

**EKSENTRISITAS TOTAL DAN INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK
DARI GRAF *NON-NILRADICAL* GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

OLEH
LUTFIATUL QUMAH
NIM. 16610004



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**EKSENTRISITAS TOTAL DAN INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK
DARI GRAF *NON-NIL*RADICAL GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Lutfiatul Qumah
NIM. 16610004**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**EKSENTRISITAS TOTAL DAN INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK
DARI GRAF *NON-NILRADICAL* GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

Oleh
Lutfiatul Qumah
NIM. 16610004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 April 2020

Pembimbing I,



Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIDT. 19900511 20160801 1 057

Pembimbing II,



Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**EKSENTRISITAS TOTAL DAN INDEKS KONEKTIVITAS EKSENTRIK
DARI GRAF *NON-NILRADICAL* GELANGGANG KOMUTATIF
DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

Oleh
Lutfiatul Qumah
NIM. 16610004

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 14 Mei 2020

Penguji Utama : Evawati Alisah, M.Pd
Ketua Penguji : Juhari, S.Pd, M.Si
Sekretaris Penguji : Muhammad Khudzaifah, M.Si
Anggota Penguji : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Lutfiatul Qumah

NIM : 16610004

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik dari
Graf *Non-Nilradical* Gelanggang Komutatif dengan Unsur
Kesatuan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2020
Yang membuat pernyataan



Lutfiatul Qumah
NIM. 16610004

MOTO

Hormati dan muliakan orang tua,

Termasuk orang tua adalah guru.



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda dan Ibunda tercinta, yang selalu menjadi alasan penulis bertahan dan berjuang sampai saat ini, yang selalu mendoakan, memberikan semangat, nasihat dan kasih sayang tiada tara. Serta kakak dan seluruh keluarga yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *Non-Nilradical* Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan”, sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas bimbingan dan arahan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Mohammad Nafie Juhari, M.Si, selaku pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.
6. Evawati Alisah, M.Pd, selaku penguji utama. Atas bimbingan dan arahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Juhari, S.Pd, M.Si, selaku dosen ketua penguji. Atas bimbingan dan arahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 30 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABTRACT.....	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Gelanggang	8
2.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.....	8
2.3 Graf.....	10
2.4 Graf Terhubung	11
2.5 Graf <i>Non-Nilradical</i> Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan	12
2.6 Eksentrisitas Titik.....	12
2.7 Derajat Titik	13
2.8 Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik.....	13
2.9 Kongruensi Linier	14
2.10 Al-Qur'an Sebagai Penyempurna Kitab-kitab Terdahulu.....	14

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Eksentrisitas Total dari Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{2p}	17
3.1.1	Eksentrisitas Total dari Graf <i>Non-nilradical</i> \mathbb{Z}_6	17
3.1.2	Eksentrisitas Total dari Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{10}	20
3.1.3	Eksentrisitas Total dari Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{14}	22
3.1.4	Eksentrisitas Total dari Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{22}	26
3.2	Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf <i>Non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{2p}	38
3.2.1	Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf <i>Non-nilradical</i> \mathbb{Z}_6	38
3.2.2	Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{10} ...	40
3.2.3	Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf <i>NonNilradical</i> \mathbb{Z}_{14} ...	44
3.2.4	Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{22}	47
3.3	Keterkaitan Antar Disiplin Ilmu	61

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	63
4.2	Saran.....	63

DAFTAR PUSTAKA	64
RIWAYAT HIDUP	64

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$	17
Tabel 3.2	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$	18
Tabel 3.3	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, +, \times)$	20
Tabel 3.4	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, +, \times)$	21
Tabel 3.5	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{14}, +, \times)$	23
Tabel 3.6	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{14}, +, \times)$	24
Tabel 3.7	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{22}, +, \times)$	27
Tabel 3.8	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{22}, +, \times)$	29
Tabel 3.9	Total Eksentrisitas dari graf <i>non-nilradical</i> gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}	32
Tabel 3.10	Perhitungan Total Eksentrisitas dari graf <i>non-nilradical</i> gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}	34
Tabel 3.11	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$	38
Tabel 3.12	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$	39
Tabel 3.13	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, +, \times)$	41
Tabel 3.14	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, +, \times)$	41
Tabel 3.15	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{14}, +, \times)$	44
Tabel 3.16	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{14}, +, \times)$	45
Tabel 3.17	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{22}, +, \times)$	48
Tabel 3.18	Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{22}, +, \times)$	50
Tabel 3.19	Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf <i>non-nilradical</i> gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}	54
Tabel 3.20	Perhitungan Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf <i>non-nilradical</i> gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}	56

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf G	11
Gambar 2.2	Graf Terhubung dan Tak Terhubung	12
Gambar 2.3	Eksentrisitas Graf G	13
Gambar 3.1	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_6 ($\Omega(\mathbb{Z}_6)$)	18
Gambar 3.2	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{10} ($\Omega(\mathbb{Z}_{10})$)	21
Gambar 3.3	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{14} ($\Omega(\mathbb{Z}_{14})$)	24
Gambar 3.4	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{22} ($\Omega(\mathbb{Z}_{22})$)	30
Gambar 3.5	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_6 ($\Omega(\mathbb{Z}_6)$)	39
Gambar 3.6	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{10} ($\Omega(\mathbb{Z}_{10})$)	42
Gambar 3.7	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{14} ($\Omega(\mathbb{Z}_{14})$)	45
Gambar 3.8	Graf <i>non-nilradical</i> \mathbb{Z}_{22} ($\Omega(\mathbb{Z}_{22})$)	51

ABSTRAK

Qumah, Lutfiatul, 2020. **Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *Non-Nilradical* Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Muhammad Khudzaifah, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: eksentrisitas total, indeks konektivitas eksentrik, ring komutatif dengan unsur kesatuan, graf *non-nilradical*.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung sederhana. Eksentrisitas Total dari graf G didefinisikan sebagai $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$, dengan $e(v)$ adalah eksentrisitas dari titik v di G . Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf G didefinisikan sebagai $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v) \deg(v)$, dengan $\deg(v)$ merupakan derajat dari titik v di G . Penelitian ini bertujuan untuk menentukan eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan pada modulo \mathbb{Z}_{2p} dengan $p \geq 3$, p prima. Diperoleh dengan terlebih dahulu mencari unsur *non-nilpoten zero-divisor* selanjutnya mencari titik yang akan terhubung langsung sehingga membentuk graf *non-nilradical*. Kemudian mencari eksentrisitas titik dan derajat titik.

Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut, eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan bilangan bulat modulo $2p$ dengan $p \geq 3$, p prima adalah $\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 2p - 1$, dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan bilangan bulat modulo $2p$ dengan $p \geq 3$, p prima adalah $\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 3(p - 1)$.

ABSTRACT

Qumah, Lutfiatul, 2020. **Total Eccentricity and Eccentric Connectivity Index of Non-Nilradical Graph of Commutative Ring with Unity.** Essay. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Muhammad Khudzaifah, M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Sc.

Keywords: total eccentricity, eccentric connectivity index, commutative ring with unitary, non-nilradical graphs.

Suppose that $G = (V, E)$ is a simple connected graph. The total eccentricity of graph G is defined as $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$, where $e(v)$ is an eccentricity of the vertex v in G . The eccentric connectivity index of a graph G is defined as $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v) \deg(v)$, with $\deg(v)$ is the degree of the vertex v in G . The objectives of this research were to determine the total eccentricity and eccentric connectivity index of non-nilradical graph of commutative ring with unity modulo \mathbb{Z}_{2p} with $p \geq 3$, p is prime. The steps of the research are to determine a non-nilpotent zero-divisor, to determine a vertex to be adjacent to form a non-nilradical graph, and to determine eccentricity and degree of vertex.

The results of this research showed that, the total eccentricity of non-nilradical graph of commutative ring with unity modulo $2p$ with $p \geq 3$, p is prime is $\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 2p - 1$, and the eccentric connectivity index of non-nilradical graphs of commutative ring with unity modulo $2p$ with $p \geq 3$, p is prime is $\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 3(p - 1)$.

ملخص

قمة ، لطفية. ٢٠٢٠ . الانحراف الكامل و مئشر الربط الانحراف من الرسوم البياني ساحة التبادلية غير عدم الجدرية مع العناصر الوجدوية. البحث العلمي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية بمالانج. تحت الإشراف: (1) محمد خديفة , الماجستير ، (2) محمد نافع جوهاري ، الماجستير .

الكلمات المفتاحية : الانحراف الكامل, مئشر الربط الانحراف , الساحة التبادلية مع العناصر الوجدوية , الرسوم البيانية غير عدم الجدرية

على سبيل المثال $G = (V, E)$ هو رسم بياني متصل بسيط. الانحراف الكامل من الرسم البياني G يعرف بأنه $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$ مع $e(v)$ هي الانحراف من نقطة v في G . مئشر الربط الانحراف من رسم بياني G يعرف بأنه $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v) \deg(v)$ مع $\deg(v)$ هي درجة من نقطة v في G . تهدف هذه الدراسة إلى تحديد الانحراف الكامل و مئشر الربط الانحراف لرسوم بيانية ساحة التبادلية غير عدم الجدرية مع العناصر الوجدوية \mathbb{Z}_{2p} مودولو (modulo) مع p الرقم الرئسي, $p \geq 3$. تم الحصول عليها عن طريق بحث مقسوم غير عدم الفوع لصفر ثم البحث عن نقطة ليتم توصيلها مباشرة لتشكيل رسم البيانية غير عدم الجدرية. ثم بحث عن الانحراف و درجة النقطة.

نتائج هذه الدراسة هي كما يلي, الانحراف الكامل رسوم بيانية غير عدم الجدرية للساحة التبادلية مع العناصر الوجدوية مودولو (modulo) 2 مع p الرقم الرئسي, $p \geq 3$

$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 2p - 1$ و مئشر الربط الانحراف من الرسوم البيانية غير عدم الجدرية للساحة

التبادلية مع العناصر الوجدوية مودولو (modulo) 2 مع p الرقم الرئسي, $p \geq 3$

$$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 3(p - 1)$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan dan teknologi merupakan dua unsur yang tidak dapat dipisahkan satu sama lain. Ilmu adalah sumber teknologi yang mampu memberikan kemungkinan munculnya berbagai penemuan rekayasa dan ide-ide. Adapun teknologi adalah terapan atau aplikasi dari ilmu yang ditunjukkan dalam hasil nyata yang lebih canggih dan dapat mendorong manusia untuk berkembang lebih maju lagi.

Sebagai umat Islam kita harus menyadari bahwa dasar-dasar filosofi untuk mengembangkan ilmu dan teknologi dapat dikaji dan digali dalam Al-Quran. Sebagaimana firman Allah di dalam Al-Quran surat Al-Mulk ayat 19 yang artinya:

“Tidakkah mereka memperhatikan burung-burung yang mengembangkan dan mengatupkan sayapnya di atas mereka? Tidak ada yang menahannya (di udara) selain Yang Maha Pengasih. Sungguh, Dia Maha Melihat segala sesuatu.”

Dalam Tafsir Al-Muntakhab dijelaskan bahwa terbangnya burung adalah suatu keajaiban yang baru diketahui setelah ilmu aeronautika dan teori aerodinamika berkembang. Yang mengagumkan adalah apabila seekor burung dapat terbang di udara tanpa menggerakkan kedua sayapnya. Ilmu pengetahuan membuktikan bahwa burung-burung yang terbang tanpa menggerakkan kedua sayapnya itu sebenarnya terbang di atas aliran-aliran udara yang muncul, baik karena benturan udara dengan segala sesuatu yang menghalanginya atau karena tingginya tekanan udara panas (Shihab, 2003).

