Sakit Paru Batu. *Jurnal JITIKA*, Vol. 5, No. 2, 60-62.
- Halim, R. G. (2016). Campak Pada Anak. *CDK-238/ vol.43 no.3*, 186-189.
- Hurint, R. U., Ndi, M. Z., & Lobo, M. (2017). Analisis Sensitivitas Model Epidemi SEIR. *Online Journal of Natural Science Vol 6(1)*, 22-28.
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

- LI, M. Y., & Muldowney, J. S. (1996). A GEOMETRIC APPROACH TO GLOBAL-STABILITY PROBLEMS. *SIAM J. MATH. ANAL*, Vol. 27, No. 4, 12-26.
- Mahmudah, D. E., & Naf'an, M. Z. (2014). KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMIK HOST-VECTOR DENGAN SIMULASI MENGGUNAKAN FORWARD-BACKWARDSWEEP METHOD. *Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasi ASIA*, Vol. 8 No 2, 1-9.
- Marino, S., Hogue, I. B., Ray, C. J., & Kirschner, D. E. (2008). A methodology for performing global uncertainty and sensitivity analysis in systems biology. *Journal of Theoretical Biology* 254, 178-196.
- Munir, R. (2010). *Metode Numerik (Revisi Ketiga)*. Bandung: INFORMATIKA.
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. New York: CRC PRESS.
- Nurani, D. S., Ginanjar, P., & S., L. D. (2012). GAMBARAN EPIDEMIOLOGI KASUS CAMPAK DI KOTA CIREBON TAHUN 2004-2011. *JURNAL KESEHATAN MASYARAKAT*, Volume 1, Nomor 2, 293-294.
- Obumneke, C., Adamu, I. I., & Ado, S. T. (2017). Mathematical Model for the Dynamics of Measles under the Combined Effect of Vaccination and Measles Therapy. *International Journal of Science and Technology (IJST)* – Volume 6 No.6, 862-874.
- Oktafiani, L. D., & A. Kusnanto. (2013). BILANGAN REPRODUKSI DASAR MODEL WEST NILE VIRUS MENGGUNAKAN MATRIKS NEXT GENERATION. *JMA*, Vol. 12, No. 1, 64-68.
- Oktaviasari, K. E. (2018). Hubungan Imunisasi Campak dengan Kejadian Campak di Provinsi Jawa Timur. *Jurnal Berkala Epidemiologi*, 6 (2), 66-173.

Sihombing, S. C., & Dahlia, A. (2018). Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dan Dua disertai Nilai Awal dengan menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Fehlberg (RK45). *Jurnal Matematika Integratif*, Vol. 14, No. 1, 51-60.

Soleh, M., & Rahmah, S. (2012). Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, Vol. 9. No. 2, 113-123.

Sundari, R., & Apriliani, E. (2017). Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan. *JURNAL SAINS DAN SENI ITS* Vol. 6, No.1, 28-32.

Syahril, E., & Garnadi, A. D. (2018). Kuliah Pengantar Kontrol Optimum dan Metode Numerik dalam Scilab. *JMA*, Vol.yy No.1, 4-24.

Umar, P. D., & DEA. (2011). *Metode Optimasi*. Bandung: Muara Indah.

Viriyapong, R., & Ridbamroong, W. (2019). Global Stability Analysis and Optimal Control of Measles Model with Vaccination and Treatment. *Journal of Applied Mathematics and Computing*.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Perhitungan Persamaan Karakteristik Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Menentukan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (3.63)

$$\det(J(P_0) - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - u_1 & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 & 0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega & 0 & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 & \beta S_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 & 0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \lambda & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 & 0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda & 0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& 0 \begin{bmatrix} u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S_0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \\
& -0 \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \lambda & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S_0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \\
& +0 \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \lambda & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \\
& -0 \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \lambda & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S_0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \\
& +(-\mu - \lambda) \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \lambda & \gamma & -\beta S_0 & -\beta S_0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ \beta(E+I) & 0 & \beta S_0 - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S_0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Lampiran 2: Perhitungan Persamaan Karakteristik Titik Keseimbangan