Berdasarkan ayat tersebut manusia berhasil mengolah akal pikiran yang diberikan Allah sehingga mereka mampu menciptakan pesawat terbang. Pembuatan pesawat terbang menggunakan pengaplikasian ilmu fisika yang mana dalam aplikasi tersebut menggunakan perhitungan matematika. Ilmu matematika tidak hanya dapat diaplikasikan pada bidang fisika. Bidang kimia, biologi, dan farmasi juga dapat diaplikasikan menggunakan ilmu matematika. Salah satu contoh pengaplikasian matematika pada bidang farmasi dan kimia adalah penelitian dengan judul *Application of Graph Theory: Relationship of Eccentric Connectivity Index and Wiener's Index with Anti-inflammatory Activity* yang menghitung prediksi keakuratan obat anti peradangan menggunakan indeks konektivitas eksentrik. Pada penelitian kali ini akan digunakan objek lain dalam menghitungnya.

Graf adalah salah satu cabang dalam penelitian matematika. Penelitian graf dilakukan untuk menemukan teorema-teorema baru serta mengembangkan teorema-teorema yang sudah ditemukan. Pengertian graf di dalam buku *Graphs and Digraphs Sixth Edition* karangan Chartrand dkk. (2016) yakni pasangan terurut dari himpunan V yang merupakan himpunan tak kosong dan terbatas dari titik dan himpunan E yang merupakan himpunan sisi. Graf G memiliki himpunan titik V dan himpunan sisi E , maka tulis sebagai $G = (V, E)$, untuk menekankan bahwa V dan E adalah titik dan sisi pada G maka sering dituliskan V sebagai $V(G)$ dan E sebagai $E(G)$.

Salah satu topik pada teori graf adalah eksentrisitas. Eksentrisitas dari titik u pada graf G adalah panjang maksimal dari titik u ke titik-titik lain pada graf G yang dinotasikan dengan $e(u)$ adalah $e(u) = \max\{d(u, v) | v \in V(G)\}$

(Kusmayadi & Sudiby, 2011). Topik yang dikaji pada eksentrisitas adalah Eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik, jenis dari indeks topologi.

Indeks topologi yang juga dikenal sebagai indeks konektivitas adalah jenis deskriptor molekuler yang dihitung berdasarkan grafik molekul suatu senyawa kimia. Indeks topologi digunakan misalnya dalam pengembangan hubungan struktur-aktivitas kuantitatif (QSARs) dimana aktivitas biologis atau sifat-sifat molekul lainnya berkorelasi dengan struktur kimianya. Pengembangan QSARs dengan menggunakan indeks konektivitas eksentrik sedang diterapkan dibanyak disiplin ilmu, misalnya dibidang kimia untuk menggambarkan dan memprediksi struktur molekul dalam batasan ruang tiga dimensi (3-D) dan dibidang farmasi untuk optimalisasi dan penemuan obat.

Eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik pada penelitian ini akan diterapkan pada ilmu matematika. Eksentrisitas total dari graf G didefinisikan sebagai $\xi(G) = \sum_{v \in V} e(v)$, dengan $e(v)$ adalah eksentrisitas (Fathalikhani dkk, 2014). Sedangkan, indeks konektivitas eksentrik dari graf G yang dinotasikan dengan $(\xi^c(G))$ didefinisikan sebagai $\xi^c(G) = \sum_{v \in V} e(v) \deg(v)$ dimana $e(v)$ disebut eksentrisitas dan $\deg(v)$ adalah derajat yaitu banyaknya sisi yang terhubung langsung dari v di G (Sharma dkk, 1997).

Eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik yang akan diteliti yaitu pada graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_n adalah graf yang himpunan titiknya adalah unsur dari \mathbb{Z}_n yang *non-nilpoten zero-divisor* dan akan terhubung langsung jika dan hanya jika hasil perkaliannya adalah 0 (Shalini, 2017). Graf *non-nilradical* pada penelitian ini menggunakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Penelitian sebelumnya mengenai Eksentrisitas total telah diteliti oleh De, Pal, & Nayeem (2015) dengan judul Eksentrisitas Total pada beberapa Graf Komposit, Fathalikhani, Hamed, dan Hasan (2014) dengan judul Eksentrisitas Total pada beberapa Operasi Graf. Penelitian indeks konektivitas eksentrik telah diteliti oleh Zhou, B. and Du, Z. (2010) dengan judul Indeks Konektivitas Eksentrik dan Došlic & Saheli (2014) dengan judul Indeks Konektivitas Eksentrik pada Graf Komposit. Sedangkan eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik telah diteliti oleh Lila A.P (2019) dengan judul Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf Identitas Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan. Dengan demikian, penelitian ini akan difokuskan untuk menentukan Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *Non-nilradical* Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana rumus umum Eksentrisitas Total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan?
2. Bagaimana rumus umum Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menemukan rumus umum Eksentrisitas Total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Menemukan rumus umum Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai rumus umum dari Eksentrisitas Total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Memberikan informasi mengenai rumus umum dari Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

1.5 Batasan Masalah

Fokus pembahasan dan penelitian ini adalah eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical*. Graf yang digunakan dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p} . Penelitian ini hanya memfokuskan pada bilangan bulat modulo $2p$, $p \geq 3$, p prima.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kajian pustaka. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji buku-buku ataupun jurnal yang membahas mengenai topik teori graf dan aljabar. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus yang kemudian diperumum dan bersifat deduktif. Adapun langkah-langkah penelitian ini yaitu:

1. Menentukan anggota dari \mathbb{Z}_{2p} .
2. Menentukan unsur *non-nilpoten zero divisor* dari \mathbb{Z}_{2p} .
3. Menentukan titik yang akan terhubung langsung dari unsur *non-nilpoten zero divisor* yang merupakan pembagi nol .
4. Membangun dan menggambar representasi graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
5. Menentukan eksentrisitas dan derajat untuk setiap titik.
6. Menentukan eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.
7. Membuat dugaan (konjektur) eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
8. Merumuskan konjektur tentang eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik sebagai suatu proposisi.
9. Menghasilkan suatu proposisi tentang eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab terdiri dari beberapa subbab. Sistematika tersebut dimaksudkan agar penulisan lebih terarah dan mudah dipahami. Sistematika tersebut yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka berisi mengenai teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan. Pada penelitian ini teori yang digunakan meliputi: teori graf, eksentrisitas total, indeks konektivitas eksentrik, graf *non-nilradical*, gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi mengenai penyelesaian terhadap permasalahan eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Bab IV Penutup

Penutup berisi simpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelanggang

Gelanggang R adalah suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu $+$ sebagai operasi pertama dan \times sebagai operasi kedua berturut-urur disebut operasi tambah dan operasi kali, keduanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma berikut:

- a. $(R, +)$ adalah grup abelian,
- b. Operasi \times bersifat tertutup di R ,
- c. Operasi \times bersifat asosiatif di R , yaitu $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad \forall a, b \in R$,
- d. Operasi \times bersifat distributif terhadap operasi $+$ di R baik distributif kiri maupun kanan,

Untuk semua $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ dan $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

(Dummit dan Foote, 1991)

2.2 Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah gelanggang. Jika terdapat suatu unsur e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$ untuk setiap x di R , maka e disebut unsur kesatuan dan R adalah gelanggang dengan unsur kesatuan. Jika R komutatif terhadap operasi perkalian, maka R disebut gelanggang komutatif. Sehingga, R

yang komutatif dan mempunyai unsur kesatuan terhadap operasi perkalian disebut gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Misalkan $(R, +, \times)$ sebagai gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yaitu e dan $x \in R$. Jika terdapat suatu unsur y di R sedemikian sehingga $xy = yx = e$, maka y merupakan invers pada operasi perkalian dari x dan x disebut kesatuan (*invertible element*) di R (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Teorema 2.1

Misalkan $\mathbb{Z}_{2p} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 2p - 1\}$ adalah semigrup dibawah operasi perkalian modulo $2p$, p bilangan prima ganjil maka \mathbb{Z}_{2p} tidak memiliki unsur *nilpotent* (Vasantha dan Florentin, 2012).

Contoh

Diberikan $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ dengan \mathbb{Z}_n adalah himpunan bilangan bulat modulo n , maka berdasarkan definisi gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dapat diselidiki

1. $(\mathbb{Z}_n, +)$ adalah grup abelian
 - $a, b \in \mathbb{Z}_n$ maka $(a + b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$,
 - $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ maka $((a + b) + c) \bmod n = (a + (b + c)) \bmod n$,
 - $a \bmod n + 0 = 0 + a \bmod n = a \bmod n$; dengan 0 adalah identitas terhadap operasi tambah,
 - $(a + (-a)) \bmod n = ((-a) + a) \bmod n = 0$ dengan $(-a) \in \mathbb{Z}_n$ adalah invers dari a ,
 - $(a + b) \bmod n = (b + a) \bmod n$.
2. Operasi \times tertutup di \mathbb{Z}_n

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_n$ maka $(a \times b) \bmod n \in \mathbb{Z}_n$.
3. Operasi \times bersifat asosiatif di \mathbb{Z}_n

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $(a \times (b \times c)) \bmod n = ((a \times b) \times c) \bmod n$.

4. Operasi \times bersifat distributif terhadap operasi $+$ di \mathbb{Z}_n

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $(a \times (b + c)) \bmod n = ((a \times b) + (a \times c)) \bmod n$ dan $((a + b) \times c) \bmod n = ((a \times c) + (b \times c)) \bmod n$.

5. Operasi \times mempunyai identitas

Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_n$ maka $a \times i = i \times a = a$ diperoleh $i = 1 \in \mathbb{Z}_n$.

6. Operasi \times bersifat komutatif

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_n$ maka $(a \times b) \bmod m = (b \times a) \bmod m$.

Jadi $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Dari definisi gelanggang, untuk operasi kedua yakni operasi perkalian harus memenuhi aksioma:

1. Operasi \times bersifat tertutup,
2. Operasi \times bersifat asosiatif dan
3. Operasi \times bersifat distributif.

Aksioma tersebut sama dengan aksioma dalam semigrup, sehingga dapat disimpulkan bahwa gelanggang \mathbb{Z}_n adalah semigrup.

2.3 Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $a(G)$,

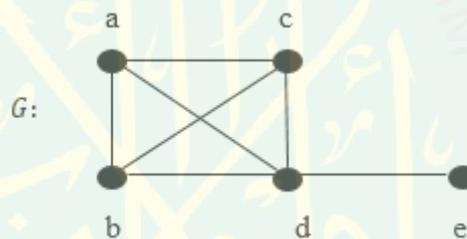
dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $b(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis a dan b . Graf dengan order a dan ukuran b dapat disebut graf (a, b) (Abdussakir dkk, 2009).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ seperti berikut ini.

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf G tersebut secara lebih jelas dapat digambar sebagai berikut.

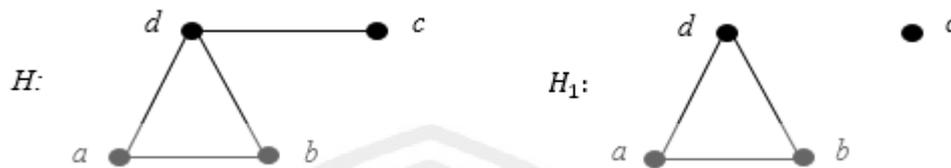


Gambar 2.1 Graf G

2.4 Graf Terhubung

Sisi uv dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = uv$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), titik u dan v disebut ujung dari sisi e (Chartrand, dkk, 2016). Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Titik u dan v dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Sebaliknya, jika terdapat dua titik u dan v di G tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G , maka G dikatakan tak

terhubung (Abdussakir dkk, 2009). Graf H dari Gambar 2.2 adalah graf terhubung sedangkan graf H_1 adalah graf tak terhubung.



Gambar 2.2 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

2.5 Graf *Non-Nilradical* Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Definisi 2.1

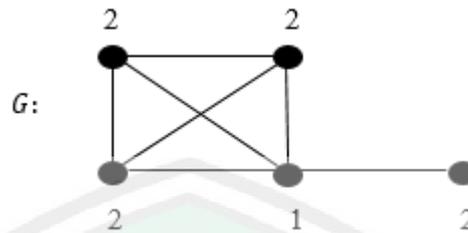
Graf *non-nilradical* dinotasikan dengan $\Omega(R)$ adalah graf dengan himpunan titiknya merupakan *non-nilpotent zero divisor* dari R dan dua titik akan terhubung langsung dengan sisi jika dan hanya jika *zero divisor*. Unsur r dikatakan *nilpotent*, $nil(R)$ jika $r^n = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif n . Sedangkan unsur $z \in R$ dikatakan *zero divisor* jika terdapat $r \in R$ dan $r \neq 0$ sedemikian sehingga $rz = 0$ (Abigail dkk., 2008).

2.6 Eksentrisitas Titik

Jarak (*distance*) merupakan panjang lintasan terpendek suatu titik u ke titik v di G yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Sedangkan $d(u)$ merupakan notasi untuk jumlah semua $d(u, v)$ dari titik u ke titik v di G . Apabila u, v tidak terhubung maka $d(u, v) = \infty$. Eksentrisitas dari titik u di G adalah jarak maksimal dari titik u ke titik-titik lain pada graf G yang dinotasikan dengan $e(u)$.

Sehingga, $e(u) = \max\{d(u, v) | v \in V(G)\}$ (Kusmayadi & Sudiby, 2011).

Eksentrisitas titik graf G pada Gambar 2.1 ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Eksentrisitas Graf G

2.7 Derajat Titik

Derajat dari titik v di graf G , dinotasikan $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan titik v . Jika dalam suatu pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka notasi $\deg_G(v)$ disingkat $\deg(v)$. Titik terasing atau titik terisolasi adalah titik yang berderajat 0. Titik ujung atau titik akhir adalah titik yang berderajat 1. Titik genap adalah titik yang berderajat genap dan Titik ganjil adalah titik yang berderajat ganjil (Abdussakir dkk., 2009).

2.8 Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik

Eksentrisitas Total dari graf G didefinisikan sebagai $\xi(G) = \sum_{v \in V} e(v)$, dengan $e(v)$ adalah eksentrisitas titik v di G (Fathalikhani dkk, 2014). Indeks Konektivitas Eksentrik ($\xi^c(G)$) pada graf G didefinisikan:

$$\xi^c(G) = \sum_{v \in V} e(v) \deg(v),$$

dimana $e(v)$ disebut eksentrisitas dari v di G . Sedangkan $\deg(v)$ adalah derajat titik yaitu banyaknya sisi yang terhubung langsung dengan v di G (Sharma dkk, 1997).

2.9 Kongruensi Linier

Definisi 2.2

Misalkan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ adalah suatu sistem residu lengkap modulo m . Banyaknya penyelesaian dari $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ adalah banyaknya s_i yang memenuhi $f(s_i) \equiv 0 \pmod{m}$ (Wahyu dkk, 2014).

Teorema 2.2

Kongruensi linier $ax \equiv b \pmod{m}$ dapat diselesaikan hanya jika $d = \text{fpb}(a, m)$ membagi b , dan pada kasus ini memiliki d penyelesaian. Jika a dan m relatif prima atau $d = 1$ maka kongruensi tersebut memiliki satu penyelesaian (Wahyu dkk, 2014).

2.10 Al-Qur'an Sebagai Penyempurna Kitab-kitab Terdahulu

Al-Qur'an merupakan puncak dan penutup wahyu Allah yang hanya diperuntukkan bagi manusia, disampaikan kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'alaihi wa sallam. Berkaitan dengan adanya kitab-kitab yang dipercayai diturunkan kepada nabi-nabi sebelum Muhammad SAW dalam agama Islam (Taurat, Zabur, Injil, lembaran Ibrahim), Al-Qur'an dalam beberapa ayatnya menegaskan posisinya terhadap kitab-kitab tersebut. Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-Maidah ayat 48 yang artinya:

“Dan Kami telah menurunkan Kitab (Al-Quran) kepadamu (Muhammad) dengan membawa kebenaran, yang membenarkan kitab-kitab yang di turunkan sebelumnya dan menjaganya,...”

Kitab dalam firman Allah ini ditujukan kepada Nabi Muhammad, (*Kitab*) Al-Quran di turunkan dengan membawa perkara-perkara dan hukum-hukum yang benar. Al-Quran memiliki derajat yang lebih tinggi dan lebih luhur daripada kitab-kitab lain. Firman Allah menunjukkan kepada takwil orang-orang yang mengatakan adanya keutamaan, yakni dari sisi banyaknya pahala, sebagaimana yang telah disinggung dalam surat Al-Fatihah (Al-Qurthubi, 2008).

Makna firman-Nya, *bil-haqqi* “Dengan membawa kebenaran,” adalah tidak ada kebohongan di dalamnya dan tidak ada keraguan terhadapnya. *Mushoddiqollima baina yadaihi minal kitab* “Membenarkan apa yang sebelumnya, yaitu kitab-kitab (yang di turunkan sebelumnya),” maksudnya adalah , “Kami menurunkannya untuk membenarkan kitab-kitab yang di turunkan sebelumnya kepada para nabi-Nya”. *Wa muhaiminan ‘alaihi* “Dan batu ujian terhadap kitab-kitab yang lain itu,” maksudnya adalah “Kami menurunkan kitab kepadamu wahai Muhammad, untuk membenarkan kitab-kitab sebelumnya dan sebagai saksi baginya bahwa ia benar datang dari Allah dan dijaga oleh-Nya”.

Asal makna lafadz *alhaimanah* adalah menjaga dan mengawal. Dikatakan, “Jika seseorang mengawal sesuatu dan menjaganya serta menyaksikannya, maka ia benar-benar menjadi *Muhaimin* (Penjaga dan Pengawas) baginya”. Pendapat ini sesuai dengan pernyataan ahli takwil, hanya saja terdapat perbedaan dalam ungkapan yang digunakan (Ath-Thabari, 2008).

Kitab Al-Quran di turunkan sebagai penyempurna agama, memuat kebenaran, dan ditetapkan sebagai kitab yang tidak didatangi kabitilan, baik dari

depan maupun dari belakang. Al-Quran membenarkan kitab-kitab Ilahi yang turun sebelumnya, seperti Taurat dan Injil dan menjadi ukuran (untuk menentukan ukuran benar tidaknya ayat-ayat yang di turunkan dalam kitab-kitab sebelumnya) dan saksi atas kitab-kitab dengan memberikan keterangan mengenai hakekat kitab-kitab yang sebenarnya (Al-Maraghi, 1987).

Demikianlah Allah menganjurkan agar umatnya selalu berusaha dan menggunakan akalnya untuk menjadikan hidup lebih baik. Sebagaimana dalam matematika selalu dilakukan penelitian-penelitian baru agar didapatkan rumus-rumus yang lebih mudah dipahami dan dimengerti. Selain itu matematika juga memberikan manfaat bagi ilmu lain seperti farmasi, biologi, kimia, dan fisika, hal tersebut membuat perubahan dan penyempurnaan penelitian sebelumnya pada bidang ilmu yang dikaji.

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang rumus umum eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Dalam pencarian rumus, terlebih dahulu ditentukan dan ditunjukkan nilai eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$, dan \mathbb{Z}_{22} dengan $3 \leq p \leq 11$ dan p prima.

3.1 Eksentrisitas Total dari Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{2p}

Subbab ini membahas tentang rumus umum eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$, dan \mathbb{Z}_{22} dengan $3 \leq p \leq 11$ dan p prima.

3.1.1 Eksentrisitas Total dari Graf *Non-nilradical* \mathbb{Z}_6

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_6

Tabel 3.1 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_6, +, \times$)

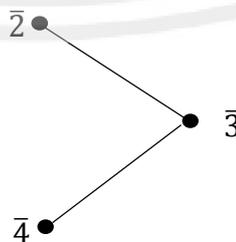
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.1 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_6 adalah $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{2p} adalah unsur *zero divisornya*. Sehingga unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_6 terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.2 Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$

\times	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.2 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{3}$, dan $\bar{4}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_6 ditunjukkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Graf *non-nilradical* $\mathbb{Z}_6, \Omega(\mathbb{Z}_6)$

Berdasarkan Gambar 3.1, dapat ditentukan eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_6)$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} e(\bar{2}) &= \max\{d(\bar{2}, \bar{3}), d(\bar{2}, \bar{4})\} \\ &= \max\{(1), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{3}) &= \max\{d(\bar{3}, \bar{2}), d(\bar{3}, \bar{4})\} \\ &= \max\{(1), (1)\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{4}) &= \max\{d(\bar{4}, \bar{3}), d(\bar{4}, \bar{2})\} \\ &= \max\{(1), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat, titik yang terhubung langsung dengan semua titik di $V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\bar{3})=1$ dan titik yang lainnya $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = 2$.

Setelah diketahui eksentrisitas masing-masing titik pada $\Omega(\mathbb{Z}_6)$, dapat dihitung eksentrisitas total dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi(\Omega(\mathbb{Z}_6)) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_6))} e(v) \\ &= e(\bar{2}) + e(\bar{3}) + e(\bar{4}) \\ &= 2 + 1 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 ($\Omega(\mathbb{Z}_6)$) adalah 5.

3.1.2 Eksentrisitas Total dari Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{10}

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{10}

Tabel 3.3 Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{10}, +, \times)$

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$										
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$								
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

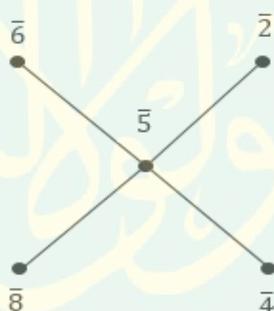
Berdasarkan Tabel 3.3 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{10} adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{10} terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.4 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{10}, +, \times$)

\times	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.4 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ dan $\bar{8}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{10} ditunjukkan pada Gambar 3.2.

**Gambar 3.2** Graf *non-nilradical* $\mathbb{Z}_{10}, \Omega(\mathbb{Z}_{10})$

Berdasarkan Gambar 3.2, dapat dicari eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 e(\bar{2}) &= \max\{d(\bar{2}, \bar{4}), d(\bar{2}, \bar{5}), d(\bar{2}, \bar{6}), d(\bar{2}, \bar{8})\} \\
 &= \max\{(2), (1), (2), (2)\} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{4}) &= \max\{d(\bar{4}, \bar{2}), d(\bar{4}, \bar{5}), d(\bar{4}, \bar{6}), d(\bar{4}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{5}) &= \max\{d(\bar{5}, \bar{2}), d(\bar{5}, \bar{4}), d(\bar{5}, \bar{6}), d(\bar{5}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(1), (1), (1), (1)\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{6}) &= \max\{d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{4}), d(\bar{6}, \bar{5}), d(\bar{6}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{8}) &= \max\{d(\bar{8}, \bar{2}), d(\bar{8}, \bar{4}), d(\bar{8}, \bar{5}), d(\bar{8}, \bar{6})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\bar{5})=1$ dan titik yang lainnya $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = 2$.

Setelah diketahui eksentrisitas masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$, dapat dihitung eksentrisitas total dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi(\Omega(\mathbb{Z}_{10})) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{10}))} e(v) \\ &= e(\bar{2}) + e(\bar{4}) + e(\bar{5}) + e(\bar{6}) + e(\bar{8}) \\ &= 2 + 2 + 1 + 2 + 2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 ($\Omega(\mathbb{Z}_{10})$) adalah 9.

3.1.3 Eksentrisitas Total dari Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{14}

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{14}

Tabel 3.5 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{14}, +, \times$)

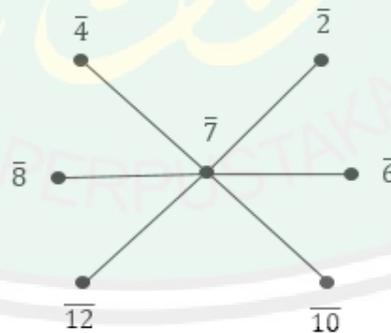
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.5 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{14} adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$. Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{14} terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.6 Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_{14}, +, \times)$

\times	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$
$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.6 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}$ dan $\bar{12}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{14} ditunjukkan pada Gambar 3.3.