Endemik

Menentukan persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (3.29)

$$\det(J(P_1) - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\beta(E^* + I^*) - \mu - u_1 & \gamma & -\beta S^* & -\beta S^* & 0 \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega & 0 & 0 & 0 \\ \beta(E^* + I^*) & 0 & \beta S^* - \mu - \alpha - u_2 & \beta S^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 & 0 \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$0 \begin{bmatrix} u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ \beta(E^* + I^*) & 0 & \beta S^* - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S^* \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$-0 \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \beta(E^* + I^*) - \lambda & \gamma & -\beta S^* & -\beta S^* \\ \beta(E^* + I^*) & 0 & \beta S^* - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S^* \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$+0 \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \beta(E^* + I^*) - \lambda & \gamma & -\beta S^* & -\beta S^* \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$-0 \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \beta(E^* + I^*) - \lambda & \gamma & -\beta S^* & -\beta S^* \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ \beta(E^* + I^*) & 0 & \beta S^* - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S^* \\ 0 & \omega & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$+(-\mu - \lambda) \begin{bmatrix} -\mu - u_1 - \beta(E^* + I^*) - \lambda & \gamma & -\beta S^* & -\beta S^* \\ u_1 & \gamma - \mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ \beta(E^* + I^*) & 0 & \beta S^* - \mu - \alpha - u_2 - \lambda & \beta S^* \\ 0 & 0 & \alpha & -\delta - \mu - u_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Lampiran 3: Penurunan Nilai $QJ^{[2]}Q^{-1}$

kemudian hitung $QJ^{[2]}Q^{-1}$,

$$\begin{aligned}
 QJ^{[2]} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} -(M_{11}+M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & -M_{11}+M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \beta S \\ 0 & \alpha & -M_{11}+M_{44} & 0 & \gamma & -\beta S \\ -\beta(E+I) & u_1 & 0 & -M_{22}+M_{33} & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & \alpha & -M_{22}+M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E+I) & 0 & 0 & M_{33}+M_{44} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -(M_{11}+M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & -M_{11}+M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \beta S \\ 0 & \alpha & -M_{11}+M_{44} & 0 & \gamma & -\beta S \\ -\beta(E+I) & u_1 & 0 & -M_{22}+M_{33} & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & u_1 E & \alpha E & (-M_{22}+M_{44})E & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E+I)E & 0 & 0 & (M_{33}+M_{44})E \end{bmatrix} \\
 QJ^{[2]}Q^{-1} &= \begin{bmatrix} -(M_{11}+M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & -M_{11}+M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \beta S \\ 0 & \alpha & -M_{11}+M_{44} & 0 & \gamma & -\beta S \\ -\beta(E+I) & u_1 & 0 & -M_{22}+M_{33} & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & u_1 E & \alpha E & (-M_{22}+M_{44})E & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E+I)E & 0 & 0 & (M_{33}+M_{44})E \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} -(M_{11} + M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & -M_{11} + M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \frac{\beta S}{E} \\ 0 & \alpha & -M_{11} + M_{44} & 0 & \frac{\gamma}{E} & \frac{-\beta S}{E} \\ -\beta(E + I) & u_1 & 0 & -M_{22} + M_{33} & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & u_1 E & \alpha E & -M_{22} + M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E + I)E & 0 & 0 & M_{33} + M_{44} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Lampiran 4: Perhitungan Matriks B

$$B = Q_f Q^{-1} + QJ^{[2]}Q^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(M_{11} + M_{22}) & 0 & 0 & \beta S & \beta S & 0 \\ 0 & -M_{11} + M_{33} & \beta S & \gamma & 0 & \frac{\beta S}{E} \\ 0 & \alpha & -M_{11} + M_{44} & 0 & \frac{\gamma}{E} & -\frac{\beta S}{E} \\ -\beta(E + I) & u_1 & 0 & -M_{22} + M_{33} & \frac{\beta S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & u_1 E & \alpha E & -M_{22} + M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \beta(E + I)E & 0 & 0 & M_{33} + M_{44} \end{bmatrix}$$

Lampiran 5: M-File untuk Menggambarkan Simulasi dari Model Penyebaran

Campak Tanpa Kontrol

```
function dydt=ModelCampak(t,y)
global v b m g q a w s u1 u2 u3
%v=lambda, b=beta, m=miu, g=gama, q=q, a=alpha,
%w=omega, s=delta, u1=u1, u2=u2, u3=u3,
dy1=v*(1-q)-b*y(1)*(y(3)+y(4))+g*y(2)-m*y(1)-u1*y(1);
dy2=v*q+u1*y(1)-g*y(2)-m*y(2)-w*y(2);
dy3=b*y(1)*(y(3)+y(4))-m*y(3)-a*y(3)-u2*y(3);
dy4=a*y(3)-s*y(4)-m*y(4)-u3*y(4);
dy5=u2*y(3)+w*y(2)+u3*y(4)-m*y(5);
dydt=[dy1; dy2; dy3; dy4; dy5];
end

clc;clear all;close all;
global v b m g q a w s u1 u2 u3
v=10; b=0.09091; m=0.00875; g=0.16700; q=0.50000; a=0.12500;
w=0.80000; s=0.03000; u1=0.20000; u2=0.10000; u3=0.14286;
time=[0 5];
NilaiAwal=[400; 300; 200; 50; 0];
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelCampak (t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,1),'-', 'LineWidth',2)
hold all
figure(1)
title('Populasi Rentan');
xlabel('t');ylabel('S');
legend('1','2','3','4','5');grid on;

figure(2)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelCampak (t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,2),'-', 'LineWidth',2)
hold all
title('Populasi Divaksin');
xlabel('t');ylabel('V');
legend('1','2','3','4','5');grid on;

figure(3)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelCampak (t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,3),'-', 'LineWidth',2)
hold all
title('Populasi Terpapar');
xlabel('t');ylabel('E');
legend('1','2','3','4','5');grid on;

figure(4)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelCampak (t,y),time,NilaiAwal);
plot(t,y(:,4),'-', 'LineWidth',2)
hold all
title('Populasi Terinfeksi');
xlabel('t');ylabel('I');
legend('1','2','3','4','5');grid on;

figure(5)
[t,y]=ode45(@ (t,y) ModelCampak (t,y),time,NilaiAwal);
```

```
plot(t,y(:,5),'-','LineWidth',2)
hold all
title('Populasi Kebal');
xlabel('t');ylabel('R');
legend('1','2','3','4','5');grid on;
```



Lampiran 6: M-File untuk Menggambarkan Simulasi dari Model Penyebaran

Campak dengan Kontrol

```
%Persamaan State
function dy=State(y,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Phi1,Phi2,Phi3)

x(1)=Ld*(1-Q)+G*y(2)-M*y(1)-U1*y(1)-B*y(1)*(y(3)+y(4))-Phi1*y(1);
x(2)=Ld*Q+U1*y(1)+Phi1*y(1)-G*y(2)-M*y(2)-W*y(2);
x(3)=B*y(1)*(y(3)+y(4))-M*y(3)-A*y(3)-U2*y(3)-Phi2*y(3);
x(4)=A*y(3)-del*y(4)-M*y(4)-U3*y(4)-Phi3*y(4);
x(5)=U2*y(3)+W*y(2)+U3*y(4)-M*y(5)+Phi3*y(4)+Phi2*y(3);
dy=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];

%Persamaan Co-Sate
function
dk=CoSate(y,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Phi1,Phi2,Phi3,M1,M2,M3,M4,M5)

p1=y(1); p2=y(2); p3=y(3); p4=y(4); p5=y(5);
%lamda1=p1, lamda2=p2, lamda3=p3, lamda4=p4, lamda5=p5
x(1)=(-p1*(-M-U1-B*(y(3)+y(4))-Phi1))-(p2*(U1+Phi1))-(p3*B*(y(3)+y(4)));
x(2)=(-p1*G)-(p2*(-G-M-W))-(p5*W);
x(3)=-M1-(p1*B*y(1))-(p3*((B*y(1))-M-A-U2-Phi3))-(p4*A)-(p5*(U2+Phi2));
x(4)=-M2+(p1*B*y(1))-(p3*B*y(1))-(p4*(-del-M-U3-Phi3))-(p5*(U3+Phi3));
x(5)=M*p5;

dg=[x(1) x(2) x(3) x(4) x(5)];
end

clc;
clear all;
close all;
%jumlah popopulasi pada t=0
S0 = 400;
V0 = 300;
E0 = 200;
I0 = 50;
R0 = 0;

%Parameter
Ld = 10;
B = 0.09091;
M = 0.00875;
G = 0.16700;
Q = 0.50000;
A = 0.12500;
W = 0.80000;
del = 0.03000;
U1 = 0.20000;
U2 = 0.10000;
```

```

U3 = 0.14286;

%Variasi bobot pada fungsi tujuan
M1 = 0.1;
M2 = 0.1;

%Bobot biaya kontrol
M3 = 0.1;
M4 = 0.3;
M5 = 0.5;

Phi1max = 0.9; %0<u1<1
Phi2max = 0.9;
Phi3max = 0.9;

h=0.01; %h=1/N misal: h=1/100=0.01
t=0:h:5; %dari 0 sampai 5 dipartisi dengan jarak h=0.01
Z=length(t); %banyaknya t

%membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1 kolom
Phi1=zeros(Z,1);
Phi1old=zeros(Z,1);
Phi2=zeros(Z,1);
Phi2old=zeros(Z,1);
Phi3=zeros(Z,1);
Phi3old=zeros(Z,1);

S=zeros(Z,1);
V=zeros(Z,1);
E=zeros(Z,1);
I=zeros(Z,1);
R=zeros(Z,1);

Sold=zeros(Z,1);
Vold=zeros(Z,1);
Eold=zeros(Z,1);
Iold=zeros(Z,1);

Rold=zeros(Z,1);

%p adalah lambda dsb
p1=zeros(Z,1);
p2=zeros(Z,1);
p3=zeros(Z,1);
p4=zeros(Z,1);
p5=zeros(Z,1);

p1old=zeros(Z,1);
p2old=zeros(Z,1);
p3old=zeros(Z,1);
p4old=zeros(Z,1);
p5old=zeros(Z,1);

%kontrol ada 2 pada Phi dan Phiold
tes=1;
it=0;