**Gambar 3.3** Graf *non-nilradical* $\mathbb{Z}_{14}, \Omega(\mathbb{Z}_{14})$

Berdasarkan Gambar 3.3, dapat dicari eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke

sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} e(\bar{2}) &= \max\{d(\bar{2}, \bar{4}), d(\bar{2}, \bar{6}), d(\bar{2}, \bar{7}), d(\bar{2}, \bar{8}), d(\bar{2}, \bar{10}), d(\bar{2}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{4}) &= \max\{d(\bar{4}, \bar{2}), d(\bar{4}, \bar{6}), d(\bar{4}, \bar{7}), d(\bar{4}, \bar{8}), d(\bar{4}, \bar{10}), d(\bar{4}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{6}) &= \max\{d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{4}), d(\bar{6}, \bar{7}), d(\bar{6}, \bar{8}), d(\bar{6}, \bar{10}), d(\bar{6}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{7}) &= \max\{d(\bar{7}, \bar{2}), d(\bar{7}, \bar{4}), d(\bar{7}, \bar{6}), d(\bar{7}, \bar{8}), d(\bar{7}, \bar{10}), d(\bar{7}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(1), (1), (1), (1), (1), (1)\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{8}) &= \max\{d(\bar{8}, \bar{2}), d(\bar{8}, \bar{4}), d(\bar{8}, \bar{6}), d(\bar{8}, \bar{7}), d(\bar{8}, \bar{10}), d(\bar{8}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{10}) &= \max\{d(\bar{10}, \bar{2}), d(\bar{10}, \bar{4}), d(\bar{10}, \bar{6}), d(\bar{10}, \bar{7}), d(\bar{10}, \bar{8}), d(\bar{10}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{12}) &= \max\{d(\bar{12}, \bar{2}), d(\bar{12}, \bar{4}), d(\bar{12}, \bar{6}), d(\bar{12}, \bar{7}), d(\bar{12}, \bar{8}), d(\bar{12}, \bar{10})\} \\ &= \max\{(2), (2), (2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\bar{7})=1$ dan titik yang lainnya $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = e(\bar{10}) = e(\bar{12}) = 2$.

Setelah diketahui eksentrisitas masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$, dapat dihitung eksentrisitas total dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{14})) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{14}))} e(v) \\
&= e(\bar{2}) + e(\bar{4}) + e(\bar{6}) + e(\bar{7}) + e(\bar{8}) + e(\bar{10}) + e(\bar{12}) \\
&= 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 \\
&= 13
\end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 ($\Omega(\mathbb{Z}_{14})$) adalah 13.

3.1.4 Eksentrisitas Total dari Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{22}

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 adalah $\mathbb{Z}_{22} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{15}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{20}, \bar{21}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{22}

Tabel 3.7 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{22}, +, \times$)

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{15}$	$\bar{18}$	$\bar{21}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{14}$	$\bar{17}$	$\bar{20}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{15}$	$\bar{20}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{18}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{16}$	$\bar{21}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{14}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{14}$	$\bar{21}$	$\bar{6}$	$\bar{13}$	$\bar{20}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{19}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{18}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{17}$	$\bar{2}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{18}$	$\bar{5}$	$\bar{14}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{19}$	$\bar{6}$	$\bar{15}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{20}$	$\bar{7}$	$\bar{16}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{17}$	$\bar{8}$	$\bar{21}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{16}$	$\bar{7}$	$\bar{20}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{15}$	$\bar{6}$	$\bar{19}$	$\bar{10}$
$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$
$\bar{15}$	$\bar{0}$	$\bar{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{16}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{17}$	$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{18}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{19}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{20}$
$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$
$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{19}$	$\bar{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{21}$	$\bar{16}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{18}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$
$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$
$\bar{19}$	$\bar{0}$	$\bar{19}$	$\bar{16}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{20}$	$\bar{17}$	$\bar{14}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{21}$	$\bar{18}$
$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$
$\bar{21}$	$\bar{0}$	$\bar{21}$	$\bar{20}$	$\bar{19}$	$\bar{18}$	$\bar{17}$	$\bar{16}$	$\bar{15}$	$\bar{14}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$

Tabel 3.7 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{22}, +, \times$)

\times	17	18	19	20	21
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	17	18	19	20	21
$\bar{2}$	12	14	16	18	20
$\bar{3}$	7	10	13	16	19
$\bar{4}$	2	6	10	14	18
$\bar{5}$	19	2	7	12	17
$\bar{6}$	14	20	4	10	16
$\bar{7}$	9	16	1	8	15
$\bar{8}$	4	12	20	6	14
$\bar{9}$	21	8	17	4	13
$\bar{10}$	16	4	14	2	12
$\bar{11}$	11	$\bar{0}$	11	$\bar{0}$	11
$\bar{12}$	6	18	8	20	10
$\bar{13}$	1	14	5	18	9
$\bar{14}$	18	10	2	16	8
$\bar{15}$	13	6	21	14	7
$\bar{16}$	8	2	18	12	6
$\bar{17}$	3	20	15	10	5
$\bar{18}$	20	16	12	8	4
$\bar{19}$	15	12	9	6	3
$\bar{20}$	10	8	6	4	2
$\bar{21}$	5	4	3	2	1

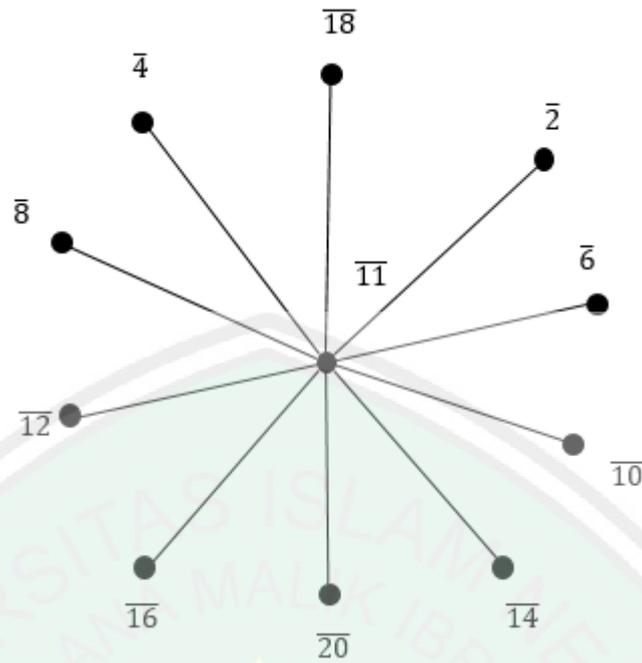
Berdasarkan Tabel 3.7 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{22} adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$. Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_{22} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan

tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{22} terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.8 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{22}, +, \times$)

\times	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$
$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$
$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$
$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$
$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$
$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$
$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.8 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}$ dan $\bar{20}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{22} ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Graf non-nilradical \mathbb{Z}_{22} , $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$

Berdasarkan Gambar 3.4, dapat dicari eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ dijabarkan sebagai berikut.

$$e(\bar{2}) = \max\{d(\bar{2}, \bar{4}), d(\bar{2}, \bar{6}), d(\bar{2}, \bar{8}), d(\bar{2}, \bar{10}), d(\bar{2}, \bar{11}), d(\bar{2}, \bar{12}), d(\bar{2}, \bar{14}), \\ d(\bar{2}, \bar{16}), d(\bar{2}, \bar{18}), d(\bar{2}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{4}) = \max\{d(\bar{4}, \bar{2}), d(\bar{4}, \bar{6}), d(\bar{4}, \bar{8}), d(\bar{4}, \bar{10}), d(\bar{4}, \bar{11}), d(\bar{4}, \bar{12}), d(\bar{4}, \bar{14}), \\ d(\bar{4}, \bar{16}), d(\bar{4}, \bar{18}), d(\bar{4}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{6}) = \max\{d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{4}), d(\bar{6}, \bar{8}), d(\bar{6}, \bar{10}), d(\bar{6}, \bar{11}), d(\bar{6}, \bar{12}), d(\bar{6}, \bar{14}), \\ d(\bar{6}, \bar{16}), d(\bar{6}, \bar{18}), d(\bar{6}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{8}) = \max\{d(\bar{8}, \bar{2}), d(\bar{8}, \bar{4}), d(\bar{8}, \bar{6}), d(\bar{8}, \bar{10}), d(\bar{8}, \bar{11}), d(\bar{8}, \bar{12}), d(\bar{8}, \bar{14}), \\ d(\bar{8}, \bar{16}), d(\bar{8}, \bar{18}), d(\bar{8}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{10}) = \max\{d(\bar{10}, \bar{2}), d(\bar{10}, \bar{4}), d(\bar{10}, \bar{6}), d(\bar{10}, \bar{8}), d(\bar{10}, \bar{11}), d(\bar{10}, \bar{12}), \\ d(\bar{10}, \bar{14}), d(\bar{10}, \bar{16}), d(\bar{10}, \bar{18}), d(\bar{10}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{11}) = \max\{d(\bar{11}, \bar{2}), d(\bar{11}, \bar{4}), d(\bar{11}, \bar{6}), d(\bar{11}, \bar{8}), d(\bar{11}, \bar{10}), d(\bar{11}, \bar{12}), \\ d(\bar{11}, \bar{14}), d(\bar{11}, \bar{16}), d(\bar{11}, \bar{18}), d(\bar{11}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(1), (1), (1), (1), (1), (1), (1), (1), (1), (1)\} = 1$$

$$e(\bar{12}) = \max\{d(\bar{12}, \bar{2}), d(\bar{12}, \bar{4}), d(\bar{12}, \bar{6}), d(\bar{12}, \bar{8}), d(\bar{12}, \bar{10}), d(\bar{12}, \bar{11}), \\ d(\bar{12}, \bar{14}), d(\bar{12}, \bar{16}), d(\bar{12}, \bar{18}), d(\bar{12}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{14}) = \max\{d(\bar{14}, \bar{2}), d(\bar{14}, \bar{4}), d(\bar{14}, \bar{6}), d(\bar{14}, \bar{8}), d(\bar{14}, \bar{10}), d(\bar{14}, \bar{11}), \\ d(\bar{14}, \bar{12}), d(\bar{14}, \bar{16}), d(\bar{14}, \bar{18}), d(\bar{14}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{16}) = \max\{d(\bar{16}, \bar{2}), d(\bar{16}, \bar{4}), d(\bar{16}, \bar{6}), d(\bar{16}, \bar{8}), d(\bar{16}, \bar{10}), d(\bar{16}, \bar{11}), \\ d(\bar{16}, \bar{12}), d(\bar{16}, \bar{14}), d(\bar{16}, \bar{18}), d(\bar{16}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{18}) = \max\{d(\bar{18}, \bar{2}), d(\bar{18}, \bar{4}), d(\bar{18}, \bar{6}), d(\bar{18}, \bar{8}), d(\bar{18}, \bar{10}), d(\bar{18}, \bar{11}), \\ d(\bar{18}, \bar{12}), d(\bar{18}, \bar{14}), d(\bar{18}, \bar{16}), d(\bar{18}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{20}) = \max\{d(\bar{20}, \bar{2}), d(\bar{20}, \bar{4}), d(\bar{20}, \bar{6}), d(\bar{20}, \bar{8}), d(\bar{20}, \bar{10}), d(\bar{20}, \bar{11}), \\ d(\bar{20}, \bar{12}), d(\bar{20}, \bar{14}), d(\bar{20}, \bar{16}), d(\bar{20}, \bar{18})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\bar{11})=1$ dan titik yang lainnya $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = e(\bar{10}) = e(\bar{12}) = e(\bar{14}) = e(\bar{16}) = e(\bar{18}) = e(\bar{20}) = 2$.

Setelah diketahui eksentrisitas masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$, dapat dihitung eksentrisitas total dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{22})) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{22}))} e(v) \\ &= e(\bar{2}) + e(\bar{4}) + e(\bar{6}) + e(\bar{8}) + e(\bar{10}) + e(\bar{11}) + e(\bar{12}) + e(\bar{14}) \\ &\quad + e(\bar{16}) + e(\bar{18}) + e(\bar{20}) \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= 21\end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 ($\Omega(\mathbb{Z}_{22})$) adalah 21.