```

```

while tes >1e-3
    Phi1old=Phi1;
    Phi2old=Phi2;
    Phi3old=Phi3
    Sold=S; Vold=V; Eold=E; Iold=I; Rold=R;
    p1o=p1; p2o=p2; p3o=p3; p4o=p4; p5o=p5;
    S(1)=S0; V(1)=V0; E(1)=E0; I(1)=I0; R(1)=R0;
    J(it+1)=0;

    for i=1:Z-1

        J(it+1)=J(it+1)+h*((M1*E(i)+M2*I(i))+(1/2*(M3*Phi1old(i)^2+M4*Phi2old(i)^2+M5*Phi3old(i)^2)));

        y=[S(i) V(i) E(i) I(i) R(i)];

        %RungeKutta

        k1=h*State(y,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Phi1old(i),Phi2old(i),Phi3old(i));

        k2=h*State(y+0.5*k1,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Phi1old(i),Phi2old(i),Phi3old(i));

        k3=h*State(y+0.5*k2,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Phi1old(i),Phi2old(i),Phi3old(i));

        k4=h*State(y+k3,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Phi1old(i),Phi2old(i),Phi3old(i));
        y=y+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

        S(i+1)=y(1);
        V(i+1)=y(2);
        E(i+1)=y(3);
        I(i+1)=y(4);
        R(i+1)=y(5);

    end

    J(it+1)=J(it+1)+h*((M1*E(Z)+M2*I(Z))+(1/2*(M3*Phi1(Z)^2+M4*Phi2(Z)^2+M5*Phi3(Z)^2)));

    %Plot populasi tanpa kontrol
    if it == 0
        figure(1)
        plot(t,S,'m--','LineWidth',3);
        legend('Tanpa Kontrol');
        hold on;
        figure(2)
        plot(t,V,'m--','LineWidth',3);
        hold on;
        figure(3)
        plot(t,E,'m--','LineWidth',3);
        hold on;
        figure(4)
        plot(t,I,'m--','LineWidth',3);
    end
end

```

```

hold on;
figure(5)
plot(t,R,'m--','LineWidth',3);
hold on;
end

p1(Z)=0; p2(Z)=0; p3(Z)=0; p4(Z)=0; p5(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;

    y=[p1(je+1) p2(je+1) p3(je+1) p4(je+1) p5(je+1)];

    k1=h*State(y,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Philold(i),Phi2old(i),Phi3old(i));

    k2=h*State(y+0.5*k1,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Philold(i),Phi2old(i),Phi3old(i));

    k3=h*State(y+0.5*k2,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Philold(i),Phi2old(i),Phi3old(i));

    k4=h*State(y+k3,Ld,B,M,G,Q,A,W,del,U1,U2,U3,Philold(i),Phi2old(i),Phi3old(i));
    y=y-(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

    p1(je)=y(1);
    p2(je)=y(2);
    p3(je)=y(3);
    p4(je)=y(4);
    p5(je)=y(5);
    N0(je)=S(je)+V(je)+E(je)+I(je)+R(je);
    temp2=min([(S(je)*(p2(je)-p1(je)))/M3 Philmax]);
    Phi1(je)=max([temp2 0]);
    temp4=min([(E(je)*(p5(je)-p3(je)))/M4 Phi2max]);
    Phi2(je)=max([temp4 0]);
    temp6=min([(I(je)*(p5(je)-p4(je)))/M5 Phi3max]);
    Phi3(je)=max([temp6 0]);
end

eS=sum(abs(S-Sold));
eV=sum(abs(V-Vold));
eE=sum(abs(E-Eold));
eI=sum(abs(I-Iold));
eR=sum(abs(R-Rold));
ep1=sum(abs(p1-p1o));
ep2=sum(abs(p2-p2o));
ep3=sum(abs(p3-p3o));
ep4=sum(abs(p4-p4o));
ep5=sum(abs(p5-p5o));
ePhi1=sum(abs(Phi1-Philold));
ePhi2=sum(abs(Phi2-Phi2old));
ePhi3=sum(abs(Phi3-Phi3old));

%error = sum dari error yang lama dengan yang baru
tes=eS+eV+eE+eI+eR+ep1+ep2+ep3+ep4+ep5+ePhi1+ePhi2+ePhi3;
it=it+1;
Phi1=(0.5*Phi1+0.5*Philold);