Berdasarkan perhitungan eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p} maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut:

Tabel 3.9 Eksentrisitas Total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Gambar	$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}) / \Omega(\mathbb{Z}_6)$		5

Tabel 3.9 Eksentrisitas Total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Gambar	$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 5}) / \Omega(\mathbb{Z}_{10})$		9
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 7}) / \Omega(\mathbb{Z}_{14})$		13
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 11}) / \Omega(\mathbb{Z}_{22})$		21

Berdasarkan perhitungan eksentrisitas total akan dibuat dalam bentuk tabel untuk memudahkan dalam mencari pola, dengan mengelompokkan titik yang memiliki eksentrisitas dua ($e = 2$) dan titik yang memiliki eksentrisitas satu ($e = 1$) dihitung secara terpisah, sehingga rumus diubah menjadi

$$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = e(p) + \sum_{\substack{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) \\ v \neq p}} e(v)$$

Tabel 3.10 Perhitungan Total Eksentrisitas dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Perhitungan	$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}) / \Omega(\mathbb{Z}_6)$	$= e(\bar{3}) + e(\bar{2}) + e(\bar{4})$ $= 1 + 2 + 2$ $= 1 + 2(2)$	5
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 5}) / \Omega(\mathbb{Z}_{10})$	$= e(5) + e(\bar{2}) + e(\bar{4}) + e(\bar{6}) + e(\bar{8})$ $= 1 + 2 + 2 + 2 + 2$ $= 1 + 2(4)$	9
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 7}) / \Omega(\mathbb{Z}_{14})$	$= e(\bar{7}) + e(\bar{2}) + e(\bar{4}) + e(\bar{6}) + e(\bar{8}) +$ $e(\bar{10}) + e(\bar{12})$ $= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +$ $= 1 + 2(6)$	13
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 11}) / \Omega(\mathbb{Z}_{22})$	$= e(\bar{11}) + e(\bar{2}) + e(\bar{4}) + e(\bar{6}) + e(\bar{8}) +$ $e(\bar{10}) + e(\bar{12}) + e(\bar{14}) + e(\bar{16}) +$ $e(\bar{18}) + e(\bar{20})$ $= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +$ $+ 2$ $= 1 + 2(10)$	21

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh dugaan seperti di bawah ini:

$$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 2p - 1 \quad , p \geq 3, \quad p \text{ prima.}$$

Proposisi 1

$$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{2k, p: k = 1, 2, \dots, p - 1\}$$

Bukti:

Untuk setiap $k = 1, 2, \dots, p - 1$ berlaku

$$2k \cdot p = 2p \cdot k \equiv 0 \pmod{2p},$$

artinya $\{2k; k = 1, 2, \dots, p - 1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

dan berlaku

$$p \cdot 2 = 2p \equiv 0 \pmod{2p},$$

artinya $p \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

Dengan demikian $\{2k; k = 1, 2, \dots, p - 1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan $p \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

Selanjutnya akan dibuktikan semua unsur dari \mathbb{Z}_{2p} yang ganjil kecuali p bukan unsur pembagi nol.

Misalkan $l \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan l ganjil. Misalkan $l = 2k - 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $\text{fpb}(2k - 1, 2p) = 1$, maka dari Teorema 2.2, kongruensi berikut ini

$$(2k - 1) x \equiv 0 \pmod{2p}$$

memiliki satu solusi yaitu $x = 0$.

Dengan demikian semua unsur dari \mathbb{Z}_{2p} yang ganjil kecuali p bukan unsur pembagi nol.

Proposisi 2

Semua titik $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$, $v \neq p$ hanya terhubung langsung dengan p .

Bukti:

Misalkan $g \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan g genap. Misalkan $g = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $\text{fpb}(2k, 2p) = 2$, maka dari Teorema 2.2, kongruensi berikut ini

$$2k y \equiv 0 \pmod{2p}$$

memiliki dua solusi yaitu $y = 0$ dan $y = p$.

Dengan demikian semua titik yang genap hanya terhubung langsung dengan p .

Berdasarkan proposisi 1 dan 2 di atas dapat diperoleh p terhubung langsung dengan $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$, $v \neq p$. Oleh karena itu, p merupakan titik pusat, titik yang terhubung langsung dengan semua titik $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$, $v \neq p$. Titik p berderajat $p - 1$ sedangkan titik-titik $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$, $v \neq p$ masing-masing berderajat 1.

Proposisi 3

Untuk setiap $u \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ $u \neq p$, $e(u) = 2$.

Bukti:

Misalkan $v \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ $v \neq u$, $v \neq p$.

Karena p terhubung langsung dengan semua titik di $Z(\mathbb{Z}_{2p})$ kecuali dirinya sendiri dan $\text{deg}(u) = \text{deg}(v) = 1$, $\forall u, v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$ $u \neq v$. Karena u, v tidak terhubung langsung, maka $d(u, v) \geq 2$ dan karena terdapat lintasan $u - p - v$, maka $d(u, v) \leq 2$. Dengan demikian $d(u, v) = 2$. Karena $d(u, v) = 2$, $u \neq v$, maka eksentrisitas titik u dan v adalah dua artinya $e(u) = e(v) = 2$.

Proposisi 4

Eksentrisitas p adalah $e(p) = 1$.

Bukti:

Dari proposisi 2, p terhubung langsung dengan semua titik di $Z(\mathbb{Z}_{2p})$ kecuali dirinya sendiri, sehingga p memiliki derajat $p - 1$ artinya $\deg(p) = p - 1$.

1. Karena untuk setiap $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$ p, v terhubung langsung maka $e(p) = 1$.

Proposisi 5

Eksentrisitas total dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo $2p$ dengan $p \geq 3$ dan p bilangan prima adalah

$$\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 2p - 1, \quad p \geq 3, \quad p \text{ prima.}$$

Bukti:

Karena graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo $2p$ dengan $p \geq 3$ dan p bilangan prima mempunyai order $(p - 1)$, maka eksentrisitas yang dihasilkan berdasarkan pembuktian proposisi 3 dan 4 di atas adalah 1 dan 2, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} \xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) &= e(p) + \sum_{\substack{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) \\ v \neq p}} e(v) \\ &= 1 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{p-1} \\ &= 2(p - 1) + 1 \\ &= 2p - 2 + 1 \\ &= 2p - 1 \end{aligned}$$

3.2 Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *Non-nilradical* \mathbb{Z}_{2p}

Subbab ini membahas tentang rumus umum indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}$, dan \mathbb{Z}_{22} dengan $3 \leq p \leq 11$ dan p prima.

3.2.1 Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *Non-nilradical* \mathbb{Z}_6

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 adalah $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_6

Tabel 3.11 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_6, +, \times$)

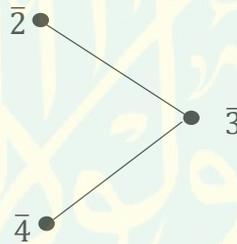
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.11 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_6 adalah $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Berdasarkan Teorema 2.1 didapatkan unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{2p} adalah *zero divisornya*. Sehingga unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_6 terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.12 Tabel Cayley $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$

\times	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.12 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}$, $\bar{3}$, dan $\bar{4}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_6 ditunjukkan pada Gambar 3.5.

**Gambar 3.5** Graf *non-nilradical* $\mathbb{Z}_6, \Omega(\mathbb{Z}_6)$

Berdasarkan Gambar 3.5 dapat ditentukan derajat masing-masing titik. Derajat titik $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ adalah banyaknya sisi yang terhubung langsung dari masing-masing titik pada $\Omega(\mathbb{Z}_6)$. Berikut adalah derajat titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$.

$$\deg(\bar{2}) = 1$$

$$\deg(\bar{3}) = 2$$

$$\deg(\bar{4}) = 1$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ mempunyai derajat terbanyak yaitu

$$\deg(\bar{3}) = 2 .$$

Berdasarkan Gambar 3.5, dapat ditentukan eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_6)$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ dijabarkan sebagai berikut.

$$e(\bar{2}) = \max\{d(\bar{2}, \bar{3}), d(\bar{2}, \bar{4})\}$$

$$= \max\{(1), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{3}) = \max\{d(\bar{3}, \bar{2}), d(\bar{3}, \bar{4})\}$$

$$= \max\{(1), (1)\} = 1$$

$$e(\bar{4}) = \max\{d(\bar{4}, \bar{3}), d(\bar{4}, \bar{2})\}$$

$$= \max\{(1), (2)\} = 2$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\bar{3})=1$ dan titik yang lainnya $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = 2$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas masing-masing titik pada $\Omega(\mathbb{Z}_6)$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik dari $\Omega(\mathbb{Z}_6)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi^c \Omega(\mathbb{Z}_6) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_6))} e(v) \deg(v) \\ &= (e(\bar{2}) \deg(\bar{2})) + (e(\bar{3}) \deg(\bar{3})) + (e(\bar{4}) \deg(\bar{4})) \\ &= (2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 6 ($\Omega(\mathbb{Z}_6)$) adalah 6.

3.2.2 Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{10}

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 adalah $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{10}

Tabel 3.13 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{10}, +, \times$)

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$										
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$								
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.13 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{10} adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

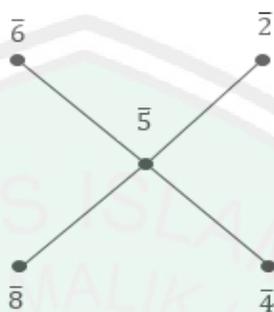
Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_{10} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{10} terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.14 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{10}, +, \times$)

\times	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor*

bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.14 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ dan $\bar{8}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{10} ditunjukkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Graf *non-nilradical* $\mathbb{Z}_{10}, \Omega(\mathbb{Z}_{10})$

Berdasarkan Gambar 3.6 dapat dicari derajat masing-masing titik. Derajat titik $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ adalah banyaknya sisi yang terhubung langsung dari masing-masing titik pada $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$. Berikut adalah derajat titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$.

$$\deg(\bar{2}) = 1$$

$$\deg(\bar{6}) = 1$$

$$\deg(\bar{4}) = 1$$

$$\deg(\bar{8}) = 1$$

$$\deg(\bar{5}) = 4$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ mempunyai derajat terbanyak yaitu

$$\deg(\bar{5}) = 4 .$$

Berdasarkan Gambar 3.6, dapat dicari eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} e(\bar{2}) &= \max\{d(\bar{2}, \bar{4}), d(\bar{2}, \bar{5}), d(\bar{2}, \bar{6}), d(\bar{2}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{4}) &= \max\{d(\bar{4}, \bar{2}), d(\bar{4}, \bar{5}), d(\bar{4}, \bar{6}), d(\bar{4}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{5}) &= \max\{d(\bar{5}, \bar{2}), d(\bar{5}, \bar{4}), d(\bar{5}, \bar{6}), d(\bar{5}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(1), (1), (1), (1)\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{6}) &= \max\{d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{4}), d(\bar{6}, \bar{5}), d(\bar{6}, \bar{8})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{8}) &= \max\{d(\bar{8}, \bar{2}), d(\bar{8}, \bar{4}), d(\bar{8}, \bar{5}), d(\bar{8}, \bar{6})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\bar{5})=1$ dan titik yang lainnya $e(\bar{2}) = e(\bar{4}) = e(\bar{6}) = e(\bar{8}) = 2$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{10})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi^c \Omega(\mathbb{Z}_{10}) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{10}))} e(v) \deg(v) \\ &= (e(\bar{2}) \deg(\bar{2})) + (e(\bar{4}) \deg(\bar{4})) + (e(\bar{5}) \deg(\bar{5})) + (e(\bar{6}) \deg(\bar{6})) \\ &\quad + (e(\bar{8}) \deg(\bar{8})) \\ &= (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot 4) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 10 ($\Omega(\mathbb{Z}_{10})$) adalah 12.

3.2.3 Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *NonNilradical* \mathbb{Z}_{14}

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 adalah $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{13}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{14}

Tabel 3.15 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{14}, +, \times$)

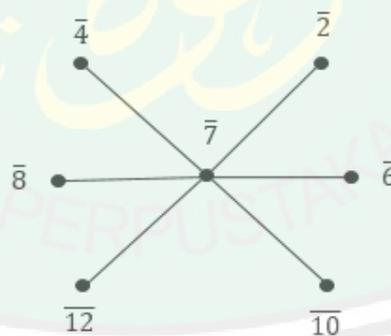
\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.15 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{14} adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$. Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_{14} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{12}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{14} terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.16 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{14}, +, \times$)

\times	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$
$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$
$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.16 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}$ dan $\bar{12}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{14} ditunjukkan pada Gambar 3.7.

**Gambar 3.7** Graf *non-nilradical* $\mathbb{Z}_{14}, \Omega(\mathbb{Z}_{14})$

Berdasarkan Gambar 3.7 dapat dicari derajat masing-masing titik. Derajat titik $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ adalah banyaknya sisi yang terhubung langsung dari masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$. Berikut adalah derajat titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$.

$$\deg(\bar{2}) = 1$$

$$\deg(\bar{8}) = 1$$

$$\deg(\bar{4}) = 1$$

$$\deg(\bar{10}) = 1$$

$$\deg(\bar{6}) = 1$$

$$\deg(\bar{12}) = 1$$

$$\deg(\bar{7}) = 6$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ mempunyai derajat terbanyak yaitu $\deg(\bar{7}) = 6$.

Berdasarkan Gambar 3.7, dapat dicari eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} e(\bar{2}) &= \max\{d(\bar{2}, \bar{4}), d(\bar{2}, \bar{6}), d(\bar{2}, \bar{7}), d(\bar{2}, \bar{8}), d(\bar{2}, \bar{10}), d(\bar{2}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{4}) &= \max\{d(\bar{4}, \bar{2}), d(\bar{4}, \bar{6}), d(\bar{4}, \bar{7}), d(\bar{4}, \bar{8}), d(\bar{4}, \bar{10}), d(\bar{4}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{6}) &= \max\{d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{4}), d(\bar{6}, \bar{7}), d(\bar{6}, \bar{8}), d(\bar{6}, \bar{10}), d(\bar{6}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (1), (2), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{7}) &= \max\{d(\bar{7}, \bar{2}), d(\bar{7}, \bar{4}), d(\bar{7}, \bar{6}), d(\bar{7}, \bar{8}), d(\bar{7}, \bar{10}), d(\bar{7}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(1), (1), (1), (1), (1), (1)\} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{8}) &= \max\{d(\bar{8}, \bar{2}), d(\bar{8}, \bar{4}), d(\bar{8}, \bar{6}), d(\bar{8}, \bar{7}), d(\bar{8}, \bar{10}), d(\bar{8}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\bar{10}) &= \max\{d(\bar{10}, \bar{2}), d(\bar{10}, \bar{4}), d(\bar{10}, \bar{6}), d(\bar{10}, \bar{7}), d(\bar{10}, \bar{8}), d(\bar{10}, \bar{12})\} \\ &= \max\{(2), (2), (2), (1), (2), (2)\} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(\overline{12}) &= \max\{d(\overline{12}, \overline{2}), d(\overline{12}, \overline{4}), d(\overline{12}, \overline{6}), d(\overline{12}, \overline{7}), d(\overline{12}, \overline{8}), d(\overline{12}, \overline{10})\} \\
&= \max\{(2), (2), (2), (1), (2), (2)\} = 2
\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\overline{7})=1$ dan titik yang lainnya $e(\overline{2}) = e(\overline{4}) = e(\overline{6}) = e(\overline{8}) = e(\overline{10}) = e(\overline{12}) = 2$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\xi^c \Omega(\mathbb{Z}_{14}) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{14}))} e(v) \deg(v) \\
&= (e(\overline{2}) \deg(\overline{2})) + (e(\overline{4}) \deg(\overline{4})) + (e(\overline{6}) \deg(\overline{6})) + (e(\overline{7}) \deg(\overline{7})) \\
&\quad + (e(\overline{8}) \deg(\overline{8})) + (e(\overline{10}) \deg(\overline{10})) + (e(\overline{12}) \deg(\overline{12})) \\
&= (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot 6) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) \\
&= 18
\end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 14 ($\Omega(\mathbb{Z}_{14})$) adalah 18.

3.2.4 Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{22}

Himpunan anggota dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 adalah $\mathbb{Z}_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}\}$. Akan ditentukan anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{22}

Tabel 3.17 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{22}, +, \times$)

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{15}$	$\bar{18}$	$\bar{21}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{14}$	$\bar{17}$	$\bar{20}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{15}$	$\bar{20}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{18}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{16}$	$\bar{21}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{14}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{14}$	$\bar{21}$	$\bar{6}$	$\bar{13}$	$\bar{20}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{19}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{18}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{17}$	$\bar{2}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{18}$	$\bar{5}$	$\bar{14}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{19}$	$\bar{6}$	$\bar{15}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{20}$	$\bar{7}$	$\bar{16}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{17}$	$\bar{8}$	$\bar{21}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{16}$	$\bar{7}$	$\bar{20}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{15}$	$\bar{6}$	$\bar{19}$	$\bar{10}$
$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$
$\bar{15}$	$\bar{0}$	$\bar{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{16}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{17}$	$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{18}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{19}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{20}$
$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$
$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{19}$	$\bar{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{21}$	$\bar{16}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{18}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$
$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$
$\bar{19}$	$\bar{0}$	$\bar{19}$	$\bar{16}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{20}$	$\bar{17}$	$\bar{14}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{21}$	$\bar{18}$
$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$
$\bar{21}$	$\bar{0}$	$\bar{21}$	$\bar{20}$	$\bar{19}$	$\bar{18}$	$\bar{17}$	$\bar{16}$	$\bar{15}$	$\bar{14}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$

Tabel 3.17 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{22}, +, \times$)

\times	17	18	19	20	21
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	17	18	19	20	21
$\bar{2}$	12	14	16	18	20
$\bar{3}$	7	10	13	16	19
$\bar{4}$	2	6	10	14	18
$\bar{5}$	19	2	7	12	17
$\bar{6}$	14	20	4	10	16
$\bar{7}$	9	16	1	8	15
$\bar{8}$	4	12	20	6	14
$\bar{9}$	21	8	17	4	13
$\bar{10}$	16	4	14	2	12
$\bar{11}$	11	$\bar{0}$	11	$\bar{0}$	11
$\bar{12}$	6	18	8	20	10
$\bar{13}$	1	14	5	18	9
$\bar{14}$	18	10	2	16	8
$\bar{15}$	13	6	21	14	7
$\bar{16}$	8	2	18	12	6
$\bar{17}$	3	20	15	10	5
$\bar{18}$	20	16	12	8	4
$\bar{19}$	15	12	9	6	3
$\bar{20}$	10	8	6	4	2
$\bar{21}$	5	4	3	2	1

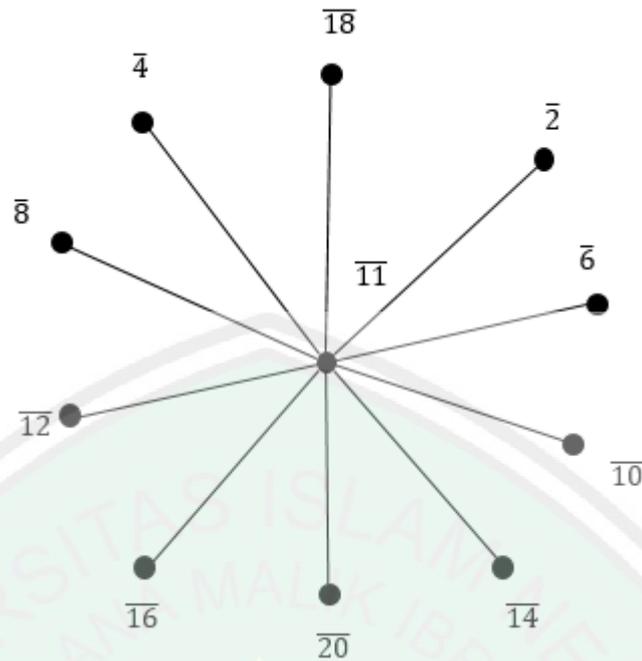
Berdasarkan Tabel 3.17 diketahui anggota *zero divisor* \mathbb{Z}_{22} adalah $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$. Selanjutnya akan ditentukan unsur *non-nilpotent zero divisor*. Unsur *non-nilpotent zero divisor* dari $\mathbb{Z}_{22} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}, \bar{20}\}$. Setiap unsur *non-nilpotent zero divisor* akan terhubung langsung jika hasil perkaliannya adalah $\bar{0}$. Berikut akan ditunjukkan

tabel cayley unsur *non-nilpotent zero divisor* dari \mathbb{Z}_{22} terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.18 Tabel Cayley ($\mathbb{Z}_{22}, +, \times$)

\times	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$
$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$
$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$
$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$
$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$
$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$
$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Berdasarkan Definisi 2.1 titik yang berbeda pada graf *non-nilradical* akan terhubung langsung jika hasil perkalian dari unsur *non-nilpotent zero divisor* bernilai $\bar{0}$. Dari Tabel 3.18 diketahui perkalian titik berbeda (unsur *non-nilpotent zero divisor*) yang menghasilkan nilai $\bar{0}$ adalah titik $\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{14}, \bar{16}, \bar{18}$ dan $\bar{20}$. Oleh karena itu, graf *non-nilradical* dari gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{22} ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.8 Graf *non-nilradical* \mathbb{Z}_{22} , $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$

Berdasarkan Gambar 3.8 dapat dicari derajat masing-masing titik. Derajat titik $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ adalah banyaknya sisi yang terhubung langsung dari masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$. Berikut adalah derajat titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$.

$$\begin{aligned} \deg(\bar{2}) &= 1 & \deg(\bar{12}) &= 1 \\ \deg(\bar{4}) &= 1 & \deg(\bar{14}) &= 1 \\ \deg(\bar{6}) &= 1 & \deg(\bar{16}) &= 1 \\ \deg(\bar{8}) &= 1 & \deg(\bar{18}) &= 1 \\ \deg(\bar{10}) &= 1 & \deg(\bar{20}) &= 1 \\ \deg(\bar{11}) &= 10 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ mempunyai derajat terbanyak yaitu $\deg(\bar{11}) = 10$.

Berdasarkan Gambar 3.8, dapat dicari eksentrisitas titik u yang dinotasikan dengan $e(u)$ dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ merupakan jarak terjauh dari titik u ke

sebarang titik di $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$. Eksentrisitas titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ dijabarkan sebagai berikut.