```

```

        Phi2=(0.5*Phi2+0.5*Phi2old);
        Phi3=(0.5*Phi3+0.5*Phi3old);
    end

    % Langkah 8
    %Plot populasi dengan kontrol
    figure(1)
    plot(t,S,'r-','LineWidth',3);
    xlabel('Waktu (Tahun)');
    ylabel('S(t)');
    grid on;
    legend('S Tanpa Kontrol','S dengan Kontrol Phi');
    title('Populasi Rentan');
    hold on;

    figure(2)
    plot(t,V,'r-','LineWidth',3);
    xlabel('Waktu (Tahun)');
    ylabel('V(t)');
    grid on;
    legend('V Tanpa Kontrol','V dengan Kontrol Phi');
    title('Populasi Divaksin');
    hold on;

    figure(3)
    plot(t,E,'r-','LineWidth',3);
    xlabel('Waktu (Tahun)');
    ylabel('E(t)');
    grid on;
    legend('E Tanpa Kontrol','E dengan Kontrol Phi');
    title('Populasi Terpapar');
    hold on;

    figure(4)
    plot(t,I,'r-','LineWidth',3);
    xlabel('Waktu (Tahun)');
    ylabel('I(t)');
    grid on;
    legend('I Tanpa Kontrol','I dengan Kontrol Phi');
    title('Populasi Terinfeksi');
    hold on;

    figure(5)
    plot(t,R,'r-','LineWidth',3);
    xlabel('Waktu (Tahun)');
    ylabel('R(t)');
    grid on;
    legend('R Tanpa Kontrol','R dengan Kontrol Phi');
    title('Populasi Kebal');
    hold on;

    figure(6)
    plot(t,Phi1,'r-','LineWidth',3);
    xlabel('Waktu (Tahun)');
    ylabel('Phi^1(t)');
    grid on;
    legend('Kontrol Phi1');
    title('Kontrol Vaksinasi');

```

```

hold on;

figure(7)
plot(t,Phi2,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Tahun)');
ylabel('Phi^2(t)');
grid on;
legend('Kontrol Phi2');
title('Kontrol Pengobatan pada Individu Terpapar');
hold on;

figure(8)
plot(t,Phi3,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Tahun)');
ylabel('Phi^3(t)');
grid on;
legend('Kontrol Phi3');
title('Kontrol Pengobatan pada Individu Terinfeksi');
hold on;

```



RIWAYAT HIDUP



Saidah Ajilatun Nahdawiyah, lahir di Kabupaten Bondowoso pada tanggal 10 Desember 1997, dan bisa dipanggil Ila, tinggal di Dusun Sraten 02 Perumahan Mangga 5 RT/RW 005/012, Desa Prajekan Kidul, Kec. Prajekan, Kabupaten Bondowoso. Anak bungsu dari 2 bersaudara dari Agus Setiyono dan Juwariyah, serta merupakan adik dari Aji Fajar Romadhoni.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Prajekan Lor 01 dan lulus pada tahun 2010, setelah itu melanjutkan ke SMP AR-Rohmah Putri Malang dan lulus pada tahun 2013, kemudian melanjutkan kejenjang SMA di MAN Bondowoso dan lulus pada tahun 2016, lalu melanjutkan kejenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil jurusan Matematika. Selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dia menjadi anggota Mathematics English Club (MEC) dan Mathematics.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Saidah Ajilatun Nahdawiyah
NIM : 16610031
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Global dan Kontrol Optimal Model Penyakit Campak
Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	3 Maret 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2	6 Maret 2020	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	2.
3	21 Maret 2020	Revisi Agama Bab I & Bab II	3.
4	23 Maret 2020	Revisi Bab I, Bab II dan Konsultasi Bab III	4.
5	27 Maret 2020	ACC Bab I & Bab II	5.
6	28 Maret 2020	ACC Agama Bab I & Bab II	6.
7	15 April 2020	Revisi Bab III	7.
8	21 April 2020	Konsultasi Agama Bab III	8.
9	24 April 2020	ACC Bab III dan Konsultasi Bab IV	9.
10	29 April 2020	Revisi Bab IV	10.
11	1 Mei 2020	ACC Keseluruhan	11.
12	1 Mei 2020	ACC Agama Keseluruhan	12.

Malang, 3 Juni 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001