$$e(\bar{2}) = \max\{d(\bar{2}, \bar{4}), d(\bar{2}, \bar{6}), d(\bar{2}, \bar{8}), d(\bar{2}, \bar{10}), d(\bar{2}, \bar{11}), d(\bar{2}, \bar{12}), d(\bar{2}, \bar{14}), \\ d(\bar{2}, \bar{16}), d(\bar{2}, \bar{18}), d(\bar{2}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{4}) = \max\{d(\bar{4}, \bar{2}), d(\bar{4}, \bar{6}), d(\bar{4}, \bar{8}), d(\bar{4}, \bar{10}), d(\bar{4}, \bar{11}), d(\bar{4}, \bar{12}), d(\bar{4}, \bar{14}), \\ d(\bar{4}, \bar{16}), d(\bar{4}, \bar{18}), d(\bar{4}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{6}) = \max\{d(\bar{6}, \bar{2}), d(\bar{6}, \bar{4}), d(\bar{6}, \bar{8}), d(\bar{6}, \bar{10}), d(\bar{6}, \bar{11}), d(\bar{6}, \bar{12}), d(\bar{6}, \bar{14}), \\ d(\bar{6}, \bar{16}), d(\bar{6}, \bar{18}), d(\bar{6}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{8}) = \max\{d(\bar{8}, \bar{2}), d(\bar{8}, \bar{4}), d(\bar{8}, \bar{6}), d(\bar{8}, \bar{10}), d(\bar{8}, \bar{11}), d(\bar{8}, \bar{12}), d(\bar{8}, \bar{14}), \\ d(\bar{8}, \bar{16}), d(\bar{8}, \bar{18}), d(\bar{8}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{10}) = \max\{d(\bar{10}, \bar{2}), d(\bar{10}, \bar{4}), d(\bar{10}, \bar{6}), d(\bar{10}, \bar{8}), d(\bar{10}, \bar{11}), d(\bar{10}, \bar{12}), \\ d(\bar{10}, \bar{14}), d(\bar{10}, \bar{16}), d(\bar{10}, \bar{18}), d(\bar{10}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\bar{11}) = \max\{d(\bar{11}, \bar{2}), d(\bar{11}, \bar{4}), d(\bar{11}, \bar{6}), d(\bar{11}, \bar{8}), d(\bar{11}, \bar{10}), d(\bar{11}, \bar{12}), \\ d(\bar{11}, \bar{14}), d(\bar{11}, \bar{16}), d(\bar{11}, \bar{18}), d(\bar{11}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(1), (1), (1), (1), (1), (1), (1), (1), (1), (1)\} = 1$$

$$e(\bar{12}) = \max\{d(\bar{12}, \bar{2}), d(\bar{12}, \bar{4}), d(\bar{12}, \bar{6}), d(\bar{12}, \bar{8}), d(\bar{12}, \bar{10}), d(\bar{12}, \bar{11}), \\ d(\bar{12}, \bar{14}), d(\bar{12}, \bar{16}), d(\bar{12}, \bar{18}), d(\bar{12}, \bar{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\overline{14}) = \max\{d(\overline{14}, \overline{2}), d(\overline{14}, \overline{4}), d(\overline{14}, \overline{6}), d(\overline{14}, \overline{8}), d(\overline{14}, \overline{10}), d(\overline{14}, \overline{11}), \\ d(\overline{14}, \overline{12}), d(\overline{14}, \overline{16}), d(\overline{14}, \overline{18}), d(\overline{14}, \overline{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\overline{16}) = \max\{d(\overline{16}, \overline{2}), d(\overline{16}, \overline{4}), d(\overline{16}, \overline{6}), d(\overline{16}, \overline{8}), d(\overline{16}, \overline{10}), d(\overline{16}, \overline{11}), \\ d(\overline{16}, \overline{12}), d(\overline{16}, \overline{14}), d(\overline{16}, \overline{18}), d(\overline{16}, \overline{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\overline{18}) = \max\{d(\overline{18}, \overline{2}), d(\overline{18}, \overline{4}), d(\overline{18}, \overline{6}), d(\overline{18}, \overline{8}), d(\overline{18}, \overline{10}), d(\overline{18}, \overline{11}), \\ d(\overline{18}, \overline{12}), d(\overline{18}, \overline{14}), d(\overline{18}, \overline{16}), d(\overline{18}, \overline{20})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

$$e(\overline{20}) = \max\{d(\overline{20}, \overline{2}), d(\overline{20}, \overline{4}), d(\overline{20}, \overline{6}), d(\overline{20}, \overline{8}), d(\overline{20}, \overline{10}), d(\overline{20}, \overline{11}), \\ d(\overline{20}, \overline{12}), d(\overline{20}, \overline{14}), d(\overline{20}, \overline{16}), d(\overline{20}, \overline{18})\}$$

$$= \max\{(2), (2), (2), (2), (2), (1), (2), (2), (2), (2)\} = 2$$

Dapat disimpulkan bahwa titik pusat dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ mempunyai eksentrisitas titik paling sedikit yaitu $e(\overline{11})=1$ dan titik yang lainnya $e(\overline{2}) = e(\overline{4}) = e(\overline{6}) = e(\overline{8}) = e(\overline{10}) = e(\overline{12}) = e(\overline{14}) = e(\overline{16}) = e(\overline{18}) = e(\overline{20}) = 2$.

Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas masing-masing titik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$, dapat dihitung indeks konektivitas eksentrik dari $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{22})) &= \sum_{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{22}))} e(v) \deg(v) \\ &= (e(\overline{2})\deg(\overline{2})) + (e(\overline{4})\deg(\overline{4})) + (e(\overline{6})\deg(\overline{6})) + (e(\overline{8})\deg(\overline{8})) \\ &\quad + (e(\overline{10})\deg(\overline{10})) + (e(\overline{11})\deg(\overline{11})) + (e(\overline{12})\deg(\overline{12})) \\ &\quad + (e(\overline{14})\deg(\overline{14})) + (e(\overline{16})\deg(\overline{16})) + (e(\overline{18})\deg(\overline{18})) \\ &\quad + (e(\overline{20})\deg(\overline{20})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2 \cdot 1) + (1 \cdot 10) + (2 \cdot 1) \\
&\quad + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) \\
&= 30
\end{aligned}$$

Jadi dapat diketahui bahwa indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo 22 ($\Omega(\mathbb{Z}_{22})$) adalah 30.

Berdasarkan perhitungan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p} maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut

Tabel 3.19 Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Gambar	$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}) / \Omega(\mathbb{Z}_6)$		6
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 5}) / \Omega(\mathbb{Z}_{10})$		12

Tabel 3.19 Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Gambar	$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 7}) / \Omega(\mathbb{Z}_{14})$		18
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 11}) / \Omega(\mathbb{Z}_{22})$		30

Berdasarkan perhitungan indeks konektivitas eksentrik akan dibuat dalam bentuk tabel untuk memudahkan dalam mencari pola, dengan mengelompokkan titik yang memiliki eksentrisitas dua ($e = 2$) dan titik yang memiliki eksentrisitas satu ($e = 1$) serta titik yang memiliki derajat satu dan titik yang memiliki derajat lebih dari satu dihitung secara terpisah, sehingga rumus diubah menjadi

$$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = e(p) \deg(p) + \sum_{\substack{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) \\ v \neq p}} e(v) \deg(v)$$

Tabel 3.20 Perhitungan Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Gambar	$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 3}) / \Omega(\mathbb{Z}_6)$	$= (e(\bar{3})\deg(\bar{3})) + (e(\bar{2})\deg(\bar{2})) +$ $(e(\bar{4})\deg(\bar{4}))$ $= (1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ $= 2 + 2 + 2$ $= 2 + 2(2)$	6
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 5}) / \Omega(\mathbb{Z}_{10})$	$= (e(\bar{5})\deg(\bar{5})) + (e(\bar{2})\deg(\bar{2})) +$ $(e(\bar{4})\deg(\bar{4})) + (e(\bar{6})\deg(\bar{6})) +$ $(e(\bar{8})\deg(\bar{8}))$ $= (1 \cdot 4) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ $= 4 + 2 + 2 + 2 + 2$ $= 4 + 2(4)$	12

Tabel 3.20 Perhitungan Indeks Konektivitas Eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p}

$\Omega(\mathbb{Z}_{2p})$	Gambar	$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 7}) /$ $\Omega(\mathbb{Z}_{14})$	$= (e(\bar{7})\text{deg}(\bar{7})) + (e(\bar{2})\text{deg}(\bar{2})) +$ $(e(\bar{4})\text{deg}(\bar{4})) + (e(\bar{6})\text{deg}(\bar{6})) +$ $(e(\bar{8})\text{deg}(\bar{8})) + (e(\bar{10})\text{deg}(\bar{10}))$ $(e(\bar{12})\text{deg}(\bar{12}))$ $= (1 \cdot 6) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) +$ $(2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ $= 6 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ $= 6 + 2(6)$	18
$\Omega(\mathbb{Z}_{2 \cdot 11}) /$ $\Omega(\mathbb{Z}_{22})$	$= (e(\bar{11})\text{deg}(\bar{11})) + (e(\bar{2})\text{deg}(\bar{2})) +$ $(e(\bar{4})\text{deg}(\bar{4})) + (e(\bar{6})\text{deg}(\bar{6})) +$ $(e(\bar{8})\text{deg}(\bar{8})) + (e(\bar{10})\text{deg}(\bar{10})) +$ $(e(\bar{12})\text{deg}(\bar{12})) + (e(\bar{14})\text{deg}(\bar{14})) +$ $(e(\bar{18})\text{deg}(\bar{8})) + (e(\bar{20})\text{deg}(\bar{20})) +$ $= (1 \cdot 10) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ $+ (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (2 \cdot 1)$ $+ (2 \cdot 1)$ $= 10 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ $= 10 + 2(10)$	30

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh dugaan seperti di bawah ini:

$$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 3(p - 1) \quad , p \geq 3, \quad p \text{ prima.}$$

Proposisi 6

$$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{2k, p: k = 1, 2, \dots, p - 1\}$$

Bukti:

Untuk setiap $k = 1, 2, \dots, p - 1$ berlaku

$$2k \cdot p = 2p \cdot k \equiv 0 \pmod{2p},$$

artinya $\{2k; k = 1, 2, \dots, p - 1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

dan berlaku

$$p \cdot 2 = 2p \equiv 0 \pmod{2p},$$

artinya $p \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

Dengan demikian $\{2k; k = 1, 2, \dots, p - 1\} \subseteq Z(\mathbb{Z}_{2p})$ dan $p \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$.

Selanjutnya akan dibuktikan semua unsur dari \mathbb{Z}_{2p} yang ganjil kecuali p bukan unsur pembagi nol.

Misalkan $l \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan l ganjil. Misalkan $l = 2k - 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $\text{fpb}(2k - 1, 2p) = 1$, maka dari Teorema 2.2, kongruensi berikut ini

$$(2k - 1)x \equiv 0 \pmod{2p}$$

memiliki satu solusi yaitu $x = 0$.

Dengan demikian semua unsur dari \mathbb{Z}_{2p} yang ganjil kecuali p bukan unsur pembagi nol.

Proposisi 7

Semua titik $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$, $v \neq p$ hanya terhubung langsung dengan p .

Bukti:

Misalkan $g \in \mathbb{Z}_{2p}$ dan g genap. Misalkan $g = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

Karena $\text{fpb}(2k, 2p) = 2$, maka dari Teorema 2.2, kongruensi berikut ini

$$2k y \equiv 0 \pmod{2p}$$

memiliki dua solusi yaitu $y = 0$ dan $y = p$.

Dengan demikian semua titik yang genap hanya terhubung langsung dengan p .

Berdasarkan proposisi 6 dan 7 di atas dapat diperoleh p terhubung langsung dengan $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})), v \neq p$. Oleh karena itu, p merupakan titik pusat, titik yang terhubung langsung dengan semua titik $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})), v \neq p$. Titik pusat p berderajat $p - 1$ sedangkan titik-titik $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})), v \neq p$ masing-masing berderajat 1.

Proposisi 8

Untuk setiap $u \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ $u \neq p$, $e(u) = 2$.

Bukti:

Misalkan $v \in Z(\mathbb{Z}_{2p})$ $v \neq u, v \neq p$.

Karena p terhubung langsung dengan semua titik di $Z(\mathbb{Z}_{2p})$ kecuali dirinya sendiri dan $\text{deg}(u) = \text{deg}(v) = 1, \forall u, v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$ $u \neq v$. Karena u, v tidak terhubung langsung, maka $d(u, v) \geq 2$ dan karena terdapat lintasan $u - p - v$, maka $d(u, v) \leq 2$. Dengan demikian $d(u, v) = 2$. Karena $d(u, v) = 2$, $u \neq v$, maka eksentrisitas titik u dan v adalah dua artinya $e(u) = e(v) = 2$.

Proposisi 9

Eksentrisitas p adalah $e(p) = 1$.

Bukti:

Dari proposisi 8, p terhubung langsung dengan semua titik di $Z(\mathbb{Z}_{2p})$ kecuali dirinya sendiri, sehingga p memiliki derajat $p - 1$ artinya $\deg(p) = p - 1$.
 1. Karena untuk setiap $v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p}))$ p, v terhubung langsung maka $e(p) = 1$.

Proposisi 10

Indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo $2p$ dengan $p \geq 3$ dan p bilangan prima adalah

$$\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 3(p - 1), \quad p \geq 3, \quad p \text{ prima.}$$

Bukti:

Karena graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan modulo $2p$, $p \geq 3$ dan p bilangan prima yang mempunyai order $(p - 1)$ dengan titik pusat p , maka berdasarkan pembuktian proposisi 8 dan 9 di atas titik yang memiliki $\deg = 1$ memiliki $e = 2$ dan titik yang memiliki $\deg \neq 1$ memiliki $e = 1$, sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} \xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) &= e(p) \deg(p) + \sum_{\substack{v \in V(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) \\ v \neq p}} e(v) \deg(v) \\ &= 1 \times (p - 1) + \underbrace{(2 \times 1) + (2 \times 1) + \dots + (2 \times 1)}_{p-1} \\ &= 2(p - 1) + p - 1 \\ &= 2p - 2 + p - 1 \\ &= 3(p - 1) \end{aligned}$$

3.3 Keterkaitan Antar Disiplin Ilmu

Sebagai umat Islam kita harus menyadari bahwa dasar-dasar filosofi untuk mengembangkan ilmu dan teknologi dapat dikaji dan digali dalam Al-Quran. Sebagaimana firman Allah di dalam Al-Quran surat Al-Mulk ayat 19 yang artinya:

“Tidakkah mereka memperhatikan burung-burung yang mengembangkan dan mengatupkan sayapnya di atas mereka? Tidak ada yang menahannya (di udara) selain Yang Maha Pengasih. Sungguh, Dia Maha Melihat segala sesuatu.”

Kata *Shaffat* adalah bentuk jamak dari kata *shaffah*. Kata tersebut diambil dari kata *Shaff* yang pada mulanya digunakan untuk menggambarkan sekian banyak hal yang berdekatan tempat-tempatnya. Yang dimaksud di sini adalah burung yang mengembangkan kedua sayapnya, karena ketika mengembangkannya akan terlihat bulu-bulu sayap burung bagaikan shaf-shaf yang berdekatan satu dengan yang lain. Kata *yaqbidhna* diambil dari kata *al-qabdh* yang antara lain berarti *menahan* atau lawan dari *ash-Shaff* yang disebut sebelumnya. Burung-burung mengatup-atupkan sayap untuk mempercepat laju gerakannya (Shihab, 2003).

Dalam Tafsir Al-Muntakhab dijelaskan bahwa terbangnya burung adalah suatu keajaiban yang baru diketahui setelah ilmu aeronautika dan teori aerodinamika berkembang. Yang mengagumkan adalah apabila seekor burung dapat terbang di udara tanpa menggerakkan kedua sayapnya. Ilmu pengetahuan membuktikan bahwa burung-burung yang terbang tanpa menggerakkan kedua sayapnya itu sebenarnya terbang di atas aliran-aliran udara yang muncul, baik

karena benturan udara dengan segala sesuatu yang menghalanginya atau karena tingginya tekanan udara panas (Shihab, 2003).

Berdasarkan tafsir tersebut dapat dilihat bahwa kejadian di alam ini merupakan bentuk kebesaran Allah yang dapat kita pelajari., seperti contoh manusia mampu menciptakan pesawat terbang. Namun dalam pengaplikasiannya manusia tidak dapat langsung menerapkan ilmu matematika. Manusia membutuhkan konsep bidang ilmu lain yang kemudian dikaji menggunakan ilmu matematika. Salah satunya dalam penelitian S. Gupta , M.Singh dan A.K. Madan (2002) yang menunjukkan bahwa indeks konektivitas eksentrik digunakan dalam menghitung prediksi keakuratan obat anti peradangan. Dalam bidang farmasi banyak hal yang dapat diteliti, salah satunya yaitu keefektifan obat. Dalam bidang farmasi banyak terdapat obat-obat dengan fungsi yang sama akan tetapi dengan keefektifan yang berbeda. Sehingga salah satu bentuk aplikasi indeks topologi dalam bidang ini adalah untuk memprediksi keakuratan atau keefektifan obat-obatan. Hal tersebut merupakan bentuk pengaplikasian suatu ilmu pada bidang ilmu lain.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang ada, maka dapat diambil kesimpulan rumus umum eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan sebagai berikut:

Eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan \mathbb{Z}_{2p} dengan $p \geq 3$, p prima adalah

1. $\xi(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 2p - 1$.
2. $\xi^c(\Omega(\mathbb{Z}_{2p})) = 3(p - 1)$.

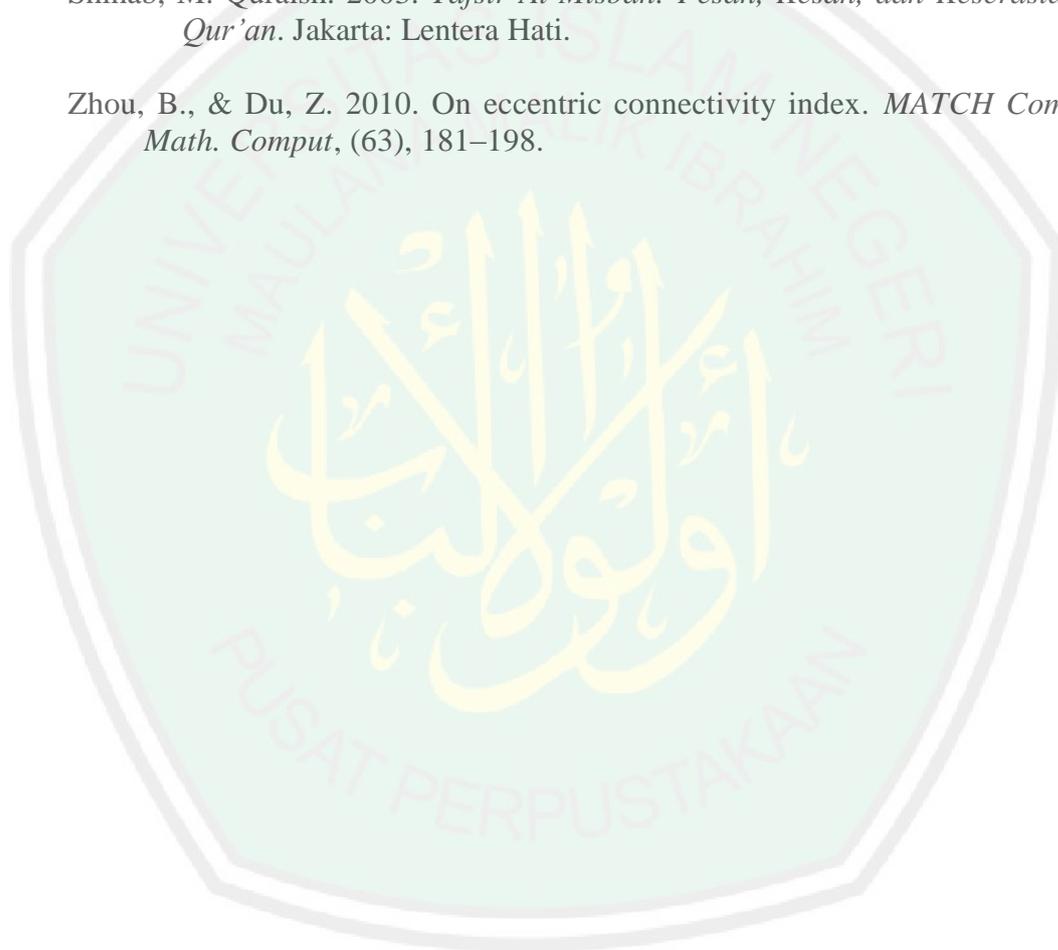
4.2 Saran

Penelitian ini membahas eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik dari graf *non-nilradical* gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Diharapkan untuk penelitian selanjutnya membahas tentang eksentrisitas total dan indeks konektivitas eksentrik pada graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.
- Al-Maraghi, Ahmad Mustafa. 1987. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi, Juz VI*. Semarang: Toha Putra.
- Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi, Jilid 6*. Penerjemah, Ahmad Khotib; Editor, Mukhlis B. Mukti. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Ath-Thabari, Abu Ja'far Muhammad bin Jarir. 2008. *Tafsir Ath-Thabari, Jilid 9*. Penerjemah, Akhmad affandi, Benny Sarbeni; Editor, Besus Hidayat Amin, M. Sulton Akbar. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Bishop, Abigail, dkk. 2008. The Nilradical and Non-Nilradical Graphs of Commutative Rings. *International Journal of Algebra*, 2, 981-994.
- Chandra, Shalini, dkk. 2017. Some properties of the nilradical and non-nilradical graphs over finite commutative ring Z_n . *Journal "Algebra and Discrete Mathematics"*. Number 2, pp. 181–190.
- Chartrand, G., Lesniak, L, dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. Boca Raton: CRC Press.
- De, N., Pal, A., & Nayeem, S. M. A. 2015. Total eccentricity index of some composite graphs. *Malaya J. Mat*, 3(4), 523–529.
- Dummit, D.S dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra Third Edition*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- Došlic, T., & Saheli, M. 2014. Eccentric connectivity index of composite graphs. *Util. Math*, 95, 3–22.
- Fathalikhani, K., Faramarzi, H., & Yousefi-Azari, H. (2014). Total eccentricity of some graph operations. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 45, 125–131.
- Gilbert, L dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford: Nelson Education. Ltd.
- Irawan, Wahyu Henky, dkk. 2014. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang. UIN-MALIKI PRESS.
- Kandasamy, W. B. Vasantha dan Smarandache, Florentin. 2012. *Dual Numbers*. Columbus. Zip Publishing

- Kusmayadi, T. A., & Sudiby, N. A. (2011). Eccentric Digraph of Cocktail Party Graph and Hypercube. *IPTEK The Journal for Technology and Science*, 22(4).
- Puspitasari, Lila Aryani. 2019. *Total Eccentricity and Eccentric Connectivity Index of Identity Graph of Commutative Ring with Unity*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.
- Sharma, V., Goswami, R., & Madan, A. K. (1997). Eccentric Connectivity Index: A Novel Highly Discriminating Topological Descriptor for Structure–Property and Structure–Activity Studies. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 37(2), 273–282.
- Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Zhou, B., & Du, Z. 2010. On eccentric connectivity index. *MATCH Commun. Math. Comput.*, (63), 181–198.



RIWAYAT HIDUP



Lutfiatul Qumah, biasa dipanggil Qumah, lahir di Malang pada tanggal 21 Desember 1997. Anak kedua dari dua bersaudara yang dilahirkan dari pasangan Bapak Moch. Yusuf dan Ibu Machmudah.

Pendidikan Sekolah Dasar (SD) ditempuh di Madrasah Ibtidaiyah (MI) Ar-Rohmah lulus tahun 2010. Setelah itu melanjutkan sekolah di Madrasah Tsanawiyah (MTs) Negeri Kota Batu lulus tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di Madrasah Aliyah (MA) Negeri Kota Batu lulus tahun 2016. Kemudian pada tahun 2016 melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menempuh pendidikan, ia mengikuti beberapa organisasi, diantaranya organisasi mahasiswa ekstra kampus IPNU IPPNU UIN Malang, berperan aktif dalam bidang keagamaan Ikatan Mahasiswa MAN Batu (IMMB) pada tahun 2017-2018. Selain itu ia juga aktif di sekolah tahfidz Hai'ah Tahfidz Al-Qur'an.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lutfiatul Qumah
NIM : 16610004
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Eksentrisitas Total dan Indeks Konektivitas Eksentrik dari Graf *Non-nilradical* Gelanggang Komutatif dengan Unsur Kesatuan.
Pembimbing I : Muhammad Khudzaifah, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	11 November 2019	Konsultasi Bab I, Bab II & Bab III	1.
2	20 November 2019	Melanjutkan Pembuktian	2.
3	31 Januari 2020	Perbaikan Ayat	3.
4	31 Januari 2020	Perbaikan Pembuktian	4.
5	03 Februari 2019	Perbaikan Bab II	5.
6	10 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan	6.
7	13 Maret 2020	Konsultasi Pembuktian	7.
8	30 Maret 2020	Revisi Bab III (Bimbingan Online)	8.
9	29 April 2020	Revisi Bab I,II dan III (Bimbingan Online)	9.
10	1 Mei 2020	ACC untuk disidangkan	10.

Malang, 8 Juni 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

